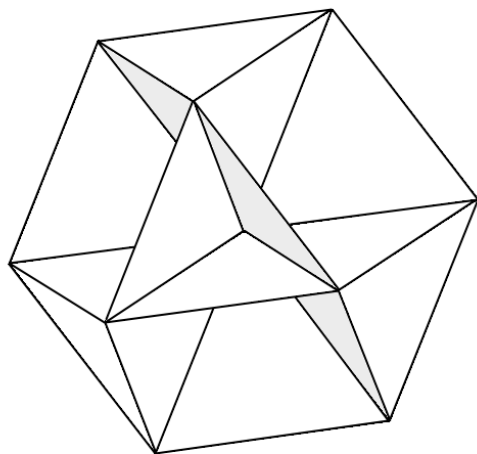


ГИПЕРКОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА В ГЕОМЕТРИИ И ФИЗИКЕ

№ 1 (5), Vol 3 (2006)

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

Основан в 2003 г.



www.polynumbers.ru

hypercomplex@mail.ru

Оглавление

Гарасько Г. И. О Мировой функции и связи между геометриями	3
Гарасько Г. И., Павлов Д. Г. Конструирование псевдоримановой геометрии на основе геометрии Бервальда-Моора	18
Зарипов Р. Г. Отношение одновременности в финслеровом пространстве-времени ..	27
Соловей Л. Г. Обобщенная проблема Гурвица для произведения квазиунитарных матриц, суммируемость и другие свойства квазиунитарных структур	47
Людковский С. В. Преобразование Лапласа над алгебрами Кэли-Диксона	67
Панчелюга В. А., Шноль С. Э. Экспериментальное исследование влияния быстро вращающегося массивного тела на форму функций распределения амплитуд флуктуаций скорости α -распада	100
Панчелюга В. А., Коломбет В. А., Панчелюга М. С., Шноль С. Э. Исследование эффекта местного времени на малых пространственно-временных масштабах	114
Приложение	120
Баэз Джон С. Октонионы	120
Информация для авторов	177

О МИРОВОЙ ФУНКЦИИ И СВЯЗИ МЕЖДУ ГЕОМЕТРИЯМИ

Г. И. Гарасько

Всероссийский электротехнический институт, Москва
gri9z@mail.ru

В работе показано, что Мировая функция может рассматриваться как связующий элемент между качественно различными геометриями с одной и той же конгруенцией мировых линий (геодезических). Если пространство, где определена Мировая функция, является поличисловым, то гипотеза аналитичности векторного поля обобщенных скоростей мировых линий приводит к сильным ограничениям на вид Мировой функции. Основной результат: пространство Минковского и пространство поличисел H_4 соответствуют одному и тому же физическому Миру.

Ключевые слова: конформная геометрия, поличисловое пространство, пространство Минковского.

Введение

Идея о том, что всем происходящим в физическом Мире управляет всего одна скалярная функция возникла давно и вряд ли может быть приписана какому-то одному ученому или даже группе ученых. Именно такую функцию и предлагается называть Мировая функция. До сих пор нет единого определения, что же такое Мировая функция. Так, например, Герман Вейль [1] употребляет термин "Мировая функция" при изложении теории Ми (полевая теория), где предлагается в качестве Мировой функции выбирать лагранжиан поля, то есть плотность функции Лагранжа, однако в теории поля стал общепринятым термин "лагранжиан".

Применение аналитических функций комплексной переменной для решения различных задач гидродинамики, теории упругости и электростатики позволяет в качестве Мировой функции выбрать действительную часть комплексного потенциала. Именно желание обобщить такой подход на пространства большей размерности привело нас к написанию данной работы. Можно было бы вместо термина "Мировая функция" использовать термин "вещественная часть гиперкомплексного потенциала", но многие построения данной работы применимы к пространствам, которые не являются гиперкомплексными.

В данной работе не затрагиваются вопросы полевых уравнений и теории поля. Оставаясь в рамках классической механики и финслеровой геометрии, наблюдателю вполне достаточно знать, как движутся все материальные точки, то есть достаточно знать конгруенцию мировых линий пространства-времени, но, кроме этого, необходимы еще и некоторые энергетические (импульсные) характеристики в каждой точке пространства-времени. В финслеровой геометрии конгруенция является нормальной конгруенцией геодезических [2], если существует такая скалярная функция S , гиперповерхности уровня которой являются трансверсальными поверхностями к данной конгруенции геодезических. В классической механике такую функцию принято называть действием как функцией координат. В данной работе предлагается именно функцию S считать Мировой функцией, так как именно она является обобщением вещественной части комплексного потенциала в теории функций комплексной переменной, если финслерово пространство является к тому же и пространством ассоциативно-коммутативных гиперкомплексных чисел (поличисел).

Пусть в координатном пространстве¹ x^1, x^2, \dots, x^n в качестве Мировой функции выступает скалярная функция $S(x)$, которой в классической механике соответствует понятие *действие как функция координат* x^1, x^2, \dots, x^n , именно это ниже и будет приниматься в качестве основной гипотезы. Сама по себе скалярная функция S может определять компоненты обобщенного импульса (обобщенные импульсы), но не может определить поле скоростей, а значит, не может определить конгруенцию геодезических, с каждой из которых можно связать наблюдателя или материальную частицу. Для этого дополнительно еще необходима некая процедура $\hat{\varphi}$ перехода от ковариантных "векторов" к контравариантным. В любой финслеровой геометрии Φ_n такая процедура имеется. Таким образом, пара $\{S; \hat{\varphi}\}$, как и пара $\{S; \Phi_n\}$, определяет нам конгруенцию мировых линий, то есть эволюцию этого пространства, и некие энергетические характеристики

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial x^i}$$

– обобщенные импульсы.

Пусть x^0, x^1, x^2, x^3 – пространство Минковского с элементом длины

$$ds = mc\sqrt{(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2} \equiv mc\sqrt{\overset{o}{g}_{ij} x^i x^j}, \quad (1)$$

где необязательный с геометрической точки зрения множитель mc позволяет легче проводить физическую интерпретацию геометрических объектов; m – масса покоя частицы, c – скорость света в вакууме. Тангенциальное уравнение индикатрисы в таком пространстве запишем в виде

$$(p_0)^2 - (p_1)^2 - (p_2)^2 - (p_3)^2 = (mc)^2. \quad (2)$$

Тогда действие $S(x^0, x^1, x^2, x^3)$ как функция координат в пространстве Минковского должно удовлетворять уравнению Гамильтона-Якоби:

$$\left(\frac{dS}{dx^0}\right)^2 - \left(\frac{dS}{dx^1}\right)^2 - \left(\frac{dS}{dx^2}\right)^2 - \left(\frac{dS}{dx^3}\right)^2 = (mc)^2. \quad (3)$$

Подставим в уравнение (3) произвольную функцию \tilde{S} , которая подчиняется единственному требованию

$$\left(\frac{d\tilde{S}}{dx^0}\right)^2 - \left(\frac{d\tilde{S}}{dx^1}\right)^2 - \left(\frac{d\tilde{S}}{dx^2}\right)^2 - \left(\frac{d\tilde{S}}{dx^3}\right)^2 > 0. \quad (4)$$

В результате получим, что функция \tilde{S} является решением уравнения Гамильтона-Якоби, которое соответствует финслеровой геометрии с элементом длины

$$d\tilde{s} = \kappa(x) \cdot mc\sqrt{(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2} \quad (5)$$

и тангенциальным уравнением индикатрисы

$$(p_0)^2 - (p_1)^2 - (p_2)^2 - (p_3)^2 = \kappa(x)^2 \cdot (mc)^2, \quad (6)$$

где

$$\kappa(x) \equiv \frac{1}{mc} \sqrt{\left(\frac{d\tilde{S}}{dx^0}\right)^2 - \left(\frac{d\tilde{S}}{dx^1}\right)^2 - \left(\frac{d\tilde{S}}{dx^2}\right)^2 - \left(\frac{d\tilde{S}}{dx^3}\right)^2}. \quad (7)$$

¹ Если одна из координат x^0 имеет характер времени, то будем использовать иную индексацию координат $x^0, x^1, x^2, \dots, x^{n-1}$

Напомним, что если элементы длины ds , $d\tilde{s}$ двух геометрий в одном и том же координатном пространстве x^1, x^2, \dots, x^n связаны формулой

$$d\tilde{s} = \kappa(x)ds, \tag{8}$$

$\kappa(x) > 0$ – произвольная функция точки, то такие две геометрии называются *конформно связанными* [2]. Геометрия $d\tilde{s}$ отличаются от геометрии ds тем, что в бесконечно малой окрестности каждой точки пространства x^1, x^2, \dots, x^n произведено общемасштабное преобразование, причем коэффициент растяжения-сжатия $\kappa(x)$ зависит от точки пространства.

Таким образом, задание произвольной скалярной функции \tilde{S} с условием (4) в плоском пространстве Минковского (1) соответствует знанию Мировой функции в пространстве (5), конформно связанным с пространством Минковского.

Напомним, что канонические уравнения геодезических в финслеровом пространстве x^1, x^2, \dots, x^n с тангенциальным уравнением индикатрисы $\Phi(p_1, p_2, \dots, p_n; x^1, x^2, \dots, x^n) = 0$, или $\Phi(p; x) = 0$ имеют вид:

$$\dot{x}^i = \frac{\partial \Phi}{\partial p_i} \cdot \lambda(p, x), \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial \Phi}{\partial x^i} \cdot \lambda(p, x),$$

где $\dot{x}^i \equiv \frac{dx^i}{d\tau}$, $\dot{p}_i \equiv \frac{dp_i}{d\tau}$ – производные по некоторому параметру τ (параметру эволюции) вдоль мировой линии, а $\lambda(p; x) > 0$ – некоторая произвольная функция $2n$ переменных.

Знание Мировой функции позволяет записать уравнения для мировых линий из конгруенции, соответствующей данной Мировой функции, в пространстве (5) следующим образом:

$$\dot{x}^i = g^{oij} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^j} \lambda(x), \tag{9}$$

$\lambda(x) > 0$ – некоторая произвольная функция.

1 Случай $n = 2$

Все выше изложенное справедливо (при некоторых очевидных изменениях формул) для евклидовой или псевдоевклидовой геометрии произвольной размерности n , но только при $n = 2$ евклидовому и псевдоевклидовому пространству можно сопоставить систему ассоциативно-коммутативных невырожденных гиперкомплексных чисел (поличисел), соответственно комплексных C_2 и гиперболических H_2 . Пространства поличисел размерности $n > 2$ являются метрическими финслеровыми пространствами с элементом длины вида

$$ds = \sqrt[n]{g_{i_1 i_2 \dots i_n}^o dx^1 dx^2 \dots dx^n},$$

где $g_{i_1 i_2 \dots i_n}^o$ – метрический тензор, и, следовательно, не могут быть евклидовыми или псевдоевклидовыми.

В представленном подходе вид Мировой функции ничем не ограничен, кроме неравенства (4). Для конкретизации Мировой функции в поличисловых пространствах P_n может быть использовано условие аналитичности (условие, устанавливающее некую связь между Мировой функцией и аналитическими функциями поличисловой переменной P_n), которое в настоящей работе реализовано в виде гипотез *I*, *II*. Конечно, возможны и другие реализации.

Комплексная плоскость

Гипотеза IC_2 : Компоненты векторного поля, которое порождает мировые линии, соответствующие данной Мировой функции, являются компонентами аналитической функции комплексной переменной.

Тогда согласно данной гипотезе

$$\lambda(x, y) \cdot \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x} = u, \quad \lambda(x, y) \cdot \frac{\partial \tilde{S}}{\partial y} = v, \quad (10)$$

где $F(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ – некоторая аналитическая функция комплексной переменной $z = x + iy$. Соотношения Коши-Римана дают следующие уравнения в частных производных для Мировой функции \tilde{S} :

$$\frac{\partial}{\partial x} \lambda(x, y) \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \lambda(x, y) \frac{\partial \tilde{S}}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial y} \lambda(x, y) \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} \lambda(x, y) \frac{\partial \tilde{S}}{\partial y}. \quad (11)$$

Если $\lambda(x, y) \equiv 1$, то уравнения (11) упрощаются:

$$\frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial x \partial y} = 0. \quad (12)$$

Общее решение этой системы уравнений имеет вид

$$\tilde{S} = \frac{A}{2}(x^2 + y^2) + a_1x + a_2y + b, \quad (13)$$

где A, a_1, a_2, b – действительные числа. Отметим, что функции \tilde{S} не является компонентой аналитической функции комплексной переменной, если $A \neq 0$.

Гипотеза IIC_2 : Компоненты векторного поля, которое порождает мировые линии, соответствующие данной Мировой функции, являются компонентами функции комплексной переменной, сопряженной к аналитической функции комплексной переменной.

Тогда согласно данной гипотезе

$$\lambda(x, y) \cdot \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x} = u, \quad \lambda(x, y) \cdot \frac{\partial \tilde{S}}{\partial y} = -v, \quad (14)$$

где $F(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ – некоторая аналитическая функция комплексной переменной $z = x + iy$. Соотношения Коши-Римана дают следующие уравнения в частных производных для Мировой функции \tilde{S} :

$$\frac{\partial}{\partial x} \lambda(x, y) \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial y} \lambda(x, y) \frac{\partial \tilde{S}}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial y} \lambda(x, y) \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \lambda(x, y) \frac{\partial \tilde{S}}{\partial y}. \quad (15)$$

Если $\lambda(x, y) \equiv 1$, то уравнения (15) упрощаются и сводится к одному дифференциальному уравнению в частных производных:

$$\frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial y^2} = 0. \quad (16)$$

Таким образом, при выполнении гипотезы IIC_2 и при $\lambda(x, y) \equiv 1$ функция \tilde{S} является компонентой аналитической функции комплексной переменной, а соответствующая геометрия, конформно связанная с евклидовой плоскостью, получается с помощью конформного преобразования евклидовой плоскости.

Гиперболическая плоскость

Метрический тензор для гиперболической плоскости имеет вид

$$\overset{\circ}{g}_{ij} = \text{diag}(1, -1), \quad (17)$$

а соотношения Коши-Римана для аналитических функций $F(z) = u(x, y) + jv(x, y)$ переменной $H_2 \ni z = x + jy$, $j^2 = 1$ записываются следующим образом:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (18)$$

Гипотеза I_{H_2} : Компоненты векторного поля, которое порождает мировые линии, соответствующие данной Мировой функции, являются компонентами аналитической функции переменной H_2 .

Согласно данной гипотезе и в соответствии с аналогом формулы (9) для $n = 2$, имеем

$$\lambda(x, y) \cdot \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x} = u, \quad \lambda(x, y) \cdot \frac{\partial \tilde{S}}{\partial y} = -v, \quad (19)$$

где $F(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ – некоторая аналитическая функция переменной $H_2 \ni z = x + jy$. Тогда соотношения Коши-Римана дают следующие уравнения в частных производных для Мировой функции \tilde{S} :

$$\frac{\partial}{\partial x} \lambda(x, y) \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial y} \lambda(x, y) \frac{\partial \tilde{S}}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial y} \lambda(x, y) \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} \lambda(x, y) \frac{\partial \tilde{S}}{\partial y}. \quad (20)$$

Если $\lambda(x, y) \equiv 1$, то уравнения (20) упрощаются:

$$\frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial x \partial y} = 0. \quad (21)$$

Общее решение этой системы уравнений имеет вид

$$\tilde{S} = \frac{A}{2}(x^2 - y^2) + a_1x + a_2y + b, \quad (22)$$

где A, a_1, a_2, b – действительные числа. Отметим, что функции \tilde{S} не является компонентой аналитической функции переменной H_2 , если $A \neq 0$.

Гипотеза II_{H_2} : Компоненты векторного поля, которое порождает мировые линии, соответствующие данной Мировой функции, являются компонентами функции переменной H_2 , сопряженной к аналитической функции переменной H_2 .

Согласно данной гипотезе

$$\lambda(x, y) \cdot \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x} = u, \quad \lambda(x, y) \cdot \frac{\partial \tilde{S}}{\partial y} = v, \quad (23)$$

где $F(z) = u(x, y) + jv(x, y)$ – некоторая аналитическая функция переменной $H_2 \ni z = x + iy$. Тогда соотношения Коши-Римана дают следующие уравнения в частных производных для Мировой функции \tilde{S} :

$$\frac{\partial}{\partial x} \lambda(x, y) \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \lambda(x, y) \frac{\partial \tilde{S}}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial y} \lambda(x, y) \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \lambda(x, y) \frac{\partial \tilde{S}}{\partial y}. \quad (24)$$

Если $\lambda(x, y) \equiv 1$, то уравнения (24) упрощаются и сводятся к одному дифференциальному уравнению в частных производных:

$$\frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial y^2} = 0. \quad (25)$$

Таким образом, при выполнении гипотезы II_{H_2} и при $\lambda(x, y) \equiv 1$ функция \tilde{S} является компонентой аналитической функции переменной H_2 , и соответствующая геометрия, конформно связанная с геометрией гиперболической плоскости, может быть получена с помощью конформного преобразования гиперболической плоскости.

2 Поличисла P_n

Рассмотрим некоторую систему невырожденных n -чисел P_n , то есть n -мерных ассоциативно-коммутативных невырожденных гиперкомплексных чисел; соответствующее координатное пространство x^1, x^2, \dots, x^n является финслеровым метрическим пространством с элементом длины вида

$$ds = mc \sqrt{{}^o g_{i_1 i_2 \dots i_n} dx^{i_1} dx^{i_2} \dots dx^{i_n}}, \quad (26)$$

${}^o g_{i_1 i_2 \dots i_n}$ – метрический тензор, не зависящий от точки пространства. Такого рода финслеровы пространства давно изучаются в математической литературе (см., например, [3] – [6]), но то, что все невырожденные поличисловые пространства относятся именно к такому типу финслеровых пространств было установлено совсем недавно, начиная с работ [7], [8] и в последующих работах тех же авторов.

Компоненты обобщенного импульса в геометрии (26) вычисляются по формулам:

$$p_i = mc \frac{{}^o g_{i j_2 \dots j_n} dx^{j_2} \dots dx^{j_n}}{\left({}^o g_{i_1 i_2 \dots i_n} dx^{i_1} dx^{i_2} \dots dx^{i_n} \right)^{\frac{n-1}{n}}}. \quad (27)$$

Финслерову геометрию с элементом длины (26) будем называть *разрешимой*, если тангенциальное уравнение индикатрисы можно записать в виде

$$g^{o i_1 i_2 \dots i_n} p_{i_1} p_{i_2} \dots p_{i_n} = \mu^n (mc)^n, \quad (28)$$

где $\mu > 0$ – некоторая постоянная. Для римановой или псевдоримановой геометрии разрешимость означает неравенство нулю определителя матрицы метрического тензора, то есть выполнение свойства невырожденности. По-видимому, финслерова геометрия в пространстве невырожденных поличисел всегда разрешима, но это утверждение требует строгого доказательства.

Из формул (26) – (28) следует соотношение, которому должны удовлетворять тензоры ${}^o g_{i_1 i_2 \dots i_n}$, ${}^o g^{i_1 i_2 \dots i_n}$ разрешимой финслеровой геометрии,

$$\begin{aligned} g^{o j_1 j_2 \dots j_n} \times {}^o g_{j_1 i_2 \dots i_n} dx^{i_2} \dots dx^{i_n} {}^o g_{j_2 k_2 \dots k_n} dx^{k_2} \dots dx^{k_n} \dots {}^o g_{j_n m_2 \dots m_n} dx^{m_2} \dots dx^{m_n} = \\ = \mu^n \left({}^o g_{i_1 i_2 \dots i_n} dx^{i_1} dx^{i_2} \dots dx^{i_n} \right)^{n-1}. \end{aligned} \quad (29)$$

Действие как функция координат в геометрии (26) удовлетворяет уравнению Гамильтона-Якоби:

$$g^{o j_1 j_2 \dots j_n} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^{j_1}} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^{j_2}} \dots \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^{j_n}} = \mu^n (mc)^n. \quad (30)$$

Рассмотрим произвольную Мировую функцию $\tilde{S}(x^1, x^2, \dots, x^n)$ с единственным условием

$$g^{o j_1 j_2 \dots j_n} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^{j_1}} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^{j_2}} \dots \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^{j_n}} > 0, \quad (31)$$

тогда функция $\tilde{S}(x)$ является действием для геометрии, конформно связанной с геометрией (26), с элементом длины

$$d\tilde{s} = \kappa(x) \cdot mc \sqrt[n]{g^{o i_1 i_2 \dots i_n} x^{i_1} x^{i_2} \dots x^{i_n}}, \quad (32)$$

где $\kappa(x) > 0$ – коэффициент растяжения-сжатия, вообще говоря, разный в разных точках координатного пространства,

$$\kappa(x) = \frac{1}{\mu \cdot mc} \sqrt[n]{g^{o j_1 j_2 \dots j_n} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^{j_1}} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^{j_2}} \dots \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^{j_n}}}, \quad (33)$$

и Мировая функция \tilde{S} является решением уравнения Гамильтона-Якоби следующего вида:

$$g^{o j_1 j_2 \dots j_n} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^{j_1}} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^{j_2}} \dots \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^{j_n}} = \kappa(x)^n \cdot \mu^n (mc)^n. \quad (34)$$

Поле скоростей, определяющих конгруенцию мировых линий, будет выражаться через Мировую функцию \tilde{S} по формуле

$$\dot{x}^i = g^{o i j_2 \dots j_n} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^{j_2}} \dots \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^{j_n}} \cdot \lambda(x)^{n-1}, \quad (35)$$

где $\lambda(x) > 0$ – произвольная скалярная функция.

Алгебра поличисел $P_n \ni X = x^1 e_1 + x^2 e_2 + \dots + x^n e_n$ полностью определяется законом умножения базисных элементов:

$$e_i e_j = p_{ij}^k e_k \quad (36)$$

– то есть числовым тензором p_{ij}^k . Напомним, что поличисла P_n называются невырожденными, если

$$\det(q_{ij}) \neq 0, \quad q_{ij} \equiv p_{im}^k p_{kj}^m. \quad (37)$$

В этом случае можно построить тензор q^{ij} . Если ϵ^i – коэффициенты разложения единицы $1 \in P_n$ в базисе e_i , то соотношения Коши-Римана для аналитической функции $F(X) = f(x)^i e_i$ переменной P_n можно записать следующим образом:

$$\frac{\partial f^i}{\partial x^k} - p_{ij}^k \epsilon^m \frac{\partial f^j}{\partial x^m} = 0. \quad (38)$$

Гипотеза I_{P_n} : Компоненты векторного поля, которое порождает мировые линии, соответствующие данной Мировой функции, являются компонентами аналитической функции переменной P_n .

Если $F(X) = f(x)^i e_i$ – аналитическая функция переменной P_n , то данная гипотеза приводит к соотношениям:

$$f^i(x^1, x^2, \dots, x^n) = g^{o i j_2 \dots j_n} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^{j_2}} \dots \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^{j_n}} \cdot \lambda(x)^{n-1}. \quad (39)$$

Подставляя таким образом выраженные через Мировую функцию компоненты аналитической функции в соотношения Коши-Римана, получим систему дифференциальных

уравнений в частных производных, которым должна удовлетворять Мировая функция при реализации гипотезы IP_n .

Гипотеза IP_2 : Компоненты векторного поля, которое порождает мировые линии, соответствующие данной Мировой функции, являются компонентами функции переменной P_n , сопряженной с помощью некоторой специальной унарной операции (симметрического сопряжения) к аналитической функции той же переменной.

Определим на множестве $P_n \ni X, Y$ унарную операцию $\bar{X} = Y$ следующим образом:

$$y^i = g^{o^{ij_2 \dots j_n}} q_{j_2 m_2 \dots j_n m_n} x^{m_2} \dots x^{m_n}. \quad (40)$$

Для комплексных чисел и гиперболических чисел H_2 такая унарная операция является обычным сопряжением, а на множестве поличисел H_4 (и H_n) с точностью до числового множителя эта операция совпадает с операцией *нормального сопряжения* [9]. Унарная операция (40) может быть обобщена для $(n-1)$ аргумента, симметрическим образом, при этом мы получим симметрическую $(n-1)$ -нарную операцию на множестве P_n . Чтобы отличать такую унарную операцию и соответствующую ей $(n-1)$ -нарную операцию от других сопряжений в поличисловых алгебрах назовем такую операцию *симметрическим сопряжением*.

Сравнив формулы (35) и (40) и заменив x^i на f^i получаем, что реализация гипотезы IP_2 приводит к соотношениям

$$q_{ij} f^j = \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^i} \lambda(x), \quad (41)$$

или

$$f^i = q^{ij} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^j} \lambda(x), \quad (42)$$

то есть величины $q^{ij} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^j} \lambda(x)$ являются компонентами аналитической функции переменной P_n .

Покажем, что одна и та же пара {Мировая функция; конгруенция мировых линий} может быть реализована в разных финслеровых геометриях.

Введем обозначение

$$g^{ij}(x) = \left[\frac{1}{\kappa(x) \cdot \mu \cdot cm} \right]^{n-2} g^{o^{ij_2 \dots j_n}} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^{j_2}} \dots \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^{j_n}}. \quad (43)$$

Будем предполагать, что $\det(g^{ij}(x)) \neq 0$, тогда можно построить дважды ковариантный тензор $g_{ij}(x)$. Рассмотрим псевдориманову геометрию с элементом длины

$$ds' = \kappa(x) \cdot \mu \cdot cm \sqrt{g_{ij} dx^i dx^j}. \quad (44)$$

Тангенциальное уравнение индикатрисы для такой геометрии будет иметь вид

$$g^{ij} p_i p_j = \kappa(x)^2 \cdot \mu^2 \cdot (cm)^2, \quad (45)$$

а уравнение Гамильтона-Якоби для действия $S'(x)$ соответственно

$$g^{ij} \frac{\partial S'}{\partial x^i} \frac{\partial S'}{\partial x^j} = \kappa(x)^2 \cdot \mu^2 \cdot (cm)^2. \quad (46)$$

Подставим в это уравнение выражение (43), получим

$$g^{o^{j_1 j_2 j_3 \dots j_n}} \frac{\partial S'}{\partial x^{j_1}} \frac{\partial S'}{\partial x^{j_2}} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^{j_3}} \dots \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^{j_n}} = \kappa(x)^n \cdot \mu^n (cm)^n. \quad (47)$$

Таким образом, функция $S' = \tilde{S}$ является решением уравнения (46), то есть функция \tilde{S} остается Мировой функцией и в геометрии (44).

Поле скоростей в геометрии (44) будет определяться формулой

$$\dot{x}^i = g^{ij} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^j} \cdot \lambda'(x), \quad (48)$$

где $\lambda'(x) > 0$ – некоторая скалярная функция. Подставим в эту формулу выражение (43), положим

$$\lambda'(x) = \kappa(x)^{n-2} \cdot \mu^{n-2} \cdot (cm)^{n-2} \cdot \lambda(x)^{n-1} \quad (49)$$

и получим формулу

$$\dot{x}^i = g^{ij_2 \dots j_n} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^{j_2}} \dots \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^{j_n}} \cdot \lambda(x)^{n-1}, \quad (50)$$

которая совпадает с формулой (35).

Итак, одна и та же пара {Мировая функция; конгруенция мировых линий} может быть реализована в качественно разных геометриях.

Получить из метрического тензора $g_{i_1 i_2 \dots i_m}(x^{i_1} x^{i_2} \dots x^{i_m})$ метрический тензор с меньшим числом индексов $r < m$ можно, свернув часть индексов с векторными или тензорными контравариантными полями (см., например, [3]– [6]). Выше проведенные рассуждения, показывают, что для поличисловых пространств P_n из всех таких методов выделяется следующий:

$$g_{i_1 i_2 \dots i_r}(x^{i_1} x^{i_2} \dots x^{i_r}) = a(x) \cdot g_{i_1 i_2 \dots i_m}(x^{i_1} x^{i_2} \dots x^{i_m}) f_{(1)}^{i_{r+1}} f_{(2)}^{i_{r+2}} \dots f_{(m-r)}^{i_m},$$

где $a(x)$ – некоторая скалярная функция, а $f_{(A)}^i$ – компоненты аналитических функций переменной P_n или компоненты функций, сопряженных неким образом к аналитическим функциям той же переменной.

3 Гиперкомплексные числа H_4

Напомним, что система гиперкомплексных чисел H_4 изоморфна алгебре действительных квадратных диагональных матриц 4×4 . Соответствующее координатное пространство является метрическим финслеровым пространством с метрикой Бервальда-Моора. В пространстве H_4 существует специальный базис e_1, e_2, e_3, e_4 с законом умножения

$$e_i e_j = p_{ij}^k e_k, \quad p_{ij}^k = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j = k, \\ 0, & \text{во все остальных случаях,} \end{cases} \quad (51)$$

компоненты тензоров q_{ij} (37), q^{ij} в таком базисе образуют единичную матрицу:

$$(q_{ij}) = (q^{ij}) = \text{diag}(1, 1, 1, 1). \quad (52)$$

Элемент длины в пространстве H_4 в специальном базисе (51) имеет вид

$$ds = mc \sqrt{dx^1 dx^2 dx^3 dx^4} \equiv mc \sqrt[4]{g_{ijkm}^o dx^i dx^j dx^k dx^m}, \quad \text{где} \quad (53)$$

$$g_{ijkm}^o = \begin{cases} \frac{1}{24}, & \text{если индексы } i, j, k, m \text{ все разные,} \\ 0, & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases} \quad (54)$$

Компоненты обобщенного импульса определяются формулой

$$p_i = \frac{mc}{4} \cdot \frac{\sqrt[4]{dx^1 dx^2 dx^3 dx^4}}{dx^i}, \quad (55)$$

а тангенциальное уравнение индикатрисы имеет вид

$$p_1 p_2 p_3 p_4 = \left(\frac{mc}{4}\right)^4, \quad (56)$$

или в ковариантной форме

$$g^{ijklm} p_i p_j p_k p_m = \left(\frac{mc}{4}\right)^4, \quad (57)$$

причем в данном специальном базисе

$$\left(g^{ijklm}\right) = \left(g_{ijklm}\right). \quad (58)$$

Действие как функция координат в пространстве H_4 удовлетворяет уравнению

$$g^{ijklm} \frac{\partial S}{\partial x^i} \frac{\partial S}{\partial x^j} \frac{\partial S}{\partial x^k} \frac{\partial S}{\partial x^m} = \left(\frac{mc}{4}\right)^4, \quad (59)$$

или

$$\frac{\partial S}{\partial x^1} \frac{\partial S}{\partial x^2} \frac{\partial S}{\partial x^3} \frac{\partial S}{\partial x^4} = \left(\frac{mc}{4}\right)^4. \quad (60)$$

Подставим в уравнение (60) некоторую мировую функцию $\tilde{S}(x)$, удовлетворяющую единственному условию

$$\frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^1} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^2} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^3} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^4} > 0, \quad (61)$$

и получим

$$\frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^1} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^2} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^3} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^4} = \kappa(x)^4 \cdot \left(\frac{mc}{4}\right)^4, \quad (62)$$

то есть функция $\tilde{S}(x)$ является Мировой функцией в геометрии, конформно связанной с геометрией Бервальда-Моора (53), а именно в геометрии с элементом длины

$$ds = \kappa(x) \cdot mc \sqrt[4]{dx^1 dx^2 dx^3 dx^4}, \quad (63)$$

где коэффициент растяжение-сжатия задается выражением

$$\kappa(x) = \frac{4}{mc} \sqrt[4]{\frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^1} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^2} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^3} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^4}}. \quad (64)$$

В этой геометрии поле скоростей, определяющих конгруенцию мировых линий, имеет вид

$$\dot{x}^i = \frac{\frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^1} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^2} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^3} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^4}}{\frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^i}} \cdot \lambda(x)^3, \quad (65)$$

где $\lambda(x) > 0$ – некоторая скалярная функция.

Гипотеза I_{H_4} : Компоненты векторного поля, которое порождает мировые линии, соответствующие данной Мировой функции, являются компонентами аналитической функции переменной H_4 .

В рассматриваемом специальном базисе произвольная аналитическая функция переменной H_4 имеет вид

$$F(X) = f^1(x^1)e_1 + f^2(x^2)e_2 + f^3(x^3)e_3 + f^4(x^4)e_4, \tag{66}$$

где f^i – произвольные функции одной действительной переменной, поэтому гипотеза I_{H_4} приводит к требованию

$$f^i(x^{i-}) = \frac{\frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^1} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^2} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^3} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^4}}{\frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^i}} \cdot \lambda(x)^3, \tag{67}$$

где индекс $i \equiv i_-$, но по нему не ведется суммирование. Перемножая соотношения (67) с разными индексами и сделав некоторые преобразовывая, получим в результате

$$\frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^1} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^2} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^3} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^4} = \frac{\sqrt[3]{f^1 f^2 f^3 f^4}}{\lambda^4} \tag{68}$$

и

$$\frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^i} = \frac{\sqrt[3]{f^1 f^2 f^3 f^4}}{\lambda f^i}. \tag{69}$$

Из условия перестановочности частных производных

$$\frac{\partial}{\partial x^j} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^j} \tag{70}$$

имеем систему шести дифференциальных уравнений, которым должна подчиняться функция $\lambda(x)$. Выпишем одно из этих уравнений для $i = 1, j = 2$:

$$3 \left(f^1 \frac{\partial \lambda}{\partial x^1} - f^2 \frac{\partial \lambda}{\partial x^2} \right) = \lambda(\dot{f}^1 - \dot{f}^2). \tag{71}$$

Если $\lambda = const$, то $\dot{f}^1 = \dot{f}^2 = \dot{f}^3 = \dot{f}^4 = const$, из чего следует, что $f^i(x^{i-})$ – линейные функции координат вида:

$$f^i = ax^i + b^i, \tag{72}$$

где a, b^i – постоянные.

Если $\lambda \neq const$, введем обозначения для неопределенных интегралов

$$I^i = \int \frac{dx^{i-}}{f^{i-}}. \tag{73}$$

Тогда решением системы, состоящей из уравнения (71) и аналогичных уравнений, будет функция

$$\lambda(x^1, x^2, x^3, x^4) = \sqrt[3]{f^1 f^2 f^3 f^4} \cdot \exp [W(I^1 + I^2 + I^3 + I^4)] + \lambda_0, \tag{74}$$

где W – произвольная функция одного действительного аргумента, λ_0 – постоянная. Сама Мироземная функция \tilde{S} , как в случае $\lambda = const$, так и в случае $\lambda \neq const$, может быть найдена через криволинейный интеграл второго рода по произвольному пути в пространстве H_4 , соединяющему некоторую фиксированную точку с точкой $M(x^1, x^2, x^3, x^4)$.

Из формул (69), (72), (73) и (74) следует, что производные $\frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^i}$ не являются компонентами или линейными комбинациями компонент аналитической функции переменной

H_4 , кроме случая, когда все эти производные равны между собой и равны постоянной P . То же самое можно сказать о самой функции \tilde{S} , если исключить линейную зависимость вида

$$\tilde{S} = P \cdot (x^1 + x^2 + x^3 + x^4) + const.$$

Каждой аналитической функции $F(X)$ переменной H_4 соответствует Мировая функция \tilde{S} , которая выражается через компоненты $F(X)$ в квадратурах, при этом соответствующее поле скоростей, определяющее мировые линии, является аналитической функцией $F(X)$ переменной H_4 .

Гипотеза II_{H_4} : Компоненты векторного поля, которое порождает мировые линии, соответствующие данной Мировой функции, являются компонентами функции переменной H_4 , симметрически сопряженной к аналитической функции той же переменной.

В силу формул (52), (54), (58) симметрическое сопряжение (40) в пространстве H_4 совпадает с нормальным сопряжением [9], причем в рассматриваемом специальном базисе формула (40) принимает вид

$$y^i = \frac{x^1 x^2 x^3 x^4}{x^i}. \quad (75)$$

Учитывая эту формулу и формулу (65), как следствие гипотезы II_{H_4} получим

$$\frac{f^1 f^2 f^3 f^4}{f^i} = \frac{\frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^1} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^2} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^3} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^4}}{\frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^i}} \cdot \lambda(x)^3, \quad (76)$$

или

$$f^i(x^{i-}) = \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^i} \cdot \lambda(x). \quad (77)$$

Если $\lambda = const$, то

$$\tilde{S} = \frac{1}{4} \left(\tilde{f}^1(x^{1-}) + \tilde{f}^2(x^{2-}) + \tilde{f}^3(x^{3-}) + \tilde{f}^4(x^{4-}) \right), \quad (78)$$

где \tilde{f}^i – функции одного действительного аргумента, эти функции с точностью до числового множителя суть первообразные компонент $f^i(x^{i-})$ исходной аналитической функции $F(X)$. Из свойств поличисел H_4 следует, что \tilde{S} (78), являясь скалярной функцией, формально совпадает с компонентой аналитической функции

$$\tilde{F}(X) = \tilde{f}^i(x^{i-}) e_i \quad (79)$$

при единичном элементе в базисе $1, j, k, jk; j^2 = k^2 = (jk)^2 = 1$:

$$\left. \begin{aligned} 1 &= e_1 + e_2 + e_3 + e_4, & j &= e_1 + e_2 - e_3 - e_4, \\ k &= e_1 - e_2 + e_3 - e_4, & jk &= e_1 - e_2 - e_3 + e_4. \end{aligned} \right\} \quad (80)$$

Пусть $\lambda \neq const$, тогда из соотношения (77) получим систему шести уравнений для определения функции $\lambda(x)$:

$$f^i \frac{\partial \lambda}{\partial x^j} = f^j \frac{\partial \lambda}{\partial x^i} \quad (81)$$

– общее решение этой системы уравнений имеет вид

$$\lambda(x) = \Lambda \left(\tilde{f}^1(x^{1-}) + \tilde{f}^2(x^{2-}) + \tilde{f}^3(x^{3-}) + \tilde{f}^4(x^{4-}) \right), \quad (82)$$

где Λ – функция одного действительного переменного, а $\tilde{f}^i(x^{i-})$ являются первообразными компонент $f^i(x^{i-})$ исходной аналитической функции $F(X)$.

Мировая функция \tilde{S} может быть найдена через криволинейный интеграл второго рода по произвольному пути в пространстве H_4 , соединяющему некоторую фиксированную точку с точкой $M(x^1, x^2, x^3, x^4)$.

В общем случае $\lambda \neq const$ производные $\frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^i}$ уже не являются компонентами или линейными комбинациями компонент аналитической функции переменной H_4 . То же самое можно сказать о самой функции \tilde{S} . Но каждой аналитической функции $F(X)$ соответствует Мировая функция \tilde{S} , которая выражается через компоненты $F(X)$ в квадратурах, при этом соответствующее поле скоростей, определяющее мировые линии, является симметрически сопряженным к аналитической функцией $F(X)$ переменной H_4 .

Предположим, что нам известна Мировая функция в пространстве (63), конформно связанным с пространством Бервальда-Моора. Рассмотрим тензор

$$g^{ij}(x) = \frac{1}{\kappa(x)^2 \cdot \mu^2 \cdot (mc)^2} g^{ijkm} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^k} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^m}, \quad (83)$$

где согласно формуле (57) $\mu = 1/4$. Будем предполагать, что $det(g^{ij}(x)) \neq 0$, тогда в том же самом координатном пространстве x^1, x^2, x^3, x^4 можно определить псевдориманову геометрию с элементом длины

$$ds' = \kappa(x) \cdot \mu \cdot mc \sqrt{g_{ij} dx^i dx^j} \quad (84)$$

и тангенциальным уравнением индикатрисы

$$g^{ij} p'_i p'_j = \kappa(x)^2 \cdot \mu^2 \cdot (mc)^2. \quad (85)$$

Уравнение Гамильтона-Якоби для действия S' имеет вид

$$g^{ij} \frac{\partial S'}{\partial x^i} \frac{\partial S'}{\partial x^j} = \kappa(x)^2 \cdot \mu^2 \cdot (mc)^2, \quad (86)$$

а компоненты поля скоростей, определяющих конгруенцию мировых линий, запишутся следующим образом:

$$\dot{x}^i = g^{ij} \frac{\partial S'}{\partial x^j} \lambda'(x), \quad (87)$$

где $\lambda'(x)$ – некоторая скалярная функция. Подставляя в последние две формулы выражение для g^{ij} (83), получим, что решением уравнения (86) является Мировая функция $S' = \tilde{S}$, а конгруенции мировых линий в пространствах (63) и (84) совпадают.

Рассмотрим тензор

$$G^{ij}(x) = g^{ijkm} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^k} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^m}, \quad (88)$$

который с точностью до скалярного множителя совпадает с тензором g^{ij} (83), в матричном виде

$$(G^{ij}(x)) = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^3} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^4} & \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^2} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^4} & \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^2} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^3} \\ \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^3} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^4} & 0 & \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^1} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^4} & \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^1} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^3} \\ \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^2} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^4} & \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^1} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^4} & 0 & \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^1} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^2} \\ \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^2} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^3} & \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^1} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^3} & \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^1} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^2} & 0 \end{pmatrix}. \quad (89)$$

Так как

$$\det (G^{ij}) = -\frac{3}{12^4} \left(\frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^1} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^2} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^3} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x^4} \right)^2 \neq 0, \quad (90)$$

в силу неравенства (61), то можно построить тензор G_{ij} , а значит и тензор g_{ij} .

Используемый в настоящем разделе базис e_1, e_2, e_3, e_4 не является привычным физическим базисом, поэтому перейдем к базису (80), но не в общем случае, а при задании простейшей Мировой функции

$$\tilde{S} = \frac{1}{4} (x^1 + x^2 + x^3 + x^4) + const, \quad (91)$$

которая в базисе (80) имеет вид

$$\tilde{S} = x^0 + const, \quad (92)$$

где x^0 – координата при единичном элементе в базисе (80). В этом случае матрица (G^{ij}) принимает вид

$$(G^{ij}(x)) = \frac{1}{12 \cdot 4^2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (93)$$

Для того, чтобы получить матрицу (G^{ij}) тензора G^{ij} в новом базисе (80), то есть матрицу $(G^{i'j'})$, надо умножить матрицу (G^{ij}) (с учетом того, что матрица перехода симметрическая) слева и справа на матрицу обратную матрице перехода, в результате получим

$$(G^{i'j'}(x)) = \frac{1}{4^4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}. \quad (94)$$

Таким образом, Мировой функции (91) в пространстве H_4 соответствует псевдоевклидова геометрия с сигнатурой $(1, -1, -1, -1)$.

Заключение

Из вышеизложенного следует, что связь между Мировой функцией \tilde{S} , заданной в некотором поличисловом пространстве P_n , и аналитическими функциями переменной P_n может быть постулирована по-разному.

Наиболее сильные ограничения на Мировую функцию \tilde{S} налагает гипотеза I: компоненты векторного поля, порождающего мировые линии, соответствующие данной Мировой функции, являются компонентами аналитической функции переменной P_n .

Менее сильные ограничения на вид Мировой функции \tilde{S} налагает гипотеза II: компоненты векторного поля, порождающего мировые линии, соответствующие данной Мировой функции, являются компонентами функции переменной P_n , симметрически сопряженной к аналитической функции той же переменной.

На наш взгляд, гипотеза II более тесно связана с физикой, так как в этом случае Мировая функция более тесно связана с аналитическими функциями соответствующей поличисловой переменной – она может являться компонентой аналитической функции при единице, то есть вещественной частью аналитической функции переменной P_n , что соответствует обобщению понятия комплексного потенциала на евклидовой плоскости.

Описанию Мира с помощью Мировой функции требует некой процедуры "поднятия индексов" у ковариантных тензоров, и эта процедура может быть всегда реализована в рамках некоторой фиксированной геометрии, самодостаточной паре {Мировая функция; конгруенция мировых линий} могут соответствовать качественно разные геометрии, точнее – некоторый класс, взаимосвязанных между собой геометрий.

В настоящей работе показано, что финслеровому пространству H_4 , пространству с метрикой Бервальда-Моора соответствует пространство Минковского, то есть эти геометрии, в данном смысле, принадлежат одному и тому же классу.

Таким образом, рассматривая физический Мир как пару {конгруенция мировых линий; Мировая функция}, мы приходим к выводу, что геометрия не является фиксированным понятием. Можно переходить от одной геометрии к другой в зависимости от круга решаемых задач, сохраняя при этом не только конгруенцию мировых линий, но и Мировую функцию, то есть сохраняя Мир – оставаясь в одном и том же Мире.

Пространство Минковского и пространство поличисел H_4 соответствуют одному и тому же физическому Миру.

Литература

- [1] Г. Вейль: Пространство, время, материя, М., "Янус", 1996
- [2] П. К. Рашевский: Риманова геометрия и тензорный анализ, М. Наука, 1967
- [3] M. Matsumoto, S. Numata: On Finsler spaces with 1-form metric. Tensor, N. S., Vol. 32 (1978), 161
- [4] M. Matsumoto, S. Numata: On Finsler spaces with 1-form metric II. Berwald-Moor's metric., Tensor, N. S., Vol. 32 (1978), 275
- [5] M. Matsumoto, S. Numata: On Finsler spaces with cubic metric, Tensor, N. S., Vol. 33 (1979), 153
- [6] H. Shimada: On Finsler spaces with the metric L of m -th root metric, Tensor, N. S., Vol. 33 (1979), 365–372
- [7] Д. Г. Павлов: Обобщенные аксиомы скалярного произведения, Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **1 (1)** (2004), 5–19
- [8] Г. И. Гарасько: Обобщенно-аналитические функции поличисловой переменной, Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **1 (1)** (2004), 75–88
- [9] Д. Г. Павлов, Г. И. Гарасько: Нормальное сопряжение на множестве поличисел, Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **2 (2)** (2004), 6–14

On the Universal function and connection between Geometries

G. I. Garas'ko

Electrotechnical institute of Russia
gri9z@mail.ru

It is shown, that the Universal function can be regarded as a connecting element between essentially different geometries which share the same congruence of universal lines (geodesics). If the space, where is defined the Universal function is of polynumber type, then the assumption that the vector field of generalized velocities of Universal lines should be analytic, leads to strong limitations on the shape of the Universal function. The main result states that the Minkowski space and the polynumbers H_4 space correspond to the same physical world.

Key-words: conformal geometry, polynumber space, Minkowski space.

MSC: 30C35, 30C75, 30F45, 53A30, 51B20.

КОНСТРУИРОВАНИЕ ПСЕВДОРИМАНОВОЙ ГЕОМЕТРИИ НА ОСНОВЕ ГЕОМЕТРИИ БЕРВАЛЬДА-МООРА

Г. И. Гарасько, Д. Г. Павлов

*Всероссийский электротехнический институт, Москва,
Московский Государственный Технический Университет им. Н. Э. Баумана
gri9z@mail.ru, geom2004@mail.ru*

Пространство ассоциативно-коммутативных гиперкомплексных чисел H_4 , являясь четырехмерным метрическим финслеровым пространством с метрикой Бервальда-Моора, позволяет строить тензорные поля на основе аналитических функций переменной H_4 , а также с нарушением таковой (аналитичности). Предложен способ построения метрического тензора четырехмерного псевдориманового пространства (пространства-времени) на основе четырехжды контравариантного тензора тангенциального уравнения индикатрисы пространства Бервальда-Моора и Мировой функции. Пространство Бервальда-Моора оказывается тесно связанным с пространством Минковского. Нарушение аналитичности Мировой функции приводит к нетривиальному искривлению четырехмерного пространства-времени, в частности, ньютоновскому потенциалу в нерелятивистском пределе.

Ключевые слова: Финслерово пространство, метрика Бервальда-Моора, индикатриса, пространство Минковского.

1 Введение

Завораживающая красота теории функций комплексной переменной, в частности, выражающаяся в гармонии алгебраических фракталов на евклидовой плоскости, побуждает многих исследователей искать аналогичные числовые системы, элементам которых можно было бы ставить в соответствие уже точки не плоскости, а четырехмерного пространства-времени. В случае, если бы такая деятельность увенчалась успехом, у нас появились бы реальные основания с доверием отнестись к знаменитому высказыванию Пифагора "всё сущее суть числа". При использовании для этой цели кватернионов [1], бикватернионов [2-4], октав [5] и т. п. были получены интересные результаты. Однако ни одна из теорий этих числовых систем, все же, пока не может сравниться даже с теорией относительно простых двухкомпонентных комплексных чисел. Основная причина этому достаточно печальному обстоятельству видится в отсутствии у рассматриваемых алгебр одного из основных математических свойств – коммутативности (а иногда даже и ассоциативности) умножения. Хотя авторы настоящей работы вполне осознают концептуальную обоснованность самых различных алгебр, все же, коммутативность умножения является неотъемлемым свойством всех основных числовых систем, среди которых: натуральные, целые, рациональные, действительные и комплексные числа. В конце концов, коммутативность и ассоциативность произведений входят в набор аксиом фундамента математики – арифметики и было бы, наверное, странно, если бы вдруг оказалось, что самая естественная для описания нашего реального мира алгебраическая система, уже в своей основе не соответствовала бы правилам обычного счета.

В качестве одной из интересных числовых систем, свободной от отмеченного недостатка, может рассматриваться алгебра коммутативно-ассоциативных гиперкомплексных чисел, связанных с прямой суммой четырех действительных алгебр, далее для краткости

обозначаемая H_4 . Алгебра этих чисел изоморфна алгебре четырехмерных квадратных действительных диагональных матриц, а пространство, им соответствующее, является линейным финслеровым пространством с метрикой Бервальда-Моора (последнее обстоятельство было установлено авторами настоящей работы [6]). Следует отметить, что само финслерово пространство с метрикой Бервальда-Моора уже достаточно давно известно и частично исследовано [7–8].

Одним из важнейших обстоятельств, присущих данному пространству, является наличие в нем области параметров, в которой трехмерные расстояния (с точки зрения наблюдателя, использующего радарный метод их определения [9]) связаны с положительно определенной метрической функцией, в пределе переходящей в квадратичную форму [10]. Иными словами, трехмерный мир, увиденный глазами "живущего" в H_4 наблюдателя, с определенной точностью оказывается евклидовым. Более того, при переходе к релятивистским скоростям четырехмерные интервалы, разделяющие события в H_4 , приближенно оказываются подчиняющимися соотношениям пространства Минковского [11]. Все это позволяет предположить, что и само пространство H_4 , и связанная с ним финслерова геометрия с определенной степенью точности могут использоваться в качестве математических моделей реального пространства-времени, причем, возможно, даже более продуктивно, чем господствующие сегодня в физике псевдоримановы представления.

Любая гиперкомплексная алгебра полностью определяется заданием закона умножения элементов некоторого фиксированного базиса. В системе гиперкомплексных чисел H_4 имеется такой специальный базис e_1, e_2, e_3, e_4 (будем называть его изотропным), что

$$e_i e_j = p_{ij}^k e_k \quad p_{ij}^k = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j = k, \\ 0, & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases} \quad (1)$$

Любая аналитическая функция в этом базисе имеет вид

$$F(X) = f^1(\xi^1)e_1 + f^2(\xi^2)e_2 + f^3(\xi^3)e_3 + f^4(\xi^4)e_4, \quad (2)$$

где

$$H_4 \ni X = \xi^1 e_1 + \xi^2 e_2 + \xi^3 e_3 + \xi^4 e_4, \quad (3)$$

а f^i – четыре произвольные гладкие функции одного действительного переменного.

В пространстве H_4 существует еще один выделенный базис $1, j, k, jk$ (будем называть его ортогональным), который связан с изотропным базисом формулами

$$\left. \begin{aligned} 1 &= e_1 + e_2 + e_3 + e_4, \\ j &= e_1 + e_2 - e_3 - e_4, \\ k &= e_1 - e_2 + e_3 - e_4, \\ jk &= e_1 - e_2 - e_3 + e_4, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

где базисный элемент 1 – единица алгебры, а компонента аналитической функции переменной H_4 в этом базисе при единичном элементе определяется формулой

$$u = \frac{1}{4} [f^1(\xi^1) + f^2(\xi^2) + f^3(\xi^3) + f^4(\xi^4)]. \quad (5)$$

Если считать X радиус-вектором, то координатное пространство $\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4$ является пространством Бервальда-Моора с элементом длины

$$ds = \sqrt[4]{d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3 d\xi^4} \equiv \sqrt[4]{g_{ijkl} d\xi^i d\xi^j d\xi^k d\xi^l}, \quad (6)$$

где

$$g_{ijkl} = \begin{cases} \frac{1}{4!}, & \text{если все индексы разные,} \\ 0, & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases} \quad (7)$$

Тангенциальное уравнение индикатрисы для такой геометрии можно записать следующим образом:

$$g^{ijkl} p_i p_j p_k p_l - 1 = 0, \quad (8)$$

где

$$g^{ijkl} = \begin{cases} \frac{4^4}{4!}, & \text{если все индексы разные,} \\ 0, & \text{во всех остальных случаях,} \end{cases} \quad (9)$$

$$p_i = \frac{g_{ijkl} d\xi^j d\xi^k d\xi^l}{(g_{mrst} d\xi^m d\xi^r d\xi^s d\xi^t)^{3/4}} \quad (10)$$

– компоненты обобщенного импульса, или обобщенные импульсы.

Имея в своем распоряжении тензоры p_{ij}^k , g_{ijkl} , g^{ijkl} и векторные поля аналитических функций $F_{(A)}(X)$ переменной H_4 , можно конструировать метрические тензоры в четырехмерном пространстве-времени многими способами, например,

$$g_{ij}(\xi) = g_{ijkl} f_{(1)}^k f_{(2)}^l, \quad (11)$$

а затем изучать полученную риманову геометрию. Разнообразие этих способов как раз и является главным недостатком такого подхода.

Как известно [12], если определено тангенциальное уравнение индикатрисы как

$$\Phi(p; \xi) = 0, \quad (12)$$

то геодезические будут решениями канонической системы дифференциальных уравнений:

$$\dot{\xi}^i = \frac{\partial \Phi}{\partial p_i} \cdot \lambda(p; \xi), \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial \Phi}{\partial \xi^i} \cdot \lambda(p; \xi), \quad (13)$$

$\lambda(p; \xi) \neq 0$ – произвольная гладкая функция, а точка над символами ξ^i и p_i означает производную по некоторому параметру эволюции τ .

2 Построение метрической функции псевдориманова пространства

Рассмотрим пространство, конформно связанное с пространством H_4 , то есть пространство с элементом длины

$$ds' = \kappa(\xi) \cdot \sqrt[4]{g_{ijkl} d\xi^i d\xi^j d\xi^k d\xi^l}, \quad (14)$$

где $\kappa(\xi) > 0$ – некоторый коэффициент растяжения-сжатия, зависящий от точки пространства, скалярная функция.

Пусть в этом пространстве задана некоторая нормальная конгруенция геодезических (мировых линий), тогда существует скалярная функция $S(\xi)$ (см., например, [12]) такая, что ее гиперповерхности уровня трансверсальны этой нормальной конгруенции мировых линий и она является решением уравнения

$$g^{ijkl} \frac{\partial S}{\partial \xi^i} \frac{\partial S}{\partial \xi^j} \frac{\partial S}{\partial \xi^k} \frac{\partial S}{\partial \xi^l} = \kappa(\xi)^4, \quad (15)$$

причем обобщенные импульсы вдоль данной конгруенции мировых линий связаны с функцией $S(\xi)$ соотношениями

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial \xi^i}, \quad (16)$$

а уравнения мировых линий приобретают вид

$$\dot{\xi}^i = g^{ijkl} \frac{\partial S}{\partial \xi^j} \frac{\partial S}{\partial \xi^k} \frac{\partial S}{\partial \xi^l} \cdot \lambda(\xi), \quad (17)$$

где $\lambda(\xi) \neq 0$.

В физике такую функцию $S(\xi)$ называют действием как функцией координат, а уравнение (15) – уравнением Гамильтона-Якоби. В работе [10] предложено называть функцию $S(\xi)$ *Мировой функцией*.

Если задана конгруенция мировых линий, то известно движение (эволюция) каждой точки пространства, в частности, известно поле скоростей в каждой точке пространства, но не известны энергетические характеристики материальных объектов (наблюдателей), соответствующих данной мировой линии. Знание Мировой функции $S(\xi)$ позволяет вычислять обобщенные импульсы p_i , с которыми связаны энергетические характеристики, и инвариантную энергетическую характеристику точки $\kappa(\xi)$, которая еще имеет смысл локального коэффициента растяжения-сжатия плоского пространства H_4 .

Таким образом, если парадигмой нашего мировоззрения является классическая механика, то любая пара из трех объектов: Мировая функция, конгруенция мировых линий, финслерова геометрия – дают нам полное знание о Мире.

Построим дважды контравариантный тензор $g^{ij}(\xi)$ следующим образом:

$$g^{ij}(\xi) = \frac{1}{\kappa(\xi)^4} \cdot g^{ijkl} \frac{\partial S}{\partial \xi^k} \frac{\partial S}{\partial \xi^l}. \quad (18)$$

Так как

$$\det(g^{ij}(\xi)) = -\frac{4^4}{3^3 \kappa(\xi)^8} \neq 0, \quad (19)$$

то везде, где определена геометрия (14), можно построить тензор $g_{ij}(\xi)$ такой, что

$$g^{ik}(\xi)g_{kj}(\xi) = \delta_j^i, \quad (20)$$

$$g_{ij}(\xi) = 4 \cdot \begin{pmatrix} -2 \left(\frac{\partial S}{\partial \xi^1} \right)^2 & \frac{\partial S}{\partial \xi^1} \frac{\partial S}{\partial \xi^2} & \frac{\partial S}{\partial \xi^1} \frac{\partial S}{\partial \xi^3} & \frac{\partial S}{\partial \xi^1} \frac{\partial S}{\partial \xi^4} \\ \frac{\partial S}{\partial \xi^1} \frac{\partial S}{\partial \xi^2} & -2 \left(\frac{\partial S}{\partial \xi^2} \right)^2 & \frac{\partial S}{\partial \xi^2} \frac{\partial S}{\partial \xi^3} & \frac{\partial S}{\partial \xi^2} \frac{\partial S}{\partial \xi^4} \\ \frac{\partial S}{\partial \xi^1} \frac{\partial S}{\partial \xi^3} & \frac{\partial S}{\partial \xi^2} \frac{\partial S}{\partial \xi^3} & -2 \left(\frac{\partial S}{\partial \xi^3} \right)^2 & \frac{\partial S}{\partial \xi^3} \frac{\partial S}{\partial \xi^4} \\ \frac{\partial S}{\partial \xi^1} \frac{\partial S}{\partial \xi^4} & \frac{\partial S}{\partial \xi^2} \frac{\partial S}{\partial \xi^4} & \frac{\partial S}{\partial \xi^3} \frac{\partial S}{\partial \xi^4} & -2 \left(\frac{\partial S}{\partial \xi^4} \right)^2 \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Несомненно, что в том же самом координатном пространстве $\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4$ такой тензор $g_{ij}(\xi)$ определяет риманову или псевдориманову геометрию с элементом длины

$$ds'' = \sqrt{g_{ij}(\xi) d\xi^i d\xi^j}. \quad (22)$$

Непосредственно из построения тензора $g_{ij}(\xi)$ следует, что при замене геометрии (14) на геометрию (22) исходная конгруенция мировых линий и соответствующая этой конгруенции Мировая функция $S(\xi)$ остаются теми же.

Таким образом, в нашей концепции одному и тому же Миру, то есть паре {Мировая функция; конгруенция мировых линий}, в общем случае соответствует некий класс жестко связанных между собой, но качественно различных финслеровых геометрий.

3 Условие аналитичности и пространство Минковского

Пусть Мировая функция $S(\xi)$ является компонентой некоторой аналитической функции переменной H_4 при единице в ортогональном базисе (4), то есть

$$S(\xi) = \frac{1}{4} [f^1(\xi^1) + f^2(\xi^2) + f^3(\xi^3) + f^4(\xi^4)] . \quad (23)$$

Тогда

$$g^{ijkl} \frac{\partial S}{\partial \xi^i} \frac{\partial S}{\partial \xi^j} \frac{\partial S}{\partial \xi^k} \frac{\partial S}{\partial \xi^l} = \frac{\partial f^1(\xi^1)}{\partial \xi^1} \frac{\partial f^2(\xi^2)}{\partial \xi^2} \frac{\partial f^3(\xi^3)}{\partial \xi^3} \frac{\partial f^4(\xi^4)}{\partial \xi^4} = \kappa(\xi)^4 > 0, \quad (24)$$

что приводит к ограничению на функции f^i :

$$\frac{\partial f^1(\xi^1)}{\partial \xi^1} \frac{\partial f^2(\xi^2)}{\partial \xi^2} \frac{\partial f^3(\xi^3)}{\partial \xi^3} \frac{\partial f^4(\xi^4)}{\partial \xi^4} > 0. \quad (25)$$

Из выражения (24) следует, что пространство с элементом длины (14) может быть получено из пространства с элементом длины (6) конформным преобразованием, то есть условие аналитичности Мировой функции можно трактовать, в некотором смысле, как условие конформной симметрии.

Построим по предложенному в предыдущем разделе алгоритму тензор $g_{ij}(\xi)$. Оказывается, что в той области, где функции f^i не имеют особенностей, всегда найдется такая система координат x^0, x^1, x^2, x^3 , в которой элемент длины ds'' имеет вид

$$ds'' = \sqrt{(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2}. \quad (26)$$

Выпишем формулы, выражающие координаты x^0, x^1, x^2, x^3 через исходные координаты $\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4$:

$$\left. \begin{aligned} x^0 &= \frac{1}{4} (f^1(\xi^1) + f^2(\xi^2) + f^3(\xi^3) + f^4(\xi^4)) , \\ x^1 &= \frac{\sqrt{3}}{4} (f^1(\xi^1) + f^2(\xi^2) - f^3(\xi^3) - f^4(\xi^4)) , \\ x^2 &= \frac{\sqrt{3}}{4} (f^1(\xi^1) - f^2(\xi^2) + f^3(\xi^3) - f^4(\xi^4)) , \\ x^3 &= \frac{\sqrt{3}}{4} (f^1(\xi^1) - f^2(\xi^2) - f^3(\xi^3) + f^4(\xi^4)) . \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Таким образом, чтобы получить нетривиальное искривление пространства-времени необходимо использовать Мировые функции с нарушенной конформной симметрией.

4 Ньютоновский потенциал

Покажем, что существуют Мировые функции, приводящие к нетривиальным псевдоримановым четырехмерным пространствам. Для этого рассмотрим функцию вида

$$S(\xi) = \frac{1}{4} (\xi^1 + \xi^2 + \xi^3 + \xi^4) + \alpha \cdot \psi(\varrho), \quad (28)$$

где α – параметр нарушения аналитичности Мировой функции (параметр нарушения конформной симметрии в пространстве H_4), ψ – произвольная функция одного аргумента

$$\varrho = \sqrt{(y^1)^2 + (y^2)^2 + (y^3)^2}, \quad (29)$$

а y^0, y^1, y^2, y^3 – координаты точки в ортогональном базисе 1, j, k, jk :

$$\left. \begin{aligned} y^0 &= \frac{1}{4}(\xi^1 + \xi^2 + \xi^3 + \xi^4), \\ y^1 &= \frac{1}{4}(\xi^1 + \xi^2 - \xi^3 - \xi^4), \\ y^2 &= \frac{1}{4}(\xi^1 - \xi^2 + \xi^3 - \xi^4), \\ y^3 &= \frac{1}{4}(\xi^1 - \xi^2 - \xi^3 + \xi^4). \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Тогда производные Мировой функции по координатам ξ^i можно выразить следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial \xi^1} &= \frac{1}{4} \left[1 + \frac{\alpha}{\rho} \frac{d\psi}{d\rho} (y^1 + y^2 + y^3) \right], \\ \frac{\partial S}{\partial \xi^2} &= \frac{1}{4} \left[1 + \frac{\alpha}{\rho} \frac{d\psi}{d\rho} (y^1 - y^2 - y^3) \right], \\ \frac{\partial S}{\partial \xi^3} &= \frac{1}{4} \left[1 + \frac{\alpha}{\rho} \frac{d\psi}{d\rho} (-y^1 + y^2 - y^3) \right], \\ \frac{\partial S}{\partial \xi^4} &= \frac{1}{4} \left[1 + \frac{\alpha}{\rho} \frac{d\psi}{d\rho} (-y^1 - y^2 + y^3) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Вычислим компоненты метрического тензора в координатах y^0, y^1, y^2, y^3 , используя инвариантность квадрата элемента длины

$$g_{ij}(\xi) d\xi^i d\xi^j = \tilde{g}_{ij}(y) dy^i dy^j \quad (32)$$

и приводя подобные, получим:

$$\tilde{g}_{00} = 1 - 3\alpha^2 \left(\frac{d\psi}{d\rho} \right)^2, \quad \tilde{g}_{\beta\beta_-} = -3 \left\{ 1 + \alpha^2 \left(\frac{d\psi}{d\rho} \right)^2 \left[1 - \frac{4(y^\alpha)^2}{3\rho^2} \right] \right\}, \quad (33)$$

$$2\tilde{g}_{0\beta} = -4 \left[\alpha \frac{d\psi}{d\rho} \frac{y^\beta}{\rho} + 3\alpha^2 \left(\frac{d\psi}{d\rho} \right)^2 \cdot \frac{y^1 y^2 y^3}{y^\beta \rho^2} \right], \quad (34)$$

$$2\tilde{g}_{\beta\gamma} = -4 \left[3\alpha \frac{d\psi}{d\rho} \frac{y^\delta}{\rho} + \alpha^2 \left(\frac{d\psi}{d\rho} \right)^2 \cdot \frac{y^\beta y^\gamma}{\rho^2} \right], \quad (35)$$

где индексы β, γ, δ , пробегают значения 1, 2, 3; $\beta \equiv \beta_-$, но по этой паре не ведется суммирование, в последней формуле индексы β, γ, δ все разные.

Если параметр $\alpha = 0$, то

$$(\tilde{g}_{ij}) = \text{diag}(1, -3, -3, -3). \quad (36)$$

Это говорит о том, что реальные физические координаты x^0, x^1, x^2, x^3 пространства-времени связаны с координатами y^0, y^1, y^2, y^3 следующим образом:

$$x^0 = y^0, \quad x^\beta = \sqrt{3} \cdot y^\beta. \quad (37)$$

Перейдем к физическим координатам x^0, x^1, x^2, x^3 :

$$\tilde{g}_{ij}(y) dy^i dy^j = \bar{g}_{ij}(x) dx^i dx^j, \quad (38)$$

где

$$\bar{g}_{00} = \tilde{g}_{00}, \quad \bar{g}_{0\beta} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \tilde{g}_{0\beta}, \quad \bar{g}_{\beta\gamma} = \frac{1}{3} \cdot \tilde{g}_{\beta\gamma}. \quad (39)$$

Введем обозначение

$$r = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2} \equiv \sqrt{3} \cdot \varrho, \quad (40)$$

тогда

$$\bar{g}_{00} = 1 - 9\alpha^2 \left(\frac{d\psi}{dr} \right)^2, \quad \bar{g}_{\beta\beta_-} = - \left\{ 1 + 3\alpha^2 \left(\frac{d\psi}{dr} \right)^2 \left[1 - \frac{4(x^\alpha)^2}{3r^2} \right] \right\}, \quad (41)$$

$$2\bar{g}_{0\beta} = -4 \left[\alpha \frac{d\psi}{dr} \frac{x^\beta}{r} + 3\sqrt{3}\alpha^2 \left(\frac{d\psi}{dr} \right)^2 \cdot \frac{x^1 x^2 x^3}{x^\beta r^2} \right], \quad (42)$$

$$2\bar{g}_{\beta\gamma} = -4 \left[\sqrt{3}\alpha \frac{d\psi}{dr} \frac{x^\delta}{r} + \alpha^2 \left(\frac{d\psi}{dr} \right)^2 \cdot \frac{x^\beta x^\gamma}{r^2} \right]. \quad (43)$$

Метрический тензор $\bar{g}_{ij}(x) = \bar{g}_{ij}(x^1, x^2, x^3)$ зависит только от пространственных координат x^1, x^2, x^3 , то есть соответствует стационарному гравитационному полю, стационарной Вселенной. Пробная частица массы m движется по геодезическим псевдориманового пространства с метрическим тензором $\bar{g}_{ij}(x^1, x^2, x^3)$.

Пусть в данной системе отсчета пробная частица движется со скоростью много меньше скорости света c ,

$$\frac{dx^\beta}{dt} = v^\beta, \quad |v^\beta| \ll c, \quad (44)$$

а сами гравитационные поля слабые, то есть на тех временных отрезках, на которых рассматривается движение частицы, условие $|v^\beta| \ll 1$ сохраняется. Для описания такого нерелятивистского движения пробной частицы в слабом гравитационном поле получим функцию Лагранжа L . Для этого разложим правую часть соотношения

$$L = -mc \cdot \frac{\sqrt{\bar{g}_{ij}(x^1, x^2, x^3) dx^i dx^j}}{dt} \quad (45)$$

с точностью до членов $\left(\frac{v}{c}\right)^2$ включительно:

$$L = -mc^2 \sqrt{\bar{g}_{00}} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{\bar{g}_{00}} \left(2\bar{g}_{0\beta} \frac{v^\beta}{c} + \bar{g}_{\beta\gamma} \frac{v^\beta v^\gamma}{c^2} \right)}, \quad (46)$$

$$L \simeq -mc^2 \sqrt{\bar{g}_{00}} \cdot \left\{ 1 + \frac{1}{2\bar{g}_{00}} \left(2\bar{g}_{0\beta} \frac{v^\beta}{c} + \bar{g}_{\beta\gamma} \frac{v^\beta v^\gamma}{c^2} \right) - \frac{1}{8\bar{g}_{00}^2} \left(2\bar{g}_{0\beta} \frac{v^\beta}{c} \right)^2 \right\}. \quad (47)$$

Если раскрыть скобки, то в правой части будет содержаться аддитивный член, являющийся полной производной по времени от некоторой функции $f(r)$, он будет линейно зависеть от компонент скорости и его можно опустить. Не меняя обозначение для функции Лагранжа, имеем

$$L \simeq -mc^2 \sqrt{\bar{g}_{00}} \cdot \left\{ 1 + \frac{1}{2\bar{g}_{00}} \cdot \bar{g}_{\beta\gamma} \frac{v^\beta v^\gamma}{c^2} - \frac{1}{8\bar{g}_{00}^2} \left(2\bar{g}_{0\beta} \frac{v^\beta}{c} \right)^2 \right\}. \quad (48)$$

Мы стремимся получить функцию Лагранжа вида

$$L = \frac{m\vec{v}^2}{2} - U(\vec{x}), \quad (49)$$

где $U(\vec{x})$ – потенциальная энергия пробной частицы, $\vec{x} \equiv (x^1, x^2, x^3)$, $\vec{v} \equiv (v^1, v^2, v^3)$, $r^2 = \vec{x}^2$, $\vec{v}^2 = (v^1)^2 + (v^2)^2 + (v^3)^2 \equiv v^2$. Для этого нам придется сделать некие предположения о связи параметра α со скоростью света:

$$\alpha = \frac{\nu}{c}, \quad \text{при } c \rightarrow \infty \quad \alpha \rightarrow 0. \quad (50)$$

Кроме того, будем считать, что α того же (или более высокого порядка малости), что и отношение $\left| \frac{v}{c} \right|$. Тогда сохраним в формуле (48) лишь члены, не исчезающие при $c \rightarrow \infty$, имеем:

$$L \simeq -mc^2 + mc^2 \frac{9\nu^2}{2c^2} \left(\frac{d\psi}{dr} \right)^2 + m \cdot \frac{v^1 v^1 + v^2 v^2 + v^3 v^3}{2}. \quad (51)$$

Учитывая, что величина $(-mc^2)$ есть полная производная функции $(-mc^2 \cdot t)$ по времени, и опуская ее, получим

$$L \simeq \frac{m\vec{v}^2}{2} + \frac{9m\nu^2}{2} \left(\frac{d\psi}{dr} \right)^2. \quad (52)$$

Пусть в начале координат трехмерного пространства x^1, x^2, x^3 покоится точечная масса M , тогда потенциальная энергия пробной частицы массы m , находящейся в точке x^1, x^2, x^3 , равна

$$U(r) = -\gamma \frac{mM}{r}, \quad (53)$$

γ – гравитационная постоянная. Сравнивая формулы (49) и (52), получим уравнение для функции $\psi(r)$

$$\frac{9m\nu^2}{2} \left(\frac{d\psi}{dr} \right)^2 = \gamma \frac{mM}{r} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\psi}{dr} = \pm \frac{\sqrt{2\gamma M}}{3\nu} \frac{1}{r^{1/2}}. \quad (54)$$

Таким образом,

$$\psi(r) = \pm \frac{2\sqrt{2\gamma M}}{3\nu} \cdot r^{1/2} + \psi_0 \quad (\psi_0 - \text{постоянная}). \quad (55)$$

Итак, Мировая функция

$$S = x^0 \pm \frac{2\sqrt{2\gamma M}}{3c} \cdot r^{1/2} + C_0 \quad (C_0 - \text{постоянная}), \quad (56)$$

осуществляя конформное преобразование элемента длины плоского пространства Бервальда-Моора, индуцирует в пространстве Минковского псевдориманову геометрию, которая для нерелятивистской пробной частицы массы m дает уравнения движения кеплеровой задачи в поле притяжения гравитирующей точечной массы M , покоящейся в начале пространственных координат.

Более сложная Мировая функция, также, возможно, приводящая к стационарной Вселенной, имеет вид

$$S(\xi) = \frac{1}{4} (\xi^1 + \xi^2 + \xi^3 + \xi^4) [1 + \alpha_1 \cdot \psi_1(\varrho)] + \alpha_2 \cdot \psi_2(\varrho), \quad (57)$$

где α_A – параметры нарушения аналитичности Мировой функции (параметры нарушения конформной симметрии в пространстве H_4), ψ_A – произвольные функции одного аргумента ϱ (29), (30).

Заключение

Полученные в настоящей работе результаты позволяют сделать вывод о глубокой связи, существующей между геометриями Эйнштейна и финслеровыми пространствами с метрической функцией Бервальда-Моора. Удалось указать конкретное финслерово пространство с метрикой Бервальда-Моора, которое в пределе оказалось связанным с искривленным псевдоримановым пространством, имеющим ньютонов характер гравитационного потенциала. Этот факт указывает на принципиальную возможность более интересных построений, в частности, отыскание таких финслеровых пространств, чьими предельными приближениями окажутся известные релятивистские решения.

Литература

- [1] Березин А. В., Курочкин Ю. А., Толкачев Е. А. Кватернионы в релятивистской физике. Минск, Наука, 1989.
- [2] Ефремов А. П. Кватернионы: алгебра, геометрия и физические теории. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **1**, Vol 1, 2004.
- [3] Кассандров В. В. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **1**, Vol 1, 2004.
- [4] Казанова Г. От алгебры Клиффорда до атома водорода. М.: Платон, 1997.
- [5] J. C. Baez. The octonions. // Bull. Amer. Mathem. Soc. **39**: **2**, 145–205 (2002), ArXiv: math.RA/0105155 v4.
- [6] Pavlov D. G. Hypercomplex Numbers, Associated Metric Spaces, and Extension of Relativistic Hyperboloid. ArXiv: gr-qc/0206004.
- [7] Bogoslovsky G. Yu., Goenner H. F.: Phys. Lett. A 244, N 4, (1988) 222.
- [8] Bogoslovsky G. Yu., Goenner H. F.: Gen. Relativ. Gravit. 31, N 10, (1999) 1565.
- [9] Пименов Р. И. Конструкции времени в естествознании: на пути к пониманию феномена времени. Часть 1. Междисциплинарное исследование. М.: Изд. Мос. Ун-та, 1996, с. 153–199.
- [10] Гарасько Г. И., Павлов Д. Г. Трехмерные расстояния и модуль скорости в линейных финслеровых пространствах. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **3**, Vol 2, 2005.
- [11] Павлов Д. Г. Число и геометрия пространства-времени. В сб. Метафизика. Век XXI. Под ред. Ю. С. Владимирова. М.: Бином, 2006.
- [12] Рашевский П. К. Геометрическая теория уравнений с частными производными. Изд. 2-е, ст. М.: Едиториал УРСС, 2003.

The construction of the pseudo-Riemannian geometry on the grounds of Berwald-Moor geometry

G. I. Garas'ko, D. G. Pavlov

*MSTU n. a. N. E. Bauman, Electrotechnical institute of Russia
geom2004@mail.ru, gri9z@mail.ru*

The space of associative-commutative hypercomplex numbers H_4 - which is 4-dimensional metric Finsler space endowed with the Berwald-Moor metric, allows to build tensor fields based on analytic functions of argument from H_4 , but as well on functions which lack this quality. A technique of constructing the metric tensor of the 4-dimensional pseudo-Riemannian space (Space-Time) is proposed, on the basis of a 4-covariant tensor of the tangential equation of the indicatrix of the Berwald-Moor space with Universal function. The Berwald-Moor Space shows to be tightly connected to the Minkowski space. Dropping the requirement for the Universal function of being analytic, leads to a nontrivial bending of the 4-dimensional Space-Time, and in particular to the Newtonian potential in the non-relativistic limit.

Key-words: Finsler space, Berwald-Moor metric, indicatrix, Minkowski space.

MSC: 53B40, 30C35, 51B20.

ОТНОШЕНИЕ ОДНОВРЕМЕННОСТИ В ФИНСЛЕРОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ

Р. Г. Зарипов

Институт механики и машиностроения КазНЦ РАН, Казань, Россия

zaripov@mail.knc.ru

Дается новое определение отношения одновременности разноместных событий, устанавливаемое сигнальным методом, в финслеровом пространстве-времени с форм-инвариантной метрической функцией и находятся общие преобразования проективных однородных координат в двух векторных формах. Взаимосвязь между событиями осуществляется плоскими волнами де Бройля по четырем векторам выделенных направлений трехмерного пространства. Исследуются групповые свойства неаддитивного закона композиции элементов группы трехмерных скоростей (неоднородных проективных координат) с квадратичной нелинейностью. Вводится новая аддитивная угловая мера, зависящая от векторов выделенных направлений. Используя гамильтонов формализм, находятся соотношения для энергии и импульса частицы, а также приводятся их преобразования в векторных формах. В частных случаях полученные результаты совпадают с известными. Рассматривается финслерово пространство-время с отношением абсолютной одновременности разноместных событий и преобразованиями Галилея.

Ключевые слова: одновременность событий, Финслерово пространство, скорости, гамильтонов формализм, преобразования Галилея.

1. Введение

В знаменитой работе [1] А. Пуанкаре впервые приводит определение физического понятия отношения одновременности разноместных событий в инерциальной системе отсчета. Геометрическим образом в трёхмерном пространстве выбрана волновая поверхность (или так называемая поверхность постоянной фазы) в виде сферы, обладающей центральной симметрией, а геометрическим объектом является расстояние. Используя методы метрической геометрии, А. Пуанкаре впервые рассмотрел формализм четырехмерного пространства-времени и нашел все инварианты группы Лоренца [2]. Наконец, Г. Минковский [3] использовал формализм четырехмерной метрической геометрии, предложенной А. Пуанкаре, и ввел локальное изотропное четырехмерное псевдоевклидово пространство-время в галилеевых координатах, которое является базисом физической релятивистской теории (для случая специальной теории относительности). Метрическая функция

$$F = ds = [(cdt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2]^{1/2}, \quad (1.1)$$

равная расстоянию между событиями в пространстве-времени, имеет при $F = 0$ две характеристики для сигнала.

Работы французского ученого имеют большое значение для релятивистской механики и в настоящее время незаслуженно принижены. В 1904 году Казанское физико-математическое общество удостоивает А. Пуанкаре золотой медали фонда имени Н. И. Лобачевского, а премия имени Н. И. Лобачевского присуждается Д. Гильберту. Н. И. Лобачевский 19 лет (1827–1846 гг.) служил ректором Казанского Императорского университета, учрежденного 17 (5) ноября 1804 года императором Александром I, и в 1826 году впервые открыл неевклидову геометрию [4], которая, в частности, реализуется в

трехмерном пространстве скоростей Фока [5]. А. Пуанкаре и Н. И. Лобачевский утверждали, что различные физические явления могут быть описаны в терминах различных геометрий.

Существуют некоторые модели обобщения псевдоевклидовой геометрии. Одним из перспективных подходов является изучение локального финслерова пространства-времени, характерным свойством которого является наличие анизотропии. Недавно в работах [6–9] предложена новая модель четырехмерного пространства-времени в виде локальной анизотропной финслеровой геометрии с метрической функцией Бервальда-Моора

$$F = [(cdt + dx + dy + dz)(cdt - dx + dy - dz)(cdt + dx - dy - dz)(cdt - dx - dy + dz)]^{1/4} \quad (1.2)$$

и ее обобщения

$$F = [(cdt - dx - dy - dz)^{1+r_1+r_2+r_3} (cdt + dx - dy + dz)^{1-r_1+r_2-r_3} \times \\ \times (cdt - dx + dy + dz)^{1+r_1-r_2-r_3} (cdt + dx + dy - dz)^{1-r_1-r_2+r_3}]^{1/4}, \quad (1.3)$$

имеющих четыре характеристики для сигнала. При $r_1 = r_2 = r_3 = 0$ и замене $x \rightarrow -x$, $y \rightarrow -y$, $z \rightarrow -z$ метрическая функция (1.3) совпадает с (1.2).

Геометрическим образом в трёхмерном пространстве выбрана замкнутая волновая поверхность: специально ориентированный координатный тетраэдр, не обладающий центральной симметрией. Геометрическим объектом является объем. В такой модели естественно применять методы проективной геометрии с соответствующей теорией инвариантов и мер, среди которых, как известно, отсутствует понятие расстояния в метрической форме, однако есть мера угла и т. п. Были получены преобразования проективных однородных координат t , x , y и z при переходах между движущимися инерциальными системами отсчетов, которые сохраняют форм-инвариантность метрических функций (1.2) и (1.3), а также преобразования проективных неоднородных координат u_x, u_y, u_z , являющихся компонентами трехмерной скорости движения. Преобразования импульса и энергии частицы в финслеровой геометрии с (1.3) даются в [10].

Метрические функции (1.2) и (1.3) принадлежат к классу функций

$$F = [(a_i dx^i)^{1+a} (b_i dx^i)^{1+b} (c_i dx^i)^{1+c} (e_i dx^i)^{1+e}]^{1/4}, \quad a + b + c + e = 0, \quad (1.4)$$

введенному Б. Риманом [11].

Целью настоящей работы является изучение отношения одновременности в общем виде для такой финслеровой структуры четырехмерной проективной геометрии и нахождение соответствующих преобразований проективных однородных и неоднородных координат, а также энергии и импульса частицы.

2. Отношение одновременности разноместных событий

Рассмотрим разноместные события в четырех точках трехмерного пространства инерциальной системы отсчёта (K), взаимосвязанные сигналом, являющимся наиболее быстрым процессом установления причинно-следственной цепи. Пусть из точки O в момент времени T посылаются сигналы в четыре точки A и A^n ($n = 1, 2, 3$). Сигналы достигают этих точек в момент времени t ($t > T$). После отражения от точек A^n сигналы возвращаются в точку O в момент времени T^n ($T^n > t$). Наблюдаемыми величинами являются T и T^n в точке O .

Определение 1. Имеется единое время (или дается отношение одновременности событий) для точек O , A и A^n при выполнении условия

$$(t - T) = (T^1 - t) + (T^2 - t) + (T^3 - t). \quad (2.1)$$

Данное определение означает равенство интервала времени при распространении сигнала от точки O до точки A сумме интервалов времён при распространении от трех точек A^n в точку O , записанное в виде $t_{OA} = t_{A^1O} + t_{A^2O} + t_{A^3O}$ ($t_{OA} = -t_{AO} > 0$, $t_{A^nO} = -t_{OA^n} > 0$). Из (2.1) получим значение момента времени t

$$t = T + \frac{1}{4} \sum_n^3 (T^n - T) = \frac{1}{4} \left(T + \sum_n^3 T^n \right), \quad (2.2)$$

зависящее от моментов времен T и T^n в точке O и являющееся их средним арифметическим. Согласно (2.2) часы в точках O , A и A^n являются синхронизованными.

Определение 2. Величина

$$\overline{OA} = \overline{A^1O} + \overline{A^2O} + \overline{A^3O} \quad (2.3)$$

есть длина отрезка пути от точки O до точки A и равняется сумме длин путей от трех точек до точки O .

Определение 3. Величина

$$c = \frac{\overline{OA} + \overline{A^1O} + \overline{A^2O} + \overline{A^3O}}{t_{OA} + t_{A^1O} + t_{A^2O} + t_{A^3O}} \quad (2.4)$$

является универсальной постоянной и определяет физическую скорость сигнала в различных инерциальных системах отсчетов.

Согласно (2.1) и (2.3), из (2.4) получим соотношение $t - T = \overline{OA}/c$, из которого следует $\overline{OA} = -\overline{AO} > 0$. Аналогичные определения выполняются для точек A^1 , A^2 и A^3 . Например, используя определения для точки A^1 , запишем соотношения

$$\begin{aligned} t_{OA^1} &= t_{AO} + t_{A^2O} + t_{A^3O}, & \overline{OA^1} &= \overline{AO} + \overline{A^2O} + \overline{A^3O}, \\ c &= \frac{\overline{OA^1} + \overline{AO} + \overline{A^2O} + \overline{A^3O}}{t_{OA^1} + t_{AO} + t_{A^2O} + t_{A^3O}} \end{aligned} \quad (2.5)$$

и получим $T^1 - t = \overline{A^1O}/c$.

Таким образом, для остальных трех точек запишем следующие равенства

$$T^n - t = \frac{\overline{A^nO}}{c}, \quad \overline{A^nO} = -\overline{OA^n} > 0. \quad (2.6)$$

Пусть точка O – начало координат 3-мерного пространства. Из (2.5) и (2.6) следуют, с учетом неравенств для длин отрезков путей, линейные формы для координат

$$\overline{OA} = (\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{x}), \quad \overline{A^nO} = (\boldsymbol{\varepsilon}^n \mathbf{x}), \quad (2.7)$$

являющиеся скалярными произведениями векторов $\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z\}$, $\boldsymbol{\varepsilon}^n = \{\varepsilon_x^n, \varepsilon_y^n, \varepsilon_z^n\}$ и радиус-вектора $\mathbf{x} = \{x, y, z\}$. Длина отрезков путей состоит из длин отрезков, направленных вдоль осей и параллельных им прямых. Имеем четыре выделенных направления в виде векторов $\boldsymbol{\varepsilon}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}^n$ и четыре равенства для характеристик

$$T = t - \frac{(\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{x})}{c}, \quad T^n = t + \frac{(\boldsymbol{\varepsilon}^n \mathbf{x})}{c}, \quad (2.8)$$

совпадающих с измеряемыми значениями моментов времен. Данные равенства характерны для проективной геометрии, где t , x , y , z есть проективные однородные координаты.

В метрической геометрии пространства-времени Минковского с (1.1) имеют место два равенства для характеристик $T = t - |\mathbf{x}|/c$, $T^1 = t + |\mathbf{x}|/c$, вытекающих из определения отношения одновременности Пуанкаре, определения расстояния между точками и определения универсальной постоянной c , как физической скорости сигнала.

Из (2.8) следует, что сигнал представляет собой монохроматическую волну. Для такой плоской волны поверхность постоянной фазы есть плоскость, которая движется с фазовой скоростью, не зависящей от частоты. Движение волновой поверхности происходит в направлениях четырёх векторов $\boldsymbol{\varepsilon}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}^n$. Такое количество векторов, концы которых находятся в начале координат, является минимальным для образования в 3-мерном пространстве замкнутой волновой поверхности в виде четырехгранника.

Равенство 1. Выполняется равенство

$$\frac{1}{4} (-\varepsilon_i + \varepsilon_i^1 + \varepsilon_i^2 + \varepsilon_i^3) = 0, \quad (2.9)$$

которое является следствием соотношений (2.2), (2.8) и означает линейную зависимость векторов

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \sum_n^3 \boldsymbol{\varepsilon}^n. \quad (2.10)$$

Далее рассмотрим две инерциальные системы отсчетов (K) и (K'), которые совпадают. Тогда используем равенства $T = T'$ и $T^n = T'^n$ и имеем

$$t - \frac{(\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{x})}{c} = t' - \frac{(\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{x}')}{c}, \quad t + \frac{(\boldsymbol{\varepsilon}^n\mathbf{x})}{c} = t' + \frac{(\boldsymbol{\varepsilon}^n\mathbf{x}')}{c}. \quad (2.11)$$

Складывая равенства (2.11), получим $t' = t$, а для координат находим

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{x}) + \sum_n^3 \boldsymbol{\varepsilon}^n(\boldsymbol{\varepsilon}^n\mathbf{x}) = \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{x}') + \sum_n^3 \boldsymbol{\varepsilon}^n(\boldsymbol{\varepsilon}^n\mathbf{x}'). \quad (2.12)$$

Поскольку $\mathbf{x} = \mathbf{x}'$, то необходимо следующее дополнительное требование.

Равенство 2. Выполняется равенство

$$\frac{1}{4} (\varepsilon_i\varepsilon_j + \varepsilon_i^1\varepsilon_j^1 + \varepsilon_i^2\varepsilon_j^2 + \varepsilon_i^3\varepsilon_j^3) = \delta_{ij}, \quad (2.13)$$

где δ_{ij} – символ Кронекера (или единичная трехмерная матрица).

Используя (2.13), приведем соотношения для характеристик в различных системах отсчетов

$$t^2 + \mathbf{x}^2/c^2 = \frac{1}{4} \left(T^2 + \sum_n^3 (T^n)^2 \right), \quad t'^2 + \mathbf{x}'^2/c^2 = \frac{1}{4} \left(T'^2 + \sum_n^3 (T'^n)^2 \right) \quad (2.14)$$

и перепишем (2.8) в матричном виде $\mathbf{T} = \mathbf{H}\mathbf{X}$, где

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 1 & -\varepsilon_x & -\varepsilon_y & -\varepsilon_z \\ 1 & \varepsilon_x^1 & \varepsilon_y^1 & \varepsilon_z^1 \\ 1 & \varepsilon_x^2 & \varepsilon_y^2 & \varepsilon_z^2 \\ 1 & \varepsilon_x^3 & \varepsilon_y^3 & \varepsilon_z^3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} T \\ T^1 \\ T^2 \\ T^3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} t \\ x/c \\ y/c \\ z/c \end{pmatrix}. \quad (2.15)$$

Воспользуемся результатом произведения матриц $\mathbf{H}\mathbf{H}^T$ (где \mathbf{H}^T – транспонированная матрица). Соотношения (2.14) справедливы тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия

$$1 - (\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}^n) = 0, \quad 1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^n\boldsymbol{\varepsilon}^r) = 0 \quad (n \neq r), \quad 1 + \boldsymbol{\varepsilon}^2 = 1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^n)^2 = 4. \quad (2.16)$$

Модуль векторов равен $|\boldsymbol{\varepsilon}| = |\boldsymbol{\varepsilon}^n| = \sqrt{3}$, а $\mathbf{H}\mathbf{H}^T = 4\mathbf{I}$ (\mathbf{I} – единичная четырехмерная матрица). Равенства (2.16) означают, что имеет место произвольно ориентированный правильный четырехгранник или координатный тетраэдр. Объем такого координатного тетраэдра с вершинами на концах четырех векторов $(-\boldsymbol{\varepsilon})$ и $\boldsymbol{\varepsilon}^n$ принимает значение $V_{tetra} = \det \mathbf{H}/6 = (\boldsymbol{\varepsilon}^1[\boldsymbol{\varepsilon}^2\boldsymbol{\varepsilon}^3])/3$, равное трети объема параллелепипеда, построенного на некопланарных векторах $\boldsymbol{\varepsilon}^1, \boldsymbol{\varepsilon}^2, \boldsymbol{\varepsilon}^3$. Волновая поверхность представляет собой другой координатный тетраэдр с четырьмя гранями, перпендикулярными векторам $(-\boldsymbol{\varepsilon})$ и $\boldsymbol{\varepsilon}^n$.

Далее получим, согласно (2.2), (2.8), (2.9), (2.13) и (2.14), следующие соотношения

$$\begin{aligned} t^2 + \mathbf{x}^2/c^2 &= \frac{1}{4} \sum_m^4 (T^m)^2, \\ \mathbf{x}/c &= \frac{1}{4} \sum_m^4 \boldsymbol{\varepsilon}^m T^m, \quad t = \frac{1}{4} \sum_m^4 T^m, \quad \frac{1}{4} \sum_m^4 \varepsilon_i^m = 0, \quad \frac{1}{4} \sum_m^4 \varepsilon_i^m \varepsilon_j^m = \delta_{ij}, \\ 3t^2 - \mathbf{x}^2/c^2 &= \frac{1}{2} (T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_1 T_4 + T_2 T_3 + T_2 T_4 + T_3 T_4), \\ \mathbf{u} &= c \frac{\sum_m^4 \boldsymbol{\varepsilon}^m T^m}{\sum_m^4 T^m}, \quad |\mathbf{u}| = \sqrt{\mathbf{u}^2} = c \left[\frac{\frac{1}{4} \sum_m^4 (T^m)^2}{\left(\frac{1}{4} \sum_m^4 T^m\right)^2} - 1 \right]^{1/2}, \end{aligned} \quad (2.17)$$

выраженные через моменты времени $T^m = t + \boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{x}$ ($m = 1, 2, 3, 4$) и $\boldsymbol{\varepsilon}^m \rightarrow (-\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^n)$. Поскольку $T^m \geq 0$, справедливо условие $1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{u})/c \geq 0$ со знаком равенства при движении на характеристиках. В (2.17) имеем квадратичную форму от проективных однородных координат, значения компонент радиус-вектора, координатного времени, координатной скорости сигнала и её модуля. При равенстве единице квадратичная форма определяет гиперповерхность второго порядка в пространстве-времени, пересекающую все четыре характеристики (2.8) для сигнала. Любые две строки матрицы \mathbf{H} ортогональны в четырёхмерном евклидовом пространстве с галилеевыми координатами $\{ct, \mathbf{x}\}$. Таким образом, величины T^m линейной вектор-функции первого рода дают четыре оси рассматриваемой гиперповерхности. Рассматриваемый координатный тетраэдр есть граничный тетраэдр некоторого правильного тела в четырехмерном евклидовом пространстве. Известно, что таких тел, ограниченных трехмерными тетраэдрами имеется три.

Определение 4. Собственное время в точке $\{x, y, z\}$ определяется метрической функцией (1.3) в обобщенном виде

$$\begin{aligned} T_0 &= \frac{F}{c} = \prod_m^4 (T^m)^{p^m} = \left[(T)^{1+(\boldsymbol{\varepsilon}^r)} (T^1)^{1-(\boldsymbol{\varepsilon}^1 r)} (T^2)^{1-(\boldsymbol{\varepsilon}^2 r)} (T^3)^{1-(\boldsymbol{\varepsilon}^3 r)} \right]^{1/4} = \\ &= \left\{ \left[t - \frac{(\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{x})}{c} \right]^{1+(\boldsymbol{\varepsilon}^r)} \left[t + \frac{(\boldsymbol{\varepsilon}^1 \mathbf{x})}{c} \right]^{1-(\boldsymbol{\varepsilon}^1 r)} \left[t + \frac{(\boldsymbol{\varepsilon}^2 \mathbf{x})}{c} \right]^{1-(\boldsymbol{\varepsilon}^2 r)} \left[t + \frac{(\boldsymbol{\varepsilon}^3 \mathbf{x})}{c} \right]^{1-(\boldsymbol{\varepsilon}^3 r)} \right\}^{1/4}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Здесь вектор-параметр $\mathbf{r} = \{r_1, r_2, r_3\}$ имеет постоянное значение в величинах $p^m = (1/4)[1 - (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{r})]$, для которых выполняются равенства

$$\frac{1}{4} (1 + \mathbf{r}^2) = \sum_m^4 (p^m)^2, \quad -\mathbf{r} = \sum_m^4 \boldsymbol{\varepsilon}^m p^m, \quad 1 = \sum_m^4 p^m. \quad (2.19)$$

При значении $F = 0$ уравнение (2.18) представляет собой уравнение гиперповерхности с четырьмя характеристиками в пространстве-времени. Это означает наличие четырех вещественных корней для времени t .

Отметим также работы [12–16], в которых приводится один из вариантов обоснования финслеровой геометрии, исходя из отношения одновременности [17, 18], устанавливаемого световым сигналом, при котором физическая скорость распространения волновой поверхности анизотропна в прямом и обратном направлениях.

3. Преобразования проективных однородных координат

Рассмотрим преобразования проективных однородных координат при переходе между инерциальными системами отсчетов (K) и (K') , движущимися с относительными скоростями $\mathbf{v} = \{v_x, v_y, v_z\}$ и $\mathbf{v}' = \{v'_x, v'_y, v'_z\}$, соответственно. Скорости \mathbf{v} и \mathbf{v}' с $c = 1$ выражаются в масштабных единицах систем отсчетов, согласно принципу относительности. Преобразования оставляет форм-инвариантным метрическую функцию (2.18) в глобальной геометрии и объем координатного тетраэдра. При переходе к локальной финслеровой геометрии проективные однородные координаты заменяются на их дифференциалы, а вектора $\boldsymbol{\varepsilon}^m$ являются постоянными величинами и имеем

$$\left\{ \prod_m^4 [dt + (\boldsymbol{\varepsilon}^m d\mathbf{x})]^{1-(\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{r})} \right\}^{1/4} = \left\{ \prod_m^4 [dt' + (\boldsymbol{\varepsilon}^m d\mathbf{x}')]^{1-(\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{r}')} \right\}^{1/4}. \quad (3.1)$$

Обобщая метод коэффициента "k", ранее использованный для случая одной пространственной координаты [12–16], запишем соотношения $T^m = k^m(\mathbf{v}, \mathbf{r}) T'^m$ и $T'^m = k^m(\mathbf{v}', \mathbf{r}') T^m$ так

$$\begin{aligned} [t + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{x})] &= k^m(\mathbf{v}, \mathbf{r}) [t' + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{x}')], \\ [t' + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{x}')] &= k^m(\mathbf{v}', \mathbf{r}') [t + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{x})], \end{aligned} \quad (3.2)$$

где коэффициенты $k^m(\mathbf{v}, \mathbf{r})$ и $k^m(\mathbf{v}', \mathbf{r}')$ характеризуют эффекты Доплера изменения частот ω^m и ω'^m плоской волны по четырем выделенным направлениям

$$\omega^m k^m(\mathbf{v}, \mathbf{r}) = \omega'^m, \quad \omega'^m k^m(\mathbf{v}', \mathbf{r}') = \omega^m \quad (3.3)$$

и удовлетворяют условиям

$$\prod_m^4 [k^m(\mathbf{v}, \mathbf{r})]^{1-(\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{r})} = \prod_m^4 [k^m(\mathbf{v}', \mathbf{r}')]^{1-(\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{r}')} = 1, \quad k^m(\mathbf{v}, \mathbf{r}) k^m(\mathbf{v}', \mathbf{r}') = 1.$$

При $\mathbf{x}' = 0$ имеем $\mathbf{x} = \mathbf{v}t$, а при $\mathbf{x} = 0$, соответственно, $\mathbf{x}' = \mathbf{v}'t'$. Следовательно, из (2.18) и (3.2) вытекают следующие равенства

$$\begin{aligned} t &= t' N(\mathbf{v}', \mathbf{r}'), \quad k^m(\mathbf{v}', \mathbf{r}') t = [1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{v}')] t', \\ t' &= t N(\mathbf{v}, \mathbf{r}), \quad k^m(\mathbf{v}, \mathbf{r}) t' = [1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{v})] t. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Здесь введены выражения с трехмерными скоростями

$$\begin{aligned}
 \frac{T_0}{t} &= N(\mathbf{v}, \mathbf{r}) = \frac{N(\mathbf{v})}{A(\mathbf{v}, \mathbf{r})} = \left\{ \prod_m^4 [1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{v})]^{1 - (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{r})} \right\}^{1/4}, \\
 \frac{T_0}{t'} &= N(\mathbf{v}', \mathbf{r}) = \frac{N(\mathbf{v}')}{A(\mathbf{v}', \mathbf{r})} = \left\{ \prod_m^4 [1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{v}')]^{1 - (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{r})} \right\}^{1/4}, \\
 N(\mathbf{v}) &= \left\{ \prod_m^4 [1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{v})] \right\}^{1/4}, \quad N(\mathbf{v}') = \left\{ \prod_m^4 [1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{v}')] \right\}^{1/4}, \\
 A(\mathbf{v}, \mathbf{r}) &= \prod_m^4 \left[\frac{1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{v})}{N(\mathbf{v})} \right]^{(\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{r})/4}, \quad A(\mathbf{v}', \mathbf{r}) = \left\{ \prod_m^4 \left[\frac{1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{v}')}{N(\mathbf{v}')} \right]^{(\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{r})/4} \right\},
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

где множители $A(\mathbf{v}, \mathbf{r})$, $A(\mathbf{v}', \mathbf{r})$ зависят от вектора \mathbf{r} и $N(\mathbf{v}) = N(\mathbf{v}, 0)$.

В результате из (3.4) получим значения коэффициентов и соответствующие тождества

$$\begin{aligned}
 k^m(\mathbf{v}, \mathbf{r}) &= \frac{1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{v})}{N(\mathbf{v}, \mathbf{r})}, \quad k^m(\mathbf{v}', \mathbf{r}) = \frac{1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{v}')}{N(\mathbf{v}', \mathbf{r})}, \quad \frac{1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{v})}{N(\mathbf{v}, \mathbf{r})} \cdot \frac{1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{v}')}{N(\mathbf{v}', \mathbf{r})} = 1, \\
 \left\{ \frac{1}{4} \sum_m^4 [k^m(\mathbf{v}, \mathbf{r})]^2 \right\}^{1/2} &= \frac{\sqrt{1 + \mathbf{v}^2}}{N(\mathbf{v}, \mathbf{r})}, \quad \left\{ \frac{1}{4} \sum_m^4 [k^m(\mathbf{v}', \mathbf{r})]^2 \right\}^{1/2} = \frac{\sqrt{1 + \mathbf{v}'^2}}{N(\mathbf{v}', \mathbf{r})}, \\
 \frac{1}{4} \sum_m^4 k^m(\mathbf{v}, \mathbf{r}) &= \frac{1}{N(\mathbf{v}, \mathbf{r})}, \quad \frac{1}{4} \sum_m^4 k^m(\mathbf{v}', \mathbf{r}) = \frac{1}{N(\mathbf{v}', \mathbf{r})},
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

в которые входят относительные скорости систем (K) и (K') .

Прямые и обратные преобразования характеристик (3.2) примут вид

$$\begin{aligned}
 [t + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{x})] &= \frac{1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{v})}{N(\mathbf{v}, \mathbf{r})} [t' + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{x}')] = \frac{N(\mathbf{v}', \mathbf{r})}{1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{v}')} [t' + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{x}')], \\
 [t' + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{x}')] &= \frac{1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{v}')}{N(\mathbf{v}', \mathbf{r})} [t + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{x})] = \frac{N(\mathbf{v}, \mathbf{r})}{1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{v})} [t + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{x})],
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

а из (3.3) получим формулы для эффекта Доплера

$$\omega'^m = \frac{A(\mathbf{v}, \mathbf{r}) [1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{v})]}{N(\mathbf{v})} \omega^m, \quad \omega^m = \frac{A(\mathbf{v}', \mathbf{r}) [1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{v}')] }{N(\mathbf{v}')} \omega'^m, \tag{3.8}$$

с относительными скоростями движения источника и приемника сигналов в соответствии с принципом относительности.

В дополнение к равенству

$$\frac{t + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{x})}{t + (\boldsymbol{\varepsilon}^k \mathbf{x})} = \frac{1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{v})}{1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^k \mathbf{v})} \cdot \frac{t' + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{x}')}{t' + (\boldsymbol{\varepsilon}^k \mathbf{x}')}, \tag{3.9}$$

вытекающему из (3.7), имеем с учетом линейной зависимости векторов (2.10) соотношения для взаимосвязи скоростей

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{N(\mathbf{v}, \mathbf{r}) N(\mathbf{v}', \mathbf{r})} &= \frac{1}{4} \sum_m^4 \frac{1}{1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{v})} = \frac{1}{4} \sum_m^4 \frac{1}{1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{v}')} = \frac{1}{1 + (\mathbf{v} \mathbf{v}')}, \\
 1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{v}') &= \frac{1}{1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{v})} \left[\frac{1}{4} \sum_m^4 \frac{1}{1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{v})} \right]^{-1},
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

$$1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{v}) = \frac{1}{1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{v}')} \left[\frac{1}{4} \sum_m \frac{1}{1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{v}')} \right]^{-1},$$

где $1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{v}) \neq 0$ и $1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{v}') \neq 0$. Согласно (3.10), справедливы следующие формулы

$$\begin{aligned} \mathbf{v}' &= \left[\frac{1}{4} \sum_m \frac{\boldsymbol{\varepsilon}^m}{1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{v})} \right] \left[\frac{1}{4} \sum_m \frac{1}{1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{v})} \right]^{-1} = \left[-\frac{1}{4} \sum_m \frac{\boldsymbol{\varepsilon}^m (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{v})}{1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{v})} \right] \left[\frac{1}{4} \sum_m \frac{1}{1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{v})} \right]^{-1}, \\ \mathbf{v} &= \left[\frac{1}{4} \sum_m \frac{\boldsymbol{\varepsilon}^m}{1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{v}')} \right] \left[\frac{1}{4} \sum_m \frac{1}{1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{v}')} \right]^{-1} = \left[-\frac{1}{4} \sum_m \frac{\boldsymbol{\varepsilon}^m (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{v}')}{1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{v}')} \right] \left[\frac{1}{4} \sum_m \frac{1}{1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{v}')} \right]^{-1}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$A(\mathbf{v}, \mathbf{r}) A(\mathbf{v}', \mathbf{r}) = 1, \quad N(\mathbf{v}, \mathbf{r}) N(\mathbf{v}', \mathbf{r}) = N(\mathbf{v}) N(\mathbf{v}').$$

Учитывая равенства (2.10) и (2.13) получим прямые преобразования

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \frac{A(\mathbf{v}/c, \mathbf{r})}{N(\mathbf{v}/c)} \left[\mathbf{x}' + \mathbf{v}t' + \frac{1}{4c} \sum_m \boldsymbol{\varepsilon}^m (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{v}) (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{x}') \right] = \frac{N(\mathbf{v}'/c)}{4A(\mathbf{v}'/c, \mathbf{r})} \sum_m \boldsymbol{\varepsilon}^m \left[\frac{\boldsymbol{\varepsilon}^m (\mathbf{x}' - \mathbf{v}'t')}{1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{v}')/c} \right], \\ t &= \frac{A(\mathbf{v}/c, \mathbf{r})}{N(\mathbf{v}/c)} \left[t' + \frac{1}{c^2} (\mathbf{v} \mathbf{x}') \right] = \frac{N(\mathbf{v}'/c)}{4A(\mathbf{v}'/c, \mathbf{r})} \sum_m \frac{t' + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{x}')/c}{1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{v}')/c} \end{aligned} \quad (3.12)$$

и обратные между системами отсчетов (K) и (K')

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' &= \frac{A(\mathbf{v}'/c, \mathbf{r})}{N(\mathbf{v}'/c)} \left[\mathbf{x} + \mathbf{v}t + \frac{1}{4c} \sum_m \boldsymbol{\varepsilon}^m (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{v}') (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{x}) \right] = \frac{N(\mathbf{v}/c)}{4A(\mathbf{v}/c, \mathbf{r})} \sum_m \boldsymbol{\varepsilon}^m \left[\frac{\boldsymbol{\varepsilon}^m (\mathbf{x} - \mathbf{v}t)}{1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{v})/c} \right], \\ t' &= \frac{A(\mathbf{v}'/c, \mathbf{r})}{N(\mathbf{v}'/c)} \left[t + \frac{1}{c^2} (\mathbf{v}' \mathbf{x}) \right] = \frac{N(\mathbf{v}/c)}{4A(\mathbf{v}/c, \mathbf{r})} \sum_m \frac{t + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{x})/c}{1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{v})/c} \end{aligned} \quad (3.13)$$

в масштабных единицах с $c \neq 1$ и в векторной форме I.

Пусть система отсчета (K') движется относительно (K) вдоль оси x со скоростью $\mathbf{v} = \{v_x, 0, 0\}$. Тогда из (3.13) следуют прямые преобразования координат и времени

$$\begin{aligned} x &= \frac{A(v_x/c, \mathbf{r})}{N(v_x/c)} \left[x' + v_x t' + \frac{v_x}{4c} \sum_m (\boldsymbol{\varepsilon}_x^m)^2 (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{x}') \right] = \frac{N(\mathbf{v}'/c)}{4A(\mathbf{v}'/c, \mathbf{r})} \sum_m \boldsymbol{\varepsilon}_x^m \left[\frac{\boldsymbol{\varepsilon}^m (\mathbf{x}' - \mathbf{v}'t')}{1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{v}')/c} \right], \\ y &= \frac{A(v_x/c, \mathbf{r})}{N(v_x/c)} \left[y' + \frac{v_x}{4c} \sum_m (\boldsymbol{\varepsilon}_y^m \boldsymbol{\varepsilon}_x^m) (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{x}') \right] = \frac{N(\mathbf{v}'/c)}{4A(\mathbf{v}'/c, \mathbf{r})} \sum_m \boldsymbol{\varepsilon}_y^m \left[\frac{\boldsymbol{\varepsilon}^m (\mathbf{x}' - \mathbf{v}'t')}{1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{v}')/c} \right], \\ z &= \frac{A(v_x/c, \mathbf{r})}{N(v_x/c)} \left[z' + \frac{v_x}{4c} \sum_m (\boldsymbol{\varepsilon}_z^m \boldsymbol{\varepsilon}_x^m) (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{x}') \right] = \frac{N(\mathbf{v}'/c)}{4A(\mathbf{v}'/c, \mathbf{r})} \sum_m \boldsymbol{\varepsilon}_z^m \left[\frac{\boldsymbol{\varepsilon}^m (\mathbf{x}' - \mathbf{v}'t')}{1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{v}')/c} \right], \\ t &= \frac{A(v_x/c, \mathbf{r})}{N(v_x/c)} \left[t' + \frac{v_x x'}{c^2} \right] = \frac{N(\mathbf{v}'/c)}{4A(\mathbf{v}'/c, \mathbf{r})} \sum_m \frac{t' + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{x}')/c}{1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{v}')/c}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

где

$$N(v_x/c) = \left[\prod_m (1 + \boldsymbol{\varepsilon}_x^m v_x/c) \right]^{1/4}, \quad A(v_x/c, \mathbf{r}) = \prod_m \left[\frac{1 + \boldsymbol{\varepsilon}_x^m v_x/c}{N(v_x/c)} \right]^{(\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{r})/4}. \quad (3.15)$$

Скорость системы отсчета (K) относительно (K') равняется

$$\begin{aligned} \mathbf{v}' &= \left[\frac{1}{4} \sum_m \frac{\boldsymbol{\varepsilon}^m}{1 + \boldsymbol{\varepsilon}_x^m v_x/c} \right] \left[\frac{1}{4} \sum_m \frac{1}{1 + \boldsymbol{\varepsilon}_x^m v_x/c} \right]^{-1} = \\ &= \left[-\frac{1}{4} \sum_m \frac{\boldsymbol{\varepsilon}^m \boldsymbol{\varepsilon}_x^m v_x}{1 + \boldsymbol{\varepsilon}_x^m v_x/c} \right] \left[\frac{1}{4} \sum_m \frac{1}{1 + \boldsymbol{\varepsilon}_x^m v_x/c} \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

4. Закон композиции элементов группы координатных скоростей и его свойства

Рассмотрим закон композиции элементов группы координатных трехмерных скоростей с $c = 1$. Воспользуемся равенством

$$N(\mathbf{u}', \mathbf{r}) t' = N(\mathbf{u}, \mathbf{r}) t, \quad N(0, \mathbf{r}) = 1, \quad (4.1)$$

вытекающим из определения метрической функции, и, учитывая (3.12) и (3.13), получим соотношения

$$N(\mathbf{u}', \mathbf{r}) = \frac{N(\mathbf{v}', \mathbf{r}) N(\mathbf{u}, \mathbf{r})}{1 + (\mathbf{u}\mathbf{v}')}, \quad N(\mathbf{u}, \mathbf{r}) = \frac{N(\mathbf{v}, \mathbf{r}) N(\mathbf{u}', \mathbf{r})}{1 + (\mathbf{u}'\mathbf{v})}, \quad (4.2)$$

$$N(\mathbf{v}) N(\mathbf{v}') = [1 + (\mathbf{u}'\mathbf{v})] [1 + (\mathbf{u}\mathbf{v}')],$$

где $\mathbf{u} = \mathbf{x}/t$ и $\mathbf{u}' = \mathbf{x}'/t'$ – координатные скорости движения тел в системах (K) и (K') .

Закон композиции элементов группы в представлении группы в виде функции $k^m(\mathbf{u}, \mathbf{r})$ запишется, согласно (3.7) и (4.1), следующим образом

$$\frac{1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{u})}{N(\mathbf{u})} = \frac{1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{v})}{N(\mathbf{v})} \cdot \frac{1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{u}')}{N(\mathbf{u}')}, \quad (4.3)$$

$$A(\mathbf{u}, \mathbf{r}) = A(\mathbf{v}, \mathbf{r}) A(\mathbf{u}', \mathbf{r}), \quad A(\mathbf{u}', \mathbf{r}) = A(\mathbf{v}', \mathbf{r}) A(\mathbf{u}, \mathbf{r}).$$

для функции, зависящей только от скорости, и функции $A(\mathbf{u}, \mathbf{r})$. Для обеих функций выполняется бинарная операция закона композиции как обычная операция умножения. Пусть \mathbf{w}' есть скорость движения третьей инерциальной системы отсчета (K'') относительно второй (K') , а \mathbf{z}'' – относительно первой (K) . Тогда получим операции умножения функций $k^m(\mathbf{u}, \mathbf{r})$ и, согласно (3.6), равенства

$$k^m(\mathbf{u}, \mathbf{r}) = k^m(\mathbf{v}, \mathbf{r}) k^m(\mathbf{u}', \mathbf{r}), \quad k^m(\mathbf{u}', \mathbf{r}) = k^m(\mathbf{w}', \mathbf{r}) k^m(\mathbf{u}'', \mathbf{r}),$$

$$k^m(\mathbf{u}, \mathbf{r}) = k^m(\mathbf{z}'', \mathbf{r}) k^m(\mathbf{u}'', \mathbf{r}), \quad k^m(\mathbf{v}, \mathbf{r}) k^m(\mathbf{w}', \mathbf{r}) = k^m(\mathbf{z}'', \mathbf{r}),$$

$$\frac{\frac{1}{4} \sum_m^4 k^m(\mathbf{u}, \mathbf{r})}{\left\{ \frac{1}{4} \sum_m^4 [k^m(\mathbf{u}, \mathbf{r})]^2 \right\}^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \mathbf{u}^2}}, \quad (4.4)$$

$$\frac{\frac{1}{4} \sum_m^4 k^m(\mathbf{v}, \mathbf{r}) k^m(\mathbf{u}', \mathbf{r})}{\left\{ \frac{1}{4} \sum_m^4 [k^m(\mathbf{v}, \mathbf{r})]^2 \right\}^{1/2} \left\{ \frac{1}{4} \sum_m^4 [k^m(\mathbf{u}', \mathbf{r})]^2 \right\}^{1/2}} = \frac{1 + (\mathbf{v}\mathbf{u}')}{\sqrt{1 + \mathbf{v}^2} \sqrt{1 + \mathbf{u}'^2}},$$

где имеем закон композиции элементов группы

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} \circ \mathbf{u}', \quad \mathbf{u}' = \mathbf{w}' \circ \mathbf{u}'', \quad \mathbf{u} = \mathbf{z}'' \circ \mathbf{u}'', \quad \mathbf{v} \circ \mathbf{w}' = \mathbf{z}'' . \quad (4.5)$$

Прямые и обратные преобразования безразмерных координатных трехмерных скоростей

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{u}' + \mathbf{v} + \frac{1}{4} \sum_m^4 \varepsilon^m (\varepsilon^m \mathbf{u}') (\varepsilon^m \mathbf{v})}{1 + (\mathbf{u}'\mathbf{v})} = \frac{\sum_m^4 \varepsilon^m \left[\frac{\varepsilon^m (\mathbf{u}' - \mathbf{v}')}{1 + (\varepsilon^m \mathbf{v}')} \right]}{\sum_m^4 \frac{1 + (\varepsilon^m \mathbf{u}')}{1 + (\varepsilon^m \mathbf{v}')}}, \quad (4.6)$$

$$\mathbf{u}' = \frac{\mathbf{u} + \mathbf{v}' + \frac{1}{4} \sum_m^4 \varepsilon^m (\varepsilon^m \mathbf{u}) (\varepsilon^m \mathbf{v}')}{1 + (\mathbf{u}\mathbf{v}')} = \frac{\sum_m^4 \varepsilon^m \left[\frac{\varepsilon^m (\mathbf{u} - \mathbf{v})}{1 + (\varepsilon^m \mathbf{v})} \right]}{\sum_m^4 \frac{1 + (\varepsilon^m \mathbf{u})}{1 + (\varepsilon^m \mathbf{v})}}$$

в векторной форме I не зависят от вектор-параметра \mathbf{r} .

Таким образом, имеем неаддитивную группу элементов для координатных трехмерных скоростей, принадлежащих *только разным системам отсчётов*, с законом композиции, содержащим квадратичную нелинейность.

Формулы (4.6) есть дробно-линейные функции скоростей \mathbf{u} , \mathbf{u}' и представляют собой прямые и обратные проективные (коллинеарные) преобразования неоднородных координат в проективной геометрии.

Рассмотрим основные свойства закона композиции $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 \circ \mathbf{u}_2$, не различая скорости в разных системах и относительные скорости между ними. Закон композиции

$$\mathbf{u}_1 \circ \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_2 \circ \mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \frac{1}{4} \sum_m^4 \varepsilon^m (\varepsilon^m \mathbf{u}_1) (\varepsilon^m \mathbf{u}_2)}{1 + (\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2)} \quad (4.7)$$

имеет свойство коммутативности, то есть группа является абелевой.

Выполняются групповые аксиомы.

1. Ассоциативность:

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}_1 \circ \mathbf{u}_2) \circ \mathbf{u}_3 &= \mathbf{u}_1 \circ (\mathbf{u}_2 \circ \mathbf{u}_3) = \left\{ \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3 + \frac{1}{4} \sum_m^4 [\varepsilon^m (\varepsilon^m \mathbf{u}_1) (\varepsilon^m \mathbf{u}_2) + \right. \\ &+ \varepsilon^m (\varepsilon^m \mathbf{u}_2) (\varepsilon^m \mathbf{u}_3) + \varepsilon^m (\varepsilon^m \mathbf{u}_3) (\varepsilon^m \mathbf{u}_1)] + \frac{1}{4} \sum_m^4 \varepsilon^m (\varepsilon^m \mathbf{u}_1) (\varepsilon^m \mathbf{u}_2) (\varepsilon^m \mathbf{u}_3) \left. \right\} \times \\ &\times \left\{ 1 + (\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2) + (\mathbf{u}_2 \mathbf{u}_3) + (\mathbf{u}_3 \mathbf{u}_1) + \frac{1}{4} \sum_m^4 (\varepsilon^m \mathbf{u}_1) (\varepsilon^m \mathbf{u}_2) (\varepsilon^m \mathbf{u}_3) \right\}^{-1}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

2. Единичный элемент: $\mathbf{u} \circ \mathbf{E} = \mathbf{u}$. Единичный элемент соответствует нулевому значению скорости.

3. Обратный элемент: $\mathbf{u} \circ \mathbf{u}^{-1} = \mathbf{E}$. Выражение обратного элемента равняется

$$\mathbf{u}^{-1} = \left[\frac{1}{4} \sum_m^4 \frac{\varepsilon^m}{1 + (\varepsilon^m \mathbf{u})} \right] \left[\frac{1}{4} \sum_m^4 \frac{1}{1 + (\varepsilon^m \mathbf{u})} \right]^{-1} = \left[-\frac{1}{4} \sum_m^4 \frac{\varepsilon^m (\varepsilon^m \mathbf{u})}{1 + (\varepsilon^m \mathbf{u})} \right] \left[\frac{1}{4} \sum_m^4 \frac{1}{1 + (\varepsilon^m \mathbf{u})} \right]^{-1} \quad (4.9)$$

при дополнительных условиях $1 + (\varepsilon^m \mathbf{u}) \neq 0$ и $1 + (\mathbf{u}\mathbf{u}^{-1}) \neq 0$. Согласно (4.9) следует, что относительная скорость $\mathbf{v}' = \mathbf{v}^{-1}$ есть обратный элемент группы для относительной скорости \mathbf{v} , не равный противоположному элементу $(-\mathbf{v})$. Тогда закон композиции $\mathbf{u} = \mathbf{v} \circ \mathbf{u}'$ запишется в виде $\mathbf{u} = (\mathbf{v}')^{-1} \circ \mathbf{u}'$. Это означает некоммутативность закона композиции трёхмерных скоростей, принадлежащих *только одной системе отсчёта* при замене \mathbf{v}' на \mathbf{u}' , что также следует из (4.6). Обратный элемент (4.9) равен сумме векторов ε^m , умноженных на коэффициенты, зависящие от скорости \mathbf{u} .

Используя закон композиции и приведенные свойства, находим следующие равенства

$$\begin{aligned}
 1 + (\mathbf{u}\mathbf{u}^{-1}) &= \left[\frac{1}{4} \sum_m^4 \frac{1}{1 + (\varepsilon^m \mathbf{u})} \right]^{-1} = \left[\frac{1}{4} \sum_m^4 \frac{1}{1 + (\varepsilon^m \mathbf{u}^{-1})} \right]^{-1} = N(\mathbf{u}) N(\mathbf{u}^{-1}), \\
 \frac{\mathbf{u} + \mathbf{u}^{-1}}{1 + (\mathbf{u}\mathbf{u}^{-1})} &= \frac{1}{4} \sum_m^4 \frac{\varepsilon^m + \mathbf{u}}{1 + (\varepsilon^m \mathbf{u})} = \frac{1}{4} \sum_m^4 \frac{\varepsilon^m + \mathbf{u}^{-1}}{1 + (\varepsilon^m \mathbf{u}^{-1})}, \\
 \mathbf{u} = (\mathbf{u}^{-1})^{-1} &= \left[\frac{1}{4} \sum_m^4 \frac{\varepsilon^m}{1 + (\varepsilon^m \mathbf{u}^{-1})} \right] \left[\frac{1}{4} \sum_m^4 \frac{1}{1 + (\varepsilon^m \mathbf{u}^{-1})} \right]^{-1}, \\
 N(\mathbf{u}) &= \frac{N(\mathbf{u}_1) N(\mathbf{u}_2)}{1 + (\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2)}, \\
 \frac{\mathbf{u}}{N(\mathbf{u})} &= \frac{\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \frac{1}{4} \sum_m^4 \varepsilon^m (\varepsilon^m \mathbf{u}_1) (\varepsilon^m \mathbf{u}_2)}{N(\mathbf{u}_1) N(\mathbf{u}_2)}, \\
 [1 + (\varepsilon^m \mathbf{u})] [1 + (\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2)] &= [1 + (\varepsilon^m \mathbf{u}_1)] [1 + (\varepsilon^m \mathbf{u}_2)], \\
 \mathbf{u}_1 = \mathbf{u} \circ \mathbf{u}_2^{-1} &= \left\{ \frac{1}{4} \sum_m^4 \frac{\varepsilon^m + \mathbf{u}}{1 + (\varepsilon^m \mathbf{u}_2)} + \frac{1}{4} \sum_k^4 \sum_m^4 \frac{\varepsilon^m (\varepsilon^m \mathbf{u}) (\varepsilon^k \mathbf{u}_2)}{1 + (\varepsilon^k \mathbf{u}_2)} \right\} \left\{ \frac{1}{4} \sum_m^4 \frac{1 + (\varepsilon^m \mathbf{u})}{1 + (\varepsilon^m \mathbf{u}_2)} \right\}^{-1}, \quad (4.10) \\
 \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_1^{-1} \circ \mathbf{u} &= \left\{ \frac{1}{4} \sum_m^4 \frac{\varepsilon^m + \mathbf{u}}{1 + (\varepsilon^m \mathbf{u}_1)} + \frac{1}{4} \sum_k^4 \sum_m^4 \frac{\varepsilon^m (\varepsilon^m \mathbf{u}) (\varepsilon^k \mathbf{u}_1)}{1 + (\varepsilon^k \mathbf{u}_1)} \right\} \left\{ \frac{1}{4} \sum_m^4 \frac{1 + (\varepsilon^m \mathbf{u})}{1 + (\varepsilon^m \mathbf{u}_1)} \right\}^{-1}, \\
 \frac{1}{4} \sum_m^4 \varepsilon^m (\varepsilon^m \mathbf{u}) &= \mathbf{u}, \quad \frac{1}{4} \sum_m^4 \varepsilon^m (\varepsilon^m \varepsilon^k) (\varepsilon^m \mathbf{u}) = \varepsilon^k (\varepsilon^k \mathbf{u}) - \mathbf{u}, \\
 \frac{1}{4} \sum_m^4 (\varepsilon^m \mathbf{u}_1) (\varepsilon^m \mathbf{u}_2) &= \frac{1}{16} \sum_k^4 \sum_m^4 (\varepsilon^k \varepsilon^m) (\varepsilon^m \mathbf{u}_1) (\varepsilon^m \mathbf{u}_2) = (\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2), \\
 \frac{1}{4} \sum_m^4 (\varepsilon^k \varepsilon^m) (\varepsilon^m \mathbf{u}_1) (\varepsilon^m \mathbf{u}_2) &= (\varepsilon^k \mathbf{u}_1) (\varepsilon^k \mathbf{u}_2) - (\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2), \\
 |\mathbf{u}| = \sqrt{\mathbf{u}^2} &= \sqrt{\frac{1}{4} \sum_m^4 (\varepsilon^m \mathbf{u}) (\varepsilon^m \mathbf{u})}.
 \end{aligned}$$

Для векторов выделенных направлений, не являющихся элементами группы скоростей вследствие отсутствия обратных элементов, справедливо *только формальное равенство*

$$\varepsilon^m \circ \mathbf{u} = \mathbf{u} \circ \varepsilon^m = \varepsilon^m. \quad (4.11)$$

Наконец, рассмотрим частный случай, когда закон композиции зависит только от значений неоднородных проективных координат. Необходимо, например, следующее дополнительное требование к **Равенствам 1 и 2**.

Равенство 3. Выполняется равенство

$$\frac{1}{4} \sum_m^4 \varepsilon_i^m \varepsilon_j^m \varepsilon_r^m = \varepsilon_{ijr}, \quad (4.12)$$

где ε_{ijr} – симметричный символ со свойствами $\varepsilon_{ijr} = 1$ при $i \neq j \neq r$, а остальные значения являются нулевыми. Тогда, закон композиции векторов в координатном представлении имеет следующий вид

$$\mathbf{u}_i = \left[u_{1i} + u_{pi} + \sum_{j,k}^3 \varepsilon_{ijk} u_{1j} u_{2k} \right] \times \left[1 + \sum_{i,j}^3 \delta_{ij} u_{1i} u_{2j} \right]^{-1}. \quad (4.13)$$

5. Угловая мера

Определение 5. Выражение аддитивной угловой меры равняется

$$\alpha^m(\mathbf{u}) = \ln \frac{1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{u})}{N(\mathbf{u})}, \quad \alpha^m(0) = 0. \quad (5.1)$$

Согласно (3.6) и (5.1), имеют место соотношения

$$\begin{aligned} \alpha^m(\mathbf{u}) &= \alpha^m(\mathbf{u}_1) + \alpha^m(\mathbf{u}_2), \quad \sum_m^4 \alpha^m(\mathbf{u}) = 0, \\ \frac{1}{4} \sum_m^4 \exp[\alpha^m(\mathbf{u})] &= \frac{1}{N(\mathbf{u})}, \quad \frac{1}{4} \sum_m^4 \exp[-\alpha^m(\mathbf{u})] = \frac{1}{N(\mathbf{u}^{-1})}, \\ \alpha^m(\mathbf{u}^{-1}) &= -\alpha^m(\mathbf{u}) = \ln \frac{1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{u}^{-1})}{N(\mathbf{u}^{-1})}, \\ \mathbf{u} &= \frac{\sum_m^4 \boldsymbol{\varepsilon}^m e^{\alpha^m(\mathbf{u})}}{\sum_m^4 e^{\alpha^m(\mathbf{u})}}, \quad \mathbf{u}^{-1} = \frac{\sum_m^4 \boldsymbol{\varepsilon}^m e^{-\alpha^m(\mathbf{u})}}{\sum_m^4 e^{-\alpha^m(\mathbf{u})}}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Определение 6. Вектор-параметр $\boldsymbol{\beta} = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ угловой меры определяется так

$$\boldsymbol{\beta} = \frac{1}{4} \sum_m^4 \boldsymbol{\varepsilon}^m \alpha^m(\mathbf{u}). \quad (5.3)$$

Учитывая (2.15), (3.5) и (5.2), получим равенства для угловой меры и соотношения

$$\begin{aligned} \alpha^m(\mathbf{u}) &= (\boldsymbol{\varepsilon}^m \boldsymbol{\beta}), \quad (\mathbf{r} \boldsymbol{\beta}) = \ln A(\mathbf{u}, \mathbf{r}) = \ln \prod_m^4 \left[\frac{1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{u})}{N(\mathbf{u})} \right]^{(\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{r})/4}, \quad \boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}) = \boldsymbol{\beta}(\mathbf{v}) + \boldsymbol{\beta}(\mathbf{u}'), \\ t - (\mathbf{r} \mathbf{x})/c &= \sum_m^4 T^m p^m, \quad \mathbf{x} - \mathbf{r} c t - \frac{1}{4} \sum_m^4 \boldsymbol{\varepsilon}^m (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{x}) (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{r}) = c \sum_m^4 \boldsymbol{\varepsilon}^m T^m p^m, \\ (\mathbf{u}/c) \circ (-\mathbf{r}) &= \frac{\sum_m^4 \boldsymbol{\varepsilon}^m T^m p^m}{\sum_m^4 T^m p^m}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Преобразования характеристик (3.7) приобретут следующий вид

$$\begin{aligned} t + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{x}) &= e^{(\mathbf{r} \boldsymbol{\beta})} e^{(\boldsymbol{\varepsilon}^m \boldsymbol{\beta})} [t' + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{x}')], \\ t' + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{x}') &= e^{(\mathbf{r} \boldsymbol{\beta}')} e^{(\boldsymbol{\varepsilon}^m \boldsymbol{\beta}')} [t + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{x})]. \end{aligned} \quad (5.5)$$

В (5.5) выделен конформный множитель, зависящий от вектор-параметров $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}(\mathbf{v})$, $\boldsymbol{\beta}' = \boldsymbol{\beta}(\mathbf{v}') = -\boldsymbol{\beta}$ и \mathbf{r} .

Согласно (2.17) и (5.1), справедливы представления характеристик

$$\begin{aligned} \frac{T^m}{\left(\frac{1}{4} \sum_m^4 T^m\right)} &= e^{\beta + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \boldsymbol{\beta})}, \quad \frac{c T^m}{F} = e^{(\mathbf{r} \boldsymbol{\beta}) + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \boldsymbol{\beta})}, \\ \frac{F}{\left(\frac{1}{4} \sum_m^4 c T^m\right)} &= e^{\beta - (\mathbf{r} \boldsymbol{\beta})}, \quad \beta = \ln N(\mathbf{u}). \end{aligned} \quad (5.6)$$

Введем значения углов $\alpha_4 = -\alpha(\mathbf{v})$, $\alpha_n = \alpha^n(\mathbf{v})$ ($n = 1, 2, 3$) и запишем, согласно (5.5), прямые преобразования координат и времени с $c \neq 1$ в векторной форме II

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= e^{(r\beta)} \left\{ \frac{c}{4} \sum_n^3 [e^{(\varepsilon^n\beta)} + e^{-(\varepsilon\beta)}] \varepsilon^n t + \frac{1}{4} \sum_n^3 \left[e^{(\varepsilon^n\beta)} \varepsilon^n + e^{-(\varepsilon\beta)} \sum_k^3 \varepsilon^k \right] (\varepsilon^n \mathbf{x}') \right\}, \\ t &= e^{(r\beta)} \left\{ \frac{1}{4} \left[\sum_n^3 e^{(\varepsilon^n\beta)} + e^{-(\varepsilon\beta)} \right] t' + \frac{1}{4c} \sum_n^3 [e^{(\varepsilon^n\beta)} - e^{-(\varepsilon\beta)}] (\varepsilon^n \mathbf{x}') \right\}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Обратные преобразования имеют такой же вид при замене $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}'$, $t \rightarrow t'$ и $\beta \rightarrow -\beta$.

Из (5.2) и (5.3) вытекают выражение вектора трехмерной скорости \mathbf{v} и вектор-параметра

$$\mathbf{v} = c \frac{\sum_n^3 \varepsilon^n [e^{(\varepsilon^n\beta)} - e^{-(\varepsilon\beta)}]}{\left[\sum_n^3 e^{(\varepsilon^n\beta)} + e^{-(\varepsilon\beta)} \right]}, \quad \beta = \frac{1}{4} \sum_n^3 \varepsilon^n [\alpha^n(\mathbf{u}) - \alpha(\mathbf{u})], \quad (\varepsilon\beta) = \sum_n^3 (\varepsilon^n\beta), \quad (5.8)$$

зависящие от рассматриваемых углов.

6. Энергия и импульс частицы

Приведем краткое рассмотрение движения частицы в инерциальной системе отсчета (K) и запишем при $c \neq 1$ функцию Лагранжа

$$L = -m_0 c^2 F(dx/dt, \mathbf{r}) = -m_0 c^2 N(\mathbf{u}/c, \mathbf{r}), \quad N(\mathbf{u}/c, \mathbf{r}) = \left\{ \prod_m^4 [1 + (\varepsilon^m \mathbf{u})/c]^{1 - (\varepsilon^m \mathbf{r})} \right\}^{1/4}. \quad (6.1)$$

Здесь выполняется условие $\mathbf{r} \neq -\varepsilon^k$ при $m_0 \neq 0$, так как при равенстве \mathbf{r} с вектором одного какого-либо выделенного направления ε^k из (6.1) вытекает функция Лагранжа $L = -m_0 c^2 [1 - (\mathbf{r}\mathbf{u})/c]$, которая линейно зависит от скорости.

Используя гамильтонов формализм, находим импульс и энергию частицы в векторных формах

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}} = m_0 c N(\mathbf{u}/c, \mathbf{r}) \left[\frac{1}{4} \sum_m^4 \varepsilon^m \frac{\varepsilon^m (\mathbf{u}/c + \mathbf{r})}{1 + (\varepsilon^m \mathbf{u})/c} \right] = \\ &= \frac{m_0 c}{N(\mathbf{u}^{-1}/c, \mathbf{r})} \left[-\mathbf{u}^{-1}/c + \mathbf{r} + \frac{1}{4c} \sum_m^4 \varepsilon^m (\varepsilon^m \mathbf{u}^{-1}) (\varepsilon^m \mathbf{r}) \right], \end{aligned} \quad (6.2)$$

$$E = (\mathbf{p}\mathbf{u}) - L = m_0 c^2 N(\mathbf{u}/c, \mathbf{r}) \left[\frac{1}{4} \sum_m^4 \frac{1 - (\varepsilon^m \mathbf{r})}{1 + (\varepsilon^m \mathbf{u})/c} \right] = \frac{m_0 c^2}{N(\mathbf{u}^{-1}/c, \mathbf{r})} [1 - (\mathbf{u}^{-1} \mathbf{r})/c],$$

Будем различать три частных случая. В первом при $\mathbf{p} = 0$ имеет место $E = m_0 c^2 N(-\mathbf{r}, \mathbf{r})$ для движущейся частицы со скоростью $\mathbf{u} = -c\mathbf{r}$. Второй случай при $\mathbf{r} = 0$ соответствует обобщенной метрической функции Бервальда-Моора. Для подобного пространства-времени имеем значения $\mathbf{p} = -m_0 \mathbf{u}^{-1}/N(\mathbf{u}^{-1}/c)$ и $E = m_0 c^2/N(\mathbf{u}^{-1}/c)$. Если $\mathbf{u} = 0$, то в третьем случае получим значения энергии $E_0 = m_0 c^2$, импульса $\mathbf{p}_0 = m_0 c \mathbf{r}$ и вектор-параметра $c\mathbf{p}_0/E_0 = \mathbf{r}$ покоящейся частицы, отмеченные в работе [10]. Отметим также наличие собственного момента импульса $\mathbf{M}_0 = m_0 c [\mathbf{x}\mathbf{r}]$ покоящейся частицы, который изменяется при преобразованиях (3.12). В общем случае выражения (6.2) с учетом (4.10) дают соотношения

$$\begin{aligned} E - c(\varepsilon^m \mathbf{p}) &= \frac{1 + (\varepsilon^m \mathbf{u}^{-1})/c}{N(\mathbf{u}^{-1}/c, \mathbf{r})} [E_0 - c(\varepsilon^m \mathbf{p}_0)], \\ E_0 - c(\varepsilon^m \mathbf{p}_0) &= \frac{1 + (\varepsilon^m \mathbf{u})/c}{N(\mathbf{u}/c, \mathbf{r})} [E - c(\varepsilon^m \mathbf{p})], \end{aligned} \quad (6.3)$$

из которых вытекают энергия, импульс покоящейся частицы и вектор-параметр

$$E_0 = \frac{E - (\mathbf{p}\mathbf{u})}{N(\mathbf{u}/c, \mathbf{r})}, \quad \mathbf{p}_0 = \frac{1}{N(\mathbf{u}/c, \mathbf{r})} \left[\mathbf{p} - E\mathbf{u}/c^2 + \frac{1}{4c} \sum_m^4 \varepsilon^m (\varepsilon^m \mathbf{u}) (\varepsilon^m \mathbf{p}) \right],$$

$$\mathbf{r} = \frac{c\mathbf{p}_0}{E_0} = \frac{\left[\mathbf{p} - E\mathbf{u}/c^2 + \frac{1}{4c} \sum_m^4 \varepsilon^m (\varepsilon^m \mathbf{u}) (\varepsilon^m \mathbf{p}) \right]}{E - (\mathbf{p}\mathbf{u})}. \quad (6.4)$$

Согласно (6.3) справедлива следующая формула

$$\left\{ \prod_m^4 [E - c(\varepsilon^m \mathbf{p})]^{1 - (\varepsilon^m \mathbf{r})} \right\}^{1/4} = m_0 c^2 \left\{ \prod_m^4 [1 - (\varepsilon^m \mathbf{r})]^{1 - (\varepsilon^m \mathbf{r})} \right\}^{1/4} \quad (6.5)$$

взаимосвязи энергии и импульса, а также значения скоростей

$$\mathbf{u} = \frac{\partial E}{\partial \mathbf{p}} = c \sum_m^4 \frac{\varepsilon^m (1 - \varepsilon^m \mathbf{r})}{E - c(\varepsilon^m \mathbf{p})} \left[\sum_m^4 \frac{1 - (\varepsilon^m \mathbf{r})}{E - c(\varepsilon^m \mathbf{p})} \right]^{-1},$$

$$\frac{c^2 \mathbf{p}}{E} = \left[\frac{1}{4} \sum_m^4 \varepsilon^m \frac{\varepsilon^m (\mathbf{u} + c\mathbf{r})}{1 + (\varepsilon^m \mathbf{u})/c} \right] \left[\sum_m^4 \frac{1 - (\varepsilon^m \mathbf{r})}{1 + (\varepsilon^m \mathbf{u})/c} \right]^{-1}. \quad (6.6)$$

Представим (6.3) в общем виде

$$E - c(\varepsilon^m \mathbf{p}) = \frac{1 + (\varepsilon^m \mathbf{v}')/c}{N(\mathbf{v}'/c, \mathbf{r})} [E' - c(\varepsilon^m \mathbf{p}')] = \frac{N(\mathbf{v}/c, \mathbf{r})}{1 + (\varepsilon^m \mathbf{v})/c} [E' - c(\varepsilon^m \mathbf{p}')],$$

$$E' - c(\varepsilon^m \mathbf{p}') = \frac{1 + (\varepsilon^m \mathbf{v})/c}{N(\mathbf{v}/c, \mathbf{r})} [E - c(\varepsilon^m \mathbf{p})] = \frac{N(\mathbf{v}'/c, \mathbf{r})}{1 + (\varepsilon^m \mathbf{v}')/c} [E - c(\varepsilon^m \mathbf{p})], \quad (6.7)$$

где используются коэффициенты $k^m(\mathbf{v}/c, \mathbf{r})$ и $k^m(\mathbf{v}'/c, \mathbf{r})$. Тогда из (6.7) получим прямые преобразования энергии и импульса между инерциальными системами отсчётов (K) и (K') в векторной форме I

$$\mathbf{p} = \frac{A(\mathbf{v}'/c, \mathbf{r})}{N(\mathbf{v}'/c)} \left[\mathbf{p}' - \frac{E'\mathbf{v}'}{c^2} + \frac{1}{4c} \sum_m^4 \varepsilon^m (\varepsilon^m \mathbf{v}') (\varepsilon^m \mathbf{p}') \right] = \frac{N(\mathbf{v}/c)}{4A(\mathbf{v}/c, \mathbf{r})} \sum_m^4 \varepsilon^m \left[\frac{\varepsilon^m (\mathbf{p}' + E'\mathbf{v}/c^2)}{1 + (\varepsilon^m \mathbf{v})/c} \right],$$

$$E = \frac{A(\mathbf{v}'/c, \mathbf{r})}{N(\mathbf{v}'/c)} [E' - (\mathbf{v}'\mathbf{p}')] = \frac{N(\mathbf{v}/c)}{4A(\mathbf{v}/c, \mathbf{r})} \sum_m^4 \frac{E' - c(\varepsilon^m \mathbf{p}')}{1 + (\varepsilon^m \mathbf{v})/c}, \quad (6.8)$$

которые оставляют форм-инвариантным соотношение (6.5). Обратные преобразования, вытекающие из (6.8), имеют такой же вид при замене $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p}'$, $E \rightarrow E'$ и $\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{v}'$.

Введем в пространстве с координатами $\{E, c\mathbf{p}\}$ четыре характеристики $E^m = E - c(\varepsilon^m \mathbf{p})$, для которых справедливы соотношения

$$E^2 + c^2 \mathbf{p}^2 = \frac{1}{4} \sum_m^4 (E^m)^2, \quad E = \frac{1}{4} \sum_m^4 E^m, \quad -\mathbf{p} = \frac{1}{4c} \sum_m^4 \varepsilon^m E^m, \quad -\frac{c\mathbf{p}}{E} = \frac{\sum_m^4 \varepsilon^m E^m}{\sum_m^4 E^m}. \quad (6.9)$$

В (6.9) имеем квадратичную форму, которая при равенстве значению $(m_0 c^2)^2$ определяет гиперповерхность второго порядка, пересекающую все четыре характеристики. Величины E^m линейной вектор-функции первого рода дают четыре оси рассматриваемой гиперповерхности.

Преобразования (3.12) и (6.8) также вытекают из инвариантности соотношения для характеристик $E^m T^m = E'^m T'^m$, записанного в форме

$$[E - c(\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{p})] [t + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{x}) / c] = [E' - c(\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{p}')] [t' + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{x}') / c]. \quad (6.10)$$

Согласно (5.5) из (6.10) получим преобразования с угловой мерой

$$E^m = e^{(\mathbf{r}\boldsymbol{\beta}')} e^{(\boldsymbol{\varepsilon}^m \boldsymbol{\beta}')} E'^m, \quad E'^m = e^{(\mathbf{r}\boldsymbol{\beta})} e^{(\boldsymbol{\varepsilon}^m \boldsymbol{\beta})} E^m. \quad (6.11)$$

Из преобразований (6.2), (6.4) и (6.8) находим законы композиции элементов группы с $c \neq 1$

$$\begin{aligned} (-c\mathbf{p}/E) &= (\mathbf{u}^{-1}/c) \circ (-\mathbf{r}), & (-\mathbf{r})^{-1} &= (-c\mathbf{p}/E)^{-1} \circ (\mathbf{u}^{-1}/c), \\ (-c\mathbf{p}/E) &= (\mathbf{v}'/c) \circ (-c\mathbf{p}'/E'), & (-c\mathbf{p}'/E') &= (\mathbf{v}/c) \circ (-c\mathbf{p}/E), \\ (-\mathbf{r}) &= (\mathbf{u}/c) \circ (-c\mathbf{p}/E) = (\mathbf{u}'/c) \circ (-c\mathbf{p}'/E'). \end{aligned} \quad (6.12)$$

Следовательно, безразмерные скорости \mathbf{u}/c , $(-c\mathbf{p}/E)$ и вектор-параметр $(-\mathbf{r})$ являются равноправными элементами группы трехмерных скоростей и справедливы следующие условия $1 - (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{p}) c/E \geq 0$, $1 - (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{r}) > 0$. Последнее равенство в (6.12) означает инвариантность вектор-параметра \mathbf{r} , что и следовало ожидать.

Для частицы с $m_0 = 0$ из (6.3) следует равенство $E = c(\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{p})$ и, с учетом (4.11) и (6.12), имеют место соотношения

$$\begin{aligned} -\mathbf{u}^{-1} = \mathbf{r} = -\boldsymbol{\varepsilon}^k, \quad \mathbf{p} = m c \mathbf{r} (1 + \mathbf{r}^2), \quad E = m c^2 (1 + \mathbf{r}^2), \\ m = \lim_{\substack{m_0 \rightarrow 0 \\ \mathbf{u} \rightarrow c\boldsymbol{\varepsilon}^k}} \frac{m_0}{N(\mathbf{u}/c, \mathbf{r})}, \quad \mathbf{p} = \frac{E \mathbf{r}}{c}, \quad E = m c^2 \left(1 + \frac{c^2 \mathbf{p}^2}{E^2} \right). \end{aligned} \quad (6.13)$$

Здесь \mathbf{r} совпадает с фиксированным значением вектора выделенного направления и m есть масса "фотона" в финслеровом пространстве-времени.

Согласно (4.10) выпишем некоторые соотношения

$$\begin{aligned} EN(-c\mathbf{p}/E, \mathbf{r}) &= m_0 c^2 N(-\mathbf{r}, \mathbf{r}), \quad N(0, \mathbf{r}) = 1, \\ N(-c\mathbf{p}/E) &= \left\{ \prod_m^4 [1 - (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{p}) c/E]^{1 - (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{r})} \right\}^{1/4}, \quad N(-\mathbf{r}, \mathbf{r}) = \left\{ \prod_m^4 [1 - (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{r})]^{1 - (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{r})} \right\}^{1/4}, \\ 1 - (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{r}) &= \frac{[1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{u}) / c] [E - c(\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{p})]}{E - (\mathbf{u} \mathbf{p})}, \end{aligned} \quad (6.14)$$

$$\frac{1 - (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{r})}{N(-\mathbf{r})} = \frac{1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{u}) / c}{N(\mathbf{u}/c)} \cdot \frac{1 - (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{p}) c/E}{N(-c\mathbf{p}/E)}, \quad N(-\mathbf{r}, \mathbf{r}) = \frac{N(\mathbf{u}/c, \mathbf{r}) N(-c\mathbf{p}/E, \mathbf{r})}{1 - (\mathbf{u} \mathbf{p}) / E}.$$

Имеют место также выражение для обратного элемента вектор-параметра

$$(-\mathbf{r})^{-1} = \left[\frac{1}{4} \sum_m^4 \frac{\boldsymbol{\varepsilon}^m}{1 - (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{r})} \right] \left[\frac{1}{4} \sum_m^4 \frac{1}{1 - (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{r})} \right]^{-1} = \left[\frac{1}{4} \sum_m^4 \frac{\boldsymbol{\varepsilon}^m (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{r})}{1 - (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{r})} \right] \left[\frac{1}{4} \sum_m^4 \frac{1}{1 - (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{r})} \right]^{-1} \quad (6.15)$$

и следующие равенства

$$\begin{aligned}
\ln T_0 &= \sum_m^4 p^m \ln T^m, & \ln N(-\mathbf{r}, \mathbf{r}) &= \sum_m^4 p^m \ln p^m, \\
T_0 &= \lim_{q \rightarrow 0} N_q(T), & N(-\mathbf{r}, \mathbf{r}) &= \lim_{q \rightarrow 0} N_q(p), \\
N_q(T) &= \left\{ \sum_m^4 (T^m)^q p^m \right\}^{1/q}, & N_q(p) &= \left\{ \sum_m^4 (p^m)^{q+1} \right\}^{1/q}, \\
& \frac{1 - (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{r})}{N(-\mathbf{r})} \cdot \frac{1 + [\boldsymbol{\varepsilon}^m (-\mathbf{r})^{-1}]}{N[(-\mathbf{r})^{-1}]} = 1, \\
\prod_m^4 [t + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{x}) / c] & \frac{1 - (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{r})}{N(-\mathbf{r})} = \prod_m^4 [t + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{x}) / c] & \frac{N[(-\mathbf{r})^{-1}]}{1 + [\boldsymbol{\varepsilon}^m (-\mathbf{r})^{-1}]}.
\end{aligned} \tag{6.16}$$

При вероятностной трактовке величины p^m интерпретируются как распределение вероятностей, а T^m – как случайные величины, характеризующие объект геометрии. Тогда функция $N_q(T)$ для значения $1 \leq q < \infty$ есть выражения полунормы [19]. Для полунормы допустимо $N_q(T) = 0$ при $T \neq 0$. Этим свойством полунорма отличается от нормы $N_2(T) = \left\{ \sum_m^4 (T^m)^2 p^m \right\}^{1/2}$ при $q = 2$. Если $\mathbf{r} = 0$, то имеем равновероятное распределение $p^m = 1/4$.

Наконец, представим сигнал для установления отношения одновременности (2.2) в виде плоской волны де Бройля в нормальной форме

$$\psi(\mathbf{x}, t) = A \exp i[Et - (\mathbf{p}\mathbf{x})] / \hbar = A \exp i\omega [t - (\mathbf{k}\mathbf{x}) / \omega], \tag{6.17}$$

где A – амплитуда, \mathbf{k} – волновой вектор, $E = \hbar\omega$ и $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$. Согласно (6.10) величина

$$\varphi = \frac{[Et - (\mathbf{p}\mathbf{x})]}{\hbar} = \frac{1}{4\hbar} \sum_m^4 E^m T^m = \frac{1}{4\hbar} \sum_m^4 E'^m T'^m \tag{6.18}$$

есть форм-инвариантная фаза волны.

Для частицы с $\mathbf{p} = 0$ и $\mathbf{u} = 0$ имеем, соответственно, волны в формах

$$\begin{aligned}
\psi(\mathbf{x}, t) &= A \exp i[Et] / \hbar = A \exp [i\omega_0 t N(-\mathbf{r}, \mathbf{r})], & \omega_0 &= m_0 c^2 / \hbar, \\
\psi(\mathbf{x}, t) &= A \exp i[E_0 t - (\mathbf{p}_0 \mathbf{x})] / \hbar = A \exp i\omega_0 [t - (\mathbf{r}\mathbf{x}) / c].
\end{aligned} \tag{6.19}$$

Волновая функция в обобщенном пространстве-времени Бервальда-Моора с $\mathbf{r} = 0$ удовлетворяет, согласно (6.5), следующему уравнению в операторном виде

$$\left\{ \prod_m^4 \left[\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{\varepsilon}^m \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right] \right\} \psi(\mathbf{x}, t) = \left(\frac{m_0 c^2}{\hbar} \right)^4 \psi(\mathbf{x}, t). \tag{6.20}$$

7. Обсуждение

В работе приводятся *Определения*, на основе которых строится теория анизотропного финслерова пространства-времени. Рассмотрим некоторые выводы, вытекающие из полученных результатов.

Используем значения компонентов векторов $\boldsymbol{\varepsilon} = (-1, -1, -1)$, $\boldsymbol{\varepsilon}^1 = (-1, 1, -1)$, $\boldsymbol{\varepsilon}^2 = (1, -1, -1)$, $\boldsymbol{\varepsilon}^3 = (-1, -1, 1)$ для специально ориентированного координатного тетраэдра, введенные в работах [6–9] и удовлетворяющие *Равенствам 1–3*. В результате

симметричная матрица H в (2.15) есть матрица Адамара порядка 4 с элементами равными числам ± 1

$$\mathbf{H}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_2 & \mathbf{H}_2 \\ \mathbf{H}_2 & -\mathbf{H}_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_1 & \mathbf{H}_1 \\ \mathbf{H}_1 & -\mathbf{H}_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H}_1 = 1. \quad (7.1)$$

Матрица Адамара находится методом Сильвестра рекуррентным вычислением из матриц \mathbf{H}_1 и \mathbf{H}_2 и широко используется в теории информации. Поскольку первая строка и первый столбец состоят из чисел $+1$, то имеем нормализованную матрицу Адамара. Причём элементы строк матрицы являются дискретными значениями ортогональных функций Уолша.

Из (3.12), (3.13) и (4.6) получим известные прямые и обратные преобразования проективных однородных и неоднородных координат для метрических функций (1.2) и (1.3), зависящие только от компонент относительных скоростей. Из (6.2) и (6.5) вытекают известные соотношения для энергии и импульса [10]. Например, из (3.14) вытекают следующие прямые преобразования

$$\begin{aligned} x &= \left(\frac{1 + v_x/c}{1 - v_x/c} \right)^{r_1/2} \frac{x' + v_x t'}{\sqrt{1 - v_x^2/c^2}}, & t &= \left(\frac{1 + v_x/c}{1 - v_x/c} \right)^{r_1/2} \frac{t' + (v_x/c^2) x'}{\sqrt{1 - v_x^2/c^2}}, \\ y &= \left(\frac{1 + v_x/c}{1 - v_x/c} \right)^{r_1/2} \frac{y' + (v_x/c) z'}{\sqrt{1 - v_x^2/c^2}}, & z &= \left(\frac{1 + v_x/c}{1 - v_x/c} \right)^{r_1/2} \frac{z' + (v_x/c) y'}{\sqrt{1 - v_x^2/c^2}}, \end{aligned} \quad (7.2)$$

которые при $r_1 = 0$ совпадают с известными [9]. Компоненты вектор-параметра угловой меры β равняются значениям групповых параметров и аргументов, введенных в работах [7, 8], а выражение β – соответствующему ему значению из работы [8]. Из (6.8) получим известные преобразования импульса и энергии [10], записанные в другой форме.

При формальном пределе $c \rightarrow \infty$ из (3.12), (3.13) и (4.6) получим прямые и обратные преобразования Галилея

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}' + \mathbf{v}t', \quad \mathbf{x}' = \mathbf{x} - \mathbf{v}t, \quad t' = t \quad (7.3)$$

и закон композиции в абелевой группе трёхмерных скоростей

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}' + \mathbf{v}. \quad (7.4)$$

Здесь имеем относительную скорость $\mathbf{v}' = \mathbf{v}^{-1} = -\mathbf{v}$, вытекающую из (3.11), а для (7.4) выполняются групповые аксиомы.

Исследуем эффекты, связанные с изменением хода времени. Запишем преобразование времени (3.13) так

$$t' = \frac{A(\mathbf{v}'/c, \mathbf{r})}{N(\mathbf{v}'/c)} \left[t + \frac{1}{c^2} (\mathbf{v}'\mathbf{x}) \right] = \frac{N(\mathbf{v}/c)}{A(\mathbf{v}/c, \mathbf{r})} \left[t + \frac{1}{4} \sum_m^4 \frac{\boldsymbol{\varepsilon}^m (\mathbf{x} - \mathbf{v}t)}{c + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{v})} \right]. \quad (7.5)$$

При $\mathbf{x} = \mathbf{v}t$ находим из (7.5), согласно (3.10), формулу для эффекта замедления времени

$$t' = \frac{N(\mathbf{v}/c)}{A(\mathbf{v}/c, \mathbf{r})} t \quad (7.6)$$

в начале координат $\mathbf{x}' = 0$ системы отсчёта (K'), что согласуется с (3.4).

Пусть в системе отсчёта (K') два события, происходящие в начале координат и в точке \mathbf{x}' , произошли одновременно, то есть $\Delta t' = t'(\mathbf{x}') - t'(0) = 0$. Тогда в системе отсчёта (K) эти события являются неодновременными и из (7.5) вытекает формула для эффекта относительности одновременности

$$\Delta t = t(\mathbf{x}) - t(\mathbf{vt}) = -\frac{1}{4} \sum_m^4 \frac{\epsilon^m (\Delta \mathbf{x})}{c + (\epsilon^m \mathbf{v})} \quad (7.7)$$

в точках $\mathbf{x}_1 = \mathbf{vt}$ и $\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}$, где $\Delta \mathbf{x} = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$. Эффект сокращения длины отрезков путей отражается в соотношении

$$\mathbf{x}' = \frac{N(\mathbf{v}/c) c}{4A(\mathbf{v}/c, \mathbf{r})} \sum_m^4 \epsilon^m \frac{(\epsilon^m \Delta \mathbf{x})}{c + (\epsilon^m \mathbf{v})}. \quad (7.8)$$

Приведём краткое строгое кинематическое рассмотрение финслерового пространства-времени с сохранением преобразований (7.3) и (7.4) классической физики с абсолютной одновременностью разноместных событий.

Определение 7. Имеется единое время (или дается отношение одновременности событий) для точек O , A и A^n при выполнении условия

$$\sum_m^4 c^m (T^m - t) = 0, \quad (7.9)$$

где c^m есть скорость сигнала в направлениях выделенных векторов ϵ^m ($\sum_m^4 \epsilon^m = 0$) инерциальной системы отсчёта (K).

Длины отрезков путей, проходимых сигналом, есть величины $(\epsilon^m x)$ и для характеристик имеем следующие равенства

$$T^m = t + \frac{(\epsilon^m x)}{c^m}. \quad (7.10)$$

Определение 8. Величина

$$c = \frac{1}{4} \sum_m^4 c^m \quad (7.11)$$

является универсальной постоянной и определяет "среднюю" физическую скорость сигнала в различных инерциальных системах отсчётов.

Согласно (7.11), из (7.9) получим следующие соотношения

$$t = \frac{\sum_m^4 c^m T^m}{\sum_m^4 c^m} = \frac{1}{4c} \sum_m^4 c^m T^m, \quad \mathbf{x}/c = \frac{1}{4} \sum_m^4 \epsilon^m c^m T^m, \quad \mathbf{u} = c \frac{\sum_m^4 \epsilon^m c^m T^m}{\sum_m^4 c^m T^m}. \quad (7.12)$$

Определение 9. Форм-инвариантная метрическая функция в локальной финслеровой геометрии определяется так

$$F = \left\{ \prod_m^4 [c^m dt + \epsilon^m d\mathbf{x}]^{1-(\epsilon^m \mathbf{r})} \right\}^{1/4} = \left\{ \prod_m^4 [c'^m dt' + \epsilon^m d\mathbf{x}']^{1-(\epsilon^m \mathbf{r})} \right\}^{1/4} \quad (7.13)$$

и принадлежит классу функций (1.4).

Используем метод коэффициента "k" и запишем соотношения

$$t + \frac{(\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{x})}{c^m} = k^m(\mathbf{v}, \mathbf{r}) \left[t' + \frac{(\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{x}')}{c'^m} \right], \quad t' + \frac{(\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{x}')}{c'^m} = k^m(\mathbf{v}', \mathbf{r}) \left[t + \frac{(\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{x})}{c^m} \right] \quad (7.14)$$

в векторных формах, где $k^m(\mathbf{v}, \mathbf{r}) k^m(\mathbf{v}', \mathbf{r}) = 1$. Подставим (7.14) в (7.13) и получим

$$\prod_m^4 (c^m)^{1-(\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{r})} \prod_m^4 [k^m(\mathbf{v}, \mathbf{r})]^{1-(\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{r})} = \prod_m^4 (c'^m)^{1-(\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{r})}, \quad (7.15)$$

$$\prod_m^4 (c'^m)^{1-(\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{r})} \prod_m^4 [k^m(\mathbf{v}', \mathbf{r})]^{1-(\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{r})} = \prod_m^4 (c^m)^{1-(\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{r})}.$$

Далее находим равенства, вытекающие из (7.13) и (7.14), при известных условиях $\mathbf{x}' = 0$ при $\mathbf{x} = \mathbf{v}t$ и $\mathbf{x} = 0$ при $\mathbf{x}' = \mathbf{v}'t'$, а также дополнительном требовании об анизотропии скорости сигнала в движущейся системе отсчёта.

Определение 10. Линейная вектор-функция первого рода

$$c'^m = c^m + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{v}) \quad (7.16)$$

является скоростью сигнала в системе (K'), зависящая от относительной скорости.

В итоге получим значения коэффициентов

$$k^m(\mathbf{v}, \mathbf{r}) = 1 + \frac{(\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{v})}{c^m}, \quad k^m(\mathbf{v}', \mathbf{r}) = 1 + \frac{(\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{v}')}{c'^m} \quad (7.17)$$

с $\mathbf{v}' = -\mathbf{v}$ и равенство $c'^m T'^m = c^m T^m$. Согласно (7.14), получим преобразования Галилея (7.3) и формулы для эффекта Дошлера

$$\omega'^m = \left[1 + \frac{(\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{v})}{c^m} \right] \omega^m, \quad \omega^m = \left[1 + \frac{(\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{v}')}{c'^m} \right] \omega'^m \quad (7.18)$$

по четырём выделенным направлениям.

При $c^m = c$ и использовании динамического обоснования трёх эффектов, отраженных в формулах (7.6)–(7.8), имеем равенство $c'^m = c$ и преобразования (3.12) для метрической функции (3.1). Такая интерпретация преобразований (3.12) согласуется с идеей неувлекаемого эфира классической физики с преобразованиями Галилея со скоростью сигнала (7.16) и дальнейшей их трансформацией.

Список литературы

- [1] Poincare H. La mesure du temps // Rev. Metaphys. Mordle, 1898. V. 6. P. 1–13.
- [2] Poincare H. Surla dynamique de l'ectron // Rend. Circolo Mat. Palermo. 1906. V. 21. P. 129–176.
- [3] Minkowski H.I. "Raum und Zeit", address delivered at the 80th Assembly of German Scientists and Physicians (Koln, 1908) // Phys. Ztscht. 1909. Bd. 10. P. 104–134.
- [4] Лобачевский Н. И. Полное собрание сочинений, т. II. – М.-Л.: Гостехиздат, 1949. 304 с.
- [5] Фок В. А. Теория пространства, времени и тяготения. – М.: Гостехиздат, 1955. 241 с.
- [6] Bogoslovsky G. Yu., Goenner H. F. On the possibility of the phase transitions in the geometric structure of space-time // Phys. Lett. A. 1998. V. 244. P. 222–226.
- [7] Bogoslovsky G. Yu., Goenner H. F. Finslerian Spaces Possessing Local Relativistic Symmetry // Gen. Relativ. Grav. 1999. V. 31. No. 10. P. 1565–1603.

- [8] Pavlov D. G. Hypercomplex Numbers, Associated Metric Spaces, and Extension of Relativistic Hyperboloid // arXiv: gr-gc/0206004. 2002. V. 1. P. 1–16.
- [9] Павлов Д. Г., Гарасько Г. И. Понятие расстояния и модуля скорости в линейных финслеровых пространствах // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. 2005. № 1 (3). С. 1–15.
- [10] Богословский Б. Ю. 4-импульс частицы и уравнение массовой поверхности в полностью анизотропном пространстве-времени // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. 2005. № 2 (4). С. 27–43.
- [11] Riemann B. Abhandlungen der Konigl. Gesellschaft d. Wissenschaften. Gottingen, 1867. V. 13. P. 14.
- [12] Зарипов Р. Г. Отношение одновременности и финслерова структура плоского анизотропного пространства-времени // Гравитация и теория относительности. – Казань: Изд-во Каз. гос. ун-та. 1992. Вып. 29. С. 64–71.
- [13] Zaripov R. G. Clock Synchronization and Finsler Structure of a Flat Anisotropic Space-Time // Proceedings International Scientific Meeting PIRT-2003 "Physical Interpretations of Relativity Theory", Moscow, Liverpool, Sunderland, 2003. P. 241–248.
- [14] Zaripov R. G. The Law of a Composition of Physical Velocities in Locally Anisotropic Finsler Space-Time // Proceedings International Scientific Meeting PIRT-2005 "Physical Interpretations of Relativity Theory", Moscow, Liverpool, Sunderland, 2005. P. 148–158.
- [15] Зарипов Р. Г. Бинарная система чисел и финслерова геометрия локального анизотропного пространства-времени // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. 2005. № 1 (3). С. 47–60.
- [16] Зарипов Р. Г. Синхронизация часов и финслерова геометрия локального анизотропного пространства-времени // Новейшие проблемы теории поля /Под ред. А.В. Аминовой. – Казань: Изд-во Каз. гос. ун-та, 2006. Т. 5. С. 99–114.
- [17] Зарипов Р. Г. К определению одновременности в специальной теории относительности // Гравитация и теория относительности. – Казань: Изд-во Каз. гос. ун-та, 1978. Вып. 14–15. С. 60–69.
- [18] Зарипов Р. Г. О физическом понятии отношения одновременности // Гравитация и теория относительности. – Казань: Изд-во Каз. гос. ун-та, 1980. Вып. 17. С. 47–51.
- [19] Зарипов Р. Г. Новые меры и методы в теории информации. – Казань: Изд-во Каз. гос. техн. ун-та, 2005. 364 с.

The relation of simultaneity in Finslerian Space-Time

R. G. Zaripov

Institute of mechanics and mechanical engineering, Kazan, Russia
zaripov@mail.knc.ru

We provide a new definition for the relation of simultaneity of different spatially displaced events, established by means of the signal method, in the Finslerian Space-Time with form-invariant metric function; we find the general transformations of projective homogeneous coordinates in two distinct vector forms. The interrelation between events is materialized by means of de Broigle plane waves along four vectors of distinguished directions of the three-dimensional space. The group properties of the nonadditive composition law of the elements of the group of 3-dimensional velocities (nonhomogeneous projective coordinates) with quadratic nonlinearity, are investigated. Using the Hamiltonian formalism, we find the relations for energy and momentum of particles, and express their transformations in vectorial form. In the particular cases, the obtained results coincide with the known ones. We further examine the Finsler Space-Time, with regards to the absolute simultaneity of differently displaced events and the Galilean transformations.

Key-words: simultaneity of events, Finsler space, velocities, Hamiltonian formalism, Galilean transformations.

MSC: 53B40, 70G10, 70H99.

ОБОБЩЕННАЯ ПРОБЛЕМА ГУРВИЦА ДЛЯ ПРОИЗВЕДЕНИЯ КВАЗИУНИТАРНЫХ МАТРИЦ, СУММИРУЕМОСТЬ И ДРУГИЕ СВОЙСТВА КВАЗИУНИТАРНЫХ СТРУКТУР

Соловей Л. Г.

lgsolovey@gmail.com

Проблема А. Гурвица поиска соотношений вида "произведение суммы квадратов на сумму квадратов есть сумма квадратов" обобщена на случай произведения квазиунитарных матриц n -ого порядка, (т.е. матриц, удовлетворяющих соотношению $AA^+ = a$, где a – число). (При A действительном матрицы A назовём квазиортогональными). Тем самым эта проблема имеет решение для любого n . (При этом, разумеется, слагаемые в правой части этих соотношений уже не обязательно билинейные функции именно от аргументов в левой части).

Исследуются и другие свойства квазиунитарных структур, прежде всего условие их квазиунитарной суммируемости, т.е. условие того, чтобы сумма квазиунитарных (квазиортогональных) матриц снова была квазиунитарной (квазиортогональной). В частности, вводится понятие квазиантиэрмитовости матриц.

Ключевые слова: проблема Гурвица, квазиунитарные матрицы.

§1. Обобщенная проблема Гурвица

А. Гурвицем была доказана следующая теорема:
если имеется равенство

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) = \Phi_1^2 + \Phi_2^2 + \dots + \Phi_n^2, \quad (1')$$

где Φ_k – билинейные функции от действительных аргументов – a_i, b_k ($i, k = 1, 2, \dots, n$), то n может принимать только значения 1, 2, 4, 8 [1].

Однако это соотношение может быть обобщено на любое n , если под Φ_i понимать билинейные функции других аргументов (каких именно, будет указано в настоящем параграфе).

Рассмотрим подмножество матриц n -ого порядка, обладающих следующими свойствами:

если A – такая матрица, то

$$AA^+ = a, \quad (1)$$

где a – некоторое комплексное число (A^+ – матрица, эрмитово сопряженная матрице A).
Число a , однако, оказывается действительным и неотрицательным.

В самом деле,

$$a = (AA^+)_{kk} = \sum_{l=1}^n a_{kl}(a^+)_{lk} = \sum_{l=1}^n a_{kl}a_{kl}^* = \sum_{l=1}^n |a_{kl}|^2 \geq 0, \quad (2)$$

и равно нулю только при $A = 0$.

Такие матрицы назовём *квазиунитарными* при комплексных a_{kl} и *квазиортогональными*, если a_{kl} вещественны [2]. Полагая

$$a = |A|^2, \quad (3')$$

приходим к определению нормы или модуля $|A|$ квазиунитарной или квазиортогональной матрицы. Таким образом

$$AA^+ = |A|^2. \quad (3)$$

Легко видеть, что

$$A \cdot A^+ / |A|^2 = 1. \quad (4)$$

Следовательно,

$$A^+ / |A|^2 = A^{-1} \quad (5)$$

– матрица, обратная матрице A . Но поскольку,

$$AA^{-1} = A^{-1}A, \quad (6)$$

то

$$A^{-1}A = (A^+ / |A|^2)A = 1,$$

или

$$AA^+ = A^+A = |A|^2. \quad (7)$$

Для произведения AB квазиунитарных матриц A и B имеем:

$$(AB)(AB)^+ = (AB)(B^+A^+) = |A|^2|B|^2, \quad (8)$$

$$(AB)(AB)^+ = |AB|^2, \quad (9)$$

откуда

$$|AB| = |A||B|, \quad (10') \quad |AB|^2 = |A|^2|B|^2. \quad (10)$$

Следовательно, множество квазиунитарных матриц представляет собой полугруппу, а, исключая нулевую матрицу, группу вследствие наличия у каждого элемента (матрицы) A обратного.

Обозначим группу квазиунитарных матриц n -го порядка с положительным детерминантом через $QSU(n)$, а квазиортогональных матриц n -го порядка с положительным детерминантом через $QO^+(n)$ (по аналогии с обозначениями $SU(n)$ и $O^+(n)$ для групп унитарных и ортогональных матриц n -го порядка).

Далее, имеем, выражая обе части равенства (10) через матричные элементы a_{ik} , b_{ik} матриц A и B :

$$|A|^2 = \sum_{r=1}^n |a_{kr}|^2, \quad (11)$$

$$|B|^2 = \sum_{s=1}^n |b_{ms}|^2, \quad (12)$$

$$D = AB, \quad (13)$$

$$|AB|^2 = \sum_{p=1}^n |d_{tp}|^2 = \sum_{p=1}^n |a_{tl}b_{lp}|^2, \quad (14)$$

(l – эйнштейновский индекс суммирования).

Теперь соотношение (10) принимает форму

$$\left(\sum_{r=1}^n |a_{kr}|^2 \right) \left(\sum_{s=1}^n |b_{ms}|^2 \right) = \sum_{p=1}^n |d_{tp}|^2, \quad (15)$$

или

$$\left(\sum_{r=1}^n |a_{kr}|^2\right) \left(\sum_{s=1}^n |b_{ms}|^2\right) = \sum_{p=1}^n |a_{tl}b_{lp}|^2. \quad (16)$$

Мы получили обобщенную проблему Гурвица [1]:

"сумма квадратов, умноженная на сумму квадратов, снова равна сумме квадратов", причём для любого n . При этом из соотношения (16) видно, что каждое слагаемое $|a_{tl}b_{lp}|$ в его правой части представляет собой билинейную функцию матричных элементов a_{tl} t -ой строки и b_{lp} p -го столбца матриц A и B .

В частности, при $k = m \neq t$

$$\left(\sum_{r=1}^n |a_{kr}|^2\right) \left(\sum_{s=1}^n |b_{ks}|^2\right) = \sum_{p=1}^n |a_{tl}b_{lp}|^2. \quad (16a)$$

Из (16) и (16a) следует, вообще говоря, многозначность этих соотношений. При $k = m = t$ получим:

$$\left(\sum_{r=1}^n |a_{kr}|^2\right) \left(\sum_{s=1}^n |b_{ks}|^2\right) = \sum_{p=1}^n |a_{kl}b_{lp}|^2. \quad (16b)$$

Для квазиортогональных матриц имеем соответственно:

$$\left(\sum_{r=1}^n a_{kr}^2\right) \left(\sum_{s=1}^n b_{ms}^2\right) = \sum_{p=1}^n d_{tp}^2, \quad (15')$$

$$\left(\sum_{r=1}^n a_{kr}^2\right) \left(\sum_{s=1}^n b_{ms}^2\right) = \sum_{p=1}^n (a_{tl}b_{lp})^2, \quad (16')$$

$$\left(\sum_{r=1}^n a_{kr}^2\right) \left(\sum_{s=1}^n b_{ks}^2\right) = \sum_{p=1}^n (a_{tl}b_{lp})^2, \quad (16a')$$

$$\left(\sum_{r=1}^n a_{kr}^2\right) \left(\sum_{s=1}^n b_{ks}^2\right) = \sum_{p=1}^n (a_{kl}b_{lp})^2. \quad (16b')$$

Формулы (15) и (15') верны и для случая произведения матриц A и B с возможной перестановкой местами сомножителей матричных элементов a_{tl} и b_{lp} и тем самым применимы и к случаю октав [2]. Полученные соотношения обобщают проблему Гурвица и на случай комплексных и (при перестановке сомножителей) кватернионных матричных элементов. При этом обязательно выполнение соотношений (10'), (10). Для комплексных чисел и кватернионов, записанных в матричном виде, получаются, естественно, стандартные результаты.

Пусть теперь A и B – октавы, записанные в матричном виде:

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ -y_1^+ & x_1^+ \end{pmatrix}, \quad (17) \quad B = \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ -y_2^+ & x_2^+ \end{pmatrix}, \quad (18)$$

где x_i, y_i ($i = 1, 2$) – кватернионы, также записанные в матричном виде. Произведение AB квазиунитарно, и совокупность таких матриц альтернативна, только если в произведении AB переставлены местами некоторые сомножители. С учетом этого обстоятельства имеем [2]:

$$AB = \begin{pmatrix} x_1x_2 - y_2^+y_1 & y_2x_1 + y_1x_2^+ \\ -x_2y_1^+ - x_1^+y_2^+ & -y_1^+y_2 + x_2^+x_1^+ \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Для вычисления матричных элементов d_{1p} ($p = 1, 2, \dots, n$) в формуле (16b') (при $k = 1$) достаточно вычислить кватернионы $x_1 x_2 - y_2^+ y_1$ и $y_2 x_1 + y_1 x_2^+$ и взять их первые строки.

Выпишем эти кватернионы с действительными матричными элементами.

$$x_1 = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix}, \quad (20)$$

$$y_1 = \begin{pmatrix} \tilde{A} & \tilde{B} & \tilde{C} & \tilde{D} \\ -\tilde{B} & \tilde{A} & -\tilde{D} & \tilde{C} \\ -\tilde{C} & \tilde{D} & \tilde{A} & -\tilde{B} \\ -\tilde{D} & -\tilde{C} & \tilde{B} & \tilde{A} \end{pmatrix}, \quad (21)$$

$$x_2 = \begin{pmatrix} a' & b' & c' & d' \\ -b' & a' & -d' & c' \\ -c' & d' & a' & -b' \\ -d' & -c' & b' & a' \end{pmatrix}, \quad (22)$$

$$y_2 = \begin{pmatrix} \tilde{A}' & \tilde{B}' & \tilde{C}' & \tilde{D}' \\ -\tilde{B}' & \tilde{A}' & -\tilde{D}' & \tilde{C}' \\ -\tilde{C}' & \tilde{D}' & \tilde{A}' & -\tilde{B}' \\ -\tilde{D}' & -\tilde{C}' & \tilde{B}' & \tilde{A}' \end{pmatrix}. \quad (23)$$

Для произведений $x_1 x_2 - y_2^+ y_1$ и $y_2 x_1 + y_1 x_2^+$ получим с учетом формул (20)–(23):

$$x_1 x_2 - y_2^+ y_1 = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ - & - & - & - \\ - & - & - & - \\ - & - & - & - \end{pmatrix}, \quad (24)$$

$$y_2 x_1 + y_1 x_2^+ = \begin{pmatrix} d_{15} & d_{16} & d_{17} & d_{18} \\ - & - & - & - \\ - & - & - & - \\ - & - & - & - \end{pmatrix}, \quad (25)$$

где искомые элементы d_{1p} ($p = 1, 2, \dots, 8$), входящие в формулу (15'), равны

$$d_{11} = aa' - bb' - cc' - dd' - \tilde{A}'\tilde{A} - \tilde{B}'\tilde{B} - \tilde{C}'\tilde{C} - \tilde{D}'\tilde{D}, \quad (26)$$

$$d_{12} = ab' + ba' + cd' - dc' - \tilde{A}'\tilde{B} + \tilde{B}'\tilde{A} + \tilde{C}'\tilde{D} - \tilde{D}'\tilde{C}, \quad (27)$$

$$d_{13} = ac' - bd' + ca' + db' - \tilde{A}'\tilde{C} - \tilde{B}'\tilde{D} + \tilde{C}'\tilde{A} + \tilde{D}'\tilde{B}, \quad (28)$$

$$d_{14} = ad' + bc' - cb' + da' - \tilde{A}'\tilde{D} + \tilde{B}'\tilde{C} - \tilde{C}'\tilde{B} + \tilde{D}'\tilde{A}, \quad (29)$$

$$d_{15} = \tilde{A}'a - \tilde{B}'b - \tilde{C}'c - \tilde{D}'d + \tilde{A}a' + \tilde{B}b' + \tilde{C}c' + \tilde{D}d', \quad (30)$$

$$d_{16} = \tilde{A}'b + \tilde{B}'a + \tilde{C}'d - \tilde{D}'c - \tilde{A}b' + \tilde{B}a' - \tilde{C}d' + \tilde{D}c', \quad (31)$$

$$d_{17} = \tilde{A}'c - \tilde{B}'d + \tilde{C}'a + \tilde{D}'b - \tilde{A}c' + \tilde{B}d' + \tilde{C}a' - \tilde{D}b', \quad (32)$$

$$d_{18} = \tilde{A}'d + \tilde{B}'c - \tilde{C}'b + \tilde{D}'a - \tilde{A}d' - \tilde{B}c' + \tilde{C}b' + \tilde{D}a', \quad (33)$$

т. е. стандартные результаты [1].

Рассмотрим теперь квазиортогональные матрицы 3-го порядка (матричные элементы действительны). Вычисления, которые опущены, приводят к следующим результатам ($i = 1, 2$):

$$A = A_1, \quad B = A_2, \quad (34)$$

$$A_i =$$

$$\begin{pmatrix} x_i & y_i & z_i \\ -[z_i \cos \psi_i \sin \varphi_i (\pm)_{1i} \rho_i \sin \psi_i | \cos \varphi_i|] & -z_i \sin \psi_i \sin \varphi_i (\pm)_{1i} \rho_i \cos \psi_i | \cos \varphi_i| & r_i \sin \varphi_i \\ (\pm)_{2i} i [z_i \cos \psi_i | \cos \varphi_i| - (\pm)_{1i} \rho_i \sin \psi_i \sin \varphi_i] & (\pm)_{2i} [z_i \sin \psi_i | \cos \varphi_i| (\pm)_{1i} \rho_i \cos \psi_i \sin \varphi_i] & -(\pm)_{2i} r_i | \cos \varphi_i| \end{pmatrix} \quad (35)$$

$$r_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2}, \quad (36)$$

$$\rho_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2}, \quad (37)$$

$$\cos \psi_i = x_i / r_i, \quad (38)$$

$$\sin \psi_i = y_i / r_i. \quad (39)$$

Полагая в формуле (16b') $k = 1$, получим (с учетом формул (35)–(39)) "соотношение квадратов" для $n = 3$:

$$\begin{aligned} & (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) = \\ & = [x_1 x_2 - y_1 (z_2 \cos \psi_2 \sin \varphi_2 (\pm)_{1\rho_2} \sin \psi_2 | \cos \varphi_2|) (\pm)_{2z_1} (z_2 \cos \psi_2 | \cos \varphi_2| - (\pm)_{1\rho_2} \sin \psi_2 \sin \varphi_2)]^2 + \\ & + [x_1 y_2 + y_1 (-z_2 \sin \psi_2 \sin \varphi_2 (\pm)_{1\rho_2} \cos \psi_2 | \cos \varphi_2|) (\pm)_{2z_1} (z_2 \sin \psi_2 | \cos \varphi_2| + (\pm)_{1\rho_2} \cos \psi_2 \sin \varphi_2)]^2 + \\ & + [x_1 z_2 + y_1 r_2 \sin \varphi_2 - (\pm)_{2z_1} r_2 | \cos \varphi_2|]^2. \end{aligned} \quad (40)$$

В правой части формулы (40) Φ_i (см. формулу (1')) являются однородными функциями первого порядка от аргументов (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2) .

Для дальнейшего изучения свойств квазиунитарных структур (группоидов, колец и т. д.) мы не будем считать входящие в них элементы обязательно матрицами.

§2. Квазиунитарный группоид

Пусть имеется кольцо M с единицей, включающее все действительные числа, причём умножение действительных чисел на любой элемент кольца коммутативно и ассоциативно, т. е. M – алгебра над полем действительных или комплексных чисел. Пусть также имеется отображение $f: M \rightarrow M^{(+)}$ кольца M на себя – автоморфизм, при котором

$$A \rightarrow A^{(+)}, \quad B \rightarrow B^{(+)}, \quad A \cdot B \rightarrow A^{(+)} \circ B^{(+)} = B^{(+)} \cdot A^{(+)}, \quad (41)$$

$$(A^{(+)})^{(+)} = A, \quad (41')$$

$$c = c^{(+)}, \quad \text{если } c \text{ – действительное число}, \quad (41'')$$

но $c \neq c^+$ для комплексных c .

$$(A + B)^{(+)} = A^{(+)} + B^{(+)}. \quad (41''')$$

В таком общем смысле назовём элемент $A^{(+)}$ сопряженным элементу A [3]. Кроме того, пусть отображение $(+)$ предполагает существование элементов A , для которых

$$A^{(+)} \cdot A = A \cdot A^{(+)} = a \geq 0, \quad (42)$$

при отсутствии отрицательных и комплексных произведений $A^{(+)} \cdot A$,

$$a = |A|^2; \quad (43)$$

$|A|$ назовём модулем A , причём

$$A^{(+)}A = AA^{(+)} = 0 \quad \text{только при } A = 0. \quad (44)$$

Такие элементы A назовём *квазиунитарными по f* .

Элемент, сопряженный нулю, также равен нулю.

$$0^{(+)} = 0, \quad (45)$$

вследствие вещественности нуля.

В силу (41''), (42)–(45) нулевой элемент и все действительные числа являются квазиунитарными. Множество, все элементы которого квазиунитарны, назовём квазиунитарным. Пусть все квазиунитарные элементы кольца M составляют мультипликативный группоид. Очевидно, что все действительные числа в него входят, а единица кольца является единицей квазиунитарного группоида. Таким образом, предполагается, что если элементы A_i и A_k квазиунитарны, то произведение

$$(A_i A_k)(A_i A_k)^{(+)} = C_{A_i A_k} \geq 0, \quad (46)$$

т. е. квазиунитарно.

Пусть элемент A_i является определённой функцией φ (предполагается, конечно, также, что $C_{A_i A_k} = 0$ только при $A_i A_k = 0$) от некоторых переменных

$$(X_1^i, \dots, X_l^i): \quad A_i = \varphi(X_1^i, X_2^i, \dots, X_l^i), \quad (46')$$

(элемент A_i может быть и многокомпонентным), причём аргументами могут быть действительные числа, комплексные числа и даже кватернионы. Для выполнения условий (46) необходимо и достаточно, чтобы произведению $A_i \cdot A_k$ соответствовал такой новый набор независимых переменных $(X_1^{ik}, \dots, X_l^{ik})$, чтобы выполнялось условие

$$A_i A_k = \varphi(X_1^{ik}, X_2^{ik}, \dots, X_l^{ik}) = \varphi(X_1^i, X_2^i, \dots, X_l^i) \varphi(X_1^k, X_2^k, \dots, X_l^k), \quad (46'')$$

(независимые переменные $(X_1^{ik}, \dots, X_l^{ik})$ произведений $A_i \cdot A_k$ – некоторые определённые функции от переменных $X_1^i, X_2^i, \dots, X_l^i, X_1^k, X_2^k, \dots, X_l^k$:

$$X_r^{ik} = f_r(X_1^i, X_2^i, \dots, X_l^i, X_1^k, X_2^k, \dots, X_l^k).$$

Если A_i – действительное число a_i , то вместо (46'') имеем:

$$a_i A_k = \varphi(X_1^{ik}, X_2^{ik}, \dots, X_l^{ik}) = a_i \varphi(X_1^k, X_2^k, \dots, X_l^k). \quad (46''')$$

Действительные числа, для которых $a^{(+)} = a$, как уже говорилось, коммутируют и ассоциативны со всеми элементами кольца M . Таким образом, для элементов A, B кольца M

$$(aA) \cdot B = A \cdot (aB) = a(AB). \quad (47)$$

Из (42), (43) и (47) имеем для элементов квазиунитарного группоида $A \neq 0$

$$A \cdot A^{(+)} / |A|^2 = 1, \quad (48)$$

откуда правый обратный элемент

$$A_{right}^{-1} = A^{(+)} / |A|^2, \quad (49)$$

Точно так же

$$(A^{(+)}A) / |A|^2 = (A^{(+)} / |A|^2) \cdot A = 1; \quad A_{left}^{-1} = A_{right}^{-1} = A^{(+)} / |A|^2. \quad (50)$$

Таким образом, каждый ненулевой элемент квазиунитарного группоида имеет обратный элемент

$$A^{-1} = A_{right}^{-1} = A_{left}^{-1} = A^{(+)} / |A|^2.$$

Элемент $A' = A / |A|$, поскольку

$$A'^{(+)}A' = A' \cdot A'^{(+)} = 1, \quad (51)$$

назовём унитарным – по аналогии с унитарной матрицей.

Рассмотрим важные частные случаи.

1. Выполняется

$$(AB) \cdot B^{(+)} = A \cdot (BB^{(+)} = A \cdot |B|^2, \quad (52)$$

$$B^{(+)} \cdot (BA) = (B^{(+)}B)A = |B|^2A. \quad (53)$$

Такие группоиды назовём альтернативными группоидами второго рода. Уравнения

$$BX = C, \quad (54)$$

$$YB = C', \quad (55)$$

где C, C', B, X, Y – элементы квазиунитарного альтернативного группоида второго рода, $B \neq 0$, имеют единственное решение. В самом деле, $B^{(+)} \cdot (BX) = B^{(+)}C$; в силу (53)

$$|B|^2X = B^{(+)}C, \quad X = B^{(+)}C / |B|^2. \quad (56)$$

Точно так же

$$(YB)B^{(+)} = C'B^{(+)}; \quad Y \cdot |B|^2 = C'B^{(+)}; \quad Y = C'B^{(+)} / |B|^2. \quad (57)$$

Таким образом, квазиунитарный альтернативный группоид второго рода без нуля является группоидом с однозначным делением и с единицей, т. е. лупой [4].

2. Рассматриваемый квазиунитарный группоид (или всё кольцо M) является ассоциативным:

$$(AB)C = A(BC). \quad (58)$$

Легко видеть, что квазиунитарный ассоциативный группоид без нуля является группой. Возвращаясь к общему случаю, возьмём элементы A и B квазиунитарного мультипликативного группоида кольца M . Сумма $A + B$ квазиунитарна, если

$$(A + B)(A + B)^{(+)} = d$$

где d – действительно и неотрицательно. Имеем:

$$(A + B)(A + B)^{(+)} = (A + B)(A^{(+)} + B^{(+)} = |A|^2 + |B|^2 + AB^{(+)} + BA^{(+)} = d \geq 0.$$

откуда эрмитов элемент $AB^{(+)} + BA^{(+)}$ удовлетворяет условию

$$AB^{(+)} + BA^{(+)} = c, \quad c - \text{действительно}, \quad (59)$$

причём в силу изложенного выше

$$d = |A|^2 + |B|^2 + c \geq 0. \quad (60)$$

Поскольку

$$(A + B)(A + B)^{(+)} = (A + B)^{(+)}(A + B),$$

то

$$AB^{(+)} + BA^{(+)} = B^{(+)}A + A^{(+)}B. \quad (59')$$

Условие (59) верно, конечно, и для унитарных элементов A' и B' , однако их сумма, являясь квазиунитарной, вообще говоря, уже не унитарна. Условие "квазиунитарной суммируемости" для A и B (59), является, очевидно, необходимым и достаточным. Очевидно, квазиунитарная суммируемость A и B влечет за собой квазиунитарную суммируемость $-A$ и B , A и $-B$, αA и βB , где α, β действительны. Следовательно, любая совокупность квазиунитарно попарно суммируемых элементов A, B, \dots , включающая $-A, -B, \alpha A, \beta B, \dots$, составляет аддитивную группу – векторное пространство над полем действительных чисел. Элемент Q кольца M , удовлетворяющий условию

$$Q + Q^{(+)} = q, \quad q - \text{действительно}, \quad (61)$$

назовём *квазиантиэрмитовым* (при $q = 0$ элемент Q называется антиэрмитовым), очевидно, $Q^{(+)}$ – также квазиантиэрмитов. Легко показать, что для квазиунитарных элементов A_1 и A_2 ассоциативного кольца M выполняется соотношение

$$|A_1 A_2| = |A_1| |A_2|. \quad (61')$$

Это соотношение верно также для альтернативного квазиунитарного группоида второго рода (см. дополнение).

Легко также показать, что если M – кольцо комплексных матриц, то из условия

$$AA^+ = b, \quad (42')$$

следует

$$A^+A = b, \quad (42'')$$

вещественность b и его неотрицательность, т. е. квазиунитарность A (В (42') символ " + " представляет собой оператор эрмитова сопряжения матриц; из сказанного выше следует, что он является оператором сопряжения и в общем смысле). Условие (59) квазиунитарной суммируемости квазиунитарных элементов A и B может быть сформулировано как квазиантиэрмитовость произведения $AB^{(+)}$, и, соответственно, $BA^{(+)}$, а также $B^{(+)}A$ и $A^{(+)}B$ как следствие. Если в некоторую квазиунитарно суммируемую аддитивную группу включены все действительные числа (сами по себе составляющие квазиунитарно суммируемую аддитивную группу), то, при b действительном,

$$bA^{(+)} + Ab = b(A + A^{(+)}) = \tilde{f},$$

где \tilde{f} действительно, откуда

$$A + A^{(+)} = a, \quad \text{где } a \text{ действительно}, \quad (62)$$

т. е. квазиунитарно суммируемая аддитивная группа, включающая действительные числа, состоит из квазиунитарных квазиантиэрмитовых элементов. Легко доказывается, что

квазиунитарная суммируемость элементов A и B влечёт за собой квазиунитарную суммируемость элементов $A, B^{(+)}$, если элементы A и B не только квазиунитарны, но и квазиантиэрмитовы, причём в этом случае

$$A^{(+)}B^{(+)} + BA = AB + B^{(+)}A^{(+)} \quad (\text{см. формулу (72)}).$$

Отметим, что квазиунитарно суммируемая аддитивная квазиунитарная группа является подмножеством квазиунитарного мультипликативного группоида, но не обязательно его подгруппоидом. Если квазиунитарный группоид является также подкольцом кольца M , то, с учетом (47), он является алгеброй над полем действительных чисел [6]. Рассмотрим случай, когда группоид квазиунитарных квазиантиэрмитовых элементов кольца M – альтернативная алгебра второго рода над полем действительных чисел; Согласно (52), (53), (62)

$$(AB)B^{(+)} = (AB)(b - B) = (AB)b - (AB)B, A(BB^{(+)} = (AB)b - A(BB),$$

откуда

$$(AB)B = A(BB). \tag{63}$$

Аналогично получается:

$$B(BA) = (BB)A, \tag{64}$$

– алгебра оказалась альтернативной.

Таким образом:

1) квазиантиэрмитовый (и, следовательно, также квазиунитарный и квазиунитарно суммируемый) мультипликативный альтернативный группоид в кольце M , включающий действительные числа, сопряженные элементы и суммы любых двух элементов, является мультипликативным группоидом (без нуля – лупой) альтернативной алгебры с делением над полем действительных чисел, изоморфной, следовательно, алгебре Кэли (если алгебра неассоциативна и конечномерна) согласно обобщенной теореме Фробениуса [4].

2) Аналогичная квазиантиэрмитова (и, следовательно, квазиунитарная и квазиунитарно суммируемая) мультипликативная полугруппа (без нуля – группа) в кольце M является мультипликативным группоидом алгебры с делением на полем действительных чисел, при её конечном ранге, согласно теореме Фробениуса изоморфной либо кватернионам, либо комплексным числам, либо действительным числам. Обратно, как легко видеть, все элементы алгебры Кэли, кватернионов, комплексных и действительных чисел квазиунитарны и квазиантиэрмитовы.

3) Аналогичный неальтернативный квазиантиэрмитовый мультипликативный группоид в кольце M является мультипликативным группоидом алгебры над полем действительных чисел. Подчеркнем, однако, что в общем случае квазиунитарная мультипликативная группа (вместе с нулем) не всегда является мультипликативным группоидом кольца (мы это увидим и на примерах). Пусть A_i, A_k – элементы квазиунитарного группоида, и

$$A_{i+k} = A_i + A_k, \tag{65}$$

причём (согласно (46')), при квазиунитарности A_{i+k}

$$A_{i+k} = \varphi(X_1^{i+k}, X_2^{i+k}, \dots, X_l^{i+k}), \tag{66}$$

$$A_i = \varphi(X_1^i, X_2^i, \dots, X_l^i), \tag{67}$$

$$A_k = \varphi(X_1^k, X_2^k, \dots, X_l^k). \tag{68}$$

Итак, если квазиунитарный группоид будет мультипликативным группоидом кольца, то для любого i и k

$$\begin{aligned}\varphi(X_1^{ik}, X_2^{ik}, \dots, X_l^{ik}) &= \varphi(X_1^i, X_2^i, \dots, X_l^i) \cdot \varphi(X_1^k, X_2^k, \dots, X_l^k), \\ \varphi(X_1^{i+k}, X_2^{i+k}, \dots, X_l^{i+k}) &= \varphi(X_1^i, X_2^i, \dots, X_l^i) + \varphi(X_1^k, X_2^k, \dots, X_l^k).\end{aligned}\quad (69)$$

Если $A_i = a_i$ – действительное или комплексное число, и

$$\varphi(X_1^{ik}, X_2^{ik}, \dots) = a_i \varphi(X_1^k, X_2^k, \dots) = \varphi(a_i X_1^k, a_i X_2^k, \dots);$$

если теперь

$$A_i + A_k = \varphi(X_1^{i+k}, X_2^{i+k}, \dots) = \varphi(X_1^i + X_1^k, X_2^i + X_2^k, \dots) = \varphi(X_1^i, X_2^i, \dots) + \varphi(X_1^k, X_2^k, \dots)$$

то φ – линейная функция своих аргументов.

Рассмотрим произведение AB элементов A и B квазиунитарного группоида и возьмём суммы $AB + A, BA + A$. Имеем:

$$AB + A = A(B + 1), \quad (70)$$

$$BA + A = (B + 1)A. \quad (70')$$

Эти суммы квазиунитарны, если $B + 1$ квазиунитарен, т. е. когда B квазиантиэрмитов, поскольку тогда B квазиунитарно суммируем с 1, и точно так же суммы

$$AB + B = (A + 1)B, \quad (71)$$

$$BA + B = B(A + 1), \quad (71')$$

квазиунитарны, если A квазиантиэрмитов. Вернёмся к условию (59) ($AB^{(+)}$ – квазиантиэрмитово) квазиунитарной суммируемости квазиунитарных элементов A и B . Если A и B ещё и квазиантиэрмитовы, то $A + A^{(+)} = a$ (a действительно), $B + B^{(+)} = b$ (b действительно), $AB^{(+)} + BA^{(+)} = c_{ab}$ (c_{ab} действительно) следует

$$\begin{aligned}AB + B^{(+)}A^{(+)} &= A(b - B^{(+)}) + (b - B)A^{(+)} = b(A + A^{(+)}) - AB^{(+)} - BA^{(+)} = ba - c_{ab}, \\ AB + B^{(+)}A^{(+)} &= ba - c_{ab},\end{aligned}\quad (72)$$

т. е. AB – квазиантиэрмитово. Таким образом, если A и B квазиунитарны, квазиантиэрмитовы и квазиунитарно суммируемы, то все действительные числа c , а также A, B и AB – попарно квазиунитарно суммируемы (поскольку произведение AB квазиантиэрмитово). Рассмотрим несколько подробнее два случая.

а) Пусть A – квазиунитарный и квазиантиэрмитовый элемент квазиунитарного группоида, не являющийся действительным числом. Тогда совместно с единицей он составляет базис алгебры второго ранга над полем действительных чисел, изоморфной полю комплексных чисел. Действительно, произведение элементов $M_1 = \alpha_1 + a_1A$ и $M_2 = \alpha_2 + a_2A$ равно

$$M_1M_2 = \alpha_1\alpha_2 + (\alpha_1a_2 + a_1\alpha_2)A + a_1a_2A^2, \quad (73)$$

причём

$$A^2 = A(a - A^{(+)}) = Aa - |A|^2. \quad (74)$$

Поэтому

$$M_1M_2 = \alpha_1\alpha_2 - a_1a_2|A|^2 + (\alpha_1a_2 + a_1\alpha_2 + a_1a_2a)A, \quad (75)$$

т. е. элемент коммутативной алгебры. При этом, как легко видеть,

$$A = (A + A^{(+)})/2 + (A - A^{(+)})/2, \quad (76')$$

и, по определению,

$$\operatorname{Re} A = a/2 = (A + A^{(+)})/2, \quad (76)$$

$$(A - A^{(+)})/2 = (i_{A\pm})\operatorname{Im} A, \quad (77)$$

где

$$i_{A\pm} = \pm \frac{(A - A^{(+)})}{2} / \frac{|A - A^{(+)}|}{2}, \quad (78)$$

$$i_{A\pm}^2 = -1, \quad (78')$$

$$A = (a/2) \pm \frac{|A - A^{(+)}|}{2} i_{A\pm}. \quad (78'')$$

Таким образом,

$$\operatorname{Im} A = i_A(A^{(+)} - A)/2. \quad (79)$$

Разумеется, другому квазиунитарному квазиантиэрмитову элементу $A' \neq A$ может соответствовать другое поле комплексных чисел. Отметим, что вывод формул (70)–(79) не предполагает ассоциативность или даже альтернативность исходного кольца M , поскольку мы не рассматривали произведения более двух сомножителей.

б) Рассмотрим совокупность квазиунитарных квазиантиэрмитовых квазиунитарно суммируемых элементов. Выше говорилось, что эта совокупность является n -мерным векторным пространством над полем действительных чисел. Пусть $n > 2$. Выберем из совокупности два линейно независимых от 1 и друг друга элемента A и B , не являющихся, следовательно, действительными числами ($1, A, B$ не лежат в одной плоскости). Предположим также, что рассматриваемая совокупность ассоциативна или хотя бы альтернативна. Произведение $A \cdot B$, в силу квазиунитарной суммируемости и квазиантиэрмитовости A и B квазиантиэрмитово, и, следовательно, квазиунитарно суммируемо с действительными числами. В силу квазиантиэрмитовости A и B оно также квазиунитарно суммируемо с A и B . Следовательно, $1, A, B$ и AB являются элементами некоторого векторного пространства над полем действительных чисел (при этом AB может и не принадлежать к исходному векторному пространству).

Возьмём два вектора этого пространства

$$Q_1 = \alpha_1 + \beta_1 A + \gamma_1 B + \delta_1 AB, \quad (80)$$

$$Q_2 = \alpha_2 + \beta_2 A + \gamma_2 B + \delta_2 AB, \quad (81)$$

где $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i$ ($i = 1, 2$) – действительные числа, и рассмотрим их произведение. Имеем:

$$Q_1 Q_2 = \alpha_1 \alpha_2 + (\beta_1 \alpha_2 + \alpha_1 \beta_2) A + (\gamma_1 \alpha_2 + \alpha_1 \gamma_2) B + (\delta_1 \alpha_2 + \beta_1 \gamma_2 + \alpha_1 \delta_2) AB + \beta_1 \beta_2 A^2 + \\ + \gamma_1 \beta_2 BA + \delta_1 \beta_2 (AB) A + \gamma_1 \gamma_2 B^2 + \delta_1 \gamma_2 (AB) B + \beta_1 \delta_2 A(AB) + \gamma_1 \delta_2 B(AB) + \delta_1 \delta_2 (AB)^2. \quad (82)$$

Далее, полагая

$$a = A + A^{(+)}, \quad (83)$$

$$b = B + B^{(+)}, \quad (84)$$

$$AB^{(+)} + BA^{(+)} = c_{ab}, \quad (85')$$

(a, b, c_{ab} – действительные числа), имеем, учитывая альтернативность совокупности и опуская некоторые вычисления:

$$A^2 = aA - |A|^2, \quad (85)$$

$$BA = -c_{ab} + bA - AB + aB, \quad (86)$$

$$B^2 = bB - |B|^2, \quad (87)$$

$$(AB)A = (ab - c_{ab})A + |A|^2B - b|A|^2, \quad (88)$$

$$(AB)B = -|B|^2A + bAB, \quad (89)$$

$$A(AB) = -|A|^2B + aAB, \quad (90)$$

$$B(AB) = -a|B|^2 + |B|^2A + (ab - c_{ab})B, \quad (91)$$

$$(AB)^2 = (ab - c_{ab})AB - |AB|^2. \quad (92)$$

Таким образом, получена алгебра четвертого ранга над полем действительных чисел, как мы увидим, с базисом $1, A, B, AB$. Она изоморфна алгебре кватернионов. Действительно, переход от $1, A, B, AB$ к каноническому базису $1, i, j, k$ может быть сделан с помощью преобразования

$$i = (A - a/2)/|A - a/2|, \quad (93)$$

$$\bar{j} = [(B - b/2)/|B - b/2|] + [(ab/2 - c_{ab})/2|A - a/2||B - b/2|]i, \quad (94)$$

$$j = \bar{j}/|\bar{j}|, \quad (95) \quad k = ij, \quad (95')$$

аналогично тому, как это делается при выводе теоремы Фробениуса [4].

Рассмотрим снова два квазиунитарных элемента A и B квазиунитарно суммируемого векторного пространства. Имеем:

$$|A \pm B|^2 = |A|^2 + |B|^2 \pm (AB^{(+)} + BA^{(+)}),$$

$$|A \pm B| = \sqrt{|A|^2 + |B|^2 \pm (AB^{(+)} + BA^{(+)})}. \quad (96)$$

Но вследствие квазиунитарной суммируемости и (76),

$$(AB^{(+)} + BA^{(+)})/2 = \operatorname{Re}(AB^{(+)}) \quad (97)$$

$$|A \pm B| = \sqrt{|A|^2 + |B|^2 \pm 2\operatorname{Re}(AB^{(+)})} \leq \sqrt{|A|^2 + |B|^2 + 2|\operatorname{Re}(AB^{(+)})|}. \quad (98)$$

Но

$$|\operatorname{Re}(AB^{(+)})| \leq |AB^{(+)}|. \quad (99)$$

При ассоциативном умножении рассматриваемых элементов

$$|AB^{(+)}| = |A| \cdot |B^{(+)}|. \quad (100)$$

Но, поскольку $|B^{(+)}| = |B|$, то

$$|AB^{(+)}| = |A| \cdot |B|. \quad (100')$$

Следовательно, в этих случаях

$$|A \pm B| \leq \sqrt{|A|^2 + |B|^2 + 2|A||B|} = |A| + |B|,$$

т. е.

$$|A \pm B| \leq |A| + |B|. \quad (101)$$

(Формулы (100) и (100')), а также формула

$$|AB| = |A||B|, \quad (100'')$$

верны и для случая альтернативного умножения в пространстве квазиантиэрмитовых квазиунитарных квазиунитарно суммируемых элементов. В самом деле, A и B принадлежат или к полю комплексных чисел (при их линейной зависимости), или к некоторому телу кватернионов. Но в обоих случаях формулы (100), (100'), (100'') верны).

Таким образом, выполняется условие (101), а также условия

$$|A| = 0 \quad \text{при} \quad A = 0, \quad (102) \quad |A| > 0 \quad \text{при} \quad A \neq 0, \quad (103)$$

аналогично для B . Как известно, кольца, для которых выполняются условия (100''), (101) – (103), называются нормированными [4], а при

$$|AB| \leq |A||B| \quad (100''')$$

– псевдонормированными [4]. При выполнении равенств (100''), (101)–(103), модули $|A|$, $|B|$ называются нормами. По аналогии назовем векторные пространства квазиунитарных квазиунитарно суммируемых элементов, для которых выполняются условия (100''), (101)–(103), нормированными векторными пространствами в кольце M . Как известно, векторные пространства, для которых выполняются только условия (101)–(103) и условие

$$|aB| = |a||B|, \quad (100''''),$$

где a – число (в нашем случае действительное), называются нормированными [5]. Таким образом, рассматриваемое нормированное векторное пространство в кольце M является нормированным в обычном смысле.

§3. Гиперкольца, гипертела, гипералгебры

Не любое векторное пространство квазиунитарных квазиунитарно суммируемых элементов является кольцом или телом (по умножению в кольце M), поскольку не всегда совпадает со всем мультипликативным квазиунитарным группоидом, или полугруппой, или группой (исключая нуль). Может, однако, оказаться, и мы это увидим на примерах, что квазиунитарный группоид разбивается (возможно неоднозначно) на аддитивные группы (в частности, на векторные пространства), обладающие следующими свойствами:

- 1) они пересекаются только в некоторых нулевых точках;
- 2) умножение определено для всего рассматриваемого множества (в нашем случае для всего квазиунитарного группоида);
- 3) произведение любого элемента a_i i -й аддитивной группы на любой элемент a_k k -й аддитивной группы является элементом a_l l -й (фиксированной) аддитивной группы), причём аддитивные группы-сомножители могут совпадать;
- 4) выполняются правый и левый дистрибутивные законы.

Можно показать, что третье свойство следует из четвертого (дистрибутивности). Множество, обладающее свойствами 1) – 4), назовём *гиперкольцом* m -го порядка, где m – число аддитивных групп. Мы в основном будем рассматривать такие совокупности с одним общим нулем. При этом, как уже говорилось, аддитивными группами могут быть и векторные пространства (в данном случае одинаковой размерности). Если все элементы мультипликативного группоида, кроме нулей, составляют лупу или группу, назовём рассматриваемое множество *гипертелом* m -го порядка. Коммутативное ассоциативное гипертело m -го порядка назовём *гипертелом* m -ого порядка по аддитивным группам. Если аддитивные группы рассматриваемого множества являются векторными пространствами над полем P , то гиперкольцо назовём *гипералгеброй* m -го порядка по

этим пространствам, а гипертело или гиперполе – *гипералгеброй m -го порядка с делением* по векторным пространствам. При этом должны выполняться соотношения

$$(aA) \cdot B = A(aB) = a(AB),$$

где a – элемент поля P , A и B – элементы векторного пространства.

Нетрудно показать, что гипертело (гиперполе) с ненулевыми аддитивными группами имеет среди своих аддитивных групп одно и только одно тело или поле. Очевидно, что кольцо, тело, поле или алгебра являются соответственно гиперкольцом, гипертелом, гиперполем или гипералгеброй первого порядка. Кольцо, тело, поле или алгебра могут быть одновременно гиперкольцом, гипертелом, гиперполем, гипералгеброй по каким-либо входящим в него аддитивным группам или пространствам. Если размерности рассматриваемых векторных пространств одинаковы и равны n , а их число m , то мы имеем гипералгебру m -го порядка n -го ранга. Гиперкольца, элементы которых квазиунитарны, назовём квазиунитарными. Гиперкольца, для которых выполняются условия (100'')–(103), назовём *нормированными*. Гиперкольца, для которых выполняются условия (100''')–(103), назовём *псевдонормированными*. Отметим, что совокупность M , включающая квазиунитарный мультипликативный группоид, может быть не только кольцом, но и гиперкольцом. Более подробное исследование гиперколец (гиперполей, гипертел, гипералгебр) выходит за рамки настоящей статьи.

§4. Пространство квазиунитарных квазиантиэрмитовых квазиунитарно суммируемых элементов как кольцо

Рассмотрим снова квазиунитарное квазиантиэрмитово и квазиунитарно суммируемое пространство. Оно, как уже говорилось, не обязательно является кольцом по умножению в кольце M . Однако, как известно, любую аддитивную группу можно сделать кольцом (например, нулевым [4]). Рассмотрим два других варианта.

1) В рассматриваемом пространстве может быть дополнительно определено умножение по правилу [4]

$$A \circ B = (1/2)(AB + BA), \quad (104)$$

(коэффициент $1/2$ в (104) введён для удобства, но в [4] опущен). При этом наше пространство становится новым коммутативным, но, вообще говоря, неассоциативным кольцом. Оно называется йордановым [4], если

$$((A \circ A) \circ B) \circ A = (A \circ A) \circ (B \circ A). \quad (104')$$

В нашем случае оно является алгеброй над полем действительных чисел. В самом деле, для элементов A и B , принадлежащих теперь нашему векторному пространству, имеем, в силу квазиантиэрмитовости и квазиунитарной суммируемости A и B :

$$A \circ B = (1/2)[A(b - B^{(+)}) + B(a - A^{(+)})] = (1/2)(bA + aB - c_{ab}), \quad (105')$$

т. е. $A \circ B$ принадлежит нашему векторному пространству, что и требовалось доказать (a, b, c_{ab} – указанные выше действительные числа). (Эта алгебра, как нетрудно показать, является йордановой, поскольку условие (104') выполняется.) Это кольцо имеет единицу и квазиунитарно. В самом деле,

$$A \circ A^{(+)} = A^{(+)} \circ A = (1/2)(AA^{(+)} + A^{(+)}A) = |A|^2, \quad (105'')$$

$$A \circ 1 = \frac{1}{2}(A \cdot 1 + 1 \cdot A) = A \quad (105''')$$

(здесь символ $(+)$ совпадает с сопряжением в M , а единицей является единица кольца M). Можно показать, что рассматриваемое йорданово кольцо псевдонормировано, если квазиунитарный мультипликативный группоид альтернативен, за исключением случая, когда рассматриваемое кольцо – нормированная алгебра второго ранга над полем действительных чисел, всегда изоморфная полю комплексных чисел.

2) Введём теперь в нашем пространстве умножение по правилу

$$A \circ B = (1/2)(AB^{(+)} + BA^{(+)}) \tag{105}$$

(коэффициент $1/2$, как и в формуле (104), введён для упрощения дальнейших выкладок и рассуждений). При этом наше пространство так же, как и в пункте 1, превращается в коммутативное, но, вообще говоря, неассоциативное кольцо. Покажем, что рассматриваемое векторное пространство само по себе действительно является кольцом. В силу квазиунитарной суммируемости

$$A \circ B = (1/2)(AB^{(+)} + BA^{(+)}) = c_{ab}/2 = Re(A \cdot B^{(+)}) \tag{106}$$

Поскольку действительные числа принадлежат нашему пространству, $A \circ B$ ему принадлежит, что и требовалось доказать.

Поле действительных чисел является идеалом [4] рассматриваемого кольца. Интересно отметить, что произведение $A \circ B$ элементов нашего пространства аналогично скалярному произведению элементов A и B [1]. Введём обозначение

$$(\widetilde{A, B}) = A \circ B \tag{107}$$

(в нашем случае скалярное произведение вещественно). Действительно, имеем:

$$A \circ (B_1 + B_2) = A \circ B_1 + A \circ B_2; \tag{108}$$

пусть c – действительное число, тогда

$$A \circ cB = \frac{1}{2}(AcB^{(+)} + cBA^{(+)}) = c(AB^{(+)} + BA^{(+)})/2 = c(A \circ B), \tag{109}$$

$$A \circ B = B \circ A, \tag{110}$$

$$A \circ A = (1/2)(AA^{(+)} + AA^{(+)}) = AA^{(+)} = |A|^2, \tag{111}$$

откуда

$$A \circ A \geq 0, \tag{112}$$

причём $A \circ A = 0$ тогда и только тогда, когда $A = 0$. (В частности, если e - единица кольца M , то

$$e \circ e = \frac{1}{2}(ee^{(+)} + ee^{(+)}) = \frac{1}{2}(ee + ee) = e.) \tag{112'}$$

Но условиям (108)–(112) и должно удовлетворять скалярное произведение [5], хотя в рассматриваемом случае аналог скалярного произведения оказался принадлежащим векторному пространству, поскольку действительные числа ему принадлежат. Так, например, единица e поля действительных чисел (и кольца M) может быть выбрана одним из базисных векторов. Назовём $(\widetilde{AB}) = A \circ B$ *внутренним скалярным произведением*. Оно, как легко, видеть, не имеет единицы. Из формулы (111) следует, что внутренний скалярный квадрат вектора A (квадрат его нормы [5]) равен квадрату его модуля (т. е.

норма вектора A равна его модулю $|A|$ как квазиунитарного элемента). (Из (105'), (105) и (107) следует

$$\frac{1}{2}(AB + BA) = \frac{1}{2}(Ab + Ba) - (\widetilde{A}, B). \quad (107')$$

Далее, как известно,

$$|A \circ B| \leq |A| \cdot |B|, \quad (113)$$

$$|A + B| \leq |A| + |B|. \quad (113')$$

Формула (113) представляет собой неравенство Шварца. Оно называется также неравенством Коши-Буняковского [3]. Из (113), (113') следует псевдонормированность нашего кольца, а из (111) – его квазиунитарность, причём здесь

$$A^{(+)} = A, \quad (+) - \text{знак сопряжения в нашем кольце.}$$

Если A и B линейно зависимы, $B = aA$, то неравенство Шварца превращается в равенство [5], [3]. Если действительные числа не входят в рассматриваемое векторное пространство (т.е. если оно не квазиантиэрмитово), оно уже не является кольцом по умножению "о".

Отметим, однако, что любое евклидово векторное n -мерное пространство L [3] над полем P комплексных чисел, не принадлежащих к этому пространству, совместно с полем P представляет собой гиперкольцо второго порядка с единицей (совпадающей с единицей поля P) по аддитивным группам P и L . Умножением служат:

- 1) умножение в поле P ;
- 2) умножение векторов A и B , дающее скалярное произведение (A, B) ;
- 3) умножение элемента \tilde{a} поля P на элементы A пространства L $\tilde{a} \cdot A$ согласно определению векторного пространства, причём здесь

$$D = \tilde{a} \circ A = A \circ \tilde{a}^* = \tilde{a} \cdot A \quad (D - \text{вектор}).$$

Нетрудно показать, что указанное гиперкольцо квазиунитарно и псевдонормировано, поскольку

$$|(A, B)| \leq |A| \cdot |B|, \quad (A, A) = |A|^2 \geq 0, \quad A^{(+)} = A, \quad \tilde{a}\tilde{a}^* = |\tilde{a}|^2 \geq 0, \quad |\tilde{a}\tilde{b}| = |\tilde{a}||\tilde{b}|,$$

(\tilde{a}, \tilde{b} – комплексные числа), $|\tilde{a} \cdot A| = |\tilde{a}| \cdot |A|$.

(Однако пространство L , будучи вместе с P псевдонормированным гиперкольцом, само по себе нормировано, как говорилось выше, как евклидово векторное пространство [5]). Можно показать, что указанное гиперкольцо, но над полем P действительных чисел, йорданово и является гипералгеброй над ним.

§5. Примеры

а) Квазиунитарные матрицы n -го порядка с обычными правилами умножения и сложения, с комплексными или вещественными матричными элементами.

Кольцо M в данном случае – кольцо матриц n -го порядка. Операция сопряжения записывается обычным образом:

$$(A^+)_{ik} = A_{ki}^*, \quad (114)$$

а для вещественных матриц она совпадает с операцией транспонирования:

$$(A^{(+)})_{ik} = (\tilde{A})_{ik} = A_{ki}. \quad (115)$$

Поскольку кольцо матриц ассоциативно, то к нему применены результаты предыдущих параграфов, полученные для ассоциативного кольца M . Векторные пространства квазиунитарных, квазиантиэрмитовых квазиунитарно суммируемых матриц вследствие ассоциативности кольца матриц нормированы в нём. Условие квазиантиэрмитовости (62) переписывается следующим образом:

$$A_{ii} + A_{ii}^* = f, \quad (f - \text{действительно}), \quad (62')$$

$$A_{ik} + A_{ki}^* = 0. \quad (i \neq k, i, k = 1, 2, \dots, n). \quad (62'')$$

Действительные части диагональных матричных элементов, согласно (62'), равны. Вещественные квазиунитарные матрицы будем называть квазиортогональными (см. §1). Аргумент детерминанта квазиунитарной матрицы назовём *угловым параметром* этой матрицы. Угловой параметр произведения квазиунитарных (и, в частности, унитарных) матриц одного порядка равен сумме угловых параметров сомножителей. Введём обозначения (см. также §1): $QSU(n)$ – мультипликативная группа квазиунитарных отличных от нуля матриц n -го порядка с положительным детерминантом; $QO^+(n)$ – мультипликативная группа вещественных отличных от нуля квазиортогональных матриц n -го порядка с положительным детерминантом; $QO(n)$ – мультипликативная группа квазиортогональных вещественных отличных от нуля матриц n -го порядка; $QU(n)$ – мультипликативная группа квазиунитарных отличных от нуля матриц n -го порядка. Группы $QSU(n)$ и $QO^+(n)$ представляют собой группы вращения и растяжения, совокупности с отрицательным детерминантом – отражения и растяжения. Они не являются группой.

b) Группоид квазиортогональных вещественных матриц второго порядка. Отличные от нуля матрицы образуют группу $QO(2)$. Несложные вычисления показывают, что эти матрицы имеют вид:

$$A = \begin{pmatrix} X & Y \\ -Y & X \end{pmatrix}, \quad (116) \quad B = \begin{pmatrix} X' & Y' \\ Y' & -X' \end{pmatrix}, \quad (117)$$

причём

$$\det A = X^2 + Y^2 \geq 0, \quad (118)$$

$$\det B = -X'^2 - Y'^2 \leq 0. \quad (119)$$

Матрицы A , представляющие собой линейные функции от X и Y , квазиунитарны и в данном случае квазиортогональны, квазиунитарно суммируемы, образуя аддитивную группу, именно, аддитивную группу кольца, поскольку матрицы A в то же время составляют мультипликативный группоид, а отличные от нуля матрицы A , согласно (118), представляют собой мультипликативную группу $QO^+(2)$. Следовательно, кольцо матриц A представляет собой поле. Оно, как известно, изоморфно полю комплексных чисел [6]. Матрицы B , в силу их линейной зависимости от X' и Y' , также образуют аддитивную группу, но не образуют мультипликативного группоида. Однако совокупность матриц A и B совместно не образуют квазиунитарного кольца. Как аддитивные группы матрицы A и B представляют собой двумерные векторные пространства над полем действительных чисел. Произведение двух матриц типа B , как легко показать, является матрицей типа A , хотя $B_1 B_2 \neq B_2 B_1$. Далее, произведения матриц типа A и типа B суть матрицы типа B , но матрицы типов A и B не коммутируют. Мы видим, что рассматриваемые матрицы представляют собой гиперкольцо и даже гипертело второго порядка, поскольку матрицы типов A и B совместно, исключая нуль, представляют собой группу. Таким образом, поскольку матрицы A и B – действительные векторные пространства, совокупность

квазиортогональных матриц второго порядка представляет собой гипералгебру второго порядка второго ранга над полем действительных чисел с делением.

с) Совокупность A_φ комплексных квазиунитарных матриц второго порядка. Отличные от нуля матрицы образуют группу $QU(2)$. Вычисления, которые здесь опущены, приводят к следующей формуле для этих матриц:

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} X & Y \\ -Y^* e^{i\varphi} & X^* e^{i\varphi} \end{pmatrix}. \quad (120)$$

Детерминант матриц A_φ равен:

$$\det A_\varphi = (|X|^2 + |Y|^2) e^{i\varphi}. \quad (121)$$

Следовательно, согласно изложенному выше, φ является угловым параметром матрицы A_φ , причём угловые параметры матриц A_φ при их умножении складываются. Очевидно, что при заданном φ матрицы A_φ квазиунитарно суммируемы, образуя аддитивную группу – векторное пространство четвертого порядка над полем действительных чисел. При $\varphi = 0$ получим:

$$A_0 = \begin{pmatrix} X & Y \\ -Y^* & X^* \end{pmatrix} \quad (122)$$

– матрицу, которая, как известно, изоморфна кватернионам [7]. Таким образом, мы получаем гипералгебру бесконечного порядка четвертого ранга с делением над полем действительных чисел. Более подробно примеры a и b рассмотрены в [2]. Там же см. шестой вариант в третьем примере, в целом представляющий собой альтернативное гиперкольцо второго рода, включающее алгебру Кэли.

d) Числа Клиффорда [7] в представлении дираковских матриц.

Как известно, числа Клиффорда в представлении матриц Дирака γ_μ составляют вместе с единицей базис гиперкомплексной системы вида [7, 8]:

$$1, \gamma_\mu, \gamma_5 = \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4, \quad \sigma_{\mu\nu} = (1/2i)(\gamma_\nu \gamma_\mu - \gamma_\mu \gamma_\nu), \quad \alpha_\mu = i\gamma_5 \gamma_\mu \quad (\mu, \nu = 1, 2, 3, 4). \quad (123)$$

Все указанные матрицы эрмитовы и унитарны. Далее, имеются системы попарно антикоммутирующих матриц – 6 пентад:

$$\begin{aligned} & \gamma_\mu, \gamma_5 (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5); \quad \sigma_{\mu\nu}, \gamma_\mu, \alpha_\mu \quad (\nu \text{ принимает все значения, не равные } \mu); \\ & \alpha_\mu, \gamma_5 (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \gamma_5); \end{aligned}$$

далее

$$\sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23}; \quad \sigma_{14}, \sigma_{24}, \sigma_{12}; \quad \sigma_{23}, \sigma_{24}, \sigma_{34}; \quad \sigma_{14}, \sigma_{13}, \sigma_{34}; \quad \dots \quad (124)$$

– 20 совокупностей, всего 26 совокупностей. Сделаем теперь следующее замечание. Пусть две матрицы A и B эрмитовы и унитарны. Тогда, очевидно, матрицы

$$A' = iA, \quad B' = iB, \quad (125)$$

антиэрмитовы и унитарны, и, следовательно, квазиунитарно суммируемы с действительными числами. Далее,

$$A'B'^+ + B'A'^+ = AB + BA. \quad (126)$$

Если

$$AB + BA = c_{ab} \quad (127)$$

– действительное число, то, следовательно,

$$A'B'^+ + B'A'^+ = c_{ab}. \quad (128)$$

Таким образом, при выполнении условия (128) матрицы A' , B' квазиунитарно суммируемы. С учетом сказанного получаем систему унитарных антиэрмитовых матриц

$$\gamma'_\mu = i\gamma_\mu, \quad \gamma'_5 = i\gamma_5 = i\gamma'_1\gamma'_2\gamma'_3\gamma'_4, \quad \sigma'_{\mu\nu} = i\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\gamma'_\mu\gamma'_\nu - \gamma'_\nu\gamma'_\mu), \quad \alpha'_\mu = i\alpha_\mu = \gamma'_5\gamma'_\mu. \quad (129)$$

Системы антикоммутирующих матриц (124) переходят теперь в системы матриц, каждая из которых совместно с единицей являются базисом (как легко показать, ортонормированным) векторного пространства квазиунитарно суммируемых матриц над полем действительных чисел

$$1, \gamma'_\mu\gamma'_5(1, \gamma'_1, \gamma'_2, \gamma'_3, \gamma'_4, \gamma'_5); 1, \gamma'_\mu, \sigma'_{\mu\nu}, \alpha'_\mu$$

(ν пробегает значения, не равные μ) – четыре совокупности;

$$1, \alpha'_\mu, \gamma'_5(1, \alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3, \alpha'_4, \gamma'_5); \quad 1, \sigma'_{12}, \sigma'_{13}, \sigma'_{23}; \\ 1, \sigma'_{14}, \sigma'_{24}, \sigma'_{12}; \quad 1, \sigma'_{23}, \sigma'_{24}, \sigma'_{34}; \quad 1, \sigma'_{14}, \sigma'_{13}, \sigma'_{34}; \dots \quad (130)$$

– всего 26 совокупностей (26 векторных пространств квазиунитарно суммируемых элементов). Как мы видели, в каждом из этих пространств 1 и любая из базисных матриц могут служить базисом комплексных чисел; далее, единица, любые две базисные матрицы и их произведение могут служить базисом кватернионов. Размерности указанных пространств соответственно 6 (одно пространство), 6 (четыре пространства), 6 (одно пространство), 4 (20 пространств). Из указанных пространств четырехмерные могут служить аддитивной группой кватернионов. Каждое из указанных пространств является, согласно (105), кольцом – алгеброй над полем действительных чисел (является также йордановым кольцом, см. (104) и (104')).

§5. Заключение

Мы видим, что наряду с известными полями и телами, совокупность квазиунитарных матриц включает ряд гипералгебр, в том числе и с делением, а также содержит векторные пространства, не являющиеся подкольцами кольца M .

Квазиунитарные матрицы также позволяют рассмотреть обобщенную проблему Гурвица (см. §1).

Дополнение

Вывод формулы $|A_1A_2| = |A_1||A_2|$ для квазиунитарного альтернативного группоида второго рода

Пусть A_1 и A_2 – два элемента квазиунитарного альтернативного группоида второго рода. Имеем, используя условия альтернативности второго рода:

$$[(A_1A_2)(A_1A_2)^{(+)}]A_1 = (A_1A_2)[(A_1A_2)^{(+)}A_1] = (A_1A_2)[(A_2^{(+)}A_1^{(+)}A_1)] = (A_1A_2)[A_2^{(+)}|A_1|^2] = \\ = |A_1|^2[(A_1A_2)A_2^{(+)}] = |A_1|^2[A_1|A_2|^2] = A_1|A_1|^2|A_2|^2.$$

Итак,

$$[(A_1A_2)(A_1A_2)^{(+)}]A_1 = |A_1A_2|^2A_1 = |A_1|^2|A_2|^2A_1, \quad \text{т. е.}$$

$$|A_1 A_2|^2 A_1 = |A_1|^2 |A_2|^2 A_1.$$

Далее,

$$|A_1 A_2|^2 (A_1 A_1^{(+)}) = |A_1|^2 |A_2|^2 (A_1 A_1^{(+)}), \quad \text{или}$$

$$|A_1 A_2|^2 |A_1|^2 = |A_1|^4 |A_2|^2,$$

откуда

$$|A_1 A_2|^2 = |A_1|^2 |A_2|^2, \quad |A_1 A_2| = |A_1| |A_2|.$$

Литература

- [1] И. Л. Кантор, А. С. Солодовников. "Гиперкомплексные числа". "Наука", ГРФМЛ, Москва, 1973.
- [2] Л. Г. Соловей. "О некоторых дистрибутивных универсальных алгебрах". Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **2 (2)**, Vol 1, 2004.
- [3] Гельфанд И. М. "Лекции по линейной алгебре". 4-е изд. доп. "Наука", ГРФМЛ, М., 1971.
- [4] Курош А. Г. "Лекции по общей алгебре", 2-е изд., ГИФМЛ, Москва, 1962.
- [5] Ю. Верле. "Релятивистская теория реакций (методы, не зависящие от моделей)" Перевод с английского Я. И. Азимова. Атомиздат, Москва, 1969.
- [6] Курош А. Г. "Курс высшей алгебры", 2-е изд., ГИТТЛ, Москва-Ленинград, 1949.
- [7] Э. Маделунг. "Математический аппарат физики". Перевод с 6-го немецкого издания М. А. Иглицкого. Под редакцией В. И. Левина. Издание второе стереотипное. "Наука", ГРФМЛ, Москва, 1968.
- [8] Ахиезер А. И., Берестецкий В. Б. "Квантовая электродинамика". Издание третье, переработанное. "Наука", ГРФМЛ, Москва, 1969.

The generalized Hurwitz theorem for the product of quasi-unitary matrices, sumability and other properties of quasi-unitary structures

L. G. Solovey

lgsolovey@gmail.com

The problem of A. Hurwitz: "the product of the sum of squares with the sum of squares is a sum of squares" is generalized to the product of quasi-unitary matrices of n -th order (i.e., matrices which satisfy the relation $AA^+ = a$, where a is a number, and in the real case, such a matrix is called *quasi-orthogonal*). This problem admits a solution for any value of n - where we assume that the summands in the right side of these relations are not necessarily bilinear functions of the same arguments as the arguments from the left side. We examine as well other properties of quasi-unitary structures, and mainly the condition of the quasiunitary sumability, i.e., the condition that the sum of unitary (quasi-unitary) matrices is unitary (quasiunitary) as well. In particular, we introduce the notion of quasi-skew-Hermiticity of matrices.

Key-words: Hurwitz problem, quasi-unitary matrices.

MSC: 15A57, 15A63.

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА НАД АЛГЕБРАМИ КЭЛИ-ДИКСОНА

Людковский С. В.

*Кафедра прикладной математики Мос. гос. технического университета МИРЕА
sludkowski@mail.ru*

Настоящая статья посвящена некоммутативной версии преобразования Лапласа. Исследованы новые типы прямого и обратного преобразований типа Лапласа над общими алгебрами Кэли-Диксона, в частности, также телом кватернионов и алгеброй октонионов. Приведены примеры. Доказаны теоремы о свойствах образов таких преобразований, а также теоремы об образах и оригиналах в сочетании с операциями умножения, дифференцирования, интегрирования, свертки, сдвига и гомотетии.

Ключевые слова: преобразование Лапласа, алгебры, кватернионы, октонионы.

1 Введение

Классическое преобразование Лапласа играет очень важную роль в комплексном анализе и имеет многочисленные применения, включая дифференциальные уравнения [3, 10, 17]. В данной статье определены и исследованы некоммутативный классический аналог преобразования Лапласа, а также новые типы преобразования Лапласа над алгеброй Кэли-Диксона. Для этого использованы предыдущие результаты автора о голоморфных и мероморфных функциях чисел Кэли-Диксона [12, 14, 15].

Как хорошо известно, кватернионы и действия над ними впервые были определены и исследованы У. Р. Гамильтоном в третьей четверти 19 века [6]. Впоследствии Кэли и Диксон ввели обобщения кватернионов, известные теперь как алгебры Кэли-Диксона [1, 7, 9, 19, 22]. Они, в частности кватернионы и октонионы, нашли применения в физике, например, использовались Максвеллом, Янгом и Миллсом при выводе своих уравнений, которые они потом переписали в вещественной форме из-за недостаточно развитого в то время математического анализа над такими алгебрами [4, 5, 11]. Это актуально, так как неабелевы калибровочные поля широко используются в теоретической физике [20]. В своих трудах Гамильтон, Кэли и Диксон указывали на необходимость развития анализа над кватернионами, октонионами и т. д. для последующего использования в механике и теории поля. В последнее время также исследовался суперматематический анализ над градуированными алгебрами [2, 8, 16], однако он, как правило, может быть охарактеризован как суперкоммутативный, например, над алгебрами Грассмана, в то время как случай алгебр Кэли-Диксона (соответствующий супернекоммутативному анализу) не исследовался другими авторами.

Напомним, что алгебра Кэли-Диксона \mathcal{A}_r над полем \mathbf{R} имеет 2^r генераторов $\{i_0, i_1, \dots, i_{2^r-1}\}$ таких, что $i_0 = 1$, $i_j^2 = -1$ для любого $j = 1, 2, \dots, 2^r - 1$, $i_j i_k = -i_k i_j$ для любых $1 \leq k \neq j \leq 2^r - 1$, где $r \geq 1$. При этом алгебра \mathcal{A}_{r+1} получается из алгебры \mathcal{A}_r с помощью процедуры удвоения с помощью генератора i_{2^r} , в частности, $\mathcal{A}_1 = \mathbf{C}$ совпадает с полем комплексных чисел, $\mathcal{A}_2 = \mathbf{H}$ – тело кватернионов, \mathcal{A}_3 – алгебра октонионов, \mathcal{A}_4 – алгебра седенионов. Тело кватернионов ассоциативно, а алгебра октонионов альтернативна. Алгебра \mathcal{A}_r ассоциативна со степенями, то есть, $z^{n+m} = z^n z^m$ для любых $n, m \in \mathbf{N}$ и $z \in \mathcal{A}_r$, неассоциативна и неальтернативна для любого $r \geq 4$.

В начале данной статьи определено преобразование Лапласа. Далее исследованы новые виды прямого и обратного преобразований типа Лапласа над общими алгебрами Кэли-Диксона, в частности, телом кватернионов и алгеброй октонионов. Приведены примеры. Также доказаны необходимые теоремы об интегрировании функций \mathcal{A}_r переменных. При этом выяснены особенности некоммутативного преобразования Лапласа, например, связанные с тем, что в алгебре Кэли-Диксона \mathcal{A}_r имеется $2^r - 1$ мнимых генераторов $\{i_1, \dots, i_{2^r-1}\}$ в отличие от одного для поля комплексных чисел, так что мнимое подпространство в \mathcal{A}_r имеет размерность $2^r - 1$. Доказаны теоремы о свойствах образов таких преобразований, а также теоремы об образах и оригиналах в сочетании с операциями умножения, дифференцирования, интегрирования, свертки, сдвига и гомотетии. Приведено также расширение некоммутативного преобразования Лапласа для обобщенных функций; рассмотрено применение некоммутативного интегрального преобразования для решения дифференциальных уравнений. Все результаты данной статьи получены впервые.

2 Некоммутативные интегральные преобразования.

1. Определения. Функцию $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathcal{A}_r$ назовем функцией-оригиналом, где \mathcal{A}_r – алгебра Кэли-Диксона, которая может быть, в частности, $\mathbf{K} = \mathbf{H}$ телом кватернионов или $\mathbf{K} = \mathbf{O}$ алгеброй октонионов, если она удовлетворяет следующим условиям (1 – 3):

(1) $f(t)$ удовлетворяет условию Гёльдера: $|f(t+h) - f(t)| \leq A|h|^\alpha$, где $0 < \alpha \leq 1$, $A = \text{const} > 0$, всюду на \mathbf{R} может быть кроме точек разрыва первого рода. На каждом конечном интервале в \mathbf{R} функция f может иметь только конечное число точек разрыва и только первого рода. Напомним, что точка t_0 называется точкой разрыва первого рода, если существуют конечные пределы слева и справа $\lim_{t \rightarrow t_0, t < t_0} f(t) =: f(t_0 - 0) \in \mathcal{A}_r$ и $\lim_{t \rightarrow t_0, t > t_0} f(t) =: f(t_0 + 0) \in \mathcal{A}_r$.

(2) $f(t) = 0$ для любого $t < 0$.

(3) $f(t)$ возрастает не быстрее, чем экспоненциальная функция, то есть, существуют постоянные $C = \text{const} > 0$, $s_0 = s_0(f) \in \mathbf{R}$, так что $|f(t)| < C \exp(s_0 t)$ для любого $t \in \mathbf{R}$.

Отметим, что для ограниченного оригинала можно взять $s_0 = 0$.

Если существует оригинал

$$(4) F(p; \zeta) := \int_0^\infty f(t) e^{-pt - \zeta t} dt,$$

тогда $F(p)$ называется преобразованием Лапласа в точке $p \in \mathbf{K}$ функции-оригинала $f(t)$, где $\zeta \in \mathcal{A}_r$ – параметр.

Пусть $\gamma : (-\infty, \infty) \rightarrow \mathcal{A}_r$ – путь такой, что ограничение $\gamma_l := \gamma|_{[-l, l]}$ спрямляемо для любого $0 < l \in \mathbf{R}$ и положим по определению

$$(5) \int_\gamma f(z) dz = \lim_{l \rightarrow \infty} \int_{\gamma_l} f(z) dz,$$

где \mathcal{A}_r обозначает алгебру Кэли-Диксона, $2 \leq r$, $\mathcal{A}_2 = \mathbf{H}$ – тело кватернионов, $\mathcal{A}_3 = \mathbf{O}$ – алгебра октонионов, а интегралы по спрямляемым путям были определены в §2.5 [14]. Они тогда определены вдоль кривых тоже, которые являются классами эквивалентности путей относительно возрастающих кусочно-гладких отображений $\tau : [a, b] \rightarrow [a_1, b_1]$, осуществляющих перепараметризацию путей. Тогда будем говорить, что несобственный интеграл (5) сходится.

Рассмотрим теперь функцию $f(z, \zeta)$ определенную для всех z из области U и для любых ζ в окрестности V кривой γ в \mathcal{A}_r . Интеграл $G(z) := \int_\gamma f(z, \zeta) d\zeta$ сходится равномерно в области U , если для любого $\epsilon > 0$ существует $l_0 > 0$ такое, что

(6) $|\int_\gamma f(z, \zeta) d\zeta - \int_{\gamma_l} f(z, \zeta) d\zeta| < \epsilon$ для любых $z \in U$ и $l > l_0$. Аналогично рассматривается случай γ неограниченной в одну сторону с $[0, \infty)$ вместо $(-\infty, \infty)$.

2. Замечание. Ниже рассматриваются теоремы о существовании преобразования

Лапласа $F(p)$ и обратного к нему. В определении 1 определен некоммутативный аналог обыкновенного преобразования Лапласа, но можно рассмотреть более общее некоммутативное интегральное преобразование, так как \mathbf{H} имеет 3, а \mathbf{O} имеет 7 чисто мнимых генераторов, а в общем \mathcal{A}_r имеет $2^r - 1$ мнимых генераторов, тогда как в поле комплексных чисел имеется лишь одна мнимая единица. Для определения $F(p)$ была использована $\exp(-u)$, где

(1) $u := pt$ линейно зависит от t и p . Но можно рассмотреть также нелинейную функцию $u = u(p, t)$, принимая в расчет некоммутативность алгебры \mathcal{A}_r .

3. Определение. Пусть $\{i_0, i_1, \dots, i_{2^r-1}\}$ – это стандартные генераторы алгебры \mathcal{A}_r с $r \geq 2$. Положим

(1) $u(p, t) := p_0t + M(p, t) + \zeta_0$, где $p = p_0i_0 + p_1i_1 + \dots + p_{2^r-1}i_{2^r-1} \in \mathcal{A}_r, p_0, p_1, \dots, p_{2^r-1} \in \mathbf{R}$,

(2) $M(p, t) = M(p, t; \zeta) = (p_1t + \zeta_1)[i_1 \cos(p_2t + \zeta_2) + i_2 \sin(p_2t + \zeta_2) \cos(p_3t + \zeta_3) + i_3 \sin(p_2t + \zeta_2) \sin(p_3t + \zeta_3)]$ для кватернионов;

(3) $M(p, t) = M(p, t; \zeta) = (p_1t + \zeta_1)[i_1 \cos(p_2t + \zeta_2) + i_2 \sin(p_2t + \zeta_2) \cos(p_3t + \zeta_3) + \dots + i_6 \sin(p_2t + \zeta_2) \dots \sin(p_6t + \zeta_6) \cos(p_7t + \zeta_7) + i_7 \sin(p_2t + \zeta_2) \dots \sin(p_6t + \zeta_6) \sin(p_7t + \zeta_7)]$ для октонионов,

(3') $M(p, t) = M(p, t; \zeta) = (p_1t + \zeta_1)[i_1 \cos(p_2t + \zeta_2) + i_2 \sin(p_2t + \zeta_2) \cos(p_3t + \zeta_3) + \dots + i_{2^r-2} \sin(p_2t + \zeta_2) \dots \sin(p_{2^r-2}t + \zeta_{2^r-2}) \cos(p_{2^r-1}t + \zeta_{2^r-1}) + i_{2^r-1} \sin(p_2t + \zeta_2) \dots \sin(p_{2^r-2}t + \zeta_{2^r-2}) \sin(p_{2^r-1}t + \zeta_{2^r-1})]$

для общей алгебры Кэли-Диксона с $2 \leq r < \infty$, где $\zeta - \zeta_0 = \zeta_1i_1 + \dots + \zeta_{2^r-1}i_{2^r-1} \in \mathcal{A}_r$ – параметр начальной фазы, $\zeta_j \in \mathbf{R}$ для любого $j = 0, 1, \dots, 2^r - 1$. Более общим образом, пусть

(4) $u(p, t) = u(p, t; \zeta) = (p_0t + v(p, t)) + \zeta_0$, где $v(p, t)$ является локально аналитической функцией, $Re(v(p, t)) = 0$ для любого $p \in \mathcal{A}_r$ и $t \in \mathbf{R}$, $Re(z) := (z + \tilde{z})/2$, $\tilde{z} = z^*$ – сопряженное число для $z \in \mathcal{A}_r$. Тогда общее некоммутативное преобразование Лапласа над \mathcal{A}_r определяется формулой:

(5) $F_u(p; \zeta) := \int_0^\infty f(t) \exp(-u(p, t)) dt$

для всех чисел $p \in \mathcal{A}_r$, для которых интеграл существует. В то же время компоненты p_j числа p и ζ_j для ζ в $v(p, t)$ мы запишем в p - и ζ -представлениях соответственно, так что

(6) $h_j = (-hi_j + i_j(2^r - 2)^{-1}\{-h + \sum_{k=1}^{2^r-1} i_k(hi_k^*)\})/2$ для любого $j = 1, 2, \dots, 2^r - 1$,
 $h_0 = (h + (2^r - 2)^{-1}\{-h + \sum_{k=1}^{2^r-1} i_k(hi_k^*)\})/2$,

где $2 \leq r \in \mathbf{N}$, $h = h_0i_0 + \dots + h_{2^r-1}i_{2^r-1} \in \mathcal{A}_r$, $h_j \in \mathbf{R}$ для любого j , $h^* = \tilde{h}$ обозначает сопряженное число для h , $h \in \mathcal{A}_r$. Обозначим $F_u(p; \zeta)$ через $\mathcal{F}(f, u; p; \zeta)$.

Далее используются $u(p, t)$, задаваемые 2(1) или 3(1 - 3, 3'), если иная форма 3(4) не выделена.

4. Замечание. Использование функции $M(p, t)$, задаваемой формулами (2, 3) из определения 3 естественно возникает при рассмотрении сферических координат в базисе генераторов алгебры \mathcal{A}_r , а также при рассмотрении итерированных экспоненциальных функций. Пусть $\{i_0, i_1, i_2, i_3\}$ – стандартные генераторы алгебры кватернионов \mathbf{H} , где $i_0 = 1, i_1^2 = i_2^2 = i_3^2 = -1, i_1i_2 = -i_2i_1 = i_3, i_2i_3 = -i_3i_2 = i_1, i_3i_1 = -i_1i_3 = i_2$, тогда $\exp(i_1(p_1t + \zeta_1) \exp(-i_3(p_2t + \zeta_2) \exp(-i_1(p_3t + \zeta_3)))) = \exp(i_1(p_1t + \zeta_1) \exp(-(p_2t + \zeta_2)(i_3 \cos(p_3t + \zeta_3) - i_2 \sin(p_3t + \zeta_3))))$
 $= \exp(i_1(p_1t + \zeta_1)(\cos(p_2t + \zeta_2) - \sin(p_2t + \zeta_2)(i_3 \cos(p_3t + \zeta_3) - i_2 \sin(p_3t + \zeta_3))))$
 $= \exp((p_1t + \zeta_1)(i_1 \cos(p_2t + \zeta_2) + i_2 \sin(p_2t + \zeta_2) \cos(p_3t + \zeta_3) + i_3 \sin(p_2t + \zeta_2) \sin(p_3t + \zeta_3)))$.

Далее по индукции выполняется равенство:

$\exp({}_{r+1}M(p, t; \zeta)) = \exp\{ {}_rM((i_1p_1 + \dots + i_{2^r-1}p_{2^r-1}), t; (i_1\zeta_1 + \dots + i_{2^r-1}\zeta_{2^r-1}) \exp(-i_{2^r+1}(p_{2^r}t + \zeta_{2^r}) \exp(-{}_rM((i_1p_{2^r+1} + \dots + i_{2^r-1}p_{2^r+1-1}), t; (i_1\zeta_{2^r+1} + \dots + i_{2^r-1}\zeta_{2^r+1-1}))))\}$,
 где i_{2^r} – генератор удвоения алгебры \mathcal{A}_{r+1} из алгебры \mathcal{A}_r , так что $i_j i_{2^r} = i_{2^r+j}$ для любых

$j = 0, \dots, 2^r - 1$, функция $M(p, t; \zeta)$ из определения 3 над \mathcal{A}_r записана с нижним индексом ${}_r M$.

Запишем изображение в виде $F_u(p; \zeta) := \sum_{s=0}^{2^r-1} F_{u,s}(p; \zeta) i_s$, где функция f разложена в виде $f(t) = \sum_{s=0}^{2^r-1} f_s(t) i_s$, $f_s : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ для любого $s = 0, 1, \dots, 2^r - 1$, $F_{u,s}(p; \zeta)$ обозначает изображение функции-оригинала f_s .

Можно взять автоморфизм алгебры \mathcal{A}_r и вместо стандартных генераторов $\{i_0, \dots, i_{2^r-1}\}$ использовать новые генераторы $\{N_0, \dots, N_{2^r-1}\}$, а также задать $M(p, t; \zeta) = M_N(p, t; \zeta)$ относительно новых базисных генераторов, где $2 \leq r \in \mathbf{N}$. В этом более общем случае изображение обозначим ${}_N F_u(p; \zeta)$ для оригинала $f(t)$ или более подробно обозначим его через ${}_N \mathcal{F}(f, u; p; \zeta)$.

Если $p = (p_0, p_1, 0, \dots, 0)$, то преобразования Лапласа 1(4) и 2(3,5) сводятся к комплексному случаю, то есть, данные выше определения для кватернионов, октонионов и общих алгебр Кэли-Диксона оправданы.

5. Теорема. Если V – ограниченная окрестность спрямляемой кривой γ в \mathcal{A}_r , а последовательность функций $f_n : V \rightarrow \mathcal{A}_r$ равномерно сходится на V , где $2 \leq r < \infty$, то существует предел

$$(i) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\gamma} f_n(z) dz = \int_{\gamma} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) dz.$$

Доказательство. Для данного $\epsilon > 0$ в силу равномерной сходимости последовательности f_n существует $n_0 \in \mathbf{N}$ такое, что $|f_n(z) - f(z)| < \epsilon/l$ для любых $n > n_0$, где $0 < l < \infty$ – длина спрямляемой кривой γ , $f(z) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z)$. В силу неравенства 2.7(4) [14] существуют две положительные постоянные $C_1 > 0$ и $C_2 > 0$ такие, что $|\int_{\gamma} f(z) dz - \int_{\gamma} f_n(z) dz| < (\epsilon/l) l C_1 \exp(C_2 R^s) = \epsilon C_1 \exp(C_2 R^s)$, где $s = 2^r + 2$, $0 < R < \infty$, так что V содержится в шаре $B(\mathcal{A}_r, z_0, R)$ в \mathcal{A}_r радиуса R с центром в некоторой точке $z_0 \in \mathbf{K}$. Это означает справедливость равенства (i).

6. Теорема. Если функция $f(z, \zeta)$ голоморфна по z и кусочно-непрерывна по ζ для любых z из односвязной (открытой) области U в \mathcal{A}_r с $2 \leq r < \infty$ и для всех ζ из окрестности V пути γ , где γ_l спрямляемы для любых $0 < l < \infty$, а интеграл $G(z) := \int_{\gamma} f(z, \zeta) d\zeta$ равномерно сходится в области U , то он является голоморфной в U функцией.

Доказательство. Для любого $0 < l < \infty$ функция $\int_{\gamma_l} f(z, \zeta) d\zeta =: G_l(z)$ непрерывна по z в силу теоремы 5, что вместе с 1(6) в силу неравенства треугольника дает непрерывность функции $G(z)$ на U . В силу теорем 2.16 и 3.10 [14] интегральная голоморфность функции $G(z)$ влечет ее голоморфность. Но интегральную голоморфность достаточно установить во внутренней $Int(B(\mathcal{A}_r, z_0, R))$ любого шара $B(\mathcal{A}_r, z_0, R)$ содержащегося в U . Пусть ψ – спрямляемый путь такой, что $\psi \subset Int(B(\mathcal{A}_r, z_0, R))$. Поэтому $\int_{\psi} G(z) dz = \int_{\psi} (\int_{\gamma} f(z, \zeta) d\zeta) dz$. С помощью доказательства теоремы 2.7 [14] эти интегралы можно переписать в действительных координатах и с генераторами i_0, \dots, i_{2^r-1} алгебры Кэли-Диксона \mathcal{A}_r . В силу равномерной сходимости $G(z)$ и теоремы Фубини можно изменить порядок интегрирования и тогда $\int_{\psi} G(z) dz = \int_{\gamma} (\int_{\psi} f(z, \zeta) dz) d\zeta = 0$, так как $\int_{\psi} f(z, \zeta) dz = 0$.

7. Теорема. Для любого оригинала $f(t)$ его изображение $F_u(p; \zeta)$ определено в полупространстве $\{p \in \mathcal{A}_r : Re(p) > s_0\}$, где $2 \leq r \in \mathbf{N}$, а показатель роста функции $f(t)$ не превосходит s_0 , причем $F_u(p; \zeta)$ голоморфна по p в этом полупространстве, а также голоморфна по $\zeta \in \mathcal{A}_r$.

Доказательство. Интеграл 1(4) или 3(5) абсолютно сходится при $Re(p) > s_0$, так как он мажорируется сходящимся интегралом

$$|\int_0^{\infty} f(t) \exp(-u(p, t)) dt| \leq \int_0^{\infty} C \exp(-(s - s_0)t - \zeta_0) dt = C(s - s_0)^{-1} e^{-\zeta_0},$$

поскольку $|e^z| = \exp(Re(z))$ для любого $z \in \mathcal{A}_r$ в силу следствия 3.3 [14]. При этом

интеграл, получающийся из интеграла 1(4) или 3(5) дифференцированием по p , сходится также равномерно:

$$(i) \quad \left| \int_0^\infty f(t) [\partial \exp(-u(p, t)) / \partial p] h dt \right| \leq |h| \int_0^\infty C t \exp(-(s - s_0)t - \zeta_0) dt = |h| C (s - s_0)^{-2} e^{-\zeta_0}$$

для любого $h \in \mathcal{A}_r$, так как каждое $z \in \mathcal{A}_r$ можно записать в виде $z = |z| \exp(M)$, где $|z|^2 = z\tilde{z} \in [0, \infty) \subset \mathbf{R}$, $M \in \mathcal{A}_r$, $Re(M) := (M + \tilde{M})/2 = 0$ согласно предложению 3.2 [14]. В силу уравнений 3(6)

$$\partial \left(\int_0^\infty f(t) \exp(-u(p, t; \zeta)) dt \right) / \partial \tilde{p} = 0 \text{ и}$$

$$\partial \left(\int_0^\infty f(t) \exp(-u(p, t; \zeta)) dt \right) / \partial \tilde{\zeta} = 0, \text{ причем}$$

$$\left| \int_0^\infty f(t) [\partial \exp(-u(p, t; \zeta)) / \partial \zeta] h dt \right| \leq |h| \int_0^\infty C \exp(-(s - s_0)t - \zeta_0) dt = |h| C (s - s_0)^{-1} e^{-\zeta_0}$$

для любого $h \in \mathcal{A}_r$. В силу сходимости интегралов выше $F_u(p; \zeta)$ (супер)дифференцируема по p и ζ , причем $\partial F_u(p; \zeta) / \partial \tilde{p} = 0$ и $\partial F_u(p; \zeta) / \partial \tilde{\zeta} = 0$ в рассматриваемом (p, ζ) -представлении, следовательно, $F_u(p; \zeta)$ голоморфна по $p \in \mathbf{K}$ с $Re(p) > s_0$ и $\zeta \in \mathcal{A}_r$ в силу теоремы 6.

8. Замечание. В силу формулы 7(i), если p стремится к бесконечности так, что $Re(p) =: s$ стремится к $+\infty$, то $\lim_{s \rightarrow +\infty} F_u(p; \zeta) = 0$. Запишем p в полярном виде $p = \rho e^{M\theta}$, $M \in \mathcal{A}_r$, $|M| = 1$, $|\theta| < \pi/2 - \delta$, где $\rho \geq 0$, а постоянная δ такая, что $0 < \delta < \pi/2$, тогда $F_u(p; \zeta)$ стремится к нулю равномерно по таким θ и M при p стремящемся к бесконечности, то есть, при ρ стремящемся к бесконечности, так как $e^{M\theta} = \cos(\theta) + \sin(\theta)M$.

9. Определения и обозначения.

1. Пусть $\mathbf{1}$ обозначает единичный оператор на \mathcal{A}_r , то есть, $\mathbf{1}(h) = h$ для любого $h \in \mathcal{A}_r$, где \mathcal{A}_r обозначает алгебру Кэли-Диксона с 2^r стандартными генераторами $\{i_0, i_1, \dots, i_{2^r-1}\}$, $i_0 = 1$, $i_p^2 = -1$ для любого $p \geq 1$, $i_p i_s = -i_s i_p$ для любых $1 \leq s \neq p \leq 1$. Рассмотрим также оператор сопряжения $\tilde{\mathbf{1}}(h) = \tilde{h}$ для любого $h \in \mathcal{A}_r$.

2. Будем различать символы: $e = \mathbf{1}(1)$ и $\tilde{e} = \tilde{\mathbf{1}}(1)$, где $1 \in \mathcal{A}_r$.

3. $\mathbf{1}$ и $\tilde{\mathbf{1}}$ не будем отождествлять и не будем сокращать взаимно между собой или с символом вида $\mathbf{1}\tilde{\mathbf{1}}$, или с другими основными символами; а символы e и \tilde{e} не будем отождествлять друг с другом и не будем сокращать с выражениями вида $e\tilde{e}$ или с другими основными символами.

4. $(z^p z^q)$ отождествляется с z^{p+q} , а $(\tilde{z}^p \tilde{z}^q)$ отождествляется с \tilde{z}^{p+q} , где p и q - натуральные числа, $p, q = 1, 2, 3, \dots$. В каждом слове полагаем, что в каждом его фрагменте типа $\dots(z^p \tilde{z}^q)\dots$ символ z^p расположен левее символа \tilde{z}^q .

5. Если w - некоторое слово или фраза, а $c \in \mathbf{R}$, то фразы cw и wc отождествляются; если $b, c \in \mathbf{R}$, то фразы $b(cw)$ и $(bc)w$ отождествляются.

6. При сопряжении используются следующие отождествления слов: $(a(\mathbf{1}b))^* = (\tilde{b}\tilde{\mathbf{1}})\tilde{a}$, $(a(eb))^* = (\tilde{b}\tilde{e})\tilde{a}$; а при обращении: $(a(\mathbf{1}b))^{-1} = (b^{-1}\mathbf{1})a^{-1}$, $(a(\tilde{\mathbf{1}}b))^{-1} = (b^{-1}\tilde{\mathbf{1}})a^{-1}$, $(a(eb))^{-1} = (b^{-1}e)a^{-1}$, $(a(\tilde{e}b))^{-1} = (b^{-1}\tilde{e})a^{-1}$, где $ab \neq 0$, $a, b \in \mathcal{A}_r$.

7. Слово $\{w_1 \dots w_{k-1} (\{a_1 \dots a_l\}_{q(l)} w_{k+1} \dots w_j\}_{q(j)}$ отождествляется со словом $\{w_1 \dots w_{k-1} w_k w_{k+1} \dots w_j\}_{q(j)}$, а также со словами $c\{w_1 \dots w_{k-1} b w_{k+1} \dots w_j\}_{q(j)}$, $\{(c w_1) \dots w_{k-1} b w_{k+1} \dots w_j\}_{q(j)}$, где $w_k = (\{a_1 \dots a_l\}_{q(l)})$, $a_1, \dots, a_l \in \mathcal{A}_r$, $l, k, j \in \mathbf{N}$, $cb = w_k$, $c \in \mathbf{R}$, $b \in \mathcal{A}_r$.

8. Фразы являются суммами слов. Суммы могут быть конечными или бесконечными счетными. Фраза $aw + bw$ отождествляется со словом $(a + b)w$, а фраза $wa + wb$ со словом $w(a + b)$ для любых слов w и констант $a, b \in \mathcal{A}_r$, так как $c = a + b \in \mathcal{A}_r$.

9. Символы функций, то есть, соответствующие им фразы конечные или бесконечные, определяются с помощью следующих исходных символов: констант из \mathcal{A}_r , e , \tilde{e} , z^p , \tilde{z}^p , где $p \in \mathbf{N}$. Тогда как символы операторнозначных функций состояются из символов множества $\{\mathbf{1}, \tilde{\mathbf{1}}; e, \tilde{e}; z^p, \tilde{z}^p : p \in \mathbf{N}\}$, где символ $\mathbf{1}$ или $\tilde{\mathbf{1}}$ присутствует во фразе. При этом

фраза, соответствующая функции или операторнозначной функции, не может содержать слов, состоящих только из констант, то есть, каждое слово $w_1 w_2 \dots w_k$ фразы должно содержать не менее одного из символов w_1, w_2, \dots, w_k из множества $\{e, \tilde{e}; z^p, \tilde{z}^p : p \in \mathbf{N}\}$. Для фразы ν и пустого слова \emptyset положим $\nu \emptyset = \emptyset \nu = \nu$.

10. Для символов из множества $\{\mathbf{1}, \tilde{\mathbf{1}}; e, \tilde{e}; z^p, \tilde{z}^p : p \in \mathbf{N}\}$ определены их длины: $l(0) = 0$, $l(a) = 1$ для любого $a \in \mathcal{A}_r \setminus \{0\}$, $l(\mathbf{1}) = 1$, $l(\tilde{\mathbf{1}}) = 1$, $l(e) = 1$, $l(\tilde{e}) = 1$, $l(z^p) = p + 1$, $l(\tilde{z}^p) = p + 1$ для любого натурального числа p . Длина слова является суммой длин составляющих её символов. Аналогично рассматриваются слова и фразы для нескольких переменных ${}_1z, \dots, {}_nz$, а также функция длины слова, где символы соответствующие разным индексам $v = 1, \dots, n$ являются различными.

Далее мы рассмотрим фразы, подчиненные следующим условиям. Либо все слова w данной фразы ν содержат каждый из символов ${}_v e$, ${}_v \tilde{e}$, ${}_v \mathbf{1}$ или ${}_v \tilde{\mathbf{1}}$ с одной и той же конечной кратностью, которая может зависеть от индекса $v = 1, \dots, n$ или от самого символа; либо каждое слово w из ν не содержит ни ${}_v e$ ни ${}_v \tilde{e}$, кроме слов w с одним ${}_v e$ и без каких-либо ${}_v z^l$ с $l \neq 0$ или w с одним ${}_v \tilde{e}$ без каких-либо ${}_v \tilde{z}^l$ с $l \neq 0$. Если фраза ν в каждом своем слове w содержит ${}_v \mathbf{1}$ кратности p или ${}_v \tilde{\mathbf{1}}$ с кратностью k , тогда это предполагается результатом частного дифференцирования $\partial^{p+k} f(z, \tilde{z}) / \partial {}_v z^p \partial {}_v \tilde{z}^k$; в то время как в случае ${}_v e$ с кратностью p или ${}_v \tilde{e}$ с кратностью k предполагается возникающим из $(\partial^{p+k} f(z, \tilde{z}) / \partial {}_v z^p \partial {}_v \tilde{z}^k) \cdot (1^{\otimes(p+k)})$. Причем наличие хотя бы одного из символов ${}_v \mathbf{1}$ или ${}_v \tilde{\mathbf{1}}$ во фразе характеризует операторнозначную функцию в отличие от функции.

11. В пространстве \mathcal{P} всех фраз подчиненных ограничениям перечисленным выше над \mathcal{A}_r зададим метрику по формуле:

$$d(\nu, \mu) = \sum_{j=0,1,2,\dots} l(\nu_j, \mu_j) b^j,$$

где b – фиксированное число, $0 < b < 1$, $\nu, \mu \in \mathcal{P}$, $\nu = \sum_{j=0,1,2,\dots} \nu_j$, функция или операторнозначная функция $f_j(z, \tilde{z})$, соответствующая ν_j , является однородной степени j , то есть, $f(tz, t\tilde{z}) = t^j f(z, \tilde{z})$ для любых $t \in \mathbf{R}$ и $z \in \mathcal{A}_r$, $\nu_j = \sum_k \nu_{j,k}$, где $\nu_{j,k}$ – слова с соответствующими однородными функциями или операторнозначными функциями $f_{j,k}$ степени j , $l(\nu_j, \mu_j) := \max_{k,s} l(\nu_{j,k}; \mu_{j,s})$, где $l(\nu_{j,k}; \mu_{j,s}) = 0$ при $\nu_{j,k} = \mu_{j,s}$, $l(\nu_{j,k}; \mu_{j,s}) = \max[l(\nu_{j,k}); l(\mu_{j,s})]$ при $\nu_{j,k}$ не равно $\mu_{j,s}$.

12. Каждой фразе ν соответствует непрерывная функция f , если фразу понимать как последовательность конечных сумм входящих в нее слов, так что соответствующая последовательность функций сходится. В пространстве $C_p^0(U, X)$, состоящем из пар (f, ν) , $f \in C^0(U, X)$, где $X = \mathcal{A}_r$ или X – пространство \mathbf{R} -полиоднородных полиаддитивных операторов на \mathcal{A}_r^m , $m \in \mathbf{N}$, $\nu \in \mathcal{P}$ таких, что фразе ν соответствует непрерывная функция или операторнозначная функция f на области U в \mathcal{A}_r^n со значениями в X , введем метрику:

$$\mathcal{D}((f, \nu); (g, \mu)) := \sup_{z \in U} \|f(z, \tilde{z}) - g(z, \tilde{z})\| + d(\nu, \mu),$$

где фразе ν соответствует функция f , а фразе μ функция g , где норма m -кратно \mathbf{R} -полиоднородного полиаддитивного оператора задается формулой

$$\|S\| := \sup_{(\|h_1\|=1, \dots, \|h_m\|=1)} \|S(h_1, \dots, h_m)\| / [\|h_1\| \dots \|h_m\|],$$

а для функции, то есть, при $m = 0$, берется модуль функции $|f| = \|f\|$ вместо нормы оператора.

10. Замечания. При $r = \infty$ или $r = \Lambda$ с $\text{card}(\Lambda) \geq \aleph_0$ переменные z и \tilde{z} алгебраически независимы над \mathcal{A}_r в силу теоремы 3.6.2 [14]. Поскольку \mathcal{A}_m с $m < r$ алгебраически вкладывается в \mathcal{A}_r , то можно рассматривать функции $f(z, \tilde{z})$ на областях U в \mathcal{A}_m , которые являются ограничениями $f = g|_U$ функций $g_f(z, \tilde{z})$ на областях W в \mathcal{A}_r , для которых $W \cap \mathcal{A}_m = U$.

В силу определения 9 символы функций, то есть, соответствующие им фразы конечные или бесконечные, определяются с помощью исходных символов. Из этих фраз определяются и более сложные аналитические функции, в частности, $\exp(z) = e^z$, $\ln(z)$, z^a , a^z и т. д. Для этого используются локальные разложения в степенные ряды локально аналитических функций, а также теорема Стоуна-Вейерштрасса, утверждающая, что полиномы плотны в пространстве непрерывных функций на компактной канонической замкнутой области в \mathbf{R}^n , следовательно, также в \mathcal{A}_r при $0 < r < \infty$ (смотри [14, 15]).

Для неассоциативных алгебр с $m \geq 3$ существует порядок умножения, который предписывается расстановкой скобок или вектором $q(s)$, указывающим на порядок умножения в слове. Например, слова $(az^p)(z^qb)$ и $a(z^{p+q}b)$ или $(az^{p+q})b$ при $a, b \in \mathcal{A}_m \setminus \mathbf{R}$, $m \geq 3$, различны, где $p \neq 0$ и $q \neq 0$ - натуральные числа.

11. Лемма. *Если две функции или операторнозначные функции f и g ограничены на U (смотри определение 9.12), то $\mathcal{D}((f, \nu); (g, \mu)) < \infty$. В частности, если U компактна, то $\mathcal{D}((f, \nu); (g, \mu)) < \infty$ для любых $(f, \nu), (g, \mu) \in C_p^0(U, X)$.*

Доказательство. Для любой степени однородности j каждое слово $\nu_{j,k}$ состоит не более, чем из $b(j + \omega)$ символов, где $b = 2$ для \mathbf{H} , $b = 3$ для \mathcal{A}_r с $r \geq 3$, следовательно, число таких слов конечно и $l(\nu_{j,k}) \leq s(j + \omega) < \infty$, так как кратность s_v или t_v , или p_v , или y_v появления $v e$ или $v \tilde{e}$, или $v \mathbf{1}$, или $v \tilde{\mathbf{1}}$ конечна и постоянна во всех словах данной фразы, хотя она и может зависеть от индекса $v = 1, \dots, n$ или самого символа, а каждый из этих символов может быть окружен с двух сторон двумя константами из \mathcal{A}_r , причем \mathbf{H} ассоциативна в отличие от \mathcal{A}_r с $r \geq 3$, где $\omega = \omega(\nu) := s_1 + \dots + s_n + t_1 + \dots + t_n + p_1 + \dots + p_n + y_1 + \dots + y_n$. Тогда $l(\nu_{j,k}; \mu_{j,s}) \leq b(j + y)$, где $y = \max(\omega(\nu), \omega(\mu))$. Поскольку ряд $\sum_{j=0}^{\infty} [b(j + y)]b^j$ сходится, то $d(\mu, \nu) < \infty$. С другой стороны, $\sup_{z \in U} |f(z, \tilde{z}) - g(z, \tilde{z})| < \infty$ для ограниченных функций f и g на U , следовательно, $\mathcal{D}((f, \nu); (g, \mu)) < \infty$. Причем, как известно, непрерывная функция на компактном множестве ограничена, что доказывает последнее утверждение леммы.

12. Теорема. *Пусть U - открытая область в \mathcal{A}_r , $r \geq 2$. Тогда существует непрерывный оператор $S : C_p^0(U, X) \times \Gamma \rightarrow X$, где Γ - это пространство всех спрямляемых путей в U , так что $S((f, \nu); \gamma) := \int_{\gamma} (f, \nu)(z, \tilde{z}) dz$.*

Доказательство. На пространстве спрямляемых путей существует естественная метрика $d_r(\gamma, \eta)$ индуцированная метрикой между произвольными подмножествами A и B в \mathcal{A}_r : $d_r(A, B) := \max(\psi(A, B), \psi(B, A))$, $\psi(A, B) := \sup_{z \in A} \inf_{\xi \in B} |z - \xi|$. Функции f и ее представлению в виде фразы ν соответствует и единственная функция g и ее представление в виде фразы μ , которая строится следующим образом. Функция g характеризуется условиями.

Пусть f определяется непрерывной функцией $\xi : U^2 \rightarrow \mathcal{A}_r$, так что

$$(i) \quad \xi(\underset{1}{z}, \underset{2}{z})|_{\underset{1}{z}=z, \underset{2}{z}=\tilde{z}} = f(z, \tilde{z}),$$

где $\underset{1}{z}$ и $\underset{2}{z} \in U$. Пусть также $g : U^2 \rightarrow \mathcal{A}_r$ - непрерывная функция, которая $\underset{1}{z}$ -супердифференцируема, так что

$$(ii) \quad (\partial g(\underset{1}{z}, \underset{2}{z})/\partial \underset{1}{z}).1 = \xi(\underset{1}{z}, \underset{2}{z}) \text{ на } U^2. \text{ Тогда положим}$$

(iii) $\hat{f}(z, \tilde{z}).h := \hat{f}_z(z, \tilde{z}).h := [(\partial g(\underset{1}{z}, \underset{2}{z})/\partial \underset{1}{z}).h]|_{\underset{1}{z}=z, \underset{2}{z}=\tilde{z}}$ для любого $h \in \mathcal{A}_r$. Коротко это можно записать в виде $(\partial g(z, \tilde{z})/\partial z).1 = f(z, \tilde{z})$ и $\hat{f}_z(z, \tilde{z}).h := \hat{f}(z).h := (\partial g(z, \tilde{z})/\partial z).h$.

Фраза μ строится по алгоритму: сначала в каждом слове $\nu_{j,k}$ фразы ν заменим каждое e буквой z , что дает сумму слов $\lambda_{j+1, \alpha(k,i)}$, $\alpha = \alpha(k, i) \in \mathbf{N}$, $j, k, i \in \mathbf{N}$, то есть, $\nu_{j,k} \mapsto \sum_i \lambda_{j+1, \alpha(k,i)}$, где i нумерует позиции e в слове $\nu_{j,k}$, $i = 1, \dots, s$, где $s = s_1$. Поэтому, ν соответствует фраза $\lambda = \sum_{j, \alpha} \lambda_{j, \alpha}$. Частное дифференцирование $\partial f/\partial z$ было определено для функций и их представлений фразами. Рассмотрим остаток $(\partial \lambda/\partial z).1 - \nu =: \zeta$. Если

$\zeta = 0$, то положим $\mu = \lambda$. Если $\zeta \neq 0$, то к каждому слову $\zeta_{j,k}$ этой фразы ζ применим левый или правый алгоритм из §2.6 [14]. Первый упомянутый выше шаг одинаков для обоих алгоритмов. Для этого рассмотрим две z -локально аналитические функции f_1 и q на U , так что f_1 и q не коммутируют, как и соответствующие им фразы ψ и σ . Пусть $\psi^0 := \psi$, $\sigma^0 := \sigma$, $\sigma^{-n} := \sigma^{(n)}$, $(\partial(\sigma^n)/\partial z).1 =: \sigma^{n-1}$ и $\sigma^{-k-1} = 0$ для некоторого $k \in \mathbf{N}$, используя то же обозначение $\sigma_{j,k}^n$ для любого слова фразы σ . Тогда

(iv) $(\psi\sigma)^1 = \psi^1\sigma - \psi^2\sigma^{-1} + \psi^3\sigma^{-2} + \dots + (-1)^k\psi^{k+1}\sigma^{-k}$. В частности, если $\psi = (a_1z^n a_2)$, $\sigma = (b_1z^k b_2)$, с $n > 0$, $k > 0$, $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathcal{A}_r \setminus \mathbf{RI}$, то $\psi^p = [(n+1)\dots(n+p)]^{-1}(a_1z^{n+p}a_2)$ для любого $p \in \mathbf{N}$, $\sigma^{-s} = k(k-1)\dots(k-s+1)(b_1z^{k-s}b_2)$ для любого $s \in \mathbf{N}$. Применим этот левый алгоритм по индукции к появляющимся соседним подсловам данного слова, с направлением обхода слева направо. Тогда применим это к каждому слову данной фразы. Симметрично правый алгоритм таков:

(v) $(\psi\sigma)^1 = \psi\sigma^1 - \psi^{-1}\sigma^2 + \psi^{-2}\sigma^3 + \dots + (-1)^n\psi^{-n}\sigma^{n+1}$, когда $\psi^{-n-1} = 0$ для некоторого $n \in \mathbf{N}$. Тогда применим этот правый алгоритм проходя справа налево по соседним подсловам данного слова. Для любого слова оба эти алгоритма после конечного числа итераций заканчиваются, так как длина каждого слова конечна. Эти алгоритмы применяются для решения дифференциального уравнения $(\partial\xi(z, \tilde{z})/\partial z).1 = \zeta(z, \tilde{z})$ для любого $z \in U$ в терминах фраз. Воспользуемся одним из этих алгоритмов для всех слов фразы ζ , чтобы получить и единственную фразу ξ и далее положить $\mu = \lambda + \xi$.

Если f_1 и q имеют разложения в ряды сходящиеся в $\text{Int}(B(\mathcal{A}_r, 0, R))$, то эти формулы демонстрируют, что существует z -аналитическая функция $(f_1q)^1$ с рядом сходящимся в $\text{Int}(B(\mathcal{A}_r, z_0, R))$, так как $\lim_{n \rightarrow \infty} (nR^n)^{1/n} = R$, где $0 < R < \infty$. Поскольку f локально аналитична, то g тоже локально аналитична. Поэтому, для любой локально z -аналитической функции f и ее фразы ν существует оператор \hat{f} и его фраза $\partial\mu/\partial z$. Рассматривая функцию G действительных переменных соответствующих g , мы получаем в силу леммы 2.5.1 [14], что все решения (g, μ) отличаются на константы из \mathcal{A}_m , так как $\partial g/\partial w_s + (\partial g/\partial w_p).(s^*p) = 0$ для любого $s = i_{2j}$, $p = i_{2j+1}$, $j = 0, 1, \dots, 2^{r-1} - 1$ и $\partial g/\partial w_1$ единственна, следовательно, \hat{f} единственна для f .

Обозначим описанное выше отображение $\mathcal{P} \ni \nu \mapsto \mu \in \mathcal{P}$ по $\phi(\nu) = \mu$. Таким образом, каждый выбранный алгоритм среди этих двух алгоритмов дает $\phi(\nu_1 + \nu_2) = \phi(\nu_1) + \phi(\nu_2) = \mu = \mu_1 + \mu_2$, если $\nu = \nu_1 + \nu_2$, более того, $\omega(0) = 0$. Поэтому, эта процедура дает единственную ветвь для S . Напомним, что если существует следующий предел

$$(vi) \quad \int_{\gamma} (f, \nu)(z, \tilde{z}) dz := \lim_P I((f, \nu); \gamma; P), \text{ где}$$

$$(vii) \quad I((f, \nu); \gamma; P) := \sum_{k=0}^{t-1} (\hat{f}, \hat{\nu})(z_{k+1}, \tilde{z}_{k+1}).(\Delta z_k),$$

где $\Delta z_k := z_{k+1} - z_k$, $z_k := \gamma(c_k)$ для любого $k = 0, \dots, t$, то мы говорим, что (f, ν) интегрируема вдоль пути γ по переменной z .

Из уравнения 2.7.(4) [14] следует, что

$$(viii) \quad |S((f, \nu) - (y, \psi); \gamma)| \leq \mathcal{D}((f, \nu); (y, \psi))V(\gamma)C_1 \exp(C_2 R^{2m+2})$$

для любых $(f, \nu), (y, \psi) \in C_P^0(U, X)$ для $U \subset \mathcal{A}_m$ с конечным $m \in \mathbf{N}$, где C_1 и C_2 – положительные постоянные независимые от R , (f, ν) и (y, ψ) , $0 < R < \infty$ таково, что $\gamma \subset B(\mathcal{A}_m, z_0, R)$. Пространство X_t полно относительно нормы полигомогенных операторов, а также алгебра Кэли-Диксона \mathcal{A}_r полна относительно своей нормы. Поэтому, $\{S((f^v, \nu^v); \gamma) : v \in \mathbf{N}\}$ – это последовательность Коши в X для любой последовательности Коши $\{(f^v, \nu^v) : v \in \mathbf{N}\} \subset C_P^0(U, X)$, следовательно, последовательность $\{S((f^v, \nu^v); \gamma) : v \in \mathbf{N}\}$ сходится.

Для любого спрямляемого пути γ в U имеется каноническое замкнутое подмножество V в \mathcal{A}_r , так что $\gamma \subset \text{Int}(V) \subset V \subset U$. Тогда $V_m := V \cap \mathcal{A}_m$ компактно для любого $m \in \mathbf{N}$ и непрерывная функция $f|_V$ равномерно непрерывна на V_m . При этом $\lim_{d(\eta, 0e) \rightarrow 0} \mathcal{D}((y|_{V_m}, \eta), (0, 0e)) = 0$ для любого $m \in \mathbf{N}$. Для конечного r возьмем $m = r$. Для конечного r существует последовательность спрямляемых путей γ_m в V_m для подходящего алгебраического вложения \mathcal{A}_m в \mathcal{A}_r , так что $\lim_{m \rightarrow \infty} d_r(\gamma_m, \gamma) = 0$. В алгебре \mathcal{A}_r плотно объединение всех алгебраически вложенных подалгебр \mathcal{A}_m , $m \in \mathbf{N}$. Итак, для любого $\epsilon_k = 1/k$ существуют непрерывные функции f_m на V_m и фраза ν_m над \mathcal{A}_m для $m = m(k)$ с $m(k) < m(k+1)$ для любого $k \in \mathbf{N}$, так что $\lim_{m \rightarrow \infty} \mathcal{D}((f_m, \nu_m), (f|_{V_m}, \mu)) = 0$, где каждое ν_m имеет естественное продолжение над \mathcal{A}_m и, следовательно, f_m как соответствующая фраза для данной функциональной фразы имеет естественное продолжение на окрестность V_m в U . Это дает $S((f, \nu), \gamma) = \lim_{m \rightarrow \infty} S((f_m, \nu_m), \gamma_m)$.

В соответствии с доказательством теоремы 2.7 [14] оператор S непрерывен для функций и аналогично для операторно значных функций и их фраз относительно метрики \mathcal{D} .

13. Замечание. Для подмножества U в \mathcal{A}_r пусть $\pi_{s,p,t}(U) := \{u : z \in U, z = \sum_{v \in \mathbf{b}} w_v v, u = w_s s + w_p p\}$ для любых $s \neq p \in \mathbf{b}$, где $t := \sum_{v \in \mathbf{b} \setminus \{s,p\}} w_v v \in \mathcal{A}_{r,s,p} := \{z \in \mathcal{A}_r : z = \sum_{v \in \mathbf{b}} w_v v, w_s = w_p = 0, w_v \in \mathbf{R} \forall v \in \mathbf{b}\}$, где $\mathbf{b} := \{i_0, i_1, \dots, i_{2^r-1}\}$ – семейство стандартных генераторов алгебры \mathcal{A}_r . То есть, геометрически $\pi_{s,p,t}(U)$ – проекция на комплексную плоскость $\mathbf{C}_{s,p}$ пересечения U с плоскостью $\tilde{\pi}_{s,p,t} \ni t$, $\mathbf{C}_{s,p} := \{as + bp : a, b \in \mathbf{R}\}$, так как $sp^* \in \hat{b} := \mathbf{b} \setminus \{1\}$. Напомним, что в §§2.5-7 [14] для каждой непрерывной функции $f : U \rightarrow \mathcal{A}_r$ был определен оператор ${}_j \hat{f}$ по каждой переменной ${}_j z \in \mathcal{A}_r$.

Далее предполагается, что область U в \mathcal{A}_r^n имеет свойство, что каждая проекция $p_j(U) := U_j$ является $2^r - 1$ -связной (смотри [21]); $\pi_{s,p,t}(U_j)$ односвязна в \mathbf{C} для любого $k = 0, 1, \dots, 2^r - 1$, $s = i_{2k}$, $p = i_{2k+1}$, $t \in \mathcal{A}_{r,s,p}$ и $u \in \mathbf{C}_{s,p}$, для которых существует $z = u + t \in U_j$, где $e_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in \mathcal{A}_r^n$ – это вектор с 1 на j -м месте, $p_j(z) = {}_j z$ для любого $z \in \mathcal{A}_r$, $z = \sum_{j=1}^n {}_j z e_j$, ${}_j z \in \mathcal{A}_r$ для любых $j = 1, \dots, n$, $n \in \mathbf{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$.

14. Теорема. Пусть область U в \mathcal{A}_r удовлетворяет условиям замечания 13, и (f, ν) интегрально голоморфна на U . Тогда $\partial S((f, \nu); \gamma) / \partial z = (\hat{f}, \hat{\nu})(z)$ для любых $z_0, z \in \text{Int}(U)$ и спрямляемых путей γ в $\text{Int}(U)$, так что $\gamma(0) = z_0$ и $\gamma(1) = z$. В частности, если $f = (\partial g / \partial z).1$ и $\nu = (\partial \mu / \partial z).1$, где $\partial f / \partial \tilde{z} = 0$ и $\partial \nu / \partial \tilde{z} = 0$ на U , то $S((f, \nu); \gamma) = (g, \mu)(z) - (g, \mu)(z_0)$.

Доказательство. В силу условия, что (f, ν) интегрально голоморфна, то есть, $S((f, \nu); \eta) = 0$ для любой спрямляемой петли η в U , следует, что $S((f, \nu); \gamma)$ зависит только от $z_0 = \gamma(0)$ и $z = \gamma(1)$ и не зависит от спрямляемых путей с одними и теми же началом и концом. Поскольку $(\partial g(z, \tilde{z}) / \partial z).1 = f(z)$ и $(\partial \mu(z, \tilde{z}) / \partial z).1 = \nu$, так что $\hat{f}(z, \tilde{z}) = \partial g(z, \tilde{z}) / \partial z$ и $\hat{\nu}(z, \tilde{z}) = \partial \mu(z, \tilde{z}) / \partial z$ существует в смысле распределений (смотри также [13]), тогда из формул 12(vi,vii) следует первое утверждение этой теоремы.

Если $(f, \nu) = (\partial(g, \mu) / \partial z).1$, то существует $(y, \psi) \in C_p^0(U, X)$, так что $(\partial(y, \psi) / \partial z).1 = (g, \mu)$, следовательно, $(\partial^2(y, \psi) / \partial z^2)(h_1, h_2) = (\partial^2(y, \psi) / \partial z^2)(h_2, h_1)$ for each $h_1, h_2 \in \mathcal{A}_r$, так как (f, ν) и, следовательно, (g, μ) и (y, ψ) голоморфны, в частности, бесконечно супердифференцируемы по z в U (смотри теоремы 2.11, 2.16, 3.10 и следствие 2.13 [14]). Отметим, что первый шаг алгоритма доказательства теоремы 12 дает $\mu = \lambda$. Для $h_1 = 1$ и $h_2 = \Delta z$ это дает $(\hat{f}, \hat{\nu}).\Delta z = (\partial(g, \mu) / \partial z).\Delta z$, и мы можем заменить $(\hat{f}, \hat{\nu}).\Delta z$ в интегральных суммах на последнее выражение. Второе утверждение поэтому следует из того факта, что интегральная голоморфность (f, ν) эквивалентна условию $\partial(f, \nu) / \partial \tilde{z} = 0$ супердифференцируемой f на U , где U удовлетворяет условиям замечания 13.

15. Замечание. В частном случае $\mathbf{C} = \mathcal{A}_1$ мы просто имеем $\hat{f} = f$, но здесь рас-

сматривается случай произвольного $r \in \mathbf{N}$ или $r = \Lambda$ с $\text{card}(\Lambda) \geq \aleph_0$. Например, пара, состоящая из функции и ее фразы $((ab)(c\tilde{z}d), (aeb)(c\tilde{z}d))$ принадлежит $C_p^0(U, \mathcal{A}_r)$ и существует $(g, \mu) = ((azb)(c\tilde{z}d), (azb)(c\tilde{z}d)) \in C_p^0(U, \mathcal{A}_r)$, так что $(\partial(g, \mu)/\partial\tilde{z}).1 = (f, \nu)$, но (f, ν) не является интегрально голоморфной для любого $r \geq 1$, где $a, b, c, d \in \mathcal{A}_r$ – это постоянные. В коммутативном случае \mathbf{C} условия пункта 9 просто сводятся к степенным рядам комплексно голоморфных функций и символы e и \tilde{e} можно опустить, но в коммутативном случае, когда $r \geq 2$, условия пункта 9 в общем случае существенны для теорем 12 и 14.

16. Лемма. Пусть $v : \mathcal{A}_r \rightarrow \mathcal{A}_r$ – автоморфизм алгебры \mathcal{A}_r , а $\{i_0, i_1, \dots, i_{2^r-1}\}$ и $\{s_0, s_1, \dots, s_{2^r-1}\}$ – генераторы алгебры \mathcal{A}_r , где $v(i_j) = s_j$ для любого $j = 0, 1, \dots, 2^r - 1$, $2 \leq r < \infty$. Тогда интегралы $\int_a^b f(t)dt$ и $\int_\gamma w(z)dz$ не зависят от выбора базисных генераторов, где $f : [a, b] \rightarrow \mathcal{A}_r$ и $w : U \rightarrow \mathcal{A}_r$ – кусочно непрерывные функции, $-\infty \leq a < b \leq \infty$, γ – спрямляемая кривая в области $U \subset \mathcal{A}_r$.

Доказательство. Любой элемент алгебры Кэли-Диксона $z \in \mathcal{A}_r$ можно разложить единственным образом по базису генераторов: $z = z_0 i_0 + \dots + z_{2^r-1} i_{2^r-1}$, $z = x_0 s_0 + \dots + x_{2^r-1} s_{2^r-1}$, где $z_j, x_j \in \mathbf{R}$ для любого $j = 0, \dots, 2^r - 1$. Но единица единственна в алгебре \mathcal{A}_r , так как $\zeta \zeta^{-1} = 1$ для любого элемента $\zeta \neq 0$ в \mathcal{A}_r , где $\zeta^{-1} = \tilde{\zeta}|\zeta|^{-2}$. Поэтому $i_0 = v(i_0) = s_0$, где как обычно $i_0 = 1$. Разобьем отрезок $[a, b]$ или кривую на сегменты $[a_k, b_k]$ или γ_k , так что $f|_{[a_k, b_k]}$ и $w|_{U_k}$ непрерывны, где $a \leq a_k < b_k = a_{k+1} \leq b$ и $\dim_{\mathbf{R}}(\partial(U_k \cap U_{k+1})) \leq 2^r - 1$, $\gamma_k = \gamma \cap U$, $U_k \cap U_{k+1} \cap \gamma$ – одноточечное множество. При этом $\int_a^b f(t)dt = \sum_k \int_{a_k}^{b_k} f(t)dt$ и $\int_\gamma w(z)dz = \sum_k \int_{\gamma_k} w(z)dz$.

Первый интеграл $\int_a^b f(t)dt$ берется вдоль отрезка $[a, b]$ вещественной прямой, следовательно, он не зависит от базиса генераторов. Во втором интеграле кривая γ и область U , как и γ_k с U_k , естественно не зависят от выбора базиса генераторов.

Напомним определение интеграла вдоль спрямляемой кривой. Пусть $w : U \rightarrow \mathcal{A}_r$ является непрерывной функцией, где U открыто в \mathcal{A}_r , w определена непрерывной функцией $\xi : U^2 \rightarrow \mathcal{A}_r$, так что

$$(1) \quad \xi(\underset{1}{z}, \underset{2}{z})|_{\underset{1}{z}=\underset{2}{z}, \underset{2}{z}=\tilde{z}} = w(z, \tilde{z})$$

или коротко $w(z)$ вместо $w(z, \tilde{z})$, где $\underset{1}{z}$ и $\underset{2}{z} \in U$. Пусть также $g : U^2 \rightarrow \mathcal{A}_r$ является непрерывной функцией, которая является $\underset{1}{z}$ -супердифференцируемой, так что

$$(2) \quad (\partial g(\underset{1}{z}, \underset{2}{z})/\partial \underset{1}{z}).1 = \xi(\underset{1}{z}, \underset{2}{z}) \text{ на } U^2. \text{ Тогда положим}$$

(3) $\hat{w}(z, \tilde{z}).h := \hat{w}_z(z, \tilde{z}).h := [(\partial g(\underset{1}{z}, \underset{2}{z})/\partial \underset{1}{z}).h]|_{\underset{1}{z}=\underset{2}{z}, \underset{2}{z}=\tilde{z}}$ для любого $h \in \mathcal{A}_r$. Коротко мы можем это записать в виде $(\partial g(z, \tilde{z})/\partial z).1 = w(z, \tilde{z})$ и $\hat{w}_z(z, \tilde{z}).h := \hat{w}(z).h := (\partial g(z, \tilde{z})/\partial z).h$. Если существует следующий предел

$$(4) \quad \int_\gamma w(z, \tilde{z})dz := \lim_P I(w, \gamma; P), \text{ где}$$

$$(5) \quad I(w, \gamma; P) := \sum_{k=0}^{t-1} \hat{w}(z_{k+1}, \tilde{z}_{k+1}).(\Delta z_k),$$

где $\Delta z_k := z_{k+1} - z_k$, $z_k := \gamma(c_k)$ для любого $k = 0, \dots, t$, тогда по определению w является интегрируемой вдоль пути γ по переменной z .

Поскольку $i_0 = s_0 = 1$, то и $\hat{w}(z)$ не зависит от выбора базиса, так как оператор $\hat{w}(z)$ определенный в смысле распределений задается условиями (2, 3) и алгоритмом построения \hat{w} независимым от выбора базиса генераторов в каждой подобласти U_k (смотри доказательства предложения 2.6 и теоремы 2.7 в [14, 15]).

17. Лемма. Пусть задана прямая $a + S\theta$, $\theta \in \mathbf{R}$ в \mathcal{A}_r при $2 \leq r < \infty$, где $S \in \mathcal{A}_r$, $|S| = 1$, $\text{Re}(S) = 0$. Тогда для функции $M(p, t)$ заданной уравнением 3(2) или 3(3, 3')

существует автоморфизм $v, z \mapsto v(z)$, алгебры \mathcal{A}_r , так что в базисе генераторов $s_j := v(i_j)$ ограничение функции $v(M(p, t; \zeta))$ на прямую $p \in \{z : z = a + S\theta, \theta \in \mathbf{R}\}$ равно

- (1) $v(M(p, t; \zeta)) = (p'_1 t + \zeta'_1)K$, где
- (2) $K = [s_1 \cos(\zeta'_2) + s_2 \sin(\zeta'_2) \cos(\zeta'_3) + i_3 \sin(\zeta'_2) \sin(\zeta'_3)]$ для кватернионов;
- (3) $K = [s_1 \cos(\zeta'_2) + s_2 \sin(\zeta'_2) \cos(\zeta'_3) + \dots + s_6 \sin(\zeta'_2) \dots \sin(\zeta'_6) \cos(\zeta'_7) + s_7 \sin(\zeta'_2) \dots \sin(\zeta'_6) \sin(\zeta'_7)]$ для октонионов,
- (3') $K = [s_1 \cos(\zeta'_2) + s_2 \sin(\zeta'_2) \cos(\zeta'_3) + \dots + s_{2^r-2} \sin(\zeta'_2) \dots \sin(\zeta'_{2^r-2}) \cos(\zeta'_{2^r-1}) + s_{2^r-1} \sin(\zeta'_2) \dots \sin(\zeta'_{2^r-2}) \sin(\zeta'_{2^r-1})]$ для общей алгебры Кэли-Диксона, где $p'_1 = v((p - \tilde{p})/2)$ и $\zeta'_n = v(\zeta_n) \in \mathbf{R}$ для любого $n = 1, \dots, 2^r - 1$.

Доказательство. На заданной прямой аргумент p можно записать в виде: $p = p_0 + p_S S$, где $p_0 = Re(p) = a$, а $p_S = \theta$. Тогда генераторы $s_0 = 1$ и $s_1 = S$ дополним до базиса генераторов $\{s_0, \dots, s_{2^r-1}\}$ в \mathcal{A}_r , используя стандартную процедуру последовательного удвоения, чтобы $Re(s_{2^n-1} \tilde{s}_{2^n}) = 0$ для любого $n = 1, \dots, r - 1$, так как $\mathbf{R} \oplus S\mathbf{R}$ изоморфно \mathbf{C} . Поскольку $v(z + \zeta) = v(z) + v(\zeta)$ и $v(z\zeta) = v(z)v(\zeta)$ для любых $z, \zeta \in \mathcal{A}_r$, то $v(e^z) = e^{v(z)}$ для любого $z \in \mathcal{A}_r$. Тогда $v(\exp(z \exp_n(\zeta))) = \exp(v(z) \exp_n(v(\zeta)))$ для любых $z, \zeta \in \mathcal{A}_r$ и $1 \leq n \in \mathbf{Z}$, где $\exp_1(z) := \exp(z)$, $\exp_{n+1}(z) := \exp(\exp_n(z))$ для любых $1 \leq n \in \mathbf{N}$ и $z \in \mathcal{A}_r$. Используя итерированные экспоненты из замечания 4 и формулы

$$h_j = (-hi_j + i_j(2^r - 2)^{-1} \{-h + \sum_{k=1}^{2^r-1} i_k(hi_k^*)\})/2 \text{ для любого } j = 1, 2, \dots, 2^r - 1,$$

$$h_0 = (h + (2^r - 2)^{-1} \{-h + \sum_{k=1}^{2^r-1} i_k(hi_k^*)\})/2,$$

где $h = h_0 i_0 + \dots + h_{2^r-1} i_{2^r-1}$, $h_j \in \mathbf{R}$ для любого j , $h^* = \tilde{h}$ обозначает сопряженный элемент алгебры Кэли-Диксона h , $h \in \mathcal{A}_r$, получим утверждение леммы, причем $p'_1 = p_S = v((p - \tilde{p})/2)$.

18. Предложение. Пусть U – область в алгебре Кэли-Диксона \mathcal{A}_r с $2 \leq r$, $f : U^2 \rightarrow \mathcal{A}_r$ – это кусочно-непрерывная функция, а $\gamma : (a_1, b_1) \rightarrow U$ и $\psi : (a_2, b_2) \rightarrow U$ – пути, где $-\infty \leq a_1 < b_1 \leq \infty$, $-\infty \leq a_2 < b_2 \leq \infty$, причем $\gamma|_{(\alpha, \beta)}$ и $\psi|_{(\alpha, \beta)}$ спрямляемы для любых $-\infty < \alpha < \beta < \infty$, и интеграл $\int_\gamma (\int_\psi f(z, \zeta) d\zeta) dz$ сходится. Тогда существует

$$(i) \quad \int_\psi (\int_\gamma f(z, \zeta) dz) d\zeta = \int_\gamma (\int_\psi f(z, \zeta) d\zeta) dz.$$

Доказательство. Поскольку f кусочно непрерывна, то существует счетное разбиение области U^2 в виде $U^2 = \bigcup_k W_k$ подобластей W_k , где коразмерность над \mathbf{R} пересечения $codim_{\mathbf{R}}(W_k \cap W_l) \geq 1$ для любых $k \neq l$. При этом ограничения $f|_{W_k}$ непрерывны. Можно выбрать каждую W_k ограниченной так, чтобы $(\gamma \times \psi) \cap W_k =: \gamma_k \times \psi_k$ были со спрямляемыми $\gamma_k = \gamma|_{(\alpha_k, \beta_k)}$ и $\psi_k = \psi|_{(\alpha'_k, \beta'_k)}$. Тогда в силу непрерывности ограничения $f|_{W_k}$ существуют конечные интегралы

$$(ii) \quad \int_{\psi_k} (\int_{\gamma_k} f(z, \zeta) dz) d\zeta = \int_{\gamma_k} (\int_{\psi_k} f(z, \zeta) d\zeta) dz \text{ для любого } k. \text{ Поскольку}$$

$$\sum_k \int_{\gamma_k} (\int_{\psi_k} f(z, \zeta) d\zeta) dz = \int_\gamma (\int_\psi f(z, \zeta) d\zeta) dz, \text{ то суммирование обеих частей равенства}$$

(ii) дает уравнение (i).

19. Теорема. Если функция $f(t)$ является оригиналом (смотри определение 1), так что ${}_N F_u(p; \zeta) := \sum_{s=0}^{2^r-1} {}_N F_{u,s}(p; \zeta) N_s$ – ее изображение, где функция f записана в виде $f(t) = \sum_{s=0}^{2^r-1} f_s(t) N_s$, $f_s : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ для любого $s = 0, 1, \dots, 2^r - 1$ (смотри замечание 4), $f(\mathbf{R}) \subset \mathbf{K}$ при $\mathbf{K} = \mathbf{H}$ или $\mathbf{K} = \mathbf{O}$, $f(\mathbf{R}) \subset \mathbf{R}$ над алгеброй Кэли-Диксона \mathcal{A}_r с $4 \leq r \in \mathbf{N}$. Тогда в любой точке t , где $f(t)$ удовлетворяет условию Гёльдера справедливо равенство:

$$(i) \quad f(t) = (2\pi N_1)^{-1} Re(S\tilde{N}_1) \sum_{s=0}^{2^r-1} \int_{a-S\infty}^{a+S\infty} {}_N F_{u,s}(p; \zeta) \exp(u(p, t; \zeta)) dp N_s,$$

где $u(p, t; \zeta) = pt + \zeta$ или $u(p, t; \zeta) = p_0 t + M_N(p, t; \zeta) + \zeta_0$, а интеграл берется вдоль прямой $p(\tau) = a + S\tau \in \mathbf{K}$, $\tau \in \mathbf{R}$, $S \in \mathcal{A}_r$, $Re(S) = 0$, $|S| = 1$, $Re(p) = a > s_0$ и интеграл понимается в смысле главного значения.

Доказательство. В силу разложения функции f в виде $f(t) = \sum_{s=0}^{2^r-1} f_s(t) N_s$ достаточно рассмотреть обратное преобразование для вещественно значной функции f_s ,

которую обозначим для простоты через f . Поскольку $t \in \mathbf{R}$, то $\int_0^\infty f(\tau)d\tau$ – это интеграл Римана. Если w – это голоморфная функция переменной алгебры Кэли-Диксона, то локально в односвязной области U в каждом шаре $B(\mathcal{A}_r, z_0, R)$ с центром в z_0 радиуса $R > 0$ содержащемся во внутренности $\text{Int}(U)$ области U выполняется равенство

$$(\partial \int_{z_0}^z w(\zeta)d\zeta/\partial z).1 = w(z),$$

где интеграл зависит лишь о начальной z_0 и конечной z точек спрямляемого пути в $B(\mathcal{A}_r, z_0, R)$. С другой стороны, вдоль прямой $a + S\mathbf{R}$ ограничение первообразной имеет вид $\int_{\theta_0}^\theta w(a + S\tau)d\tau$, так как

$$\int_{z_0=a+S\theta_0}^{z=a+S\theta} w(\zeta)d\zeta = \int_{\theta_0}^\theta \hat{w}(a + S\tau).Sd\tau,$$

а $\partial f(z)/\partial \theta = (\partial f(z)/\partial z).S$ для супердифференцируемой по $z \in U$ функции $f(z)$, причем первообразная единственна с точностью до постоянной из \mathcal{A}_r с данным представлением функции и алгоритмом [14, 15].

Интеграл $g_b(t) := \int_{a-SB}^{a+SB} {}_N F_{u,s}(p; \zeta) \exp(p_0 t + M_N(p, t; \zeta) + \zeta_0) dp$ для любого $0 < b < \infty$ можно с использованием генераторов алгебры \mathcal{A}_r и теоремы Фубини для вещественно значных компонент функций преобразовать к виду:

$$g_b(t) = (2\pi N_1)^{-1} \text{Re}(S\tilde{N}_1) \int_0^\infty f(\tau)d\tau \int_{a-Sb}^{a+Sb} \exp(p_0 t + M_N(p, t; \zeta) + \zeta_0) \exp(-(p_0 \tau + M_N(p, \tau; \zeta) + \zeta_0)) dp,$$

так как интеграл $\int_0^\infty f(\tau) \exp(-(p_0 \tau + M_N(p, \tau; \zeta) + \zeta_0))d\tau$ равномерно сходится относительно p в полупространстве $\text{Re}(p) > s_0$ в \mathcal{A}_r (смотри также предложение 18). В силу альтернативности алгебры \mathbf{K} и ассоциативности со степенями алгебры \mathcal{A}_r можно рассмотреть автоморфизм v из леммы 17 $z \mapsto v(z)$ для любого $z \in \mathbf{K}$. Тогда с таким v получим функцию $M(p, t; \zeta)$, даваемую формулами 17(1–3), где $p_0, p'_1, \zeta_0, \zeta'_1, \dots, \zeta'_{2r-1} \in \mathbf{R}$ постоянны, $t \in \mathbf{R}$, $K \in \mathcal{A}_r$ постоянно с $\text{Re}(K) = 0$, где $p'_0 = p_0$ и $\zeta'_0 = \zeta_0$, так как $v(1) = 1$ и, следовательно, $v(t) = t$ для любого $t \in \mathbf{R}$. Формула (i) справедлива тогда и только тогда, когда она справедлива после применения автоморфизма v к обеим частям равенства, так как $v(z) = v(\zeta)$ для $z, \zeta \in \mathcal{A}_r$ равносильно тому, что $z = \zeta$.

Тогда в силу лемм 16 и 17 с точностью до автоморфизма алгебры \mathcal{A}_r доказательство сводится к случаю $p = (p_0, p_1, 0, \dots, 0)$, $N = (N_0, N_1, N_2, \dots, N_{2r-1})$, где $N_0 = 1$, так как \mathbf{R} является центром алгебры \mathcal{A}_r . Но это дает $p_1 = p_1(t) = \text{Re}(S\tilde{N}_1)t$ для любого $t \in \mathbf{R}$. Рассмотрим случай $c := \text{Re}(S\tilde{N}_1) \neq 0$, а тогда частный случай $\text{Re}(S\tilde{N}_1) = 0$ получится предельным переходом при $\text{Re}(S\tilde{N}_1) \neq 0$ стремящемся к нулю. Итак,

$$g_b(t) = (2\pi N_1)^{-1} c \int_0^\infty f(\tau)d\tau \int_{a-Sb}^{a+Sb} \exp(at + c(\zeta_1 + t)K) \exp(-(a\tau + c(\zeta_1 + \tau)K)) dp,$$

так как $\zeta_0, a \in \mathbf{R}$, где K дается формулами 17(2,3). Тогда

$$g_b(t) = (\pi N_1)^{-1} c \int_0^\infty f(\tau) e^{a(t-\tau)} [\sin(bc(t-\tau))] (ct - c\tau)^{-1} = (\pi)^{-1} e^{at} \int_{-t}^\infty f(\zeta + t) e^{-a(\zeta+t)} [\sin(b\zeta)] \zeta^{-1} d\zeta,$$

где была использована замена $\tau - t = \zeta$. Положим $w(t) := f(t)e^{-at}$, где $w(t) = 0$ для любого $t < 0$. Поэтому,

$g_b(t) = (\pi)^{-1} e^{at} \int_{-\infty}^\infty [w(\zeta + t) - w(t)] \zeta^{-1} \sin(b\zeta) d\zeta + (\pi)^{-1} f(t) \int_{-\infty}^\infty \zeta^{-1} \sin(b\zeta) d\zeta$. Интеграл во втором слагаемом известен как интеграл Эйлера: $\int_{-\infty}^\infty \zeta^{-1} \sin(b\zeta) d\zeta = \pi$ для любого $b > 0$, следовательно, второе слагаемое равно $f(t)$. Остается доказать, что $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^\infty [w(\zeta + t) - w(t)] \zeta^{-1} \sin(b\zeta) d\zeta = 0$, что вытекает из следующей леммы.

20. Лемма. Если функция $\psi(\zeta)$ со значениями в алгебре Кэли-Диксона \mathcal{A}_r интегрируема на отрезке $[\alpha, \beta]$, то

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_\alpha^\beta \psi(\zeta) \sin(b\zeta) d\zeta = 0.$$

Доказательство. Если ψ непрерывно дифференцируема на отрезке $[\alpha, \beta]$, то в результате интегрирования по частям:

$$\int_\alpha^\beta \psi(\zeta) \sin(b\zeta) d\zeta = -\psi(\zeta) \cos(b\zeta) b^{-1} |_\alpha^\beta + \int_\alpha^\beta \psi'(\zeta) \cos(b\zeta) b^{-1} d\zeta$$
 и, следовательно,

$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_{\alpha}^{\beta} \psi(\zeta) \sin(b\zeta) d\zeta = 0$. Если же $\psi(\zeta)$ - произвольная интегрируемая функция, то для любого $\epsilon > 0$ существует непрерывно дифференцируемая функция $\psi_{\epsilon}(\zeta)$ такая, что $\int_{\alpha}^{\beta} |\psi(\zeta) - \psi_{\epsilon}(\zeta)| d\zeta < \epsilon/2$. Тогда $\int_{\alpha}^{\beta} \psi(\zeta) \sin(b\zeta) d\zeta = \int_{\alpha}^{\beta} [\psi(\zeta) - \psi_{\epsilon}(\zeta)] \sin(b\zeta) d\zeta + \int_{\alpha}^{\beta} \psi_{\epsilon}(\zeta) \sin(b\zeta) d\zeta$, где $|\int_{\alpha}^{\beta} [\psi(\zeta) - \psi_{\epsilon}(\zeta)] \sin(b\zeta) d\zeta| < \epsilon/2$ для любых b , так как $|\sin(b\zeta)| \leq 1$, а второе слагаемое стремится к нулю: $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_{\alpha}^{\beta} \psi_{\epsilon}(\zeta) \sin(b\zeta) d\zeta = 0$ по доказанному выше.

Окончание **доказательства** теоремы 19. Для фиксированного $\epsilon > 0$ имеется равенство:

$\int_{-\infty}^{\infty} [w(\zeta + t) - w(t)] \zeta^{-1} \sin(b\zeta) d\zeta = \int_{-B}^B [w(\zeta + t) - w(t)] \zeta^{-1} \sin(b\zeta) d\zeta + \int_{|\zeta| > B} w(\zeta + t) \zeta^{-1} \sin(b\zeta) d\zeta - w(t) \int_{|\zeta| > B} \sin(b\zeta) \zeta^{-1} d\zeta$. Второе и третье слагаемые являются сходящимися интегралами и поэтому при достаточно больших $B > 0$ они по модулю меньше $\epsilon/3$. В силу условия Гёльдера $|[w(\zeta + t) - w(t)] \zeta^{-1}| \leq A|\zeta|^{1-c}$, где $c > 0, A > 0$. Тогда в силу леммы 10 существует $b_0 > 0$ такое, что

$$|\int_{-B}^B [w(\zeta + t) - w(t)] \zeta^{-1} \sin(b\zeta) d\zeta| < \epsilon/3 \text{ для любых } b > b_0. \text{ И так,}$$

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} [w(\zeta + t) - w(t)] \zeta^{-1} \sin(b\zeta) d\zeta = 0.$$

Эту теорему в случае общей функции $M_N(p, t; \zeta)$ можно также доказать непосредственно вычислением встречающихся интегралов по вещественным переменным t и τ , используя лемму 20.

21. Теорема. *Оригинал $f(t)$ с $f(\mathbf{R}) \subset \mathbf{K}$ при $\mathbf{K} = \mathbf{H}$ или $\mathbf{K} = \mathbf{O}$, или $f(\mathbf{R}) \subset \mathbf{R}$ над алгеброй Кэли-Диксона \mathcal{A}_r с $4 \leq r \in \mathbf{N}$, вполне определяется своим изображением ${}_N F_u(p; \zeta)$ с точностью до значений в точках разрыва.*

Доказательство. В силу теоремы 19 значение $f(t)$ в любой точке t непрерывности $f(t)$ выражается через ${}_N F_u(p; \zeta)$ по формуле 19(i). При этом значения оригинала в точках разрыва не влияют на изображение ${}_N F_u(p; \zeta)$, так как на любом конечном интервале число точек разрыва конечно.

22. Теорема. *Если функция ${}_N F_u(p; \zeta)$ аналитична по переменной $p \in \mathcal{A}_r$ в полупространстве $W := \{p \in \mathcal{A}_r : \text{Re}(p) > s_0\}$, где $2 \leq r \in \mathbf{N}$, $f(\mathbf{R}) \subset \mathbf{K}$ для $\mathbf{K} = \mathbf{H}$ или $\mathbf{K} = \mathbf{O}$, а также произвольной алгебры \mathcal{A}_r с $f(\mathbf{R}) \subset \mathbf{R}$ при $4 \leq r < \infty$, $u(p, t; \zeta) = pt + \zeta$ или $u(p, t; \zeta) := p_0 t + M(p, t; \zeta) + \zeta_0$, в полупространстве $\text{Re}(p) > s_0$, причем для любого $a > s_0$ существуют константы $C_a > 0$ и $\epsilon_a > 0$ такие, что*

(i) $|{}_N F_u(p)| \leq C_a \exp(-\epsilon_a |p|)$ для любого $p \in \mathcal{A}_r$ с $\text{Re}(p) \geq a$, где s_0 фиксировано, а интеграл

(ii) $\int_{a-S\infty}^{a+S\infty} {}_N F_u(p; \zeta) dp$ абсолютно сходится, то ${}_N F_u(p; \zeta)$ является изображением функции

$$(iii) f(t) = (2\pi)^{-1} \tilde{S} \int_{a-S\infty}^{a+S\infty} {}_N F_u(p; \zeta) \exp(u(p, t; \zeta)) dp.$$

Доказательство. Случай $u(p, t; \zeta) = pt + \zeta$ получается из $u(p, t; \zeta) := p_0 t + M(p, t) + \zeta_0$ при $p = (p_0, p_1, 0, \dots, 0)$, но интеграл вдоль прямой линии $a + St, t \in \mathbf{R}$, с таким p в базисе генераторов (N_0, \dots, N_{2r-1}) можно получить из общего интеграла автоморфизмом $v, z \mapsto v(z)$, алгебры $\mathcal{A}_r, r = 2$ для $\mathbf{K} = \mathbf{H}, r = 3$ для $\mathbf{K} = \mathbf{O}$. То есть, в силу лемм 16 и 17 достаточно доказать равенство типа (iii) после действия автоморфизмом v на левую и правую его части.

Пусть $\text{Re}(p) = a > s_0$, тогда

$$|\int_{a-S\infty}^{a+S\infty} \exp(M(p, t; \zeta)) {}_N F_u(p; \zeta) dp| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |{}_N F_u(a + S\theta; \zeta)| d\theta.$$

В силу предположения теоремы этот интеграл сходится равномерно относительно $t \in \mathbf{R}$. Для $f(t)$ даваемой формулой (iii) при $\text{Re}(\eta) =: \eta_0 > s_0$, получим

$$\int_0^{\infty} f(t) \exp(-\eta_0 t) dt = (2\pi)^{-1} \tilde{S} \sum_{j=0}^{2^r-1} \int_0^{\infty} (\int_{a-S\infty}^{a+S\infty} {}_N F_{u,j}(p; \zeta) \exp(u(p, t; \zeta)) dp) \exp(-\eta_0 t) (dt) N_j,$$

в котором можно тогда изменить порядок интегрирования, так как $t \in \mathbf{R}$. Тогда

$\int_0^\infty f(t) \exp(-\eta_0 t) dt = (2\pi)^{-1} \tilde{S} \sum_{j=0}^{2^r-1} \int_{a-S_\infty}^{a+S_\infty} (\int_0^\infty {}_N F_{u,j}(p; \zeta) \exp((a - \eta_0)t) dt) (dp) N_j$,
так как $e^v \in \mathbf{R}$ для любого $v \in \mathbf{R}$, $e^{aM} e^{bM} = e^{(a+b)M}$ для любых $a, b \in \mathbf{R}$. Поскольку $a < \eta_0$
и

$$\int_0^\infty e^{(a-\eta_0)t} dt = -(a - \eta_0)^{-1},$$

то

$$\begin{aligned} \int_0^\infty f(t) \exp(-\eta_0 t) dt &= -(2\pi)^{-1} \tilde{S} \sum_{j=0}^{2^r-1} (\int_{a-S_\infty}^{a+S_\infty} {}_N F_{u,j}(p; \zeta) (a - \eta_0)^{-1} dp) N_j \\ &= -(2\pi)^{-1} \tilde{S} (\int_{a-S_\infty}^{a+S_\infty} {}_N F_u(p; \zeta) (a - \eta_0)^{-1} dp). \end{aligned}$$

Для окончания доказательства понадобится следующий аналог леммы Жордана.

23. Лемма. Пусть функция F переменной p из алгебры Кэли-Диксона \mathcal{A}_r с $2 \leq r \in \mathbf{N}$ удовлетворяет условиям (1 – 3):

(1) функция $F(p)$ непрерывна по переменной $p \in \mathcal{A}_r$ в (открытой) области W полу-пространства $\{p \in \mathcal{A}_r : \operatorname{Re}(p) > s_0\}$, причем для любого $a > s_0$ существуют константы $C_a > 0$ и $\epsilon_a > 0$ такие, что

(2) $|F(p)| \leq C_a \exp(-\epsilon_a |p|)$ для любого $p \in C_{R(n)}$, $C_R := \{z \in \mathcal{A}_r : \operatorname{Re}(z) \geq a\}$, $0 < R(n) < R(n+1)$ для любого $n \in \mathbf{N}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} R(n) = \infty$, где s_0 фиксировано, а интеграл

(3) $\int_{a-S_\infty}^{a+S_\infty} F(p) dp$ абсолютно сходится. Тогда

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\gamma_n} F(p) \exp(-u(p, t; \zeta)) dp = 0$

для любого $t > 0$ и любой последовательности спрямляемых кривых γ_n содержащихся в $C_{R(n)} \cap W$, причём или $F(p)$ голоморфна в W , которая является $(2^r - 1)$ -связной открытой областью в \mathcal{A}_r (смотри [21]), так что проекция $\pi_{s,p,t}(W)$ односвязна в $s\mathbf{R} \oplus p\mathbf{R}$ для любых $s = i_{2k}$, $p = i_{2k+1}$, $k = 0, 1, \dots, 2^{r-1} - 1$ для любых $t \in \mathcal{A}_{r,s,p} := \mathcal{A}_r \ominus s\mathbf{R} \ominus p\mathbf{R}$ и $u \in s\mathbf{R} \oplus p\mathbf{R}$, для которых существует $z = t + u \in \mathcal{A}_r$; или существует константа $C_V > 0$ такая, что вариации (длины) кривых $V(\gamma_n) \leq C_V R_n$ для любого n , где $u(p, t; \zeta)$ - функция даваемая уравнениями $\mathfrak{Z}(1-\mathfrak{Z}, \mathfrak{Z}')$, $n \in \mathbf{N}$.

Доказательство. Если $0 < \epsilon \leq \min(a - s_0, \epsilon_a)$, тогда в силу условия (ii) существует константа $C > 0$ такая, что

$$(iv) |F(p)| \leq C e^{-\epsilon |p|},$$

для любых $p \in \mathcal{A}_r$ с $\operatorname{Re}(p) \geq a > s_0$. Если U – это область в \mathcal{A}_r диаметра не превосходящего ρ , то в силу (4) из доказательства теоремы 7 [14] выполняется неравенство:

$$\sup_{p \in U} \|\hat{F}(p)\| \leq \sup_{p \in U} |F(p)| C_1 \exp(C_2 \rho^n),$$

где C_1 и C_2 – это положительные постоянные независимые от F , $n = 2^r + 2$, $2 \leq r \in \mathbf{N}$. В частности, в качестве U можно взять внутренность параллелепипеда с ребрами длины не превосходящей $\rho/2^{r/2}$. Тогда путь интегрирования можно покрыть конечным числом таких параллелепипедов. В случае окружности радиуса R число необходимых параллелепипедов не превосходит $2\pi R/\rho + 1$. Существует $R_0 > 0$, так что для любого $R > R_0$ выполняется неравенство $2\pi R/\rho < \exp(C_2 \rho^{n-1}(R - \rho))$. Поэтому в ρ – окрестности C_R^ρ окружности радиуса R с $R > R_0$ выполняется неравенство:

$$\sup_{p \in C_R^\rho} \|\hat{F}(p)\| \leq \sup_{p \in C_R^\rho} |F(p)| C_1 \exp(C_2 \rho^{n-1} R).$$

Поскольку $\rho > 0$ можно взять произвольно малым, то существует $\rho_0 > 0$ такое, что для любых $0 < \rho < \rho_0$ удовлетворяется неравенство $C_2 \rho^{n-1} < \epsilon$, следовательно,

$$\sup_{p \in C_R^\rho, \operatorname{Re}(p) \geq a} \|\hat{F}(p)\| \leq C C_1 \exp((C_2 \rho^{n-1} - \epsilon) R) \leq C C_1 \exp(-\delta R)$$

в силу условия наложенного на F , где C – это положительная постоянная для данной F , $\delta = C_2 \rho^{n-1} - \epsilon > 0$. При этом длина пути интегрирования не превосходит $2\pi R$, а $\lim_{R \rightarrow \infty} C C_1 2\pi R \exp(-\delta R) = 0$. Функция $F(p)$ непрерывна по p , значит интегрируема вдоль любой спрямляемой кривой в области W полупространства $\{p \in \mathcal{A}_r : \operatorname{Re}(p) > s_0\}$.

Если $F(p)$ голоморфна, то в силу теоремы 2.11 [14, 15] $\int_{\gamma_n} F(p) \exp(-u(p, t; \zeta)) dp$ не зависит от вида кривой и определяется лишь начальной и конечной её точками. Если $V(\gamma_n) \leq C_V R_n$ для любого n , то достаточно доказать утверждение леммы для любой под-

последовательности $R_{n(k)}$ с $R_{n(k+1)} \geq R_{n(k)} + 1$ для любого $k \in \mathbf{N}$. Обозначим для простоты такую подпоследовательность через R_n . Каждую спрямляемую кривую можно аппроксимировать сходящейся последовательностью спрямляемых ломаных линий, составленных из дуг окружностей. Если кривая расположена на сфере, то эти окружности можно взять с общим центром со сферой. Условие (2) в каждой плоскости $\mathbf{R} \oplus N\mathbf{R}$, где $N \in \mathcal{A}_r$, $Re(N) = 0$, $|N| = 1$, выполняется, причем равномерно относительно направляющих N и можно выполнить диффеоморфизм g в \mathcal{A}_r , так что $g(W) = W$, $g(S_n) = S_n$ для любого $n \in \mathbf{N}$, и образом C^1 кривой из W является дуга окружности, так как $0 < R_n + 1 < R_{n+1}$ для любого $n \in \mathbf{N}$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \infty$. Функционал $(F, \gamma) \mapsto \int_\gamma F(p) dp$ непрерывен из $C^0(V, \mathcal{A}_r) \times \Gamma$ в \mathcal{A}_r , где V – компактная область в \mathcal{A}_r , Γ – семейство спрямляемых кривых в V с метрикой $\rho(v, w) := \max(\sup_{z \in v} \inf_{\zeta \in w} |z - \zeta|, \sup_{z \in w} \inf_{\zeta \in v} |z - \zeta|)$ (смотри теорему 2.7 [14, 15]). Пространство C^1 непрерывно дифференцируемых функций вещественных переменных плотно в пространстве непрерывных функций C^0 в компактно-открытой топологии в случае конечного числа переменных. При этом спрямляемая кривая является равномерным пределом C^1 кривых, так как каждая спрямляемая кривая непрерывна. Поэтому, рассмотрим $\gamma_n = \psi_n \cap \{p \in \mathcal{A}_r : Re(p) > a\} \cap W$. Следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\gamma_n} F(p) \exp(-u(p, t; \zeta)) dp = 0,$$

так как это выполняется для $\gamma_n = \pi_n \cap C_{R(n)}$, а значит и для общих γ_n с теми же начальными и конечными точками, где π_n – двумерные над \mathbf{R} плоскости в \mathcal{A}_r .

Продолжение доказательства теоремы 22. В силу леммы 23

$$|\int_{\psi_R} F(p)(p - \eta_0)^{-1} dp| \leq u(R)\pi R / (R - |\eta_0|),$$

где $0 < u(R) < \infty$ и существует $\lim_{R \rightarrow \infty} u(R) = 0$, а ψ_R – дуга окружности $|p| = R$ в плоскости $\mathbf{R} \oplus S\mathbf{R}$ с $Re(p) > a$, следовательно,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\psi_R} F(p)(p - \eta_0)^{-1} dp = 0,$$

так как $u(R) \leq u_0 \exp(-\delta R)$ для любого $R > R_0$, где $u_0 = const > 0$.

Тогда прямую $a + S\theta$ с $\theta \in \mathbf{R}$ можно заменить замкнутым контуром ϕ_R , составленным из ψ_R и отрезка $[a + Sb, a - Sb]$, проходимого сверху вниз. Итак,

$$\int_0^\infty \exp(-\eta_0 t) f(t) dt = (2\pi)^{-1} \tilde{S} \int_{\phi_R} F(p)(p - \eta_0)^{-1} dp,$$

где знак перед интегралом изменен за счет изменения направления обхода петли ϕ_R . Напомним, что в случае алгебры Кэли-Диксона \mathcal{A}_r вычет функции является оператором \mathbf{R} -однородным и \mathcal{A}_r -аддитивным аргумента $L \in \mathcal{A}_r$ с $Re(L) = 0$, причем вычет естественно зависит от функции и точки. В области $\{p \in \mathcal{A}_r : Re(p) \geq a, |p| \leq R\}$ аналитическая функция $F(p)$ имеет лишь одну особую точку $p = \eta_0$, которая является полюсом первого порядка с вычетом $res(\eta_0; (p - \eta_0)^{-1} F(p)) \cdot L = LF(\eta_0)$ для любых $L \in \mathcal{A}_r$ с $Re(L) = 0$, следовательно,

$$\int_0^\infty f(t) \exp(-\eta_0 t) dt = F(\eta_0), \text{ так как } L = S \text{ в данном случае и } S\tilde{S} = 1.$$

При $t < 0$ в силу упомянутой выше \mathcal{A}_r леммы 23 получим, что

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\phi_R} F(p) e^{pt} dp = 0,$$

так как $Re(p) = a > 0$, следовательно, прямую $a + S\theta$, $\theta \in \mathbf{R}$, можно заменить петлей ϕ_R , что и выше. Тогда при $t < 0$ получим:

$$f(t) = (2\pi)^{-1} \int_{\phi_R} F(p) e^{pt} dp = 0,$$

так как $F(p)$ аналитична по p вместе с e^{pt} внутри области $\{p : p \in \mathcal{A}_r; |p| \leq R', Re(p) > s_0\}$, $a > s_0, 0 < R < R' \leq \infty$. То есть условие 2 для оригинала выполняется. С другой стороны,

$$|f(t)| \leq (2\pi)^{-1} e^{at} \int_{-\infty}^\infty |F(a + S\theta)| d\theta = Ce^{at},$$

где $C = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^\infty |F(a + S\theta)| d\theta < \infty$, следовательно, выполнено условие (3). Также $f(t)$ является непрерывной, так как подинтегральная функция $F(p)$ непрерывна, удовлетворяет условиям (i, ii) и

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma(\theta); |\theta| \geq R} F(p) dp = 0. \text{ Более того, интеграл } \int_{a-S\infty}^{a+S\infty} {}_N F_u(p; \zeta) [\partial \exp(u(p, t)) / \partial t] dp$$

сходится в силу условий (i, ii) и доказательства выше, следовательно, функция $f(t)$ дифференцируема, а значит и подавно удовлетворяет условию Липшица.

24. Замечание. В теореме 22 условие (i) можно заменить на

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{p \in C_{R(n)}} \|\hat{F}(p)\| = 0$$

по последовательности $C_{R(n)} := \{z \in \mathcal{A}_r : |z| = R(n), \operatorname{Re}(z) > s_0\}$, где $R(n) < R(n+1)$ для любых n , $\lim_{n \rightarrow \infty} R(n) = \infty$, так как это обеспечивает выполнимость \mathcal{A}_r аналога леммы Жордана для любого $r \geq 2$ (смотри также замечание 36). Но в самой теореме 22 существенно используется альтернативность алгебры, то есть, в ней в общем случае возможны лишь $r = 2$ или $r = 3$ при $f(\mathbf{R}) \subset \mathbf{K}$, либо при условии $f(\mathbf{R}) \subset \mathbf{R}$ при $4 \leq r \in \mathbf{N}$.

Далее рассматриваются свойства кватернионных, октонионных и общих \mathcal{A}_r аналогов преобразования Лапласа.

25. Предложение. Если ${}_N F_u(p; \zeta)$ и ${}_N G_u(p; \zeta)$ – это изображения функций-оригиналов $f(t)$ и $g(t)$ в полупространствах $\operatorname{Re}(p) > s_0(f)$ и $\operatorname{Re}(p) > s_0(g)$ со значениями в \mathcal{A}_r , то для любых $\alpha, \beta \in \mathcal{A}_r$ в случае $\mathbf{K} = \mathbf{H}$; а также f и g со значениями в \mathbf{R} и любых $\alpha, \beta \in \mathcal{A}_r$ или f и g со значениями в \mathcal{A}_r и любых $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ в случае \mathcal{A}_r функция $\alpha {}_N F_u(p; \zeta) + \beta {}_N G_u(p; \zeta)$ является изображением функции $\alpha f(t) + \beta g(t)$ в полупространстве $\operatorname{Re}(p) > \max(s_0(f), s_0(g))$.

Доказательство. Поскольку существуют ${}_N F_u(p; \zeta)$ и ${}_N G_u(p; \zeta)$, то интеграл

$\int_0^\infty (\alpha f(t) + \beta g(t)) \exp(-u(p, t)) dt = \int_0^\infty \alpha f(t) \exp(-u(p, t)) dt + \int_0^\infty \beta g(t) \exp(-u(p, t)) dt$ сходится в полупространстве $\operatorname{Re}(p) > \max(s_0(f), s_0(g))$. При этом $t \in \mathbf{R}$, а \mathbf{R} является центром алгебры \mathcal{A}_r . Алгебра \mathbf{H} ассоциативна. Поэтому в указанных в условии случаях константы α, β можно вынести за знаки интегралов.

26. Примеры. Пусть сначала $u(p, t) = pt$, $p \in \mathcal{A}_r$, $2 \leq r$.

1. Если $f(t) = Ch_{[0, \infty)}(t)$ – характеристическая функция полупрямой $[0, \infty)$, то $F(p) = p^{-1}$, что вытекает из определения, так как $\int_0^\infty e^{-pt} dt = -p^{-1} e^{-pt} \Big|_0^\infty = 1/p$.

2. Если $f(t) = \sin(\omega t) Ch_{[0, \infty)}(t)$, то $F(p) = \omega(p^2 + \omega^2)^{-1}$, где $\omega \in \mathbf{R}$.

3. Если $f(t) = \cos(\omega t) Ch_{[0, \infty)}(t)$, то $F(p) = p(p^2 + \omega^2)^{-1}$.

4. Для $f(t) = sh(\omega t) Ch_{[0, \infty)}(t)$ изображение $F(p) = \omega(p^2 - \omega^2)^{-1}$.

5. Для $f(t) = ch(\omega t) Ch_{[0, \infty)}(t)$ изображение $F(p) = p(p^2 - \omega^2)^{-1}$. Преобразования Лапласа в примерах 2-5 вытекают из предложения 25 и формул:

$\int_0^\infty \cos(\omega t) e^{-pt} dt = \int_0^\infty [e^{-(p_0 + S(p_s - \omega))t} + e^{-(p_0 + S(p_s + \omega))t}] dt / 2 = [(p - \omega S)^{-1} + (p + \omega S)^{-1}] / 2$, где $p = p_0 + S p_s$, $p_0 = \operatorname{Re}(p)$, $S \in \mathcal{A}_r$, $\operatorname{Re}(S) = 0$, $|S| = 1$, $p_s \in \mathbf{R}$;

$\int_0^\infty \sin(\omega t) e^{-pt} dt = \int_0^\infty [e^{-(p_0 + S(p_s - \omega))t} - e^{-(p_0 + S(p_s + \omega))t}] \tilde{S} dt / 2 = [(p - \omega S)^{-1} - (p + \omega S)^{-1}] \tilde{S} / 2$,

$$\int_0^\infty ch(\omega t) e^{-pt} dt = \int_0^\infty [e^{-(p_0 - \omega) + S p_s t} + e^{-(p_0 + \omega) + S p_s t}] dt / 2 = [(p - \omega)^{-1} + (p + \omega)^{-1}] / 2,$$

$$\int_0^\infty sh(\omega t) e^{-pt} dt = \int_0^\infty [e^{-(p_0 - \omega) + S p_s t} - e^{-(p_0 + \omega) + S p_s t}] dt / 2 = [(p - \omega)^{-1} - (p + \omega)^{-1}] / 2,$$

так как $\cos(\omega t) = [e^{\omega t S} + e^{-\omega t S}] / 2$, $\sin(\omega t) = [e^{\omega t S} - e^{-\omega t S}] \tilde{S} / 2$, $ch(\omega t) = [e^{\omega t} + e^{-\omega t}] / 2$, $sh(\omega t) = [e^{\omega t} - e^{-\omega t}] / 2$, а рассматриваемые функции-оригиналы принимают лишь вещественные значения.

6. Рассмотрим теперь $f(t) = \exp(\zeta t) Ch_{[0, \infty)}(t)$, тогда

$$F(p) = \int_0^\infty \exp(\zeta t) \exp(-pt) dt,$$

где $\exp(\zeta t) \exp(-pt) = e^{(\zeta_0 - p_0)t} \exp(\zeta' t) \exp(-p' t)$, $\zeta_0 := \operatorname{Re}(\zeta)$, $p_0 := \operatorname{Re}(p)$, $\zeta' := \zeta - \zeta_0$, $p' = p - p_0$. Пусть элемент $N_1 \in \mathcal{A}_r$ такой, что $\zeta' = \zeta_1 N_1$, где $\operatorname{Re}(N_1) = 0$, $\zeta_1 \in \mathbf{R}$, $|N_1| = 1$, тогда $p' = p_1 N_1 + p_2 N_2$, где $N_2 \perp N_1$ относительно скалярного произведения

$Re(N_1\tilde{N}_2)$, $p_1, p_2 \in \mathbf{R}$, то есть, $Re(N_1\tilde{N}_2) = 0$, причем $Re(N_2) = 0$ и $|N_2| = 1$. Поэтому $\exp(\zeta't)\exp(-p't) = (\cos(\zeta_1t) + \sin(\zeta_1t)N_1)(\cos(|p'|t) - \sin(|p'|t)(p_1N_1 + p_2N_2)/|p'|) = [\cos(\zeta_1t)\cos(|p'|t) + \sin(\zeta_1t)\sin(|p'|t)/|p'|] + [-\cos(\zeta_1t)\sin(|p'|t)p_1/|p'| + \sin(\zeta_1t)\cos(|p'|t)]N_1 - [\cos(\zeta_1t)\sin(|p'|t)p_2/|p'|]N_2 - [\sin(|p'|t)\sin(\zeta_1t)p_2/|p'|]N_1N_2$

в силу предложения 3.2 [14, 15], так как $|\zeta'| = |\zeta_1|$, $\cos(\phi)$ – четная функция от $\phi \in \mathbf{R}$, $\sin(|\phi|)\phi N/|\phi| = \sin(\phi)N$ для любых $\phi \in \mathbf{R}$ и $N \in \mathcal{A}_r$ с $Re(N) = 0$, где $\lim_{\phi \rightarrow 0} \sin(\phi)/\phi = 1$, а $\sin(\phi)$ – нечетная функция. При этом $N_1 = \zeta'/|\zeta'|$ при $\zeta' \neq 0$, $N_2 = [p' - p_1N_1]/|p' - p_1N_1|$ при $p' \neq p_1N_1$ для некоторого $p_1 \in \mathbf{R}$, $p_2N_2 = p' - p_1N_1$. Поскольку $Re((p' - p_1N_1)\tilde{\zeta}') = 0$, то $p_1 = Re(p'\tilde{\zeta}')/|\zeta'|$, так как $\zeta'^2 = -|\zeta'|^2$, а $N_1\zeta' = -|\zeta'|$. Тогда $F(p) = 2^{-1}\{c[(c^2 + a^2)^{-1}(1 - p_1/|p'|) + (c^2 + b^2)^{-1}(1 + p_1/|p'|)] + [a(c^2 + a^2)^{-1} + b(c^2 + b^2)^{-1}](1 - p_1/|p'|)N_1 - (a(c^2 + a^2)^{-1} + b(c^2 + b^2)^{-1})p_2N_2/|p'| - c((c^2 + a^2)^{-1} - (c^2 + b^2)^{-1})(p_2/|p'|)N_1N_2\}$, где $c := \zeta_0 - p_0$, $a := |p'| + |\zeta_1|$, $b := |p'| - |\zeta_1|$.

В этом и последующих примерах используются выражения p_j через p с помощью генераторов алгебры \mathcal{A}_r (смотри формулы 3(6)). При этом $|z| = [z(2^r - 2)^{-1}(-z + \sum_{j=1}^{2^r-1} i_j(z i_j^*))]^{1/2}$ для любых $z \in \mathcal{A}_r$, что дает локальную аналитичность $F(p; \zeta)$ по p и ζ .

27. Теорема. Пусть $\alpha = const > 0$, $F(p)$ является изображением функции $f(t)$ при $u = pt + \zeta$ или u дается формулами 3(1-3, 3') над \mathcal{A}_r с $2 \leq r < \infty$, тогда $F(p/\alpha; \zeta)/\alpha$ – изображение функции $f(\alpha t)$.

Доказательство. Поскольку $p_j t + \zeta_j = p_j(\tau/\alpha) + \zeta_j$ для любого j , где $t\alpha = \tau$, то замена переменной дает: $\int_0^\infty f(\alpha t)e^{-u(p, t; \zeta)} dt = \int_0^\infty f(\tau)e^{-u(p, \tau/\alpha; \zeta)} d\tau = F(p/\alpha; \zeta)/\alpha$, так как \mathbf{R} является центром алгебры \mathcal{A}_r .

28. Теорема. Если $f(t)$ – функция-оригинал, $F(p)$ – её изображение, где $u = pt$, $f^{(n)}(t)$ является оригиналом при $n \geq 1$, то

(i) $\mathcal{F}(f^{(n)}(t)Ch_{[0, \infty)}(t), pt; p; 0) = F(p)p^n - f(0)p^{n-1} - \dots - f^{(n-1)}(0)$
является изображением функции $f^{(n)}(t)$ над \mathcal{A}_r , где $f^{(k)}(0) := \lim_{t \rightarrow +0} f^{(k)}(t)$.

Доказательство. Интегрирование по частям дает:

$$(ii) \int_0^\infty f'(t)e^{-pt} dt = [f(t)e^{-pt}]_0^\infty + p \int_0^\infty f(t)e^{-pt} dt.$$

Поскольку $Re(p) = s > s_0$, то $|f(t)e^{-pt}| \leq Ce^{-(s-s_0)t}$, поэтому из формулы (ii) вытекает формула (i) при $n = 1$. Применение последней формулы n раз дает общую формулу (i).

29. Теорема. Если $f(t)$ – функция-оригинал, $F(p)$ – её изображение над \mathcal{A}_r с $2 \leq r < \infty$, где $u = pt$, то $F^{(n)}(p) \cdot ({}_1h, \dots, {}_nh)$ является изображением оригинала $(-t)^n f(t) {}_1h \dots {}_nh$ для любых $n \in \mathbf{N}$ и ${}_1h, \dots, {}_nh \in \mathbf{R} \oplus p'\mathbf{R} \subset \mathcal{A}_r$, где $p' := p - Re(p)$.

Доказательство. Функция $F(p)$ в полупространстве $Re(p) > s_0$ является голоморфной. Тогда $F'(p) \cdot h = -[\int_0^\infty f(t)(-t)e^{-pt} dt]h$, так как h коммутирует с p и с t . Кратное дифференцирование дает $F^{(n)}(p) \cdot ({}_1h, \dots, {}_nh) = [\int_0^\infty (-t)^n f(t)e^{-pt} dt] {}_1h, \dots, {}_nh$.

30. Примеры.

1. Изображением функции-оригинала $t^n Ch_{[0, \infty)}(t)$ является $F(p) = n!p^{-n-1}$; для $f(t) = t \sin(\omega t) Ch_{[0, \infty)}(t)$ изображение равно $F(p) = 2p\omega(p^2 + \omega^2)^{-2}$; для $f(t) = t \cos(\omega t) Ch_{[0, \infty)}(t)$ изображение равно $F(p) = (p^2 - \omega^2)(p^2 + \omega^2)^{-2}$ при $u = pt$ в силу теоремы 29 и примеров 26.1-3, так как $\omega \in \mathbf{R}$, где $p \in \mathcal{A}_r$, $r \geq 2$.

2. Для функции-оригинала $f(t) = t^n \exp(\zeta t) Ch_{[0, \infty)}(t)$ изображение равно $(-1)^n (\partial^n F(p)/\partial p^n) \cdot (1, \dots, 1) = \partial^n F(a, b, c)/\partial c^n$, где в последнем равенстве функция F выражена через переменные (a, b, c) как в примере 15.6 и обозначена F . В частности, при $n = 1$, получается изображение:

$$\mathcal{F}(te^{\zeta t} Ch_{[0, \infty)}(t), pt; p; 0) = 2^{-1}\{(a^2 - c^2)(a^2 + c^2)^{-2}(1 - p_1/|p'|) + (b^2 - c^2)(b^2 + c^2)^{-1}(1 + p_1/|p'|) - 2c(a^2 + c^2)^{-2} + b(b^2 + c^2)^{-2}\}(1 - p_1/|p'|)N_1 + 2c(a^2 + c^2)^{-2} + b(b^2 + c^2)^{-2})(p_2/|p'|)N_2 -$$

$((a^2 - c^2)(a^2 + c^2)^{-2} - (b^2 - c^2)(b^2 + c^2)^{-2})(p_2/|p'|)N_1N_2\}$,
так как $(a^2 + c^2)^{-1} = (2a)^{-1}S((c+aS)^{-1} - (c-aS)^{-1})$, $c(a^2 + c^2)^{-1} = 2^{-1}((c+aS)^{-1} + (c-aS)^{-1})$
для любых $a, c \in \mathbf{R}$, $a^2 + c^2 > 0$, $S \in \mathcal{A}_r$, $|S| = 1$, $Re(S) = 0$, где $p, \zeta \in \mathcal{A}_r$.

В общем случае

$$\begin{aligned} \partial^n [c(c^2 + b^2)^{-1}] / \partial c^n &= n!(-1)^n [(c + Sb)^{-n-1} + (c - Sb)^{-n-1}] / 2 \\ &= n!(-1)^n (c^2 + b^2)^{-n-1} \sum_{0 \leq k \leq [(n+1)/2]} \binom{n+1}{2k} (-1)^k c^{n+1-2k} b^{2k}, \end{aligned}$$

где $S \in \mathcal{A}_r$, $|S| = 1$, $b \neq 0$, $c, b \in \mathbf{R}$;

$$\begin{aligned} \partial^n (c^2 + b^2)^{-1} / \partial c^n &= n!(-1)^n S b^{-1} [(c + Sb)^{-n-1} - (c - Sb)^{-n-1}] / 2 \\ &= n!(-1)^n (c^2 + b^2)^{-n-1} \sum_{0 \leq k \leq [n/2]} \binom{n+1}{2k+1} (-1)^k c^{n-2k} b^{2k}. \end{aligned}$$

Поэтому изображением функции $f(t) = t^n e^{\zeta t} Ch_{[0, \infty)}(t)$ является функция

$$\begin{aligned} F(p) &= n! 2^{-1} (-1)^n \{ \sum_{0 \leq k \leq [(n+1)/2]} \binom{n+1}{2k} (-1)^k c^{n+1-2k} [a^{2k} (c^2 + a^2)^{-n-1} (1 - p_1/|p'|) \\ &+ b^{2k} (c^2 + b^2)^{-n-1} (1 + p_1/|p'|)] + [N_1(1 - p_1/|p'|) - N_2 p_2/|p'|] \sum_{0 \leq k \leq [n/2]} \binom{n+1}{2k+1} (-1)^k \\ &c^{n-2k} [a^{2k+1} (c^2 + a^2)^{-n-1} + b^{2k+1} (c^2 + b^2)^{-n-1}] \\ &- [N_1 N_2 p_2/|p'|] \sum_{0 \leq k \leq [(n+1)/2]} \binom{n+1}{2k} (-1)^k c^{n+1-2k} [a^{2k} (c^2 + a^2)^{-n-1} - b^{2k} (c^2 + b^2)^{-n-1}] \}. \end{aligned}$$

3. Пусть теперь $f(t) = \exp(u(\zeta, t; \alpha)) Ch_{[0, \infty)}(t)$ и найдем ее изображение $F(p; \beta)$ при $u(p, t; \beta) := p_0 t + M(p, t; \beta) + \beta_0$, где $p, \zeta, \alpha, \beta \in \mathcal{A}_r$, как и в определении 3. Для этого рассмотрим тригонометрические формулы:

- (i) $\cos(a - b) + \cos(a + b) = 2 \cos(a) \cos(b)$;
- (ii) $\cos(a - b) - \cos(a + b) = 2 \sin(a) \sin(b)$;
- (iii) $\sin(a + b) + \sin(a - b) = 2 \sin(a) \cos(b)$;
- (iv) $\sin(a + b) - \sin(a - b) = 2 \sin(b) \cos(a)$

для любых $a, b \in \mathbf{R}$. Тогда

$$(1) \prod_{p=1}^n \cos(a_p) = 2^{1-n} \sum_{(v_2, \dots, v_n) \in \{1, 2\}} \cos(a_1 + (-1)^{v_2} a_2 + (-1)^{v_3} a_3 + \dots + (-1)^{v_n} a_n)$$

для любых $a_1, \dots, a_n \in \mathbf{R}$, $2 \leq n \in \mathbf{N}$;

$$\begin{aligned} (2) \prod_{p=1}^{2m} \sin(b_p) &= 2^{-m} \prod_{p=1}^m [\cos(b_{2p-1} - b_{2p}) - \cos(b_{2p-1} + b_{2p})] = \\ &= (-2)^m \sum_{(w_1, \dots, w_m) \in \{1, 2\}} (-1)^{w_1 + \dots + w_m} (\prod_{p=1}^m \cos(b_{2p-1} + (-1)^{w_p} b_{2p})) \\ &= 2^{1-2m} \sum_{(w_1, \dots, w_m) \in \{1, 2\}} (-1)^{w_1 + \dots + w_m + m} \sum_{(v_2, \dots, v_m) \in \{1, 2\}} \cos(b_1 + (-1)^{w_1} b_2 + (-1)^{v_2} (b_3 + \\ &(-1)^{w_2} b_4) + (-1)^{v_3} (b_5 + (-1)^{w_3} b_6) + \dots + (-1)^{v_m} (b_{2m-1} + (-1)^{w_m} b_{2m})) \end{aligned}$$

для любых $b_1, b_2, \dots \in \mathbf{R}$, $1 \leq m \in \mathbf{N}$;

$$(3) \prod_{p=1}^{2m+1} \sin(b_p) = 2^{-2m} \sum_{(w_1, \dots, w_m) \in \{1, 2\}} (-1)^{w_1 + \dots + w_m + m} \sum_{(v_1, \dots, v_m) \in \{1, 2\}} \sin(b_{2m+1} + (-1)^{v_1} (b_1 + (-1)^{w_1} b_2) + (-1)^{v_2} (b_3 + (-1)^{w_2} b_4) + \dots + (-1)^{v_m} (b_{2m-1} + (-1)^{w_m} b_{2m}));$$

$$(4) (\prod_{p=1}^n \cos(a_p)) (\prod_{q=1}^{2m} \sin(b_q)) = 2^{1-n-2m} \sum_{(v_2, \dots, v_n) \in \{1, 2\}} \sum_{(w_1, \dots, w_m) \in \{1, 2\}} (-1)^{w_1 + \dots + w_m + m} \sum_{(u_1, \dots, u_m) \in \{1, 2\}} \cos(a_1 + (-1)^{v_2} a_2 + \dots + (-1)^{v_n} a_n + (-1)^{u_1} (b_1 + (-1)^{w_1} b_2) + (-1)^{u_2} (b_3 + (-1)^{w_2} b_4) + \dots + (-1)^{u_m} (b_{2m-1} + (-1)^{w_m} b_{2m}));$$

$$(5) (\prod_{p=1}^n \cos(a_p)) (\prod_{q=1}^{2m+1} \sin(b_q)) = 2^{-n-2m} \sum_{(v_1, \dots, v_n) \in \{1, 2\}} \sum_{(w_1, \dots, w_m) \in \{1, 2\}} (-1)^{w_1 + \dots + w_m + m} \sum_{(u_1, \dots, u_m) \in \{1, 2\}} \sin(b_{2m+1} + (-1)^{v_1} a_1 + (-1)^{v_2} a_2 + \dots + (-1)^{v_n} a_n + (-1)^{u_1} (b_1 + (-1)^{w_1} b_2) + (-1)^{u_2} (b_3 + (-1)^{w_2} b_4) + \dots + (-1)^{u_m} (b_{2m-1} + (-1)^{w_m} b_{2m})).$$

При этом

(6) $\exp(M(p, t; \alpha)) = \cos(p_1 t + \alpha_1) + i_1 \sin(p_1 t + \alpha_1) \cos(p_2 t + \alpha_2) + i_2 \sin(p_1 t + \alpha_1) \sin(p_2 t + \alpha_2) \cos(p_3 t + \alpha_3) + i_3 \sin(p_1 t + \alpha_1) \sin(p_2 t + \alpha_2) \sin(p_3 t + \alpha_3)$ для кватернионов;

(7) $\exp(M(p, t; \alpha)) = \cos(p_1 t + \alpha_1) + i_1 \sin(p_1 t + \alpha_1) \cos(p_2 t + \alpha_2) + i_2 \sin(p_1 t + \alpha_1) \sin(p_2 t + \alpha_2) \cos(p_3 t + \alpha_3) + \dots + i_6 \sin(p_1 t + \alpha_1) \dots \sin(p_6 t + \alpha_6) \cos(p_7 t + \alpha_7) + i_7 \sin(p_1 t + \alpha_1) \dots \sin(p_6 t + \alpha_6) \sin(p_7 t + \alpha_7)$ для октонионов. Тогда

$$(8) \exp(M(\zeta, t; \alpha)) \exp(-M(p, t; \beta)) = [\cos(\zeta_1 t + \alpha_1) \cos(p_1 t + \beta_1) + \sin(\zeta_1 t + \alpha_1) \cos(\zeta_2 t + \alpha_2) \sin(p_1 t + \beta_1) \cos(p_2 t + \beta_2) + \sin(\zeta_1 t + \alpha_1) \sin(\zeta_2 t + \alpha_2) \cos(\zeta_3 t + \alpha_3) \sin(p_1 t + \beta_1) \sin(p_2 t + \beta_2) \cos(p_3 t + \beta_3) + \sin(\zeta_1 t + \alpha_1) \sin(\zeta_2 t + \alpha_2) \sin(\zeta_3 t + \alpha_3) \sin(p_1 t + \beta_1) \sin(p_2 t + \beta_2) \sin(p_3 t + \beta_3)] i_1 [-\cos(\zeta_1 t + \alpha_1) \sin(p_1 t + \beta_1) \cos(p_2 t + \beta_2) + \sin(\zeta_1 t + \alpha_1) \cos(\zeta_2 t + \alpha_2) \cos(p_1 t + \beta_1) - \sin(\zeta_1 t + \alpha_1) \sin(\zeta_2 t + \alpha_2) \cos(\zeta_3 t + \alpha_3) \sin(p_1 t + \beta_1) \sin(p_2 t + \beta_2) \sin(p_3 t + \beta_3) + \sin(\zeta_1 t + \alpha_1) \sin(\zeta_2 t + \alpha_2) \sin(\zeta_3 t + \alpha_3) \sin(p_1 t + \beta_1) \sin(p_2 t + \beta_2) \cos(p_3 t + \beta_3)]$$

$$i_2[-\cos(\zeta_1 t + \alpha_1) \sin(p_1 t + \beta_1) \sin(p_2 t + \beta_2) \cos(p_3 t + \beta_3) + \sin(\zeta_1 t + \alpha_1) \sin(\zeta_2 t + \alpha_2) \cos(\zeta_3 t + \alpha_3) \cos(p_1 t + \beta_1) - \sin(\zeta_1 t + \alpha_1) \sin(\zeta_2 t + \alpha_2) \sin(\zeta_3 t + \alpha_3) \sin(p_1 t + \beta_1) \cos(p_2 t + \beta_2) + \sin(\zeta_1 t + \alpha_1) \cos(\zeta_2 t + \alpha_2) \sin(p_1 t + \beta_1) \sin(p_2 t + \beta_2) \sin(p_3 t + \beta_3)]$$

$$i_3[-\cos(\zeta_1 t + \alpha_1) \sin(p_1 t + \beta_1) \sin(p_2 t + \beta_2) \sin(p_3 t + \beta_3) + \sin(\zeta_1 t + \alpha_1) \sin(\zeta_2 t + \alpha_2) \sin(\zeta_3 t + \alpha_3) \cos(p_1 t + \alpha_1) - \sin(\zeta_1 t + \alpha_1) \cos(\zeta_2 t + \alpha_2) \sin(p_1 t + \beta_1) \sin(p_2 t + \beta_2) \cos(p_3 t + \beta_3) + \sin(\zeta_1 t + \alpha_1) \sin(\zeta_2 t + \alpha_2) \cos(\zeta_3 t + \alpha_3) \sin(p_1 t + \beta_1) \cos(p_2 t + \beta_2)].$$

При этом для любого $c > 0$:

$$(9) \int_0^\infty e^{-ct} (\prod_{s=1}^n \cos(\alpha_s t)) dt = 2^{1-n} c \sum_{v_2, \dots, v_n \in \{1,2\}} [c^2 + (\alpha_1 + (-1)^{v_2} \alpha_2 + \dots + (-1)^{v_n} \alpha_n)^2]^{-1};$$

$$(10) \int_0^\infty e^{-ct} (\prod_{s=1}^{2m} \sin(\beta_s t)) dt = 2^{1-2m} c \sum_{w_1, \dots, w_m, v_2, \dots, v_m \in \{1,2\}} (-1)^{w_1 + \dots + w_m + m} [c^2 + ((\beta_1 + (-1)^{w_1} \beta_2) + (-1)^{v_2} (\beta_3 + (-1)^{w_2} \beta_4) + \dots + (-1)^{v_m} (\beta_{2m-1} + (-1)^{w_m} \beta_{2m}))^2]^{-1};$$

$$(11) \int_0^\infty e^{-ct} (\prod_{s=1}^{2m+1} \sin(\beta_s t)) dt = 2^{-2m} \sum_{w_1, \dots, w_m, v_1, \dots, v_m \in \{1,2\}} (-1)^{w_1 + \dots + w_m + m} (\beta_{2m+1} + (-1)^{v_1} (\beta_1 + (-1)^{w_1} \beta_2) + (-1)^{v_2} (\beta_3 + (-1)^{w_2} \beta_4) + \dots + (-1)^{v_m} (\beta_{2m-1} + (-1)^{w_m} \beta_{2m})) [c^2 + (\beta_{2m+1} + (-1)^{v_1} (\beta_1 + (-1)^{w_1} \beta_2) + (-1)^{v_2} (\beta_3 + (-1)^{w_2} \beta_4) + \dots + (-1)^{v_m} (\beta_{2m-1} + (-1)^{w_m} \beta_{2m}))^2]^{-1};$$

$$(12) \int_0^\infty e^{-ct} (\prod_{s=1}^n \cos(\alpha_s t)) (\prod_{q=1}^{2m} \sin(\beta_q t)) dt = 2^{1-n-2m} c \sum_{v_2, \dots, v_n, w_1, \dots, w_m, u_1, \dots, u_m \in \{1,2\}} [c^2 + (\alpha_1 + (-1)^{v_2} \alpha_2 + \dots + (-1)^{v_n} \alpha_n + (-1)^{u_1} (\beta_1 + (-1)^{w_1} \beta_2) + \dots + (-1)^{u_m} (\beta_{2m-1} + (-1)^{w_m} \beta_{2m}))^2]^{-1};$$

$$(13) \int_0^\infty e^{-ct} (\prod_{s=1}^n \cos(\alpha_s t)) (\prod_{q=1}^{2m+1} \sin(\beta_q t)) dt = 2^{-n-2m} c \sum_{v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_m, u_1, \dots, u_m \in \{1,2\}} (-1)^{w_1 + \dots + w_m + m} ((-1)^{v_1} \alpha_1 + (-1)^{v_2} \alpha_2 + \dots + (-1)^{v_n} \alpha_n + \beta_{2m+1} + (-1)^{u_1} (\beta_1 + (-1)^{w_1} \beta_2) + \dots + (-1)^{u_m} (\beta_{2m-1} + (-1)^{w_m} \beta_{2m})) [c^2 + ((-1)^{v_1} \alpha_1 + (-1)^{v_2} \alpha_2 + \dots + (-1)^{v_n} \alpha_n + \beta_{2m+1} + (-1)^{u_1} (\beta_1 + (-1)^{w_1} \beta_2) + \dots + (-1)^{u_m} (\beta_{2m-1} + (-1)^{w_m} \beta_{2m}))^2]^{-1}.$$

Тогда из формул (8 – 13) следует, что образом $\mathcal{F}(f, u; p; 0)$ функции-оригинала $f(t) = \exp(u(\zeta, t; 0)) Ch_{[0, \infty)}(t)$ при $u(p, t; 0) := p_0 t + M(p, t; 0)$ является:

$$(14) \quad \mathcal{F}(f, u; p; 0) = \{(c/2) \sum_{v_1 \in \{1,2\}} [c^2 + (p_1 + (-1)^{v_1} \zeta_1)^2]^{-1} + (c/8) \sum_{v_1, w_1, u_1 \in \{1,2\}} (-1)^{w_1 + u_1} [c^2 + (p_2 + (-1)^{v_1} \zeta_2 + (-1)^{u_1} (p_1 + (-1)^{w_1} \zeta_1))^2]^{-1} + (c/32) \sum_{v_1, w_1, w_2, u_1, u_2 \in \{1,2\}} (-1)^{w_1 + w_2} [c^2 + (p_3 + (-1)^{v_1} \zeta_3 + (-1)^{u_1} (p_1 + (-1)^{w_1} \zeta_1) + (-1)^{u_2} (p_2 + (-1)^{w_2} \zeta_2))^2]^{-1} + (c/32) \sum_{w_1, w_2, w_3, u_1, u_2 \in \{1,2\}} (-1)^{w_1 + w_2 + w_3 + 1} [c^2 + ((p_1 + (-1)^{w_1} \zeta_1) + (-1)^{u_1} (p_2 + (-1)^{w_2} \zeta_2) + (-1)^{u_2} (p_3 + (-1)^{w_3} \zeta_3))^2]^{-1}\} + i_1 \{ -4^{-1} \sum_{v_1, v_2 \in \{1,2\}} [(\zeta_1 + (-1)^{v_1} p_1 + (-1)^{v_2} \zeta_2) [c^2 + (\zeta_1 + (-1)^{v_1} p_1 + (-1)^{v_2} \zeta_2)^2]^{-1} - (p_1 + (-1)^{v_1} p_2 + (-1)^{v_2} \zeta_1) [c^2 + (p_1 + (-1)^{v_1} p_2 + (-1)^{v_2} \zeta_1)^2]^{-1}] - (32)^{-1} \sum_{v_1, w_1, w_2, u_1, u_2 \in \{1,2\}} (-1)^{w_1 + w_2} [(\zeta_3 + (-1)^{v_1} p_3 + (-1)^{u_1} (p_1 + (-1)^{w_1} \zeta_1) + (-1)^{u_2} (p_2 + (-1)^{w_2} \zeta_2))] [c^2 + (\zeta_3 + (-1)^{v_1} p_3 + (-1)^{u_1} (p_1 + (-1)^{w_1} \zeta_1) + (-1)^{u_2} (p_2 + (-1)^{w_2} \zeta_2))^2]^{-1} - (p_3 + (-1)^{v_1} \zeta_3 + (-1)^{u_1} (p_1 + (-1)^{w_1} \zeta_1) + (-1)^{u_2} (p_2 + (-1)^{w_2} \zeta_2))] [c^2 + (p_3 + (-1)^{v_1} \zeta_3 + (-1)^{u_1} (p_1 + (-1)^{w_1} \zeta_1) + (-1)^{u_2} (p_2 + (-1)^{w_2} \zeta_2))^2]^{-1}]\} + i_2 \{ (c/8) \sum_{v_1, w_1, u_1 \in \{1,2\}} (-1)^{w_1 + u_1} [(c^2 + (p_1 + (-1)^{v_1} \zeta_3 + (-1)^{u_1} (\zeta_1 + (-1)^{w_1} \zeta_2))^2]^{-1} - [c^2 + (\zeta_1 + (-1)^{v_2} p_3 + (-1)^{u_1} (p_1 + (-1)^{w_1} p_2))^2]^{-1}] + (c/16) \sum_{w_1, w_2, u_1, u_2 \in \{1,2\}} (-1)^{w_1 + w_2} [-[c^2 + (p_2 + (-1)^{u_1} (p_1 + (-1)^{w_1} \zeta_1) + (-1)^{u_2} (\zeta_2 + (-1)^{w_2} \zeta_3))^2]^{-1} + [c^2 + (\zeta_2 + (-1)^{u_1} (p_1 + (-1)^{w_1} \zeta_1) + (-1)^{u_2} (p_2 + (-1)^{w_2} p_3))^2]^{-1}]\} + i_3 \{ 8^{-1} \sum_{v_1, w_1, u_1 \in \{1,2\}} (-1)^{w_1 + u_1} [(\zeta_3 + (-1)^{v_1} p_1 + (-1)^{u_1} (\zeta_1 + (-1)^{w_1} \zeta_2))] [c^2 + (\zeta_3 + (-1)^{v_1} p_1 + (-1)^{u_1} (\zeta_1 + (-1)^{w_1} \zeta_2))^2]^{-1} - (p_3 + (-1)^{v_1} \zeta_1 + (-1)^{u_1} (p_1 + (-1)^{w_1} p_2))] [c^2 + (p_3 + (-1)^{v_1} \zeta_1 + (-1)^{u_1} (p_1 + (-1)^{w_1} p_2))^2]^{-1}] + (16)^{-1} \sum_{v_1, v_2, w_1, u_1 \in \{1,2\}} (-1)^{w_1} [(p_2 + (-1)^{v_1} \zeta_2 + (-1)^{v_2} p_3 + (-1)^{u_1} (p_1 + (-1)^{w_1} \zeta_1))] [c^2 + (p_2 + (-1)^{v_1} \zeta_2 + (-1)^{v_2} p_3 + (-1)^{u_1} (p_1 + (-1)^{w_1} \zeta_1))^2]^{-1} - (\zeta_2 + (-1)^{v_1} p_2 + (-1)^{v_2} \zeta_3 + (-1)^{u_1} (p_1 + (-1)^{w_1} \zeta_1))] [c^2 + (\zeta_2 + (-1)^{v_1} p_2 + (-1)^{v_2} \zeta_3 + (-1)^{u_1} (p_1 + (-1)^{w_1} \zeta_1))^2]^{-1}]\},$$

где $c = \zeta_0 - p_0$. Для ненулевых начальных фаз формула для $\mathcal{F}(f, u; p; \beta)$ функции-оригинала $f(t) = \exp(u(\zeta, t; \alpha)) Ch_{[0, \infty)}(t)$ при $u(p, t; \alpha) := p_0 t + M(p, t; \alpha) + \alpha_0$ аналогична, но более сложна и её можно выписать с использованием равенств:

$$(15) \int_0^\infty e^{-ct} \cos(at + b) dt = [c \cos(b) - a \sin(b)] [c^2 + a^2]^{-1},$$

$$(16) \int_0^\infty e^{-ct} \sin(at + b) dt = [c \sin(b) + a \cos(b)] [c^2 + a^2]^{-1}$$

для любых $c > 0, a, b \in \mathbf{R}$, а также формул (8 – 13).

31. Теорема. Пусть $f(t)$ – функция-оригинал, так что $f'(t)$ тоже удовлетворяет условиям 1(1-3), $u(p, t) := p_0t + M(p, t; \zeta) + \zeta_0$ над \mathcal{A}_r с $2 \leq r < \infty$ (смотри определение 3). Тогда

$$(1) \quad \mathcal{F}(f'(t)Ch_{[0,\infty)}(t), u; p; \zeta) = -f(0) + p_0\mathcal{F}(f(t)Ch_{[0,\infty)}(t), u; p; \zeta) + p_1\mathcal{F}(f(t)Ch_{[0,\infty)}(t), u; p; \zeta - i_1\pi/2) + \dots + p_{2r-1}\mathcal{F}(f(t)Ch_{[0,\infty)}(t), u; p; \zeta - i_{2r-1}\pi/2),$$

где $Re(p) > s_0$.

Доказательство. Из уравнений 30(6,7) следует, что выполняется равенство:

$$(2) \quad \partial \exp(-u(p, t; \zeta))/\partial t = -p_0 \exp(-u(p, t; \zeta)) - p_1 \exp(-u(p, t; \zeta - i_1\pi/2)) - \dots - p_{2r-1} \exp(-u(p, t; \zeta - i_{2r-1}\pi/2)),$$

так как

$$\exp(-u(p, t; \zeta)) = \exp(-p_0t - \zeta_0) \exp(-M(p, t; \zeta)),$$

$$\partial \exp(-p_0t - \zeta_0)/\partial t = -p_0 \exp(-p_0t - \zeta_0),$$

$$\partial [\cos(p_jt + \zeta_j) - \sin(p_jt + \zeta_j)i_j]/\partial t = \partial \exp(-(p_jt + \zeta_j)i_j)/\partial t$$

$$= -p_j i_j \exp(-(p_jt + \zeta_j)i_j) = -p_j \exp(-(p_jt + \zeta_j - \pi/2)i_j)$$

$$= -p_j [\cos(p_jt + \zeta_j - \pi/2) - \sin(p_jt + \zeta_j - \pi/2)i_j],$$

а интегрирование по частям дает

$$\int_0^\infty f'(t) \exp(-u(p, t; \zeta)) dt = f(t) \exp(-u(p, t; \zeta))|_0^\infty - \int_0^\infty [f(t) \partial \exp(-u(p, t; \zeta))/\partial t] dt.$$

32. Теорема. Пусть $f(t)$ – функция-оригинал, $u(p, t) := p_0t + M(p, t; \zeta) + \zeta_0$ над \mathcal{A}_r с $2 \leq r < \infty$ (смотри определение 3). Тогда

$$(1) \quad (\partial \mathcal{F}(f(t)Ch_{[0,\infty)}(t), u; p; \zeta)/\partial p) \cdot h = -\mathcal{F}(f(t)tCh_{[0,\infty)}(t), u; p; \zeta)h_0 - \mathcal{F}(f(t)tCh_{[0,\infty)}(t), u; p; \zeta - i_1\pi/2)h_1 - \dots - \mathcal{F}(f(t)tCh_{[0,\infty)}(t), u; p; \zeta - i_{2r-1}\pi/2)h_{2r-1}$$

для любого $h = h_0i_0 + \dots + h_{2r-1}i_{2r-1} \in \mathcal{A}_r$, где $h_0, \dots, h_{2r-1} \in \mathbf{R}$, $Re(p) > s_0$.

Доказательство. Из уравнений 30(6,7) следует, что

$$(2) \quad (\partial \exp(-u(p, t; \zeta))/\partial p) \cdot h = -p_0 \exp(-u(p, t; \zeta))h_0 - \exp(-u(p, t; \zeta - i_1\pi/2))h_1 - \dots - \exp(-u(p, t; \zeta - i_{2r-1}\pi/2))h_{2r-1}.$$

Поскольку $\mathcal{F}(f(t)Ch_{[0,\infty)}(t), u; p; \zeta)$ – голоморфная функция по p при $Re(p) > s_0$, а $f(t)$ удовлетворяет условиям определения 1, $|\int_0^\infty e^{-ct}t^n dt| < \infty$ для любых $c > 0$ и $n = 0, 1, 2, \dots$, то можно дифференцировать под знаком интеграла:

$$(\partial (\int_0^\infty f(t) \exp(-u(p, t; \zeta)) dt)/\partial p) \cdot h = \int_0^\infty f(t) (\partial \exp(-u(p, t; \zeta))/\partial p) \cdot h dt.$$

33. Пример. Пусть $f_n(t) = t^n Ch_{[0,\infty)}(t)$ – функции-оригиналы, где $n = 0, 1, 2, \dots$, при $u(p, t) := p_0t + M(p, t; \zeta) + \zeta_0$, тогда

$$(1) \quad \mathcal{F}(f_n(t), u; p; \zeta) = \int_0^\infty t^n \exp(-p_0t - \zeta_0) \cos(p_1t + \zeta_1) dt + \sum_{k=1}^{2r-2} [\int_0^\infty t^n \exp(-p_0t - \zeta_0) \sin(p_1t + \zeta_1) \dots \sin(p_kt + \zeta_k) \cos(p_{k+1}t + \zeta_{k+1}) dt] i_k + [\int_0^\infty t^n \exp(-p_0t - \zeta_0) \sin(p_1t + \zeta_1) \dots \sin(p_{2r-2}t + \zeta_{2r-2}) \sin(p_{2r-1}t + \zeta_{2r-1}) dt] i_{2r-1},$$

где $r = 2$ для $\mathbf{K} = \mathbf{H}$ и $r = 3$ для $\mathbf{K} = \mathbf{O}$, $\{i_0, i_1, \dots, i_{2r-1}\}$ – стандартные генераторы алгебры \mathcal{A}_r , $2 \leq r \in \mathbf{N}$. Рассмотрим интегралы:

$$(2) \quad J_n(\alpha) := \int_0^\infty t^n e^{-\alpha t} dt$$

для любого $\alpha \in \mathbf{C}$ с $Re(\alpha) > 0$. В частности,

$$(3) \quad J_0(\alpha) = -\exp(-\alpha t)(\alpha)^{-1}|_0^\infty = \alpha^{-1}. \text{ Поэтому,}$$

$$(4) \quad J_n(\alpha) = (-1)^n dJ_0(\alpha)/d\alpha^n = n! \alpha^{-n-1}, \text{ следовательно,}$$

$$(5) \quad \int_0^\infty t^n e^{-\alpha t - b} dt = e^{-b} J_n(\alpha) \text{ для любого } b \in \mathbf{C}, \text{ откуда следует, что}$$

$$(6) \quad \int_0^\infty t^n \exp(-\alpha_0 t) \cos(\alpha_1 t + \beta) dt = Re(\exp(-\mathbf{i}\beta) J_n(\alpha)) = n! Re(\exp(-\mathbf{i}\beta) \alpha^{-n-1}),$$

$$(7) \quad \int_0^\infty t^n \exp(-\alpha_0 t) \sin(\alpha_1 t + \beta) dt = -Im(\exp(-\mathbf{i}\beta) J_n(\alpha)) = n! Im(\exp(-\mathbf{i}\beta) \alpha^{-n-1})$$

для любого $\beta \in \mathbf{R}$, где $Re(\alpha) = \alpha_0 = (\alpha + \bar{\alpha})/2$, $Im(\alpha) = \alpha_1 = (\alpha - \bar{\alpha})/(2\mathbf{i})$, $\mathbf{i} = i_1 = (-1)^{1/2}$, $\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 \mathbf{i}$. Из уравнений

$$(8) \quad \alpha^{-k} = \bar{\alpha}^k |\alpha|^{-2k} \text{ и}$$

$$(9) \quad \alpha^{-k} = |\alpha|^{-2k} \sum_{q=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} \binom{k}{2q} (-1)^q \alpha_0^{k-2q} \alpha_1^{2q} - \mathbf{i} \sum_{q=0}^{\lfloor (k-1)/2 \rfloor} \binom{k}{2q+1} (-1)^q \alpha_0^{k-2q-1} \alpha_1^{2q+1},$$

где $\binom{k}{q} = k! / [(k-q)!q!]$ – это биномиальные коэффициенты для любых $0 \leq q \leq k \in \mathbf{Z}$, следует, что

$$(10) \operatorname{Re}(\exp(-i\beta)J_n(\alpha)) = n![\cos(\beta) \sum_q \binom{n+1}{2q} (-1)^q \alpha_0^{n-2q+1} \alpha_1^{2q} - \sin(\beta) \sum_q \binom{n+1}{2q+1} (-1)^q \alpha_0^{n-2q} \alpha_1^{2q+1}](\alpha_0^2 + \alpha_1^2)^{-n-1} =: T_n(\alpha_0, \alpha_1, \beta),$$

$$(11) \operatorname{Im}(\exp(-i\beta)J_n(\alpha)) = -(n!)[\sin(\beta) \sum_q \binom{n+1}{2q} (-1)^q \alpha_0^{n-2q+1} \alpha_1^{2q} + \cos(\beta) \sum_q \binom{n+1}{2q+1} (-1)^q \alpha_0^{n-2q} \alpha_1^{2q+1}](\alpha_0^2 + \alpha_1^2)^{-n-1} =: -S_n(\alpha_0, \alpha_1, \beta).$$

Тогда из уравнений (1 – 11) следует, что при $\mathbf{K} = \mathbf{H}$

$$(12) \mathcal{F}(f_n(t)Ch_{[0,\infty)}(t), u; p; \zeta) = e^{-\zeta_0} \{T_n(p_0, p_1, \zeta_1) - (i_1/2) \sum_{v_1 \in \{1,2\}} S_n(p_0, p_1 + (-1)^{v_1} p_2, \zeta_1 + (-1)^{v_1} \zeta_2) - (i_2/4) \sum_{v_1, u_1 \in \{1,2\}} (-1)^{v_1} T_n(p_0, p_3 + (-1)^{u_1} (p_1 + (-1)^{v_1} p_2), \zeta_3 + (-1)^{u_1} (\zeta_1 + (-1)^{v_1} \zeta_2)) - (i_3/4) \sum_{v_1, u_1 \in \{1,2\}} (-1)^{v_1+1} S_n(p_0, p_3 + (-1)^{u_1} (p_1 + (-1)^{v_1} p_2), \zeta_3 + (-1)^{u_1} (\zeta_1 + (-1)^{v_1} \zeta_2))\},$$

а над алгеброй \mathcal{A}_r с $r \geq 3$ изображение дается формулой:

$$(13) \mathcal{F}(f_n(t)Ch_{[0,\infty)}(t), u; p; \zeta) = e^{-\zeta_0} \{T_n(p_0, p_1, \zeta_1) - \sum_{s=1}^{2^{r-1}-1} i_{2s} 2^{-2s} \sum_{v_1, \dots, v_s, u_1, \dots, u_s \in \{1,2\}} (-1)^{v_1+\dots+v_s+s} T_n(p_0, p_{2s+1} + (-1)^{u_1} (p_1 + (-1)^{v_1} p_2) + \dots + (-1)^{u_s} (p_{2s-1} + (-1)^{v_s} p_{2s}), \zeta_{2s+1} + (-1)^{u_1} (\zeta_1 + (-1)^{v_1} \zeta_2) + \dots + (-1)^{u_s} (\zeta_{2s-1} + (-1)^{v_s} \zeta_{2s})) - \sum_{s=0}^{2^{r-1}-2} (i_{2s+1} 2^{-2s-1}) \sum_{w, v_1, \dots, v_s, u_1, \dots, u_s \in \{1,2\}} (-1)^{v_1+\dots+v_s+s} S_n(p_0, p_{2s+1} + (-1)^w p_{2s+2} + (-1)^{u_1} (p_1 + (-1)^{v_1} p_2 + \dots + (-1)^{u_s} (p_{2s-1} + (-1)^{v_s} p_{2s}), \zeta_{2s+1} + (-1)^w \zeta_{2s+2} + (-1)^{u_1} (\zeta_1 + (-1)^{v_1} \zeta_2 + \dots + (-1)^{u_s} (\zeta_{2s-1} + (-1)^{v_s} \zeta_{2s})) - (i_{2^{r-1}} 2^{-2^{r-1}+2}) \sum_{v_1, v_2, \dots, v_{2^{r-1}-1}, u_1, u_2, \dots, u_{2^{r-1}-1} \in \{1,2\}} (-1)^{v_1+v_2+\dots+v_{2^{r-1}-1}+1} S_n(p_0, p_{2^{r-1}} + (-1)^{u_1} (p_1 + (-1)^{v_1} p_2) + (-1)^{u_2} (p_3 + (-1)^{v_2} p_4) + \dots + (-1)^{u_{2^{r-1}-1}} (p_{2^{r-3}} + (-1)^{v_{2^{r-1}-1}} p_{2^{r-2}}), \zeta_{2^{r-1}} + (-1)^{u_1} (\zeta_1 + (-1)^{v_1} \zeta_2) + (-1)^{u_2} (\zeta_3 + (-1)^{v_2} \zeta_4) + \dots + (-1)^{u_{2^{r-1}-1}} (\zeta_{2^{r-3}} + (-1)^{v_{2^{r-1}-1}} \zeta_{2^{r-2}}))\},$$

где для единообразия формулы при $s = 0$ суммирование по $v_1, \dots, v_s, u_1, \dots, u_s$ не проводится и берется значение $(-1)^{v_1+\dots+v_s+s} = 1$.

34. Теорема. Пусть $f(t)$ – функция-оригинал со значениями в \mathcal{A}_r с $2 \leq r < \infty$, $u = pt$, $g(t) := \int_0^t f(x)dx$, тогда

$$\mathcal{F}(g(t)Ch_{[0,\infty)}(t), pt; p; 0)p = \mathcal{F}(f(t)Ch_{[0,\infty)}(t), u; p; 0),$$

в частности,

$$\mathcal{F}(g(t)Ch_{[0,\infty)}(t), pt; p; 0) = \mathcal{F}(f(t)Ch_{[0,\infty)}(t), u; p; 0)p^{-1} \text{ над алгеброй } \mathbf{K} = \mathbf{H} \text{ или } \mathbf{K} = \mathbf{O}.$$

Доказательство. В силу теоремы 28

$$\mathcal{F}(g'(t)Ch_{[0,\infty)}(t), pt; p; 0) = \mathcal{F}(g(t)Ch_{[0,\infty)}(t), pt; p; 0)p$$

в одной и той же области $\operatorname{Re}(p) > s_0$, так как $g(0) = 0$, и $g(t)$ тоже удовлетворяет условиям определения 1, где $s_0 \in \mathbf{R}$. Из альтернативности алгебры \mathbf{K} следует, что

$$\mathcal{F}(f(t)Ch_{[0,\infty)}(t), pt; p; 0)p^{-1} = \mathcal{F}(g(t)Ch_{[0,\infty)}(t), pt; p; 0),$$

так как $g'(t) = f(t)$ для любых $t > 0$, и $g(t) = 0$ для любых $t \leq 0$.

35. Теорема. Если $F(p)$ является изображением функции $f(t)$ при $u = pt$ в полупространстве $\{p \in \mathcal{A}_r : \operatorname{Re}(p) > s_0\}$ с $2 \leq r < \infty$, интеграл $\int_p^\infty F(z)dz$ сходится и выполнено условие 23(3), то

$$\mathcal{F}(f(t)Ch_{[0,\infty)}(t)/t, pt; p; 0) = \int_p^\infty F(z)dz.$$

Доказательство. Пусть путь интегрирования весь лежит в полупространстве $\operatorname{Re}(p) \geq a$ для некоторой константы $a > s_0$, тогда $|\int_0^\infty f(t) \exp(-pt)dt| \leq C \int_0^\infty \exp(-(p_0 - s_0)t)dt < \infty$ сходится, где $C = \text{const} > 0$, $p_0 \geq a$. Можно полагать $t > 0$, тогда выполнены условия леммы 23, причем $\int_p^\infty F(z)dz = \lim_{\theta \rightarrow 0} \int_p^\infty F(z) \exp(-\theta z)dz$, так как интеграл $\int_{a-S\infty}^{a+S\infty} F(p)dp$ абсолютно сходится, а $\lim_{\theta \rightarrow 0} \exp(-\theta z) = 1$ равномерно по z на любом компактном подмножестве в \mathcal{A}_r . Поэтому в интеграле

$$\int_p^\infty F(z)dz = \int_p^\infty (\int_0^\infty f(t) \exp(-pt)dt)dz$$

можно изменить порядок интегрирования:

$\int_p^\infty F(z)dz = \int_0^\infty f(t)(\int_p^\infty \exp(-zt)dz)dt = \int_0^\infty f(t)[-e^{-zt}/t]_p^\infty dt = \int_0^\infty f(t)t^{-1} \exp(-pt)dt$, так как в силу леммы 23 можно взять аргумент $z - z_0$ изменяющимся вдоль прямой линии параллельной $p - p_0$, причем z_0 стремится к $+\infty$, где $p_0 := Re(p)$.

36. Примеры.

1. При $u = pt$, $\mathcal{F}((e^{bt} - e^{ct})Ch_{[0,\infty)}(t), pt; p; 0) = (p - b)^{-1} - (p - c)^{-1}$ для любых $b, c \in \mathbf{R}$. Тогда в силу примера 26.6 и теоремы 35 $\mathcal{F}((e^{bt} - e^{ct})Ch_{[0,\infty)}(t)/t, pt; p; 0) = \int_p^\infty ((z - b)^{-1} - (z - c)^{-1})dz = Ln[(p - b)^{-1}(p - c)]$ (смотри также следствия 3.5 и 3.6, и замечания 3.7, 3.8 в [14]).

2. В силу примера 26 и теоремы 35 $\mathcal{F}(\sin(t)Ch_{[0,\infty)}(t)/t, pt; p; 0) = \int_p^\infty ((1 + z^2)^{-1}dz = (\pi/2) - \arctg(p) = \text{arccctg}(p)$.

Тогда из теоремы 34 следует, что $\mathcal{F}(si(t)Ch_{[0,\infty)}(t), pt; p; 0) = p^{-1}\text{arccctg}(p)$, где $si(t) := \int_0^t t^{-1} \sin(t)dt$ обозначает интегральный синус.

3. Вычислим образ $F(p)$ функции-оригинала $f(t) = Ch_{[0,\infty)}(t)(e^{bt} - e^{at})/t$, где $t \in \mathbf{R}$, параметры a и b принадлежат алгебре \mathcal{A}_r , $u = pt$. Тогда

$$(i) \quad F(p) = \int_0^\infty t^{-1}[\exp(b_0t)(\cos(|b'|t) + \sin(|b'|t)b'/|b'|) - \exp(a_0t)(\cos(|a'|t) + \sin(|a'|t)a'/|a'|)]$$

$$\exp(-p_0t)(\cos(|p'|t) - \sin(|p'|t)p'/|p'|)dt,$$

где $a = a_0 + a'$, $a_0 := Re(a)$, $b = b_0 + b'$, $b_0 := Re(b)$, $p = p_0 + p'$, $p_0 := Re(p)$.

Пусть $a_0 \leq b_0 < p_0$. Прибавление и вычитание из правой части формулы (i) интеграла $\int_0^\infty t^{-1} \exp(b_0t)(\cos(|a'|t) + \sin(|a'|t)a'/|a'|) \exp(-p_0t)(\cos(|p'|t) - \sin(|p'|t)p'/|p'|)dt$, группировка членов и использование формул 30.3(i-iv) дает:

$$(ii) \quad F(p) = -\int_0^\infty t^{-1} \exp((b_0 - p_0)t)[\sin(((|b'| + |a'|)2^{-1} + |p'|)t) + \sin(((|b'| + |a'|)2^{-1} - |p'|)t) + (\cos((|b'| + |a'|)2^{-1} + |p'|)t) - \cos((|b'| + |a'|)2^{-1} - |p'|)t)p'] \sin((|b'| - |a'|)2^{-1}t)]dt + \int_0^\infty t^{-1} \exp((b_0 - p_0)t)(\sin(|b'|t) \cos(|p'|t)b'/|b'| - \sin(|b'|t) \sin(|p'|t)b'p'/|b'|^{-1}|p'|^{-1} - \sin(|a'|t) \cos(|p'|t)a'/|a'| + \sin(|a'|t) \sin(|p'|t)a'p'/|a'|^{-1}|p'|^{-1})dt + 2^{-1} \int_0^\infty t^{-1} \exp((b_0 - p_0)t)(1 - \exp((a_0 - b_0)t)(\cos((|a'| + |p'|)2^{-1}t) + \cos((|a'| - |p'|)2^{-1}t)))dt + \int_0^\infty t^{-1}[\exp((b_0 - p_0)t) - \exp((a_0 - p_0)t)][-\cos(|a'|t) \sin(|p'|t)p'/|p'| + \cos(|p'|t) \sin(|a'|t)a'/|a'| - \sin(|p'|t) \sin(|a'|t)a'p'/|a'|^{-1}|p'|^{-1}]dt.$$

Теперь воспользуемся формулами для появившихся интегралов с параметрами $v, w, s \in \mathbf{C}$:

$$(iii) \quad J_1(v, s) := \int_0^\infty \exp(-vx)x^{-1} \sin(sx)dx = \arctg(s/v) \text{ при } Re(v) > |Im(s)|;$$

$$(iv) \quad J_2(v, w, s) := \int_0^\infty x^{-1} \exp(-vx) \sin(wx) \sin(sx)dx = 4^{-1}ln[(v^2 + (w + s)^2)(v^2 + (w - s)^2)^{-1}],$$

при $Re(p) > |Im(w)| + |Im(s)|$;

$$(v) \quad J_3(v, w, s) := \int_0^\infty x^{-1} \exp(-vx) \sin(wx) \cos(sx)dx = 2^{-1} \arctg(2wv(v^2 + s^2 - w^2)^{-1}) + \left\{ \begin{matrix} 0 \\ \pi/2 \end{matrix} \right\},$$

где $Re(v) > |Im(w)| + |Im(s)|$, $\left\{ \begin{matrix} 0 \\ \pi/2 \end{matrix} \right\}$, и в зависимости от выполнения верхнего или нижнего неравенства берется 0 или $\pi/2$ в $\left\{ \begin{matrix} 0 \\ \pi/2 \end{matrix} \right\}$;

$$(vi) \quad J_4(v, w, s) := \int_0^\infty \exp(-vx)(1 - \exp(-wx)) \cos(sx)dx = (2w)^{-1}[B(2, (v - \mathbf{i}s)w^{-1}) + B(2, (v + \mathbf{i}s)w^{-1})],$$

где $Re(w) > 0$, $Re(v) > |Im(s)|$ (смотри формулы 11 на стр. 447, 8, 10 на стр. 449 и 8 на стр. 450 в [18]), $B(v, w) := \int_0^1 \tau^{v-1}(1 - \tau)^{w-1}d\tau = \Gamma(v)\Gamma(w)/\Gamma(v + w)$ и $\Gamma(v) := \int_0^\infty e^{-t}t^{v-1}dt$ при $Re(v) > 0$, $Re(w) > 0$. Поэтому из формул (ii - vi) следует, что

$$(vii) \quad F(p) = -J_2(p_0 - b_0, (|b'| - |a'|)2^{-1}, (|a'| + |b'|)2^{-1} + |p'|) - J_2(p_0 - b_0, (|b'| - |a'|)2^{-1}, (|a'| + |b'|)2^{-1} - |p'|) - J_3(p_0 - b_0, (|b'| - |a'|)2^{-1}, (|b'| + |a'|)2^{-1} + |p'|)p' + J_3(p_0 - b_0, (|b'| - |a'|)2^{-1}, (|b'| + |a'|)2^{-1} - |p'|)p' + J_3(p_0 - b_0, |b'|, |p'|)b'/|b'| - J_3(p_0 - b_0, |a'|, |p'|)a'/|a'| - J_2(p_0 - b_0, |b'|, |p'|)b'p'/|b'|^{-1}|p'|^{-1} + J_2(p_0 - b_0, |a'|, |p'|)a'p'/|a'|^{-1}|p'|^{-1} + 2^{-1}J_4(p_0 - b_0, b_0 - a_0, (|a'| + |p'|)/2) + 2^{-1}J_4(p_0 - b_0, b_0 - a_0, (|a'| - |p'|)/2) - J_3(p_0 - b_0, |p'|, |a'|)p'/|p'| + J_3(p_0 - b_0, |a'|, |p'|)a'/|a'| - J_2(p_0 - b_0, |a'|, |p'|)a'p'/|a'|^{-1}|p'|^{-1} + J_3(p_0 - a_0, |p'|, |a'|)p'/|p'| - J_3(p_0 -$$

$a_0, |a'|, |p'|)a'/|a'| + J_2(p_0 - a_0, |a'|, |p'|)a'p'|a'|^{-1}|p'|^{-1}$,
 где $\mathbf{i} = (-1)^{1/2} = i_1$. При этом $\mathcal{F}((e^{bt} - e^{at})/t, pt; p; 0) = \int_p^\infty (\mathcal{F}(e^{bt}, pt; z; 0) - \mathcal{F}(e^{at}, pt; z; 0))dz$,
 где z стремится к бесконечности в угле $|\text{Arg}(z)| < \pi/2 - \delta$ для некоторого $0 < \delta < \pi/2$.

37. Теорема. Если $f(t)$ – функция-оригинал, то

(1) $\mathcal{F}((fCh_{[0,\infty)})(t - \tau), u; p; \zeta) = \mathcal{F}((fCh_{[0,\infty)})(t), u; p; \zeta + p\tau)$ при $u(p, t; \zeta) = p_0t + \zeta_0 + M(p, t; \zeta)$ или $u(p, t; \zeta) = pt + \zeta$ над \mathcal{A}_r с $2 \leq r < \infty$,

(2) $\mathcal{F}((fCh_{[0,\infty)})(t - \tau), pt; p; 0) = \mathcal{F}((fCh_{[0,\infty)})(t), pt; p; 0)e^{-p\tau}$ над $\mathbf{K} = \mathbf{H}$ или $\mathbf{K} = \mathbf{O}$ с $f(\mathbf{R}) \subset \mathbf{K}$, или над \mathcal{A}_r с $4 \leq r$ при $f(\mathbf{R}) \subset \mathbf{R}$, в полупространстве $\text{Re}(p) > s_0$.

Доказательство. Для p в полупространстве $\text{Re}(p) > s_0$ выполняются равенства:

$$\mathcal{F}((fCh_{[0,\infty)})(t - \tau), u; p; \zeta) = \int_\tau^\infty f(t - \tau)e^{-u(p,t;\zeta)}dt = \int_0^\infty f(t_1)e^{-u(p,t_1;\zeta+p\tau)}dt_1$$

$$= \mathcal{F}((fCh_{[0,\infty)})(t), u; p; \zeta + p\tau),$$

в силу формул 3(1-5), так как $p_jt + \zeta_j = p_jt_1 + (\zeta_j + p_j\tau)$ для любого $j = 0, 1, \dots, 2^r - 1$, где $t = t_1 + \tau$, в частности, при $u = pt$, над $\mathbf{K} = \mathbf{H}$ или $\mathbf{K} = \mathbf{O}$ с $f(\mathbf{R}) \subset \mathbf{K}$, или над \mathcal{A}_r с $4 \leq r$ при $f(\mathbf{R}) \subset \mathbf{R}$:

$$\mathcal{F}((fCh_{[0,\infty)})(t - \tau), pt; p; 0) = \int_\tau^\infty f(t - \tau)e^{-pt}dt = \int_0^\infty f(t_1)e^{-p(t_1+\tau)}dt_1$$

$$= \mathcal{F}((fCh_{[0,\infty)})(t), pt; p; 0)e^{-p\tau},$$

так как $t, \tau \in \mathbf{R}$, алгебра \mathbf{K} альтернативна, а \mathbf{R} – центр алгебры \mathcal{A}_r .

38. Замечание. В силу определения преобразования \mathcal{F} и $u(p, t; \zeta)$, и теоремы 37 можно интерпретировать $\zeta_1 i_1 + \dots + \zeta_{2^r-1} i_{2^r-1}$ как начальную фазу запаздывания.

39. Теорема. Если $f(t)$ – функция-оригинал со значениями в \mathcal{A}_r с $2 \leq r < \infty$, $b \in \mathbf{R}$, тогда $\mathcal{F}(e^{bt}f(t)Ch_{[0,\infty)}(t), pt; p; \zeta) = \mathcal{F}(f(t)Ch_{[0,\infty)}(t), pt; p - b; \zeta)$ для любого $\text{Re}(p) > s_0 + b$.

Доказательство. Если $\text{Re}(p) > s_0 + b$, то сходится интеграл

$$\mathcal{F}(e^{bt}f(t)Ch_{[0,\infty)}(t), pt; p; \zeta) = \int_0^\infty f(t)e^{bt} \exp(-pt - \zeta)dt$$

$$= \int_0^\infty f(t) \exp(-(p - b)t - \zeta)dt = \mathcal{F}(f(t)Ch_{[0,\infty)}(t), pt; p - b; \zeta).$$

40. Примеры.

1. $\mathcal{F}(e^{-bt} \sin(at)Ch_{[0,\infty)}(t), pt; p; 0) = a[(p + b)^2 + a^2]^{-1}$, где $a, b \in \mathbf{R}$, $\text{Re}(p) > b$, $p \in \mathcal{A}_r$.
2. $\mathcal{F}(e^{-bt} \cos(at)Ch_{[0,\infty)}(t), pt; p; 0) = (p + b)[(p + b)^2 + a^2]^{-1}$, где $a, b \in \mathbf{R}$, $\text{Re}(p) > b$.
3. $\mathcal{F}(e^{-bt}t^n Ch_{[0,\infty)}(t), pt; p; 0) = n!(p + b)^{-n-1}$, где $b \in \mathbf{R}$, $\text{Re}(p) > b$ (смотри примеры 26.2, 26.3 и 30.1).

41. Теорема. Если $f(t)$ и $g(t)$ – функции-оригиналы, где g с действительными значениями для любого t , тогда

$$\mathcal{F}(\int_0^t f(\tau)g(t - \tau)d\tau, pt; p; 0) = \mathcal{F}(f(t)Ch_{[0,\infty)}(t), pt; p; 0)\mathcal{F}(g(t)Ch_{[0,\infty)}(t), pt; p; 0)$$

для любых $p \in \mathcal{A}_r$ с $\text{Re}(p) > s_0$, где $s_0 = \max(s_0(f), s_0(g))$, а $2 \leq r < \infty$.

Доказательство. Свертка функций $q(t) := \int_0^t f(\tau)g(t - \tau)d\tau$ удовлетворяет свойствам 1 и 2 определения 1. При этом $|\int_0^t f(\tau)g(t - \tau)d\tau| < C|\int_0^t \exp(s_0\tau) \exp(s_0(t - \tau))d\tau| = Ct \exp(s_0t) < C_1 \exp((s_0 + \epsilon)t)$, где C, C_1 – положительные постоянные, $\epsilon > 0$ можно выбрать произвольно малым числом для соответствующей константы C_1 . Значит, выполнено и свойство 3 определения 1, то есть, $q(t)$ является функцией-оригиналом. Запишем функции f и g в виде: $f = \sum_v f_v i_v$, $g = \sum_w g_w i_w$, где f_v и g_w – функции со значениями в \mathbf{R} , $\{i_v : v = 0, 1, \dots, 2^r - 1\}$ – генераторы алгебры \mathcal{A}_r . Тогда в силу теоремы Фубини

$$\mathcal{F}(\int_0^t f(\tau)g(t - \tau)d\tau, pt; p; 0) = \sum_{w,v=0}^{2^r-1} i_w i_v \int_0^\infty (\int_0^t f_w(\tau)g_v(t - \tau)d\tau) \exp(-pt)dt$$

$$= \sum_{w,v=0}^{2^r-1} i_w i_v (\int_0^\infty f_w(\tau) \exp(-p\tau)d\tau) (\int_0^\infty g_v(t_1) \exp(-pt_1)dt_1),$$

для любых $\text{Re}(p) > s_0$, где $t_1 := t - \tau$. Поскольку $g(\mathbf{R}) \subset \mathbf{R}$, то $g = g_0$, что дает формулу теоремы.

42. Теорема. Пусть $f(t)$ – действительнзначная функция-оригинал, $F(p) = \mathcal{F}(f(t)Ch_{[0,\infty)}(t); u; p; 0)$, $G(p)$ и $q(p)$ – аналитические функции такие, что

$$\mathcal{F}(g(t, \tau)Ch_{[0, \infty)}(t); u; p; 0) = G(p) \exp(-u(q(p), \tau; 0))$$

для $u = pt$ или $u = p_0t + M(p, t; 0)$, тогда

$$\mathcal{F}\left(\int_0^\infty g(t, \tau)f(\tau)d\tau; u; p; 0\right) = G(p)F(q(p))$$

для любых $p \in \mathcal{A}_r$ с $Re(p) > s_0$ и $Re(q(p)) > s_0$, где $s_0 = \max(s_0(f), s_0(g))$, $2 \leq r < \infty$.

Доказательство. Пусть $Re(p) > s_0$ и $Re(q(p)) > s_0$, где $s_0 = \max(s_0(f), s_0(g))$, тогда в силу теоремы Фубини и условий теоремы изменение порядка интегрирования дает равенства:

$$\int_0^\infty \left(\int_0^\infty g(t, \tau)f(\tau)d\tau\right) \exp(-u(p, t; 0))dt = \int_0^\infty \left(\int_0^\infty g(t, \tau) \exp(-u(p, t; 0))dt\right) f(\tau)d\tau$$

$$= \int_0^\infty G(p) \exp(-u(q(p), \tau; 0))f(\tau)d\tau = G(p) \int_0^\infty f(\tau) \exp(-u(q(p), \tau; 0))d\tau = G(p)F(q(p)),$$

так как $t, \tau \in \mathbf{R}$, а \mathbf{R} – центр алгебры \mathcal{A}_r .

43. Примеры. Рассмотрим $G(p) = p^{-1/2}$ и $q(p) = p^{1/2}$, причем по формуле обращения теоремы 19 имеем $g(t) = (2\pi i_1)^{-1} \int_{a-i_1\infty}^{a+i_1\infty} p^{-1/2} \exp(-\tau p^{1/2} + pt)dp$, так как p^s и p коммутируют при $s \in \mathbf{R}$ и $p \in \mathcal{A}_r$ в силу полярной формы $p = |p| \exp(\theta M)$ чисел Кэли-Диксона, в частности, кватернионов и октонионов, где $\theta \in \mathbf{R}$, $M \in \mathcal{A}_r$, $Re(M) = 0$, $|M| = 1$, и формулы для экспоненциальной функции $\exp(\theta M) = \cos(\theta) + \sin(\theta)M$ [14, 15].

Рассмотрим сначала значения $t > 0$. Пусть $0 < v < R < \infty$ и рассмотрим петлю (замкнутую кривую) γ составленную из отрезка $\{z \in \mathcal{A}_r : z = a + i_1c, c \in [-b, b]\}$, где $a^2 + b^2 = R^2$, дуг $S_1(R)$ и $S_2(R)$ окружности $S(R) = \{z \in \mathcal{A}_r : z = z_0 + i_1z_1, |z| = R, z_0, z_1 \in \mathbf{R}\}$, где дуга $S_1(R)$ соединяет точку $(a + i_1b)$ с $(-R + i_1\epsilon)$ при обходе по часовой стрелке, $S_2(R)$ соединяет точку $(-R - i_1\epsilon)$ с $(a - i_1b)$, $\epsilon > 0$ – малое число. Точки $(-v + i_1\epsilon)$ и $(-R + i_1\epsilon)$ соединены отрезком $[-v + i_1\epsilon, -R + i_1\epsilon]$ прямой линии, а также $(-R - i_1\epsilon)$ и $(-v - i_1\epsilon)$ соединены отрезком прямой $[-R - i_1\epsilon, -v - i_1\epsilon]$. Остальная часть γ состоит из дуги $S_3(v)$ окружности $S(v)$ от точки $-v - i_1\epsilon$ до $-v + i_1\epsilon$, проходимой по против часовой стрелки. Внутри этого контура полагаем $-\pi < \theta < \pi$, где $M = i_1$. Тогда в силу теоремы 2.11 [14, 15] $\int_\gamma p^{-1/2} \exp(-\tau p^{1/2} + pt)dp = 0$, следовательно,

$$\int_{a-i_1\infty}^{a+i_1\infty} p^{-1/2} \exp(-\tau p^{1/2} + pt)dp =$$

$$\int_{S_2(R) \cup [-R - i_1\epsilon, -v - i_1\epsilon] \cup S_3(v) \cup [-v + i_1\epsilon, -R + i_1\epsilon] \cup S_1(R)} p^{-1/2} \exp(-\tau p^{1/2} + pt)dp.$$

В силу леммы 12.1 $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{S_2(R) \cup S_1(R)} p^{-1/2} \exp(-\tau p^{1/2} + pt)dp = 0$, следовательно,

$$g(t; \tau) = (2\pi i_1)^{-1} \int_{[-R - i_1\epsilon, -v - i_1\epsilon] \cup S_3(v) \cup [-v + i_1\epsilon, -R + i_1\epsilon]} p^{-1/2} \exp(-\tau p^{1/2} + pt)dp.$$

Вдоль отрезка $[-R - i_1\epsilon, -v - i_1\epsilon]$ имеем $p = x \exp(-i_1\pi) - i_1\epsilon$ и $(p + i_1\epsilon)^{1/2} = -i_1x^{1/2}$, а вдоль отрезка $[-v + i_1\epsilon, -R + i_1\epsilon]$ получаем $p = x \exp(i_1\pi) + i_1\epsilon$ и $(p - i_1\epsilon)^{1/2} = i_1x^{1/2}$, где $x > 0$, $x^{1/2}$ – положительная ветвь квадратного корня (арифметическое значение), следовательно, $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{[-R - i_1\epsilon, -v - i_1\epsilon]} p^{-1/2} \exp(-\tau p^{1/2} + pt)dp = \int_R^v \tilde{i}_1 x^{-1/2} \exp(i_1\tau x^{1/2} - xt)dx$ и $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{[-v + i_1\epsilon, -R + i_1\epsilon]} p^{-1/2} \exp(-\tau p^{1/2} + pt)dp = -\int_v^R \tilde{i}_1 x^{-1/2} \exp(-i_1\tau x^{1/2} - xt)dx$, а $\lim_{v \rightarrow 0} \int_{S_3(v)} p^{-1/2} \exp(-\tau p^{1/2} + pt)dp = 0$, так как $|\int_{S_3(v)} p^{-1/2} \exp(-\tau p^{1/2} + pt)dp| \leq C2\pi v^{1/2}$, где $C = const > 0$. Сделаем замену переменной $x = y^2$ и воспользуемся известным интегралом Пуассона $\int_0^\infty \exp(-ax^2) \cos(bx)dx = (\pi/a)^{1/2} \exp(-b^2/(4a))/2$, где $a > 0$, $b \in \mathbf{R}$, тогда $g(t; \tau) = \pi^{-1} \int_0^\infty x^{1/2} \cos(\tau x^{1/2}) \exp(-xt)dx = (2/\pi) \int_0^\infty \exp(-ty^2) \cos(\tau y)dy = (\pi t)^{-1/2} \exp(-\tau^2/(4t))$. Далее получим, что $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{S_4(R)} p^{-1/2} \exp(-\tau p^{1/2} + pt)dp = 0$ при $t < 0$, где $S_4(R)$ – дуга окружности $S(R)$, соединяющая точки $(a - i_1b)$ и $(a + i_1b)$ при обходе против часовой стрелки с $Re(p) > 0$, следовательно, аналогичные рассуждения приведенным выше показывают, что $g(t; \tau) = 0$ при $t < 0$. Тогда

$$(0) \quad g(t; \tau) = (\pi t)^{-1/2} \exp(-\tau^2/(4t)) \text{ при } t > 0.$$

Итак, в силу теоремы 42:

$$(1) \quad \mathcal{F}\left((\pi t)^{-1/2} \int_0^\infty \exp(-\tau^2/(4t))f(\tau)d\tau; u; p; 0\right) = p^{-1/2}F(p^{1/2}),$$

где $f(t)$ – оригинал функции $F(p)$.

В частности, возьмем $F(p) = p^{-1} \exp(-ap)$, где $0 < a \in \mathbf{R}$. Согласно формуле 26(2) $f(t) = Ch_{[0,\infty)}(t - a)$. Тогда в силу формулы (1) получим:

$$(2) \quad p^{-1} \exp(-ap^{1/2}) = \mathcal{F}((\pi t)^{-1/2} \int_a^\infty \exp(-\tau^2/(4t)) d\tau; u; p; 0),$$

где $\int_a^\infty \exp(-\tau^2/(4t)) d\tau = 2(\pi)^{-1/2} \int_{t^{-1/2}a/2}^\infty \exp(-x^2) dx$, $x := t^{-1/2}\tau/2$. Обозначая стандартным образом $erf(y) := \int_0^y \exp(-x^2) dx$, $Er f(y) := 1 - erf(y)$, запишем формулу (2) в виде:

$$(3) \quad \mathcal{F}(Er f(t^{-1/2}a/2); u; p; 0) = p^{-1} \exp(-ap^{1/2}) \text{ при } u = pt \text{ и } Re(p) > 0, p \in \mathcal{A}_r, 2 \leq r \in \mathbf{N}.$$

44. Теорема. Пусть функция $F(p)$ голоморфна в полупространстве $Re(p) > s_0$, где $p \in \mathcal{A}_r, 2 \leq r \in \mathbf{N}, s_0 \in \mathbf{R}$. Причем, $F(p)$ правильна в бесконечно удаленной точке и имеет в её окрестности $\{p \in \mathcal{A}_r : |p| \geq R\}$ лорановское разложение:

$$(1) \quad F(p) = \sum_{l=1}^\infty c_l g_l(p),$$

где $c_l \in \mathcal{A}_r, g_l(p) := p^{-l}$ при $u = pt, g_l(p)$ с $l = n - 1$ дается формулами (12,13) примера 33 при $u = p_0t + \zeta_0 + M(p, t; \zeta), 0 < R < \infty$, то оригиналом $f(t)$ является функция:

$$(2) \quad f(t) = Ch_{[0,\infty)}(t) \sum_{l=1}^\infty c_l t^{l-1} / (l - 1)!.$$

Доказательство. Положим $q = p^{-1}$ и обозначим $G(q) := F(1/q)$. Поэтому функция $G(q)$ аналитична в шаре $\{q : |q| \leq R^{-1}\}$. При $u = pt$ каждая функция равна $g_l(1/q) = q^l$, а при $u = p_0t + \zeta_0 + M(p, t; \zeta)$ функция $g_l(1/q)$ голоморфна по q , так как в примере 33 и последующих примерах используются выражения p_j через p с помощью генераторов алгебры \mathcal{A}_r (смотри формулы 3(6)), что дает локальную аналитичность $F(p; \zeta)$ по p и ζ . В силу формул 33(4,10,11) асимптотически $|g_l(1/q)|$ ведет себя как $|g_l(1/q)| \leq C'|q|^l$ при $|q| \rightarrow \infty$ в плоскости $\mathbf{R} \oplus i_1\mathbf{R}$, где $C' = const > 0$ независимая от $l = n - 1$. Тогда неравенство (4) из теоремы 2.7 и теорема 3.21 [14, 15] дают $|c_l| < C_0C_1 \exp(C_2R^n)R^l$ для любого $l \in \mathbf{N}$, где $n = 2r + 2, 2 \leq r \in \mathbf{N}$, в частности, $r = 2$ для $\mathbf{K} = \mathbf{H}, r = 3$ для $\mathbf{K} = \mathbf{O}$, C_1 и C_2 – положительные постоянные независимые от функции, $C_0 = \max_{|q| \leq 1/R} |G(q)|$. Поэтому,

$$|f(t)| \leq \sum_{l=1}^\infty |c_l| t^{l-1} / (l - 1)! \leq C_0C_1 \exp(C_2R^n) \sum_{l=0}^\infty (R|t|)^l / l! = C_0C_1 \exp(C_2R^n + R|t|),$$

следовательно,

$|f(t)| \leq C \exp(Rt)$ для любого $t \geq 0$, где $C = C_0C_1 \exp(C_2R^n)$. Итак, функция $f(t)Ch_{[0,\infty)}(t)$ является оригиналом, так как $t \in \mathbf{R}$, а \mathbf{R} – центр алгебры \mathcal{A}_r . В силу равномерной сходимости ряда (2) его можно почленно интегрировать с множителем $\exp(u(p, t; \zeta))$ по t от 0 до ∞ при $Re(p) > R$. Следует отметить, что $|\mathcal{F}(t^{l-1} / (l - 1)!, u; p; \zeta)| \leq [(l - 1)!]^{-1} (\int_0^\infty t^{l-1} \exp(-p_0t) dt) \leq p_0^{-l}$ при $u = p_0t + \zeta_0 + M(p, t; \zeta)$. Поскольку $\mathcal{F}(t^n; u; p, \zeta) = g_l(p)$, где $\zeta = 0$ при $u = pt, \zeta \in \mathcal{A}_r$ может быть отлично от нуля для $u = p_0t + \zeta_0 + M(p, t; \zeta)$, то отсюда и из примеров 26 и 33 следует утверждение данной теоремы.

45. Определение. Функция $F : U \rightarrow \mathcal{A}_r$ из области U в алгебру \mathcal{A}_r называется мероморфной, если она голоморфна на $U \setminus P$, где P – счетное множество точечных полюсов функции F , причем в каждой ограниченной подобласти V в U подмножество $V \cap P$ полюсов конечно, в частности, может быть $P = \emptyset$.

46. Теорема. Пусть функция $F(p)$ удовлетворяет условиям:

(1) $F(p)$ мероморфна в полупространстве $W := \{p \in \mathcal{A}_r : Re(p) > s_0\}$ и все её полюсы могут быть лишь конечного порядка;

(2) причем для любого $a > s_0$ существуют константы $C_a > 0$ и $\epsilon_a > 0$ такие, что $|F(p)| \leq C_a \exp(-\epsilon_a|p|)$ для любого $p \in \mathcal{A}_r$ с $Re(p) \geq a$, где s_0 фиксировано, $2 \leq r < \infty, f(\mathbf{R}) \subset \mathbf{R}$ при $r \geq 4$;

(3) интеграл $\int_{a+i_1\theta, \theta \in \mathbf{R}} F(p) dp$ абсолютно сходится для любого $a > s_0$, где $i_0, i_1, \dots, i_{2r-1} \in \mathcal{A}_r$ – это стандартные генераторы алгебры \mathcal{A}_r . Тогда оригиналом для $F(p)$ является функция

(4) $f(t) = (i_1)^{-1} \sum_{p_k} \text{res}(p_k, F(p) \exp(u(p, t; 0))) \cdot i_1$
 при $r = 2, 3$; а при $4 \leq r \in \mathbf{N}$, если $f(\mathbf{R}) \subset \mathbf{R}$, где сумма вычетов берется по всем особым точкам p_k функции $F(p)$ в порядке неубывания их модулей.

Доказательство. В силу теоремы 22 над $\mathbf{K} = \mathbf{H}$ или $\mathbf{K} = \mathbf{O}$ с $f(\mathbf{R}) \subset \mathbf{K}$, а также произвольной алгебры \mathcal{A}_r с $f(\mathbf{R}) \subset \mathbf{R}$ при $4 \leq r \in \mathbf{N}$, $F(p)$ является изображением функции

(5) $f(t) = (2\pi)^{-1} \tilde{i}_1 \int_{a-i_1\infty}^{a+i_1\infty} F(p) \exp(u(p, t; 0)) dp$. Из определения 34 следует, что существует последовательность радиусов $0 < R_n < R_{n+1}$ для любого $n \in \mathbf{N}$, так что $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \infty$, а сфера $S_n := S(\mathcal{A}_r, 0, R_n)$ не содержит ни одного полюса $p_k \in P$, следовательно, $\min_{p \in P, z \in S_n} |p - z| =: \delta_n > 0$ в силу компактности сферы S_n и шара $B(\mathcal{A}_r, 0, R_{n+1})$, где $S(\mathcal{A}_r, y, R) := \{z \in \mathcal{A}_r : |z - y| = R\}$, $y \in \mathcal{A}_r$, $0 < R < \infty$, $B(\mathcal{A}_r, y, R) := \{z \in \mathcal{A}_r : |z| \leq R\}$. Рассмотрим сечение сферы S_n плоскостью $\mathbf{R} \oplus i_1 \mathbf{R}$ и часть γ_n окружности $\psi_n := S_n \cap (\mathbf{R} \oplus i_1 \mathbf{R})$, расположенную правее гиперплоскости $\{p \in \mathcal{A}_r : \text{Re}(p) = a\}$ над \mathbf{R} в \mathcal{A}_r , то есть, в полупространстве $\text{Re}(p) > a$. Обозначим через $a - i_1 b_n$ и $a + i_1 b_n$ точки пересечения окружности ψ_n с гиперплоскостью $\{p \in \mathcal{A}_r : \text{Re}(p) = a\}$, а через w_n - петлю проходимую против часовой стрелки и составленную из γ_n и отрезка $[a - i_1 b_n, a + i_1 b_n]$. Согласно лемме 12.1

(6) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\gamma_n} F(p) \exp(u(p, t)) dp = 0$, следовательно,

(7) $f(t) = (2\pi)^{-1} \tilde{i}_1 \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{w_n} F(p) \exp(u(p, t; 0)) dp$.

Тогда из теоремы 3.23 [14, 15] и формул (6, 7) следует формула (4) данной теоремы.

47. Замечание. Лемма 23 также выполняется при условии

(2') существует последовательность гиперсфер $S_n = S(\mathcal{A}_r, 0, R_n)$ над \mathbf{R} вложенных в \mathcal{A}_r с центром в нуле и радиусов R_n с $R_n < R_{n+1}$ для любого $n \in \mathbf{N}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \infty$, так что $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{p \in S_n \cap W} |\hat{F}(p)| = 0$

вместо условия (2) при выполнении остальных условий леммы 23.

В самом деле, достаточно её доказать для некоторой последовательности дуг γ_n окружностей ψ_n , содержащихся в плоскости $\mathbf{R} \oplus N\mathbf{R}$, где $N \in \mathcal{A}_r$, $\text{Re}(N) = 0$, $|N| = 1$.

Если $F(p)$ голоморфна в W , то в силу теоремы 2.11 [14, 15] $\int_{\gamma_n} F(p) \exp(-u(p, t; \zeta)) dp$ не зависит от вида кривой и определяется лишь начальной и конечной её точками. Если $V(\gamma_n) \leq C_V R_n$ для любого n , то достаточно доказать утверждение леммы для любой подпоследовательности $R_{n(k)}$ с $R_{n(k+1)} \geq R_{n(k)} + 1$ для любого $k \in \mathbf{N}$, что также видно из оценок интегралов ниже. Обозначим такую подпоследовательность через R_n . Каждую спрямляемую кривую можно аппроксимировать сходящейся последовательностью спрямляемых ломаных линий, составленных из дуг окружностей. Если кривая расположена на сфере, то эти окружности можно взять на сфере с тем же центром. Поскольку условие (2') выполняется равномерно относительно направляющих N и можно выполнить диффеоморфизм g в \mathcal{A}_r , так что $g(W) = W$, $g(S_n) = S_n$ для любого $n \in \mathbf{N}$, и образом C^1 кривой из W является дуга окружности, так как $0 < R_n + 1 < R_{n+1}$ для любого $n \in \mathbf{N}$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \infty$. Функционал $(F, \gamma) \mapsto \int_{\gamma} F(p) dp$ непрерывен из $C^0(V, \mathcal{A}_r) \times \Gamma$ в \mathcal{A}_r , где V - компактная область в \mathcal{A}_r , Γ - семейство спрямляемых кривых в V с метрикой $\rho(v, w) := \max(\sup_{z \in v} \inf_{\zeta \in w} |z - \zeta|, \sup_{z \in w} \inf_{\zeta \in v} |z - \zeta|)$ (смотри теорему 2.7 [14, 15]). При этом спрямляемая кривая является равномерным пределом C^1 кривых, так как каждая спрямляемая кривая непрерывна, а пространство функций C^1 плотно в пространстве непрерывных функций C^0 в компактно-открытой топологии, каждая C^1 -кривая спрямляема. То есть, рассмотрим $\gamma_n = \psi_n \cap \{p \in \mathcal{A}_r : \text{Re}(p) > a\} \cap W$. Используя автоморфизм алгебры \mathcal{A}_r достаточно доказать равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\gamma_n} F(p) \exp(-u(p, t)) dp = 0$$

для любого $t > 0$ при $u = pt + \zeta$ согласно леммам 8.1, 8.2 и доказательству теоремы 19. При

этом $\exp(tNz)dz = (tN)^{-1}d \exp(tNz)$ в плоскости $\mathbf{R} \oplus N\mathbf{R}$. Сделаем замену переменной $z = (p + \zeta/t)N$, тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\gamma_n} F(p) \exp(-u(p, t; \zeta)) dp = \lim_{n \rightarrow \infty} [\int_{\eta_n} F(\tilde{N}z) \exp(tNz) dz] \tilde{N},$$

где $\eta_n = \gamma_n N$, а $z = x + Ny$, где $x, y \in \mathbf{R}$, $z \in \mathbf{R} \oplus N\mathbf{R}$, $b_n := \sup_{p \in S_n \cap W} |\hat{F}_n(p)|$, $\phi_n := \arcsin(a/R_n)$. Тогда

$$|\int_{\eta_n; -a \leq y \leq 0} F(\tilde{N}z) \exp(tNz) dz| \leq b_n \exp(at) \phi_n R_n.$$

Поскольку $\sin(\phi) \geq 2\phi/\pi$ для любого $0 \leq \phi \leq \pi/2$, то $|\exp(tNz)| = \exp(-tR_n \sin(\phi)) \leq \exp(-2tR_n \phi/\pi)$, следовательно,

$$|\int_{\eta_n; 0 \leq y \leq R_n} F(\tilde{N}z) \exp(tNz) dz| \leq 2b_n R_n \int_0^{\pi/2} \exp(-2tR_n \phi/\pi) d\phi = 2b_n \pi (1 - \exp(-tR_n)) / (2t).$$

Итак, $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\eta_n} F(\tilde{N}z) \exp(-u(\tilde{N}z, t)) dz = 0$ для любого $t > 0$. Отсюда вытекает равенство 12.1(4).

Тогда и теорема 22 выполняется при наложении условия (2') вместо условия (i) при выполнении остальных условий теоремы 22, а значит в таком варианте, при условии (2') вместо (2), выполняется и теорема 46.

48. Теорема. Если функция $f(t)$ и её производная $f'(t)$ являются оригиналами, а $F(p)$ – изображение функции $f(t)$ при $u = pt$ над \mathcal{A}_r с $2 \leq r \in \mathbf{N}$, то

(1) $\lim_{p \rightarrow \infty} F(p)p = f(0)$, где $p \rightarrow \infty$ внутри угла $|\text{Arg}(p)| < \pi/2 - \delta$ для некоторого $0 < \delta < \pi/2$ и $f(0) = \lim_{t \rightarrow +0} f(t)$; если дополнительно существует предел $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = f(\infty)$, то

(2) $\lim_{p \rightarrow 0} F(p)p = f(\infty)$, где $p \rightarrow 0$ внутри того же угла.

Доказательство. Если $z \in \mathcal{A}_r$, то оно имеет полярное разложение $z = |z| \exp(M)$, где $M \in \mathcal{A}_r$, $\text{Re}(M) = 0$, $\text{Arg}(z) := M$ (смотри следствие 3.6 в [14]). В силу теоремы 28 выполняется равенство $\mathcal{F}(f'(t)Ch_{[0, \infty)}(t), pt; p; 0) = F(p)p - f(0)$. Тогда согласно замечанию 8 $\lim_{p \rightarrow \infty, |\text{Arg}(p)| < \pi/2 - \delta} (F(p)p - f(0)) = 0$. Если ещё существует $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = f(\infty)$, причем $|f(\infty)| < \infty$, то f ограничена на \mathbf{R} , следовательно, её порядок роста $s_0 \leq 0$, поэтому, функция $F(p)$ определена для любого $\text{Re}(p) > 0$. Из формулы $\int_0^\infty f'(t) \exp(-pt) dt = F(p)p - f(0)$ вытекает, что при $p = 0$ интеграл $\int_0^\infty f'(t) dt$ сходится. Тогда в угле $|\text{Arg}(p)| < \pi/2 - \delta$ интеграл $\int_0^\infty f'(t) \exp(-pt) dt$ сходится равномерно по p . Поэтому, можно перейти к пределу при $p \rightarrow 0$ в этом угле, то есть, $\int_0^\infty f'(t) dt = \lim_{p \rightarrow 0} F(p)p - f(0) = f(\infty) - f(0)$, следовательно, $\lim_{p \rightarrow 0} F(p)p - f(0) = f(\infty)$.

49. Теорема. Если функция $f(t)$ является оригиналом вместе со своей производной, а $F(p; \zeta)$ – изображение функции $f(t)$ над алгеброй Кэли-Диксона \mathcal{A}_r с $2 \leq r \in \mathbf{N}$ при $u = p_0 t + \zeta_0 + M(p, t; \zeta)$, то

$$\lim_{p \rightarrow \infty} p_0 F(p; \zeta) + p_1 F(p; \zeta - i_1 \pi/2) + \dots + p_{2r-1} F(p; \zeta - i_{2r-1} \pi/2) = f(0),$$

где $f(0) = \lim_{t \rightarrow +0} f(t)$, а p стремится к бесконечности внутри угла $|\text{Arg}(p)| < \pi/2 - \delta$ для некоторого $0 < \delta < \pi/2$. Если также существует $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = f(\infty)$, то $\lim_{p \rightarrow 0} \{p_0 F(p; \zeta) + p_1 F(p; \zeta - i_1 \pi/2) + \dots + p_{2r-1} F(p; \zeta - i_{2r-1} \pi/2)\} = f(\infty)$, где $p \rightarrow 0$ внутри того же угла.

Доказательство. В силу теоремы 31 выполняется равенство:

$$\mathcal{F}(f'(t)Ch_{[0, \infty)}(t), u; p; \zeta) = p_0 F(p; \zeta) + p_1 F(p; \zeta - i_1 \pi/2) + \dots + p_{2r-1} F(p; \zeta - i_{2r-1} \pi/2) - f(0),$$

при $u = p_0 t + \zeta_0 + M(p, t; \zeta)$,

где $p = p_0 + p_1 i_1 + \dots + p_{2r-1} i_{2r-1}$, $p_0, \dots, p_{2r-1} \in \mathcal{A}_r$, $\{i_0, \dots, i_{2r-1}\}$ – генераторы алгебры \mathcal{A}_r . Из замечания 8 следует, что $\lim_{p \rightarrow \infty, |\text{Arg}(p)| < \pi/2 - \delta} \mathcal{F}(f'Ch_{[0, \infty)}, u; p; \zeta) = 0$, что дает первое утверждение теоремы.

Если также существует $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = f(\infty)$, то f ограничена на \mathbf{R} и $s_0 \leq 0$, а $F(p; \zeta)$ определена для любого $\text{Re}(p) > 0$. Поэтому, существует предел

$\lim_{p \rightarrow 0, |Arg(p)| < \pi/2 - \delta} \int_0^\infty f'(t) \exp(-pt - \zeta_0 - M(p, t; \zeta)) = \int_0^\infty f'(t) dt = f(\infty) - f(0) = \lim_{p \rightarrow 0, |Arg(p)| < \pi/2 - \delta} \{p_0 F(p; \zeta) + p_1 F(p; \zeta - i_1 \pi/2) + \dots + p_{2^r - 1} F(p; \zeta - i_{2^r - 1} \pi/2) - f(0)\}$, откуда следует второе утверждение теоремы.

50. Пример. Рассмотрим изображения дробных степеней. Гамма-функция Эйлера дается интегралом $\Gamma(a+1) := \int_0^\infty t^a e^{-t} dt$ для любого $Re(a) > -1$. В полярной форме число $p \in \mathcal{A}_r$ имеет вид: $p = \rho \exp(S\alpha)$, где $\rho = |p|$, $\alpha \in \mathbf{R}$, $S \in \mathcal{A}_r$, $Re(S) = 0$, $|S| = 1$, $Arg(p) = S\alpha$ (смотри следствие 3.6 [14]). При $Re(p) > 0$ возьмем $-\pi/2 < \alpha < \pi/2$. Введем новую переменную $q := tp^{-1}$, тогда $\Gamma(a+1) = p^{a+1} \int_L q^a \exp(-pq) dq$ (смотри определение 4.1 и предложение 4.2 [14]), где интеграл берется вдоль луча L , характеризуемого условием $Arg(q) = -\alpha S$. Для точек дуги $\gamma_R := \{q \in \mathcal{A}_r : |q| = R, -\alpha < (Arg(q))S^* < 0\}$ положим $q = R \exp(S\phi)$. Тогда $|\int_{\gamma_R} q^a \exp(-pq) dq| \leq R^a \int_{-\alpha}^0 \exp(-\rho R \cos(\phi + \alpha)) R d\phi$. Поскольку $0 < \alpha + \phi < \alpha$, то $\cos(\alpha + \phi) \geq \delta_0 > 0$, где $\delta_0 = const > 0$. Поэтому, существует предел

$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} q^a \exp(-pq) dq = 0$, так как $0 < \alpha + \phi < \alpha$ и $\cos(\alpha + \phi) > c_0$, где $c_0 = const > 0$. Для любого $S \in \mathcal{A}_r$ с $|S| = 1$, $Re(S) = 0$ между лучом L и действительной осью $i_0 \mathbf{R}$ в \mathcal{A}_r нет особых точек подынтегральной функции. Таким образом, можно заменить $\int_L q^a \exp(-pq) dq$ на $\int_0^\infty q^a \exp(-pq) dq$, следовательно, $p^{-a-1} \Gamma(a+1) = \int_0^\infty t^a \exp(-pt) dt$ над \mathbf{H} или \mathbf{O} в силу альтернативности алгебры октонионов и ассоциативности тела кватернионов; либо $\Gamma(a+1) = p^{a+1} \int_0^\infty t^a \exp(-pt) dt$ в случае алгебры \mathcal{A}_r с $4 \leq r \in \mathbf{N}$, где переменная интегрирования снова обозначена через t . Итак,

(i) $\mathcal{F}(t^a Ch_{[0, \infty)}(t), pt; p; 0) = p^{-a-1} \Gamma(a+1)$ над \mathbf{H} или \mathbf{O} ; либо

(i') $p^{a+1} \mathcal{F}(t^a Ch_{[0, \infty)}(t), pt; p; 0) = \Gamma(a+1)$ над \mathcal{A}_r с $4 \leq r \in \mathbf{N}$. При $Re(a) \geq 0$ функция $f(t)$ является оригиналом, а при $-1 < Re(a) < 0$ функция $f(t) = t^a$ неограниченно возрастает при t стремящемся к нулю не удовлетворяет условиям, наложенным на оригинал. Но и для последнего интервала значений параметра a интеграл сходится и формула (i) или (i') соответственно выполняется. В этой ситуации можно сказать, что t^a является особым оригиналом, а $p^{-a-1} \Gamma(a+1)$ особым изображением над \mathbf{H} или \mathbf{O} ; либо $p^{a+1} t^a$ – особый оригинал для особого изображения $\Gamma(a+1)$ над алгеброй Кэли-Диксона \mathcal{A}_r с $4 \leq r \in \mathbf{N}$.

В частном случае $a = -1/2$ получим: $p^{-1/2} = \mathcal{F}((\pi t)^{-1/2}, pt; p; 0)$ над \mathbf{H} или \mathbf{O} ; либо $1 = p^{1/2} \mathcal{F}((\pi t)^{-1/2}, pt; p; 0)$ над \mathcal{A}_r с $4 \leq r \in \mathbf{N}$.

Случай $u = p_0 t + \zeta_0 + M(p, t; \zeta)$ с $\Gamma_M(a+1; \zeta) := \int_0^\infty t^a \exp(-M((1, 0, \dots, 0), t; \zeta) - t) dt$ для любого $Re(a) > -1$ сводится к разобранному выше, так как $M(g, t; \zeta) = M(0, 0; \zeta)$ при $g = Re(g)$. Но в общем случае, $\int_0^\infty t^a \exp(-p_0 t - M(p, t; 0)) dt$ можно выразить через интегралы (смотри формулу 4 на стр. 446 в [18]):

$$(1) T_a(v) := \int_0^\infty t^a \exp(-vx) \cos(bx) dx = \Gamma(a+1)(b^2 + v^2)^{-(a+1)/2} \cos(c),$$

$$(2) S_a(v) := \int_0^\infty t^a \exp(-vx) \sin(bx) dx = \Gamma(a+1)(b^2 + v^2)^{-(a+1)/2} \sin(c),$$

где $c = (a+1) \arctg(b/p)$, $Re(a) > -1$, $Re(v) > |Im(b)|$, подобно тому, как это было сделано в примере 33. То есть, достаточно воспользоваться формулами примера 33 с заменой интегралов (6, 7) на T_a и S_a соответственно.

Пусть $S \in \mathcal{A}_r$, $Re(S) = 0$, $|S| = 1$, ψ - путь в плоскости $\mathbf{R} \oplus S\mathbf{R}$ вложенной в \mathcal{A}_r , так что ψ идет вдоль двубережного разреза плоскости $\mathbf{R} \oplus S\mathbf{R}$ от $-\infty$ до $-\delta$ со стороны $z = a + Sb$ с $b < 0$, затем обходит окружность радиуса $\delta > 0$ с центром в нуле по часовой стрелке и идет по прямой от $-\delta$ до $-\infty$ со стороны $z = a + Sb$ с положительными $b > 0$, где $2 \leq r \in \mathbf{N}$, $a, b \in \mathbf{R}$. Тогда обозначим

$$(3) Re(N_1 S^*) \int_\psi \zeta^a \exp(u(\zeta, 1; 0)) d\zeta =: (2\pi S)(\Gamma_u(-a))^{-1},$$

где $u(p, t; \zeta) = p_0 t + \zeta_0 + M(p, t; \zeta)$, $a, p, \zeta \in \mathcal{A}_r$, $Re(N_1 S^*) \neq 0$. В частном случае комплексных чисел и $u = pt$ формула (3) известна как ханкелевское интегральное представление гамма-функции. При $u = pt$ и $p \in \mathcal{A}_r$ функция $\Gamma_u(-a)$ совпадает с обычной

гамма-функцией $\Gamma(-a)$ переменной $a \in \mathcal{A}_r$ (смотри определение 4.1 и предложения 4.2, 4.12 и следствие 4.13 в [14]).

51. Теорема. Пусть голоморфная функция $F(p)$ удовлетворяет условиям 23(1–3) или 47(2') вместо 23(2) при $p \rightarrow \infty$ в области $Re(p) < a$, $F(p) = \sum_{j=0}^{\infty} p^{j\beta+\alpha} c_j$ при $Re(p) < a$, $F(p)$ не имеет особых точек в \mathcal{A}_r , быть может, кроме нуля, являющегося точкой ветвления конечного порядка, и интеграл $\int_{(-\infty, -\delta] \cup S(\mathcal{A}_r, 0, \delta)} |c_j| |p^{j\beta+\alpha}| dt$ сходится для некоторого $\delta > 0$, где $2 \leq r \in \mathbf{N}$, $\alpha \in \mathbf{R}$, а β – положительное рациональное число, $c_j \in \mathbf{R}$ для любого j при $4 \leq r \in \mathbf{N}$, $c_j \in \mathbf{K}$ для $\mathbf{K} = \mathbf{H}$ или $\mathbf{K} = \mathbf{O}$. Тогда оригиналом является функция

$$(i) \quad f(t) = Ch_{[0, \infty)}(t) t^{-\alpha-1} \sum_{j=0}^{\infty} (\Gamma_u(-\alpha - j\beta))^{-1} t^{-j\beta} c_j,$$

удовлетворяющая свойствам 1(1,2).

Доказательство. Пусть функция $F(p)$ имеет разложение в обобщенный степенной ряд $F(p) = \sum_{j=0}^{\infty} p^{j\beta+\alpha} c_j$, где $0 < \beta \in \mathbf{Q}$. Рассмотрим петлю γ , состоящую из отрезка $\gamma_1 := \{a + \theta S, |\theta| \leq b\}$, проходимого сверху вниз, где $b > 0$, $S \in \mathcal{A}_r$, $|S| = 1$, $Re(S) = 0$, γ_2 – часть окружности в плоскости $\mathbf{R} \oplus S\mathbf{R}$ от $-R$ до $-a + bS$ с центром в нуле, $R = (a^2 + b^2)^{1/2}$, дуги γ_3 окружности от $a - bS$ до $-R$, двубережного разреза $\gamma_4 \cup \gamma_5$ вдоль оси \mathbf{R} от $-R$ до $-\delta$, $\gamma_4 = [-\delta, -R] + \epsilon S$, $\gamma_5 = [-R, -\delta] + \epsilon S$, γ_6 – дуга окружности радиуса $\rho = (\delta^2 + \epsilon^2)^{1/2}$ в плоскости $\mathbf{R} \oplus S\mathbf{R}$ проходима по часовой стрелке от $(-\delta - \epsilon S)$ до $-\delta + \epsilon S$, где $\epsilon > 0$ и $\delta > 0$ – произвольно малые числа, $\gamma = \bigcup_{k=1}^6 \gamma_k$. Для z в плоскости $\mathbf{R} \oplus S\mathbf{R}$ полагаем $z = |z| \exp(S\phi)$, где $-\pi/2 < \phi < \pi/2$. В силу теоремы 2.15 [14, 15] $\int_{a-bS}^{a+bS} F(p) \exp(u(p, t; 0)) dp = \int_{\bigcup_{k=2}^6 \gamma_k} F(p) \exp(u(p, t; 0)) dp$. Из леммы 23 и замечания 47 следует, что $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_2 \cup \gamma_3} F(p) \exp(u(p, t; 0)) dp = 0$ для любого $t > 0$. Контур интегрирования ψ в §50 симметричен относительно оси ox , так что при отражении в плоскости, содержащей ось ox и перпендикулярной S относительно скалярного произведения $(z, \eta) := Re(z\eta^*)$, направление его обхода меняется на противоположное, поэтому $\Gamma_u(w) \in \mathbf{R}$ для любых $w \in \mathbf{R}$ подобно обычной гамма-функции.

Из теоремы 22 следует, что функция-оригинал дается формулой:

$$Sf(t) = (2\pi)^{-1} \int_{\gamma_4 \cup \gamma_5 \cup \gamma_6} F(p) \exp(u(p, t; 0)) dp.$$

$$\text{Тогда } Sf(t) = \sum_{j=0}^{\infty} (2\pi)^{-1} Re(N_1 S^*) [\int_{\gamma_4 \cup \gamma_5 \cup \gamma_6} p^{\alpha+j\beta} \exp(u(p, t; 0)) dp] c_j.$$

В случае, когда все $c_j \in \mathbf{R}$, тогда $f(\mathbf{R}) \subset \mathbf{R}$, но $Sa = b$ для $a \in \mathbf{R}$ и $b \in \mathcal{A}_r$ означает, что $a = S^*b$, так как \mathbf{R} – центр алгебры \mathcal{A}_r . Сделаем замену переменной $\zeta = pt$, тогда

$$(2\pi)^{-1} \int_{\gamma_4 \cup \gamma_5 \cup \gamma_6} p^{\alpha+j\beta} \exp(u(p, t; 0)) dp = (2\pi)^{-1} t^{-\alpha-j\beta-1} \int_{(\gamma_4 \cup \gamma_5 \cup \gamma_6)t} \zeta^{\alpha+j\beta} \exp(u(\zeta, 1; 0)) d\zeta = t^{-\alpha-j\beta-1} (\Gamma_u(-\alpha - j\beta))^{-1}.$$

Следовательно, у функции $F(p)$ существует оригинал, даваемый формулой (i), так как $t \in \mathbf{R}$ коммутирует с каждым $c_j \in \mathcal{A}_r$. Если $\alpha + j\beta$ – целое число, то интеграл от $p^{\alpha+j\beta} \exp(u(p, t; 0))$ равен нулю, то есть, из разложения (i) надо вычеркнуть все члены с целыми $\alpha + j\beta$.

Следует отметить, что этот оригинал в общем случае может не удовлетворять свойству 1(3), то есть $f(t)$ – особый оригинал.

52. Пример. Рассмотрим $F(p) := p^{-3/2} \exp(p^{1/2}(S-1))$, где $S \in \mathbf{K}$, $\mathbf{K} = \mathbf{H}$ или $\mathbf{K} = \mathbf{O}$, $Re(S) = 0$, $|S| = 1$. Пусть $p = R \exp(S\phi)$, $S - 1 = 2^{1/2} \exp(3S\pi/4)$, тогда $Re(p^{1/2}(S-1)) = (2R)^{1/2} \cos(\phi/2 + 3\pi/4) < 0$, так как $\pi/2 < \phi < 3\pi/2$ и $\pi < \phi/2 + 3\pi/4 < 3\pi/2$. Если $|p'|$ велико, где $p' = p - p_0$, $p_0 := Re(p)$, а $0 < p_0 < a$, то ϕ приблизительно равно $\pi/2$ или $3\pi/2$, поэтому, $p^{1/2}(S-1)$ приблизительно равно $-2^{1/2}R$ или $-S2^{1/2}R$. Если $p \in \mathbf{R} \oplus S\mathbf{R}$, то $F(p) = \sum_{j=0}^{\infty} 2^{j/2} (j!)^{-1} \exp(3\pi j S/4) p^{(j-3)/2}$. Итак, $F(p) \rightarrow 0$ при $p \rightarrow \infty$ и $Re(p) < a$, то есть, $F(p)$ удовлетворяет условиям 23(1,2',3) и условиям теоремы 51, так как $a > 0$ и $p \neq 0$ вдоль прямой $\{z = a + S\theta : \theta \in \mathbf{R}\}$. В силу теоремы 51: $f(t) = \sum_{j=0}^{\infty} 2^j (-S)^j ((2j)! \Gamma_u(3/2 - j))^{-1} t^{-j-1/2}$.

53. Замечание. Как видно из предыдущего примера существуют оригиналы, не удовлетворяющие условию 1(3), но для которых существуют изображения. С другой стороны, не для всех изображений существуют оригиналы, удовлетворяющие условиям 1(1-3). Например, функции $1, p, p^2, \dots$ не имеют обычных оригиналов. Для того, чтобы расширить возможности преобразования Лапласа используют обобщенные функции, то есть, функционалы.

54. Определения. Пространство основных функций \mathcal{D} состоит из всех бесконечно дифференцируемых функций $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathcal{A}_r$ на \mathbf{R} с компактными носителями, то есть, f обращается в нуль вне отрезка, зависящего от функции. Последовательность функций $f_n \in \mathcal{D}$ сходится к нулю, если все f_n обращаются в нуль вне некоторого отрезка $[a, b]$, а на нем последовательность $f_n^{(k)}$ равномерно сходится к нулю для любого $k = 0, 1, 2, \dots$, где $f^{(k)}(t) := d^k f(t)/dt^k$, $f^{(0)} = f$. Такая сходимость определяет замкнутые подмножества в \mathcal{D} , а их дополнения по определению открыты, что задает топологию на \mathcal{D} .

Обобщенной функцией класса \mathcal{D}' называется непрерывный \mathbf{R} -линейный \mathcal{A}_r -аддитивный функционал $g : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{A}_r$. Множество всех таких функционалов обозначается \mathcal{D}' . То есть, g непрерывен, если для любой последовательности $f_n \in \mathcal{D}$, сходящейся к нулю, последовательность чисел $g(f_n) = (g, f_n) \in \mathcal{A}_r$ сходится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Обобщенная функция g обращается в нуль на открытом подмножестве V в \mathbf{R} , если $(g, f) = 0$ для любой $f \in \mathcal{D}$ равной нулю вне V . Носителем обобщенной функции g называется совокупность, обозначаемая $supp(g)$, всех точек $t \in \mathbf{R}$ таких, что в любой окрестности каждой точки $t \in supp(g)$ функционал g отличен от нуля. Сложение обобщенных функций g, h дается формулой: $(g + h, f) := (g, f) + (h, f)$. Умножение $g \in \mathcal{D}'$ на бесконечно дифференцируемую функцию w задается формулой: $(gw, f) = (g, wf)$ для любой основной функции $f \in \mathcal{D}$ с действительным образом $f(\mathbf{R}) \subset \mathbf{R}$. Производной g' обобщенной функции g называется обобщенная функция g' , задаваемая формулой: $(g', f) := -(g, f')$.

Пространство основных функций \mathcal{B} состоит из всех бесконечно дифференцируемых функций $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathcal{A}_r$ таких, что существует $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^m f^{(j)}(t) = 0$ для любых $m, j = 0, 1, 2, \dots$. Последовательность $f_n \in \mathcal{B}$ называется сходящейся к нулю, если последовательность $t^m f_n^{(j)}(t)$ стремится к нулю равномерно на отрезке $[a, \infty)$ для любых $m, j = 0, 1, 2, \dots$ и каждого $-\infty < a < +\infty$. Семейство всех \mathbf{R} -линейных и \mathcal{A}_r -аддитивных функционалов на \mathcal{B} обозначается \mathcal{B}' .

Обобщенную функцию $f \in \mathcal{A}'$ с носителем содержащимся в $[0, \infty)$ назовем обобщенным оригиналом, если существует действительное число s_0 такое, что для любого $s > s_0$ обобщенная функция $f \exp(-st) \in \mathcal{B}'$. Изображением такого оригинала назовем функцию

(1) $\mathcal{F}(f, u; p; \zeta) := (f, \exp(-u(p, t; \zeta)))$ переменной $p \in \mathcal{A}_r$, определенной в полупространстве $Re(p) > s_0$, определяемую следующим правилом. Для данного $p \in \mathcal{A}_r$ с $Re(p) = s > s_0$ выберем $s_1 \in \mathbf{R}$ так, чтобы $s_0 < s_1 < s$, а тогда

(2) $(f, \exp(-u(p, t; \zeta))) := (f \exp(-s_1 t), \exp(-[u(p, t; \zeta) - s_1 t]))$, так как $\exp(-[u(p, t; \zeta) - s_1 t]) \in \mathcal{B}$, а по условию $f \exp(-s_1 t) \in \mathcal{B}'$.

55. Замечание и примеры. Очевидно, что $\mathcal{F}(f, u; p; \zeta)$ не зависит от выбора s_1 , так как $(f \exp(-s_1 t), \exp(-[u(p, t; \zeta) - s_1 t])) = (f \exp(-s_1 t - bt), \exp(-[u(p, t; \zeta) - s_1 t - bt]))$ для любого $b \in \mathbf{R}$ такого, что $s_0 < s_1 + b < s$, так как $\exp(-bt) \in \mathbf{R}$, а \mathbf{R} – это центр алгебры Кэли-Диксона \mathcal{A}_r , где $2 \leq r \in \mathbf{N}$.

Пусть δ – это дельта функция Дирака, определяемая уравнением $(\delta(t), \phi(t)) := \phi(0)$ для любой $\phi \in \mathcal{B}$. Тогда

(i) $\mathcal{F}(\delta^{(j)}(t - \tau), u; p; \zeta) = (\delta^{(j)} \exp(-s_1 t), \exp(-[u(p, t; \zeta) - s_1 t]))$
 $= (-1)^j (d^j \exp(-[u(p, t; \zeta) - s_1 t]) / dt^j)|_{t=\tau}$,

так как можно взять $-\infty < s_0 < 0$ и $s_1 = 0$, где $\tau \in \mathbf{R}$ – параметр. В частности, при $j = 0$ имеем $\mathcal{F}(\delta(t - \tau), u; p; \zeta) = \exp(-u(p, \tau; \zeta))$, а при $u = pt$ имеем $\mathcal{F}(\delta^{(j)}(t - \tau), pt; p; \zeta) =$

$p^n \exp(-p\tau)$. В общем случае:

$$\mathcal{F}(\delta^{(j)}(t), u; p; \zeta) =$$

$$\sum_{n_0, n_1, \dots, n_{2^r-1}=j} p_0^{n_0} p_1^{n_1} \dots p_{2^r-1}^{n_{2^r-1}} \exp(-\zeta_0 - M(p, 0; \zeta - (i_1 n_1 + \dots + i_{2^r-1} n_{2^r-1})\pi/2)),$$

причем $M(p, 0; \zeta) = M(0, 0; \zeta)$, где $n_0, n_1, \dots, n_{2^r-1}$ – целые неотрицательные числа.

Преобразование \mathcal{F} обобщенной функции является голоморфной функцией по $p \in \mathcal{A}_r$ с $Re(p) > s_0$ и по $\zeta \in \mathcal{A}_r$, так как правая часть уравнения 54(2) голоморфна по p с $Re(p) > s_0$ и по ζ в силу теоремы 7. Из уравнения 54(2) следует, что теоремы 27, 28 и 29 выполняются также для обобщенных функций.

56. Приложения некоммутативного преобразования Лапласа к (супер)дифференциальным уравнениям.

Пусть дано дифференциальное уравнение

$$(1) L[x] = f(t), \text{ где } L[x] := (d^n x(t)/dt^n)a_0 + \dots + (dx/dt)a_{n-1} + xa_n, a_0 \neq 0$$

и заданы начальные условия:

$$(2) x(0) = x_0, x'(0) = x_1, \dots, x^{(n-1)}(0) = x_{n-1}.$$

Предположим, что функция $f(t)$ и решение $x(t)$, и его производные $x^{(1)}(t), \dots, x^{(n)}(t)$ являются оригиналами. Тогда $X(p)(p^n a_0 + p^{n-1} a_1 + \dots + a_n) = F(p) + x_0(p^{n-1} a_0 + \dots + pa_{n-2} + a_{n-1}) + x_1(p^{n-2} a_0 + \dots + pa_{n-3} + a_{n-2}) + \dots + x_{n-1} a_0$, где $X(p) := \mathcal{F}(x, pt; p; 0)$, $F(p) = \mathcal{F}(f, pt; p; 0)$, $a_j \in \mathbf{H}$ в случае \mathbf{H} , $a_j \in \mathbf{R}$ в случае \mathcal{A}_r с $3 \leq r \in \mathbf{N}$. Поскольку $\mathcal{F}(f'(t), u; p; \zeta) = F(p; \zeta)\Delta_p - f(0)$ при $u = p_0 t + \zeta_0 + M(p, t; \zeta)$, где $F(p; \zeta)\Delta_p := p_0 F(p; \zeta) + p_1 F(p; \zeta - i_1 \pi/2) + \dots + p_{2^r-1} F(p; \zeta - i_{2^r-1} \pi/2)$, то $f^{(n)}(t) = F(p; \zeta)\Delta_p^n - f(0)p^{n-1} - \dots - f^{(n-2)}(0)p - f^{(n-1)}(0)$, так как $\exp(i_k \pi/2) = i_k$ для любого $k = 1, 2, \dots, 2^r - 1$, а $c\Delta_p = cp$ для $c = const \in \mathcal{A}_r$ в силу формулы 44(i), так как можно полагать $\zeta = 0$ для $c = const$. Итак,

$$(3) X(p)A(p) = F(p) + B(p), \text{ где}$$

$$(4) A(p) = (p^n a_0 + p^{n-1} a_1 + \dots + a_n) \text{ и}$$

$$(5) B(p) = x_0(p^{n-1} a_0 + \dots + pa_{n-2} + a_{n-1}) + x_1(p^{n-2} a_0 + \dots + pa_{n-3} + a_{n-2}) + \dots + x_{n-1} a_0,$$

в случае $u = pt$, $\zeta = 0$. При $u = p_0 t + \zeta_0 + M(p, t; \zeta)$ имеется уравнение

$$(6) X(p)A(\Delta_p) = F(p; \zeta) + B(p),$$

где A уже многочлен от оператора Δ_p ,

(7) $B(p) = [(x_0 \Delta_p^{n-1})a_0 + \dots + (x_0 \Delta_p)a_{n-2} + a_{n-1}] + [(x_1 \Delta_p^{n-2})a_0 + \dots + (x_1 \Delta_p)a_{n-3} + a_{n-2}] + \dots + x_{n-1} a_0$. В частности, для тела кватернионов $\mathbf{K} = \mathbf{H}$ или алгебры октонионов $\mathbf{K} = \mathbf{O}$, в силу альтернативности алгебры \mathbf{K} получается операторное решение

$$(8) X(p) = (F(p; \zeta) + B(p; \zeta))A^{-1}(p),$$

где $A = A(p)$ или $A = A(\Delta_p)$ соответственно, полагаем $\zeta = 0$ в случае $u = pt$, $F(p) = F(p; \zeta)$, $X(p) = X(p; \zeta)$, $B(p) = B(p; \zeta)$, $A(\Delta_p) = A(\Delta_p; \zeta)$, ζ – параметр начальных фаз. В данном случае удобнее писать аргумент слева от оператора. Если уравнение (1) при начальном условии (2) имеет решение, $x(t), x^{(1)}(t), \dots, x^{(n)}(t)$ удовлетворяет условиям наложенным на оригиналы, то $x(t)$ удовлетворяет уравнению (7). Можно записать оператор Δ_p в виде:

$$F(p; \zeta)\Delta_p = Re \langle p, F(p; \zeta)L \rangle,$$

где $F(p; \zeta)L := i_0 F(p; \zeta) + i_1 F(p; \zeta - i_1 \pi/2) + \dots + i_{2^r-1} F(p; \zeta - i_{2^r-1} \pi/2)$, а также

$$(f)\Delta_p = \mathcal{F}(f, u; p; \zeta) + \delta df(t)/dt,$$

где $u = p_0 t + \zeta_0 + M(p, t; \zeta)$, δ – обобщенная функция из примера 55, $\langle a, b \rangle := \sum_{l=1}^n l \tilde{a}^l b$, где $a = ({}^1 a, \dots, {}^n a)$, $a, b \in \mathcal{A}_r^n$, $n \in \mathbf{N}$.

57. Примеры.

1. Рассмотрим уравнение $x^{(2)} + xa^2 = b \sin(at)$, где $b \in \mathbf{H}$ в случае алгебры $\mathcal{A}_2 = \mathbf{H}$, $b \in \mathbf{R}$ в случае \mathcal{A}_r с $3 \leq r \in \mathbf{N}$, $a \in \mathbf{R}$. Тогда операторное уравнение при $u = pt$ имеет вид: $X(p)(a^2 + p^2) = b(a^2 + p^2)^{-1}a + x_0 p + x_1$. Для алгебр \mathbf{H} и \mathbf{O} решение имеет

вид: $X(p) = ab(p^2 + a^2)^{-2} + (x_0p)(p^2 + a^2)^{-1} + x_1(p^2 + a^2)^{-1}$. Пример 26.2, теоремы 27 и об интегрировании оригинала 34 дают: $ab(p^2 + a^2)^{-1} = \mathcal{F}([2^{-1}b \int_0^b t \sin(at) dt]; pt; p; \zeta) = \mathcal{F}(b(2a^2)^{-1}(\sin(at) - at \cos(at)); pt; p; \zeta)$. Если $x_0 \in \mathbf{R}$, то решение можно записать в виде:
 $x(t) = (x_1 + b(2a)^{-1})a^{-1} \sin(at) + (x_0 - bt(2a)^{-1}) \cos(at)$.

2. Уравнение $x^{(3)} + x = 1$ с нулевыми начальными условиями имеет операторное решение $X(p) = p^{-1}(p^3 + 1)^{-1}$. По теореме разложения 46 получим решение-оригинал $x(t) = 1 - e^{-t}/3 - (2/3)Re \exp[(1/2 + 3^{1/2}S/2)t] = 1 - e^{-t}/3 - (2/3) \exp(t/2) \cos(t3^{1/2}/2)$, где $S = p'/|p'|$ при $p' := p - Re(p) \neq 0$, а при $p' = 0$, S таково, что $S \in \mathcal{A}_r$, $|S| = 1$.

Литература

- [1] J. C. Baez. The octonions. // Bull. Amer. Mathem. Soc. **39**: **2**, 145-205 (2002).
- [2] F. A. Berezin. Introduction to superanalysis. D. Reidel Publish. Comp., Kluwer group, Dordrecht, 1987.
- [3] В. С. Владимиров. Уравнения математической физики. Наука, Москва, 1971.
- [4] G. Emch. Mèchanique quantique quaternionienne et Relativité restreinte. // Helv. Phys. Acta **36**, 739-788 (1963).
- [5] F. Gürsey, C.-H. Tze. On the role of division, Jordan and related algebras in particle physics. World Scientific Publ. Co., Singapore, 1996.
- [6] У. Р. Гамильтон. Избранные труды. Оптика. Динамика. Кватернионы. Наука, Москва, 1994.
- [7] I. L. Kantor, A. S. Solodovnikov. Hypercomplex numbers. Springer-Verlag, Berlin, 1989.
- [8] A. Khrennikov. Superanalysis. Series "Mathem. and its Applic."; **470**. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1999.
- [9] А. Г. Курош. Лекции по общей алгебре. Наука, Москва, 1973.
- [10] М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. Методы теории функций комплексного переменного. Наука, Москва, 1987.
- [11] H. V. Lawson, M.-L. Michelson. Spin geometry. Princ. Univ. Press, Princeton, 1989.
- [12] С. В. Людковский. Дифференцируемые функции чисел Кэли-Диксона. // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. **1**: **3**, 93-140 (2005).
- [13] С. В. Людковский. Функции нескольких переменных чисел Кэли-Диксона и многообразия над ними. // Соврем. Матем. и её Прил. **28** (2005).
- [14] С. В. Людковский. Дифференцируемые функции чисел Кэли-Диксона и интегрирование вдоль путей. // Соврем. Матем. и её Прил. **28** (2005).
- [15] S. V. Lüdkovsky, F. van Oystaeyen. Differentiable functions of quaternion variables. // Bull. Sci. Math. **127**, 755-796 (2003).
- [16] F. van Oystaeyen. Algebraic geometry for associative algebras. Series Lect. Notes in Pure and Appl. Mathem. **232**. Marcel Dekker, New York, 2000.
- [17] B. van der Pol, H. Bremmer. Operational calculus based on the two-sided Laplace integral. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1964.
- [18] А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев. Интегралы и ряды. Наука, Москва, 1981.
- [19] H. Rothe. Systeme Geometrischer Analyse. In: Encyclopädie der Mathematischen Wissenschaften. Band 3. Geometrie, 1277-1423. Teubner, Leipzig, 1914-1931.
- [20] М. А. Соловьёв. Структура пространства неабелевых калибровочных полей // Труды Физич. Инст. им. П. Н. Лебедева. **210**, 112-155 (1993).
- [21] E. H. Spanier. Algebraic topology. New York, Academic Press, 1966.
- [22] А. А. Элиович. О норме бикватернионов и иных алгебр с центральным сопряжением. // Гиперкомпл. числа в геом. и физ. **2**: **2**, 24-50 (2004).

The Laplace transformation over Cayley-Dickson algebras

S. V. Lyudkowski

MIREA

sludkowski@mail.ru

The present paper is devoted to the noncommutative version of the Laplace transformation. We study new types of direct and inverse transformations of Laplace type over the general Cayley-Dickson algebras, and, in particular, over the field of quaternions and over the algebra of octonions. Examples are given. Theorems on the properties of the images of such transformations, and theorems on the images and the originals - taking into account the operations of multiplication, differentiation, integration, transvection, shift and homothety, are proved.

Key-words: Laplace transformation, algebras, quaternions, octonions.

MSC: 44A10, 44A15, 11R52, 46R10.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ БЫСТРО ВРАЩАЮЩЕГОСЯ МАССИВНОГО ТЕЛА НА ФОРМУ ФУНКЦИЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ АМПЛИТУД ФЛУКТУАЦИЙ СКОРОСТИ α -РАСПАДА

Панчелюга В. А., Шноль С. Э.

*Институт теоретической и экспериментальной биофизики РАН, Пущино, Россия
panvic333@yahoo.com, shnoll@iteb.ru*

Настоящая работа выполнена в рамках исследования эффекта макроскопических флуктуаций (МФ-эффекта) [1] и имеет своей целью выяснение его физических основ. В частности, проведено экспериментальное исследование возможности влияния быстро вращающегося массивного тела на форму функций распределения флуктуаций скорости α -распада. Изучалась возможная анизотропия подобного воздействия. В работе также представлена методика обработки экспериментальных данных и основная феноменология МФ-эффекта, накопленная за более чем полувековую историю исследования этого явления.

Ключевые слова: флуктуации, α -распад, анизотропия.

1 Основы МФ-эффекта. Методика обработки данных

Для уяснения сути МФ-эффекта рассмотрим простой пример. Предположим, у нас есть простейшая электрическая цепь, ток в которой равен некоторой постоянной величине. Также предположим, что мы последовательно проводим измерения тока в этой цепи, причем, каждый раз со все большей чувствительностью. Тогда, начиная с определенного момента, мы заметим, что величина тока, вначале казавшаяся нам постоянной, в действительности подвержена некоторым флуктуациям. Очевидно, что подобным образом возможно получить флуктуации, практически любого процесса. Временные ряды величин флуктуаций в протекании различных процессов являются исходным экспериментальным материалом для исследования МФ-эффекта.

Рассмотрим методику обработки экспериментальных данных, на которой основано обнаружение основных феноменов эффекта макроскопических флуктуаций. Эту методику условно можно подразделить на два этапа. Первый этап показан на рис. 1. Здесь, рис. 1А представляет исходный ряд величин флуктуаций некоторого процесса, который разбивается на короткие отрезки, обычно 30–100 точек, рис. 1В. Для каждого такого отрезка строится гистограмма – функция распределения величин флуктуаций, рис. 1С. После этого, каждая гистограмма сглаживается несколько раз n -точечным прямоугольным окном, рис. 1D. Чаще всего используется $n = 4$. В результате, исходный ряд флуктуаций, рис. 1А, преобразуется в последовательность гистограмм, рис. 1D, которые являются предметом последующего анализа, иллюстрируемого рис. 2, где показан второй этап обработки гистограмм.

На рис. 2А дан пример последовательности из $N = 20$ гистограмм, являющейся исходным материалом для процесса экспертного сравнения. Данная последовательность, являясь результатом первого этапа, тождественна последовательности на рис. 1D. Каждая гистограмма в ней сравнивается со всеми другими гистограммами этой или другой подобной последовательности. В случае, если гистограммы сравниваются с гистограммами той же последовательности, необходимо произвести $N(N - 1)/2$ попарных сравнений,

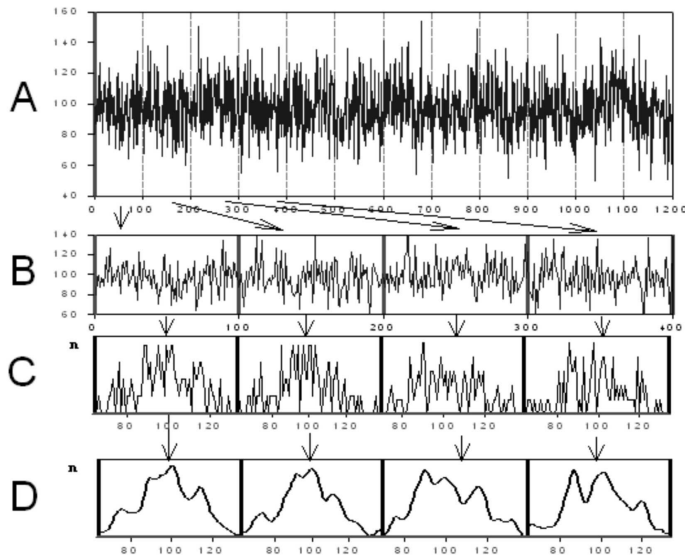


Рис. 1. Методика построения гистограмм.

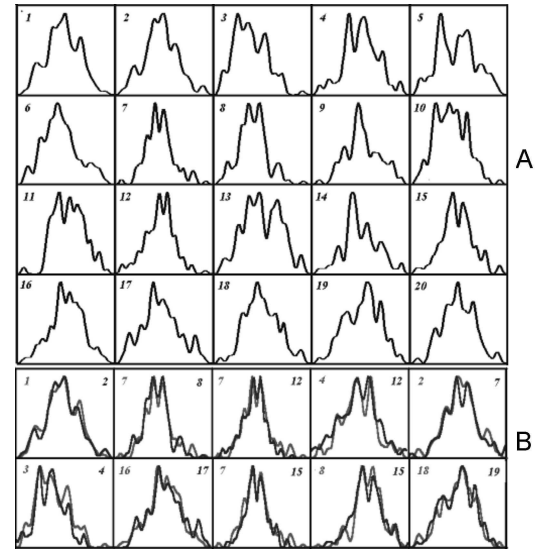


Рис. 2. Исходная последовательность и пары подобных гистограмм.

для различающихся последовательностей одинаковой длины – N^2 сравнений. Так, для исследования последовательности, рис. 2А, необходимо 190 сравнений. Рис. 2В дает 10 пар гистограмм, которые, в результате экспертной оценки, признаны похожими.

Как можно видеть из рис. 2В, процесс экспертного сравнения состоит в оценке подобия формы пар гистограмм. Как показала практика, экспертная оценка является наиболее чувствительной к особенностям формы гистограмм и, как правило, не может быть повторена традиционными методами корреляционного анализа, спектрального анализа, введением различного рода мер сходства и т. д. [2]. Как следует из многолетних попыток создания автоматических алгоритмов сравнения форм гистограмм, полная или частичная автоматизация процесса экспертного сравнения возможна на пути создания комплексных алгоритмов моделирующих отдельные аспекты человеческого восприятия, в особенности его целостную природу. Можно отметить определенные успехи, достигнутые на этом пути [3].

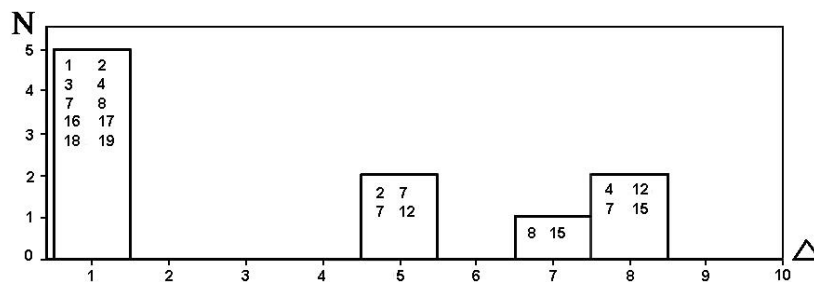


Рис. 3. Пример построения распределения интервалов для последовательности гистограмм, приведенной на рис. 2А.

Заключительной стадией второго этапа является получение распределения интервалов между парами подобных гистограмм, показанное на рис. 3. Под интервалом Δ понимается промежуток времени, разделяющий пару гистограмм во временном ряду. Экспертная оценка, являясь двузначной, имеет своим результатом заключение о подобии или непохожести гистограмм. В первом случае, интервал входит в распределение с весом равным единице, во втором – нулю. Так, например, в последовательности из $N = 20$

гистограмм, представленной на рис. 2А, имеются $N - \Delta = 15$ пар гистограмм разделенных интервалом равным пяти. Из них только две пары с номерами №2 – №7 и №7 – №12 найдены подобными. Следовательно, в результирующем распределении, основанном на последовательности, показанной на рис. 2А, интервал №5 будет иметь значение равное двум.

Построение распределения интервалов, завершая процесс обработки экспериментальных данных, является основой дальнейшего анализа, в процессе которого получены основные свойства МФ-эффекта, которые рассмотрены ниже.

2 Основные свойства МФ-эффекта

Самый общий итог многолетних исследований эффекта макроскопических флуктуаций – доказательство неслучайности тонкой структуры формы гистограмм, построенных по относительно небольшому числу результатов измерений хода во времени флуктуаций процессов различной природы – от биохимических реакций и шумов в гравитационной антенне до α -распада. Рассмотрим основные черты МФ-эффекта.

1) Эффект ближней зоны

Этот эффект состоит в достоверно более высокой вероятности появления сходных гистограмм в ближайших (соседних) не перекрывающихся интервалах рядов результатов измерений, рис. 4 а). Из "эффекта ближней зоны" естественно следует понятие "время жизни" данной идеи формы. Однако пока не удалось найти столь малое время, чтобы форма гистограмм не успевала измениться. Максимальная вероятность сходства только в первом, ближайшем соседнем интервале времени не изменялась при изменении этого интервала от нескольких часов до миллисекунд. Физический смысл этой своеобразной фрактальности требует дальнейших исследований [1, 2, 4].

2) Универсальность МФ-эффекта

Универсальность МФ-эффекта заключается в высокой вероятности сходства формы гистограмм, построенных по результатам одновременных, независимых измерений флуктуаций в процессах различной качественной природы. Сходство гистограмм при исследовании процессов, в которых диапазоны превращаемой энергии отличаются на десятки порядков (энергия α -распада и шумов в гравитационной антенне – различие около 40 порядков) означает, что этот фактор неэнергетической природы. Ввиду принципиального различия природы процессов и методов их измерений такое сходство также означает весьма общую природу фактора, определяющего форму гистограмм [1, 2, 5].

3) Периодичность проявления МФ-эффекта

Важным свидетельством неслучайности формы гистограмм являются их закономерные изменения во времени. Эти закономерности проявляются в:

3.1. Наличии околосуточных периодов изменения вероятности реализации гистограмм данной формы; существовании хорошо разрешимых "звездного" (1436 минут) и "солнечного" (1440 минут) суточных периодов. Наличие этих периодов означает зависимость формы гистограмм от вращения Земли вокруг своей оси. При этом экспозиция относительно картины звездного неба и экспозиция относительно Солнца определяют форму гистограмм независимо.

3.2. Наличии около 27-ми суточных периодов изменения вероятности реализации гистограмм данной формы. Эти периоды можно считать признаком зависимости формы гистограмм от экспозиции относительно ближайших небесных тел – Солнца, Луны и, возможно, планет [8].

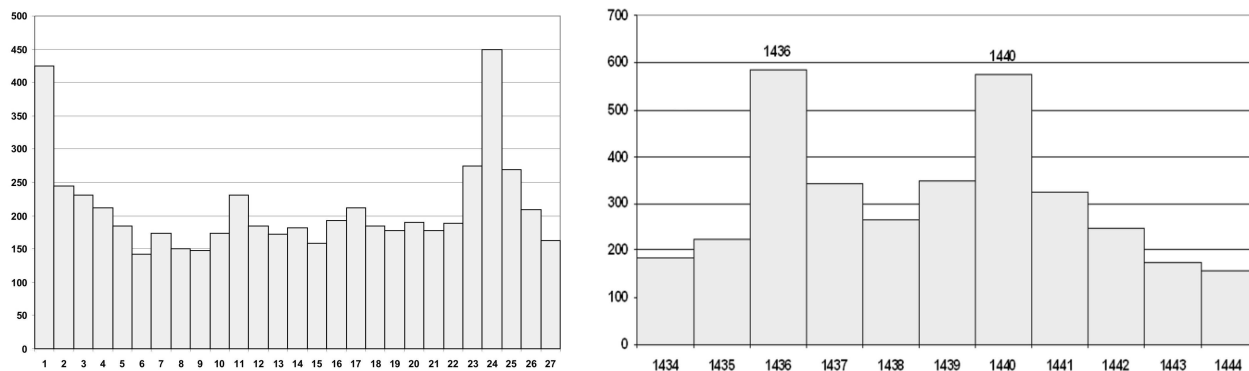


Рис. 4. а) Иллюстрация эффекта ближней зоны и суточного периода: 1-часовые гистограммы, построенные по 60-ти 1-мин измерениям активности ^{239}Pu . Видно, что наиболее вероятна повторная реализация гистограмм сходной формы в ближайший соседний интервал времени и через 24 часа [6].

б) "Расщепление" 24-часового пика при использовании 1-мин гистограмм, построенным по 60-ти 1-сек измерениям активности ^{239}Pu [7].

Для обоих графиков: ось X – интервал времени между парой гистограмм: а) часы, б) минуты; ось Y – число пар гистограмм, найденных подобными.

3.3. Наличии годовых периодов, проявляющихся в высокой вероятности реализации сходных гистограмм через годы; в существовании хорошо разрешимых "календарного" (365 солнечных суток) и "звездного" (сидерического: 365 солнечных суток плюс 6 часов и 9 минут) годовых периодов [9].

3.4. Результат, представляющийся парадоксальным: в дни равноденствий наблюдается четкий период увеличения вероятности сходства гистограмм, равный 718 минутам, т. е. звездным полусуткам. В дни солнцестояний такого периода нет. Этот феномен свидетельствует о зависимости формы гистограмм от положения Солнца на Эклиптике. При верности этого вывода можно ожидать, что на экваторе период 718 минут будет наблюдаться круглогодично.

Все вышеперечисленные периоды означают зависимость формы гистограмм от двух факторов: 1) вращения Земли вокруг своей оси, 2) движения Земли по околосолнечной орбите.

4) Эффект местного времени

Зависимость формы гистограмм от вращения Земли вокруг своей оси с большой четкостью проявляется также в эффекте местного времени – высокой вероятности появления пар сходных гистограмм в разных географических пунктах – от Арктики до Антарктики, в Западном и Восточном полушариях в одно и то же местное (долготное) время.

Необходимо отметить, что синхронность по местному времени с точностью в 1 минуту наблюдается на предельно возможных на Земле расстояниях (около 15 тысяч километров) независимо от широты местности. В некоторых случаях наблюдается также синхронность по абсолютному времени.

На рис. 5 приведены два распределения интервалов, построенные на основе рядов флуктуаций скорости α -распада ^{239}Pu , измеренных 1.03.2003 в Пущино ($54^{\circ}50'$ с. ш., $37^{\circ}38'$ в. д.) и на станции Новолазаревская в Антарктиде ($70^{\circ}02'$ ю. ш., $11^{\circ}35'$ в. д.). Расстояние между точками измерений около 14500 км и разность местного времени 103 мин. В левой части рис. 5 приведено распределение интервалов, показывающее синхронность появления сходных пар гистограмм по абсолютному времени, в правой части рис. 5 – по

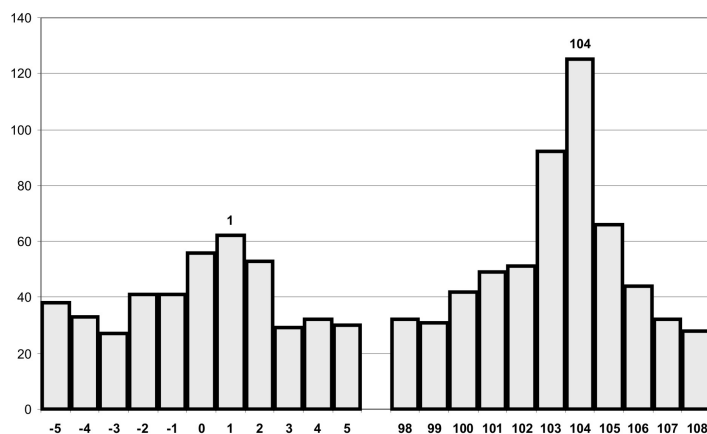


Рис. 5. Синхронность по абсолютному (левый рис.) и местному (правый рис.) времени. Ось X – интервал между парами подобных гистограмм, мин.; ось Y – число сходных пар, отобранных экспертом.

местному времени. Видно, что синхронность по местному времени выражена значительно более ярко [1, 2].

5) Исчезновение суточных периодов при измерениях вблизи Северного полюса

Зависимость формы гистограмм от вращения Земли вокруг своей оси проявляется в исчезновении околосуточных периодов при измерениях вблизи Северного полюса. Такие измерения были проведены в 2000 г под 82° с. ш. Исчезли околосуточные периоды при построении гистограмм за 15 или 60 минут. Однако околосуточные периоды изменения вероятности повторного появления 1-минутных гистограмм данной формы сохранялись. Сохранялась также синхронность по местному времени появления 1-минутных гистограмм сходной формы [8].

Из этих результатов следовала необходимость проведения измерений возможно ближе к Полюсу. Ввиду невозможности реализации таких измерений, были проведены измерения с использованием коллиматоров, вырезающих пучки α -частиц, вылетающих при радиоактивном распаде ^{239}Pu в разных направлениях. Результаты таких опытов привели к принципиальным изменениям наших представлений о природе МФ-эффекта [10].

6) Неподвижный коллиматор, направленный на Полярную звезду

Для гистограмм, построенных по результатам подсчета α -частиц, вылетающих при радиоактивном распаде на Север (в направлении на Полярную звезду), околосуточные периоды не наблюдаются и эффекта ближней зоны нет. Эти измерения осуществлялись в Пуццино под 54° с. ш., а эффект аналогичен, ожидавшемуся под 90° с. ш. – на Северном полюсе. Это означает зависимость формы гистограмм от направления в пространстве. Такая зависимость, в свою очередь, влечет за собой вывод об анизотропии пространства [8, 10].

7) Опыты с неподвижными коллиматорами, направленными на восток и на запад

Вывод об анизотропии пространства был подкреплён одновременными измерениями с двумя коллиматорами – одним, направленным на восток и другим, направленным на запад. В этих опытах было получено два важных эффекта:

7.1. Гистограммы, регистрируемые при измерениях с "восточным" коллиматором, с

высокой вероятностью реализуются при измерениях с "западным" коллиматором на 718 минут позже, т. е. через половину "звездных" суток.

7.2. При измерениях с "восточным" и "западным" коллиматорами одновременно, сходные гистограммы не наблюдаются. В опытах без коллиматоров, при измерениях в одном и том же месте, сходные гистограммы с высокой вероятностью наблюдаются в одно и то же время. Этой синхронности нет при одновременных измерениях числа α -частиц, вылетающих через коллиматоры в разных направлениях.

Эти результаты согласуются с представлениями об анизотропии пространства, т. е. о зависимости формы гистограмм от направления вылета α -частиц [11].

8) Опыты с вращаемыми коллиматорами

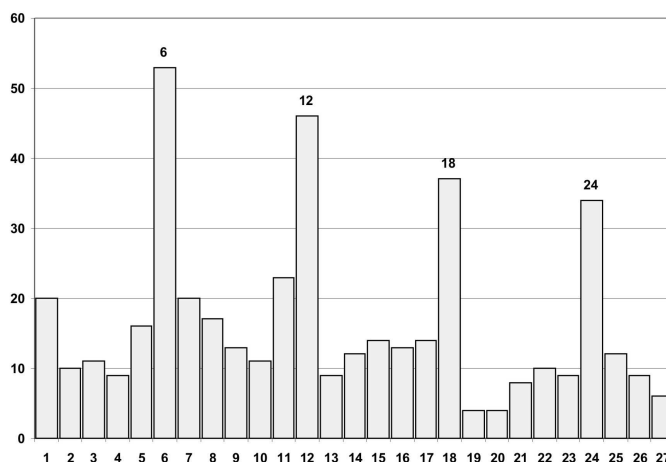


Рис. 6. Распределение интервалов, между парами 60-мин гистограмм, построенное на основе измерений флуктуаций скорости α -распада с использованием коллимированного источника ^{239}Pu , совершающего 3 оборота против часовой стрелки, плюс один оборот самой Земли – всего 4 оборота в сутки, т. е. "обзор неба" за 6 часов. Видны четкие 6-часовые периоды. Ось X – 1-часовые интервалы, Y – число схожих пар гистограмм.

Естественным развитием отмеченных выше исследований были опыты с вращением коллиматоров [12].

8.1. При вращении коллиматора против часовой стрелки (в направлении вращения Земли) сканирование небесной сферы производится с периодами, кратными числу оборотов коллиматора в сутки плюс 1 оборот, совершаемый самой Землей. Было проведено исследование зависимости вероятности появления сходных гистограмм от числа оборотов в сутки вращаемого коллиматора. Было получено, что вероятность появления гистограмм данной формы резко возрастает с периодами, равными 1440 минутам, деленным на число оборотов коллиматора плюс 1. Измеряли периоды при 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 11 и 23 оборотах коллиматора в сутки. И нашли, соответственно, периоды равные 12, 8, 6 и т. д. часам. При 1-минутном разрешении эти периоды расщепились на два экстремума каждый – "звездный" и "солнечный". Эти результаты означали, что форма гистограмм, в самом деле, определяется направлением вылета α -частиц [12]. Пример 6-часовых периодов, полученных при трех оборотах против часовой стрелки для последовательности 1-часовых гистограмм, показан на рис. 6.

8.2. При вращении коллиматора, совершающего 1 оборот в сутки по часовой стрелке, произошла компенсация вращения Земли – α -частицы все время вылетали в направлении к одному и тому же участку небесной сферы – и, соответственно, исчезли суточные периоды. Этот результат оказался полностью аналогичным результатам измерений вблизи

Северного полюса и измерений с неподвижным коллиматором, направленным на Полярную звезду [11].

8.3. При вращении 1 оборот в сутки по часовой стрелке коллиматора, расположенного в плоскости Эклиптики и направленного на Солнце, α -частицы все время вылетают в направлении на Солнце. При этом, как и ожидалось, исчезли околосуточные периоды – и солнечный и звездный.

9) Выделенные формы гистограмм: новолуния и солнечные затмения

Все представленные выше результаты имеют вероятностный характер и были получены в результате десятков тысяч попарных сравнений гистограмм. Совершенно иначе обстоит дело с поиском характерных форм гистограмм в период новолуний и солнечных затмений. В этих случаях смотрится форма гистограмм в заранее рассчитанный момент новолуния или максимума солнечного затмения. При этом было обнаружено, что для этих моментов, практически одновременно, на разных долготах и широтах, по всей Земле, появляются гистограммы характерной, специфической формы. Эти характерные гистограммы соответствуют отрезку временного ряда длиной всего 0.5 – 1 мин [13]. В момент максимума солнечного затмения (как правило, не совпадающего с моментом наступления новолуния) появляется специфическая гистограмма, отличающаяся от гистограммы, появляющейся в моменты новолуний. Естественно, что формы подобные характерным для новолуний или затмений много раз встречаются во временном ряду. Но вероятность их случайного появления именно в эти моменты в разных местах, в разные даты (месяцы, годы) очень мала. Эти специфические формы не связаны с приливными эффектами. Не зависят они и от места на земной поверхности, на которое попадает тень от Луны при затмении или новолунии.

10) Выделенные формы гистограмм: восходы и заходы Солнца и Луны

Форма гистограмм определяется сложным комплексом космо-физических факторов. Как следует из наличия около 27-суточных периодов, среди этих факторов может быть пространственное взаиморасположение и состояние Солнца, Луны и Земли. Мы неоднократно наблюдали сходство гистограмм во времена восходов или заходов Солнца или Луны. Выполнен очень большой объем работы. Однако найти форму гистограмм характерную только для этих моментов не удалось. Обзор и анализ соответствующих результатов будет сделан в специальной публикации.

11) Зеркальная симметрия гистограмм

Весьма часто (до 30% случаев) форма последовательных гистограмм зеркально симметрична – есть правые и левые формы. При этом, речь может идти об очень сложных формах. Этот феномен, возможно, означает, что хиральность является имманентным свойством пространства-времени. [1]

3 Предположение о возможной природе МФ-эффекта.

Идея эксперимента

Приведенные выше свойства 3)–4) МФ-эффекта, указывающие на связь с пространственно-координатным положением небесных тел и свойство 2), утверждающее независимость феноменологии МФ-эффекта от качественной природы флуктуирующего процесса, дают основание предполагать, что наблюдаемые в его рамках феномены могут быть обусловлены только таким общим фактором, как неоднородности пространства-времени или, согласно современным представлениям, быть связанными с гравитационным взаимодействием. С другой стороны, свойства 5)–8) указывающие

на пространственную анизотропию фактора, создающего МФ-эффект, а также свойства 9) – 10) – синхронное, в планетарном масштабе, появление одинаковых форм гистограмм, связанных с выделенными моментами в динамике Солнца, Земли и Луны, влекут за собой предположение о волновой природе действующего агента.

Суммируя можно предположить, что действующая причина, обуславливающая перечисленные свойства эффекта макроскопических флуктуаций имеет гравитационно-волновую природу. Соответственно этому, форма тонкой структуры функций распределения флуктуаций, являющаяся основным объектом изучения МФ-эффекта, может обладать чувствительностью к гравитационно-волновым воздействиям. Исходя из этого, был разработан эксперимент, упрощенная схема которого изображена на рис. 7.

4 Описание эксперимента. Ожидаемые результаты

Рассмотрим упрощенную схему эксперимента, по обнаружению влияния гравитационно-волнового воздействия на форму функций распределения флуктуаций скорости α -распада, показанную на рис. 7 а). В прямоугольной рамке, в левой части рисунка, схематически изображен источник гравитационно-волнового воздействия (ИГВ), в качестве которого использовалась центрифуга К70, фирмы "JANETZKI", симметрично нагруженная двумя стаканами с водой весом около 1.5 кг каждый.

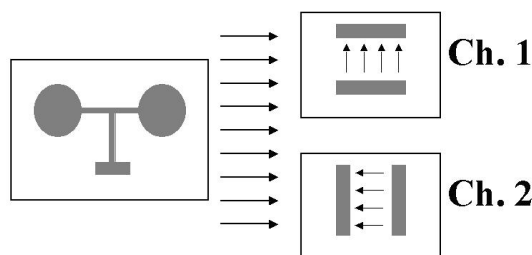


Рис. 7. Упрощенная схема эксперимента по обнаружению влияния гравитационно-волнового воздействия на форму функций распределения флуктуаций скорости α -распада.

Излучение ИГВ, условно показанное параллельными стрелками, воздействует на двухканальную регистрирующую систему, состоящую из двух регистраторов флуктуаций скорости α -распада от источников ^{239}Pu , обозначенных как Ch. 1 и Ch. 2. Средние скорости распада для Ch. 1 и Ch. 2 составляют 272 имп/сек и 174 имп/сек, соответственно. Оба регистратора расположены в плоскости вращения ротора на расстоянии 1.5 м от его оси. Для каждого из них, угол φ между волновым вектором ИГВ и направлением вылета α -частиц (показано стрелками внутри рамок, обозначающих Ch. 1 и Ch. 2) разный: для Ch. 1 $\varphi = 180^\circ$, а для Ch. 2 $\varphi = 90^\circ$. В силу предполагаемой волновой природы механизма воздействия на форму гистограмм, а следовательно, зависимости величины эффекта от φ , регистраторы Ch. 1 и Ch. 2 должны обладать неодинаковой чувствительностью к излучению ИГВ. Скорость распада α -частиц каждую секунду регистрируется специальной автоматической компьютерной системой. Также использовалась отдельная компьютерная система, каждую секунду регистрирующая величину скорости вращения ротора центрифуги.

Эксперименты проводились как последовательность чередующихся 5-минутных циклов с работающим и выключенным ИГВ, т. е. период воздействия равнялся 10 мин. Скорость вращения ротора при работающем ИГВ была 3000 об/мин. Выключенный ИГВ, за счет большой массы ротора К-70, сохранял скорость вращения ок. 300 об/мин.

На рис. 8 а) показана идеализированная диаграмма, иллюстрирующая изменение скорости вращения ротора центрифуги. Предположим, что гистограммы для интервалов с вращением должны быть подобными между собой, но не подобны гистограммам для

интервалов без вращения. Так же и гистограммы для интервалов без вращения: подобны между собой и не подобны гистограммам для интервалов с вращением.

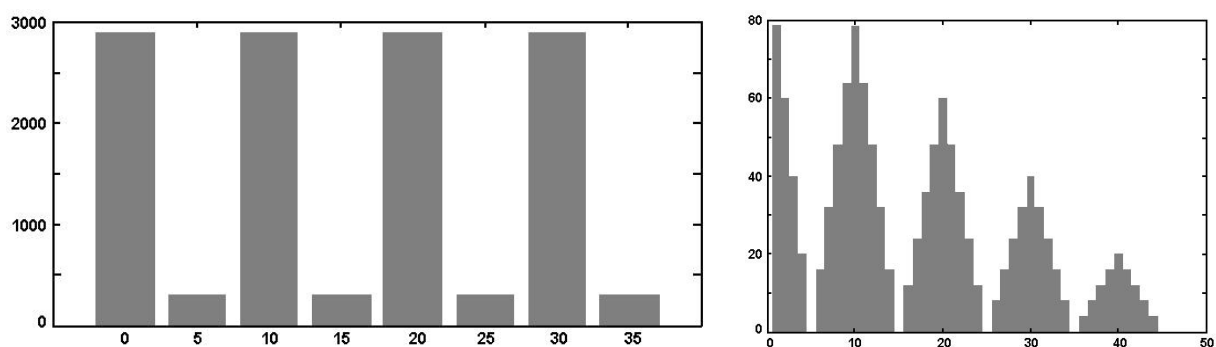


Рис. 8. Диаграмма изменения скорости вращения ротора центрифуги, а) и ожидаемое распределение интервалов, б).

Сделанные предположения позволяют смоделировать соответствующее им распределение интервалов, которое показано на рис. 8 б). Как можно видеть из приведенного рисунка, распределение интервалов, для экспериментальной записи конечной длины, должно состоять из пиков уменьшающейся амплитуды, повторяющихся с периодом равным периоду воздействия.

5 Полученные результаты

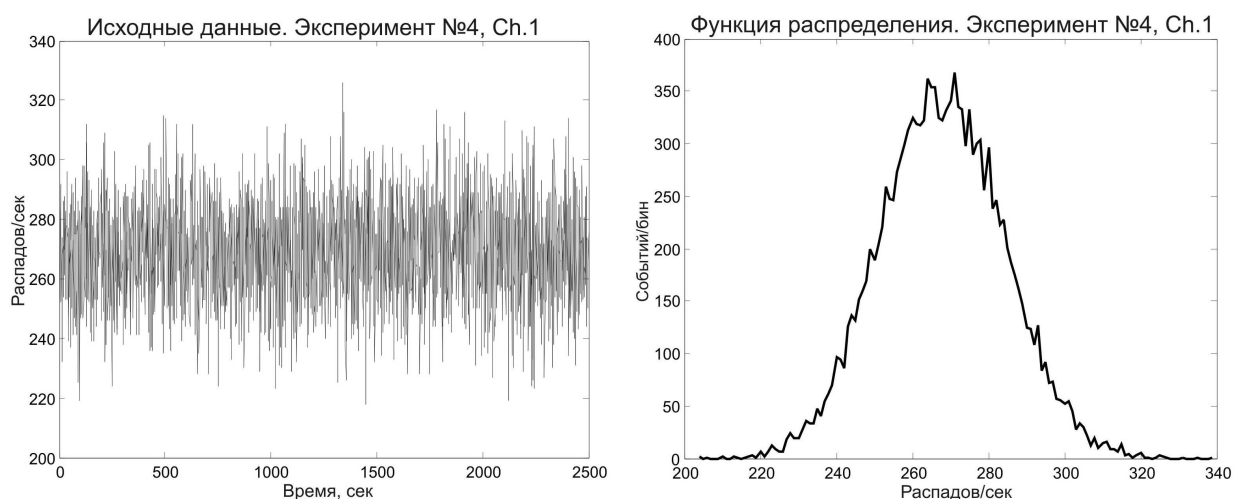


Рис. 9. Пример экспериментальной записи флуктуаций скорости α -распада ^{239}Pu , а) и соответствующая ей функция распределения амплитуд флуктуаций, б).

Согласно описанной выше методике, было проведено пять серий измерений с целью исследования возможного воздействия ротора вращающейся центрифуги на форму тонкой структуры гистограмм. Характерный пример экспериментальной записи, полученной от регистратора Ch. 1 для серии № 4 приведен на рис. 9 а). Здесь показаны первые 2500 сек записи длиной 26400 сек. На рис. 9 б) показана функция распределения амплитуд флуктуаций для всей записи. Как можно видеть из приведенных графиков, временная развертка флуктуаций скорости α -распада и функция распределения флуктуаций имеют характерный для этого процесса вид. Отсутствие особенностей в экспериментальной

записи и соответствующей ей функции распределения является ожидаемым и свидетельствует всего лишь о качестве регистрации. Как уже отмечалось вначале, традиционные методы анализа временных рядов нечувствительны к проявлениям МФ-эффекта.

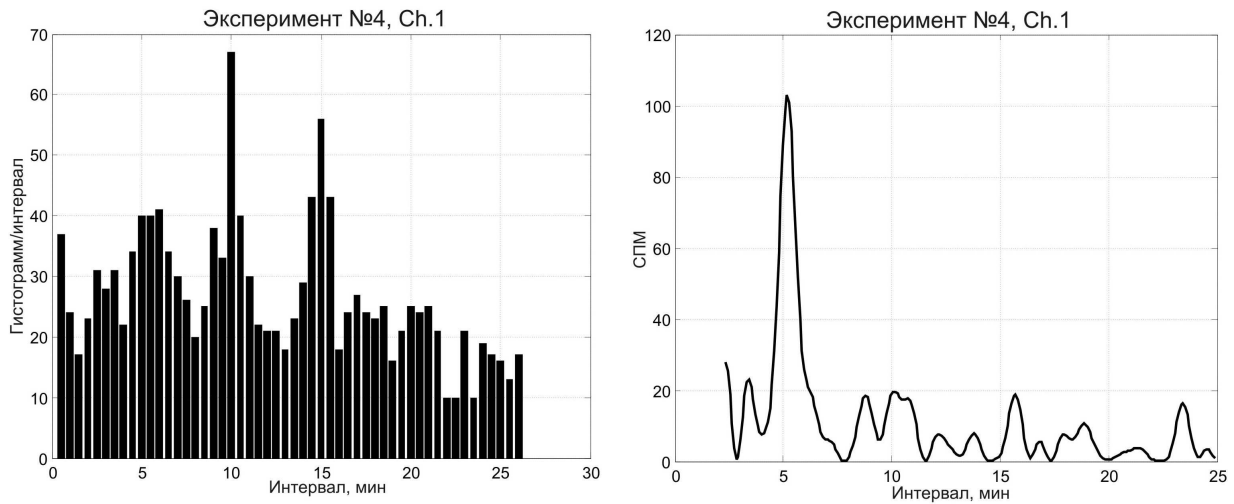


Рис. 10. Примеры распределения интервалов, полученного для Ch. 1 в серии измерений №4, а), и спектральная плотность мощности, построенная на его основе, б).

Согласно описанной в первом разделе методике, на основе полученных экспериментальных записей, были построены последовательности 0.5-минутных гистограмм, которые, затем, сравнивались экспертом (С. Э. Шноль). Типичный пример результатов экспертного сравнения для Ch. 1 серия № 4, приведен на рис. 10 а).

Как можно видеть из приведенного графика, в распределениях интервалов наблюдаются достаточно четкие пики с периодом повторения 5 мин. На рис. 10 б) показан спектр мощности, соответствующий распределению интервалов, рис. 10 а). Как следовало ожидать, исходя из вида распределения интервалов, в спектре мощности на рис. 10 б) присутствует четкий пик, соответствующий периоду в 5 мин. Появление периода равного 5 мин является несколько неожиданным с точки зрения описанной выше модели и будет рассмотрено ниже.

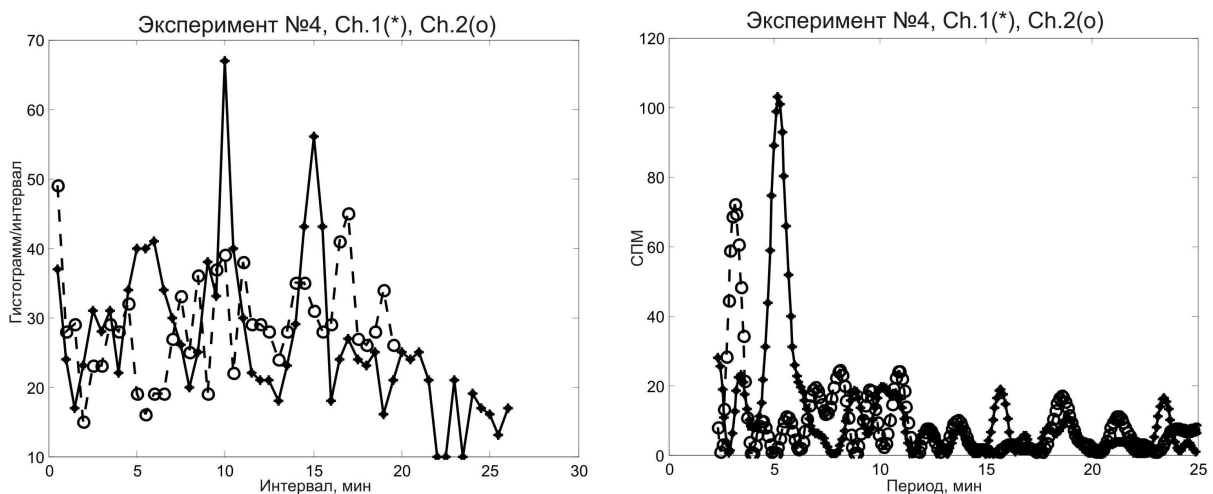


Рис. 11. Примеры распределения интервалов для Ch. 1 (*) и Ch. 2 (°), серия № 4 а) и полученные на его основе спектры мощности, б).

Для удобства сравнения на рис. 11 а) приведены графики распределений интервалов для Ch. 1 (помечено звездочками) и Ch. 2 (помечено кружочками). Как можно видеть,

для Ch. 2 отсутствует характерная для Ch. 1 повторяемость пиков с 5-минутным периодом. На рис. 11 б) приведены спектры мощности, соответствующие распределениям интервалов на рис. 11 а). Видно полное отсутствие пика с периодом в 5 мин для Ch. 2. Данный результат свидетельствует о верности предположения о зависимости наблюдаемого эффекта от угла. В то же время, иногда в спектрах мощности для Ch. 2 наблюдается пик с периодом в 2.5–3 мин, также показанный на рис. 11 б). Природа этого пика, его связь с динамикой ИГВ, пока неизвестна.

6 Обсуждение результатов эксперимента. Ускорения

Представленные выше результаты, проиллюстрированные данными для серии измерений №4, были получены также и во всех других сериях. Это дает нам основание утверждать о воздействии вращающегося ротора центрифуги на форму построенных по малым (30 штук 1-секундных измерений) выборкам функций распределения амплитуд флуктуаций скорости α -распада, проявляющемся в повышенной вероятности появления подобных форм гистограмм с периодом равным половине периода воздействия, т. е. 5 мин.

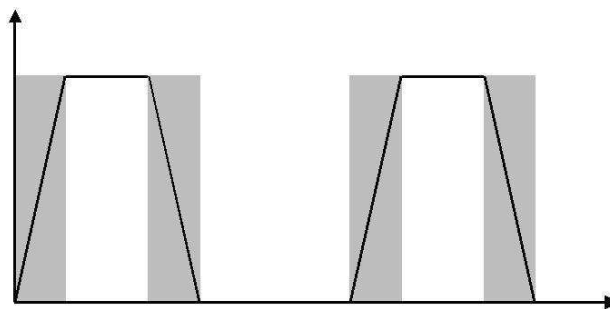


Рис. 12. Моменты разгона и торможения ротора центрифуги.

Появление пятиминутного периода, вместо ожидаемого периода в 10 мин заставляет предположить, что регистрирующая система чувствительна не к моментам наличия или отсутствия вращения ротора центрифуги, а к моментам его разгона и торможения, т. е. не к скорости вращения, как предполагалось в представленной на рис. 8 модели, а к ускорениям. Рис. 12 иллюстрирует данное предположение. Здесь серыми прямоугольниками отмечены моменты разгона и торможения ротора. Так как каждый период воздействия содержит по два таких момента, то в случае чувствительности формы гистограмм к моментам ускорений ротора центрифуги, должно происходить удвоение частоты воздействия на форму гистограмм. При этом, распределение интервалов должно быть подобным представленному на рис. 8 б) с тем отличием, что период повторяемости пиков должен уменьшиться в два раза, что и наблюдается во всех экспериментах для данных, полученных от регистратора Ch. 1.

Данные о зависимости скорости вращения ротора центрифуги подтверждают это предположение. Действительно, на рис. 13, вверху, представлена тестовая запись трех циклов разгона-торможения скорости вращения ротора центрифуги. На том же рисунке, внизу, дана производная скорости вращения, соответствующая ускорениям ротора. Видны, узкие пики, соответствующие режимам с ускорением. Предположительно, моменты времени, соответствующие подобным пикам ответственны за возникновение форм гистограмм, обуславливающих наблюдаемый в представленных экспериментах пятиминутный период.

В пользу предположения о том, что именно режимы с ускорением могут приводить к изменению формы регистрируемых гистограмм, нам хотелось бы отметить ра-

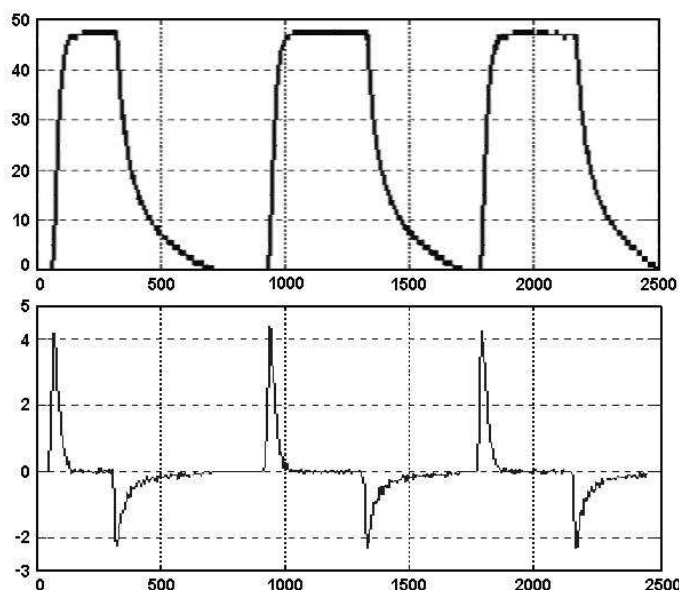


Рис. 13. Тестовая запись скорости вращения ротора центрифуги (вверху) и ее производная (внизу).

боты [14, 15], в которых использовалась экспериментальная система, в некотором смысле комплиментарная представленной в настоящей статье. Чувствительным элементом этой системы являлась быстро вращающаяся масса, для которой искусственно создавались режимы с ускорением, путем подачи специального тормозящего импульса, длительностью 18–30% от величины периода вращения [14]. Регистрируемым параметром являлась угловая скорость вращающейся массы. Подобная система оказалась чувствительной к тем же событиям, которые отмечены в свойствах МФ-эффекта 9) и 10) [15]. Все эти события также связаны с определенными экстремумами в скорости изменения координатно-временного положения Солнца, Земли и Луны и поэтому могут рассматриваться как режимы с ускорением.

В качестве второго примера экспериментов, где, по нашему мнению, проявляют себя механизмы близкие к обнаруженным в настоящей работе, можно привести [16]. Здесь, в качестве регистрирующей системы, использовалась пара прецизионных кварцевых резонаторов опорных автогенераторов стандартных электронносчетных частотомеров с рабочей частотой 5 МГц, определенным образом ориентированных в пространстве. Регистрируемый параметр – относительные противофазные изменения резонансных частот кварцевых резонаторов – назывался Т-сигналом. Исследование суточного хода Т-сигнала выявило его анизотропию с максимумами, соответствующими местному полудню и полночи. Авторами отмечается неэлектромагнитная природа Т-сигнала, его биологическая активность. Ход Т-сигнала связывается с гравитационно-волновым излучением Солнца.

Можно отметить общие моменты характерные для работ [14–16] и рассматриваемого в настоящей работе эксперимента. Первая важная особенность – наличие "режимов с ускорением" в регистрирующей системе, позволяющих выделить некоторое направление в пространстве. В наших экспериментах оно задается направлением вылета α -частиц, в [14–15] – моментом подачи подтормаживающего импульса, в [16] – перпендикуляром к плоскости колебаний пластины кварцевого резонатора. "Режимы с ускорением", обуславливая анизотропные свойства регистрирующей системы, в то же время, делают ее чувствительной к таким же "режимам с ускорением", которые являются внешними по отношению к ней и, предположительно, связаны с гравитационно-волновым излучением.

Суммируя отметим, что в результате проведенного экспериментального исследова-

ния зафиксировано воздействие быстро вращающегося массивного тела на форму тонкой структуры, построенных по малым выборкам, функций распределения амплитуд флуктуаций скорости α -распада ^{239}Pu , проявляющееся в повышенной вероятности подобия форм гистограмм для моментов соответствующих "режимам с ускорением". Воздействие обладает анизотропными свойствами и, предположительно, имеет гравитационно-волновую природу.

Литература

1. Шноль С. Э. и др. О реализации дискретных состояний в ходе флуктуаций в макроскопических процессах. // УФН, 1998, 168 (10), 1129–1140.
2. С. Э. Шноль, Т. А. Зенченко, К. И. Зенченко, Э. В. Пожарский, В. А. Коломбет, А. А. Конрадов. Закономерное изменение тонкой структуры статистических распределений как следствие космофизических причин // УФН 2000, 170 (2), 214–218.
3. Зенченко Т. А., Стрелков В. В., Шаповалов С. Н., Макаревич А. В., Зенченко К. И. Применение компьютерного алгоритма к установлению сходства форм гистограмм в "эффекте ближней зоны". Сходство спектральных характеристик ЭБЗ и параметров солнечного ветра. VI Международная крымская конференция "Космос и биосфера". Тезисы докладов. Партенит, Крым, Украина, 26 сентября – 1 октября 2005 г, с. 47–49.
4. С. Э. Шноль, Н. В. Удальцова, В. А. Коломбет, В. А. Намиот, Н. Б. Бодрова. Закономерности в дискретных распределениях результатов измерений (космофизические аспекты). // Биофизика, 1992, 37 (3), 467–488.
5. С. Э. Шноль, В. А. Намиот, В. Е. Жвирблис, В. Н. Морозов, А. В. Темнов, Т. Я. Морозова. Возможная общность макроскопических флуктуаций скоростей биохимических и химических реакций, электрофоретической подвижности клеток и флуктуаций при измерениях радиоактивности, оптической активности и фликкерных шумов. // Биофизика, 1983, 28 (1), 153–157.
6. С. Э. Шноль. Форма спектров состояний, реализуемых в ходе макроскопических флуктуаций, зависит от вращения Земли вокруг своей оси. // Биофизика, 1995, 40 (4), 865–875.
7. С. Э. Шноль. Макроскопические флуктуации как следствие арифметических и космофизических причин. // Биофизика, 2001, 46 (5), 775–782.
8. С. Э. Шноль. Закономерные изменения тонкой структуры статистических распределений в случайных процессах, как следствие арифметических и космофизических причин. (текст доклада 16.10.2002 г. на семинаре ректора МГУ академика В. А. Садовниченко). Труды семинара "Время, хаос и математические проблемы" выпуск 3, М. Книжный Дом "Университет", 2004, стр. 121–154.
9. Shnoll S. E., Zenchenko K. I., Udaltsova N. V., Cosmo-physical effects in structure of the daily and yearly periods of change in the shape of the histograms constructed by results of measurements of alpha-activity Pu^{239} . <http://arxiv.org/abs/physics/0504092>.
10. С. Э. Шноль, К. И. Зенченко, И. И. Берулис, Н. В. Удальцова, С. С. Жирков, И. А. Рубинштейн Зависимость "макроскопических флуктуаций" от космофизических факторов. Пространственная анизотропия. // Биофизика 2004, 49 (1), 132–139.
11. Simon E. Shnoll, Konstantin I. Zenchenko, Iosias I. Berulis, Natalia V. Udaltsova and Ilya A. Rubinshtein Fine structure of histograms of alpha-activity measurements depends on direction of alpha particles flow and the Earth rotation: experiments with collimators. <http://arxiv.org/abs/physics/0412007>.
12. Shnoll S. E., Rubinshtejn I. A., Zenchenko K. I., Shlekharev V. A., Kaminsky A. V., Konradov A. A., Udaltsova N. V. Experiments with Rotating Collimators Cutting out Pencil of α -Particles at Radioactive Decay of ^{239}Pu Evidence Sharp Anisotropy of Space // Progress in Physics, V. 1, 2005, pp. 81–84. <http://arxiv.org/abs/physics/0501004>.
13. Shnoll S. E., Zenchenko K. I., Shapovalov S. N., Gorshkov S. N., Makarevich A. V. and Troshichev O. A. The specific form of histograms presenting the distribution of data of α -decay

measurements appears simultaneously in the moment of New Moon in different points from Arctic to Antarctic. <http://arxiv.org/abs/physics/0412152>.

14. Б. Ю. Богданович, И. С. Щедрин, В. Н. Смирнов, Н. В. Егоров. Особый способ вращения массы – инструмент для астрофизических исследований. // Научная сессия МИФИ, 2003, т. 7, 45–46.

15. Б. Ю. Богданович, И. С. Щедрин, В. Н. Смирнов, Н. В. Егоров. Предварительные аналитические оценки изменения кинетической энергии вращающейся массы от координатно-временного положения Солнца и Луны. // Научная сессия МИФИ, 2003, т. 7, 47–48.

16. Н. В. Клочек, Л. Э. Паламарчук, М. В. Никонова. Предварительные результаты исследований воздействия космофизического излучения неэлектромагнитной природы на физические и биологические системы. // Биофизика, 1995, 40 (4), 889–896.

**The experimental research of the influence of rapidly rotating massive body
on the form of the distribution function of amplitudes
of velocity fluctuation of the α -decay**

V. A. Panchelyuga, S. E. Shnoll

*Institute of theoretical and experimental biophysics of RAS, Pushino
panvic333@yahoo.com, shnoll@iteb.ru*

The present work is performed in the framework of the research on the macroscopic fluctuations effect (Mf-effect, [1]), and aims to clarify its physical foundations. In particular, experimental research is conducted, on the possibility of the influence of the rapidly rotating massive body on the form of the distribution function of the velocity fluctuation of the α -decay. We study a possible anisotropy of such an interaction. The methodology of experimental data processing and the foundations of the Mf-effect phenomenology – set along more than one century, are presented.

Key-words: fluctuations, α -decay, anisotropy.

MSC: 83-05, 83C55, 74E10.

ИССЛЕДОВАНИЕ ЭФФЕКТА МЕСТНОГО ВРЕМЕНИ НА МАЛЫХ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННЫХ МАСШТАБАХ

В. А. Панчелюга, В. А. Коломбет, М. С. Панчелюга,
С. Э. Шноль

Институт Теоретической и Экспериментальной Биофизики РАН
panvic333@yahoo.com, shnoll@iteb.ru

Статья представляет исследование, посвященное дальнейшему изучению одного из проявлений феномена макроскопических флуктуаций – эффекта местного времени. Показано существование названного эффекта для случая, когда разность долготного времени между местами проведения измерений порядка двух секунд, что соответствует пространственной разности около 500 м. Изучена структура распределения интервалов в окрестности пика местного времени, в результате чего обнаружено его расщепление. Полученные результаты ведут к заключению об анизотропии пространства-времени.

Ключевые слова: флуктуации, эффект местного времени, анизотропия.

1 Введение

Настоящая работа выполнена в рамках исследования феномена макроскопических флуктуаций [1–3]. Эффект местного времени – синхронная по местному времени реализация сходных форм гистограмм в разных географических пунктах при измерениях флуктуаций в протекании процессов разной природы – свидетельствует о зависимости формы гистограмм от вращения Земли вокруг своей оси и ее движения по околоземной орбите. Этот эффект был исследован для различных расстояний между местами проведения измерений, вплоть до максимально возможных на Земле (ок. 15 тыс. км). Задачей настоящего исследования является изучение проявлений эффекта местного времени для относительно небольших расстояний между местами проведения измерений.

Одна из проблем, которая возникает при переходе к малым расстояниям между точками проведения измерений – необходимость повышения временного разрешения метода исследования. Как правило, работы, по исследованию эффекта местного времени, выполнялись с использованием процесса α -распада препаратов ^{239}Pu , как основного источника флуктуаций. Этот, во многих отношениях, удобный источник флуктуаций, становится мало пригодным в случае необходимости получения гистограмм длительностью в единицы миллисекунд и менее. Поэтому в настоящей работе мы отказались от использования α -распада. В качестве источника флуктуаций был выбран генерационно-рекомбинационный шум обратно смещенного $p-n$ перехода специального германиевого шумового диода. Подобный источник позволяет получать шумовой сигнал в полосе частот вплоть до десятков мегагерц и, в силу этого, полностью соответствует требованиям настоящего исследования.

Для того, чтобы удостовериться, что выбранный источник флуктуаций пригоден для исследования эффекта местного времени он был протестирован на расстояниях, для которых существование эффекта является доказанным. Описание этого эксперимента приведено в [4]. В этой работе была продемонстрирована пригодность источника флуктуаций на основе высокочастотного шумового диода для исследования эффекта местного времени.

2 Исследование эффекта местного времени на основе синхронных измерений в г. Пущино и пос. Большевик

Возможность использования высокочастотного источника флуктуаций позволила провести эксперимент, по исследованию эффекта местного времени для разности долготного времени между местами проведения измерений в десятки раз меньшей, чем в традиционно проводимых экспериментах [1–3]. Измерения проводились в г. Пущино ($54^{\circ}50.037'$ с. ш., $37^{\circ}37.589'$ в. д.) и пос. Большевик ($54^{\circ}54.165'$ с. ш., $37^{\circ}21.910'$ в. д.). Координаты мест проведения измерений определялись GPS-приемником BU-353. Долготная разность угловых координат мест проведения измерений составила $\alpha = 15.679'$. Полученной величине α соответствует разность долготного времени $\Delta t = 62.7$ сек и долготная разность пространственных координат Δl , около $\Delta l = 15$ км. Эта величина хорошо согласуется с картографическими данными.

Измерения аналогового шумового сигнала производились с частотой дискретизации равной 44100 Гц. После этого, с шагом кратным этой частоте, из исходного временного ряда извлекались отдельные измерения. Этот шаг для гистограмм соответствующих временным интервалам в 1 сек, 0.2 сек и 0.02 сек представлен во второй строке таблицы 1. Таким образом, были получены три временных ряда, частоты которых представлены в третьей строке таблицы 1. Разбивая эти ряды на отрезки длиной в заданное число точек (указано в четвертой строке таблицы 1) по стандартной методике вычислялись гистограммы, длительность которых приведена в последней строке таблицы 1.

Таблица 1. Параметры, используемые для вычисления гистограмм, соответствующих временным интервалам в 1 сек, 0.2 сек и 0.02 сек.

1	Частота дискретизации, Гц	44100	44100	44100
2	Шаг, точек	735	147	14
3	Частота данных, Гц	60	300	3150
4	Точек для вычисления гистограммы, штук	60	60	63
5	Гистограмм за 1 сек	1	5	50
6	Длительность гистограммы, сек	1	0.2	0.02

На рис. 1 представлено распределение интервалов, полученное в результате экспертного сравнения последовательностей 1-секундных гистограмм. Как можно видеть, распределению присущ четкий пик, соответствующий временному интервалу между гистограммами равному 63 сек. С учетом точности синхронизации момента начала измерений (0.1–0.2 сек), и длительности используемых гистограмм, можно считать, что данный пик с хорошей точностью соответствует разности местного времени $\Delta t = 62.7$ сек между г. Пущино и пос. Большевик.

Пик местного времени, получаемый на распределениях интервалов, как правило, всегда очень острый, шириной в 1–2 гистограммы [1–3], т. е., практически лишен какой-либо структуры. То же можно видеть и на рис. 1. Возможность построения 0.2 сек гистограмм, на основе тех же рядов экспериментальных данных, на основе которых получено распределение рис. 1, позволило рассмотреть задачу детального исследования структуры полученного на рис. 1 пика местного времени, увеличив, таким образом, временное разрешение метода в пять раз. Так как положение этого пика во временном ряду уже известно, то ряды были сдвинуты на 60 сек. Т. е. к положению максимума на распределении интервалов для 0.2 сек гистограмм должна быть добавлена величина этого сдвига.

Результаты экспертного сравнения для последовательностей 0.2 сек гистограмм, приведены на рис. 2. Как можно видеть из этого рисунка, максимальное подобие наблюдается для пар гистограмм, разделенных интервалом, равным 15, что с учетом сделанных замечаний соответствует разности местного времени по прежнему равной 63 сек, но теперь уже эта величина определена с точностью в 0.2 сек.

Обращает на себя внимание, что в результате 5-кратного увеличения разрешения при переходе от 1-секундных к 0.2-секундным гистограммам мы получили снова один острый пик, соответствующий разности местного времени для мест проведения измерений. Т.е. изменение временного масштаба не привело к изменению вида распределения интервалов. Для того чтобы увеличить временное разрешение еще на порядок мы перешли к рассмотрению гистограмм, построенных по 0.02-секундным отрезкам временных рядов.

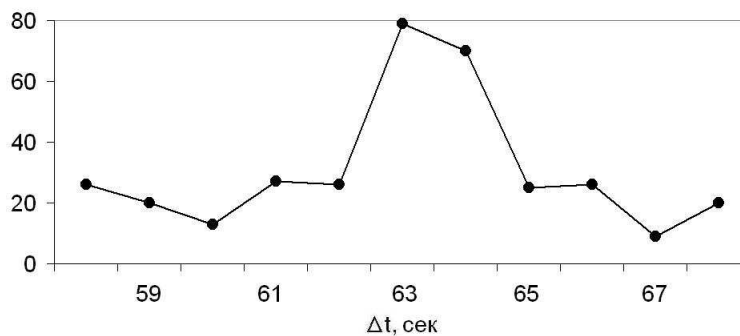


Рис. 1 Результаты экспертного сравнения для последовательностей 1-секундных гистограмм. Видно, что наиболее вероятно сходство гистограмм разделенных интервалом, соответствующим разнице местного времени – 63 сек. Ось Y – число гистограмм, найденных подобными, ось X – интервал времени между парами сравниваемых гистограмм, сек.

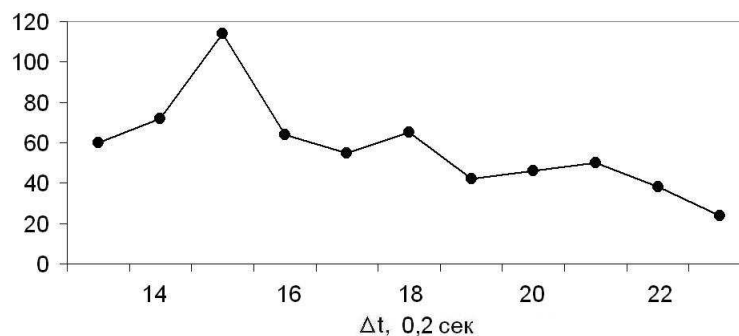


Рис. 2 Результаты экспертного сравнения для последовательностей 0.2-секундных гистограмм. Видно, что наиболее вероятно сходство гистограмм разделенных интервалом, соответствующим разнице местного времени – 63 сек с точностью в 0,2 сек. Ось Y - число гистограмм, найденных подобными, ось X – интервал времени между парами сравниваемых гистограмм равный, $60 + 0.2 \times \Delta t$.

Распределение интервалов для этого случая представлено на рис. 3. Здесь, так же как и в предыдущем случае, для того, чтобы исследовать окрестность пика местного времени, использовалось смещение временных рядов друг относительно друга, на величину равную 62 сек. В результате экспертного сравнения было получено распределение интервалов, состоящее из двух пиков. Первый пик, с учетом принятого смещения, соответствует разности местного времени – 62.98 сек, а второй – 63.16 сек. Соответственно, разность между пиками составляет 0.18 сек.

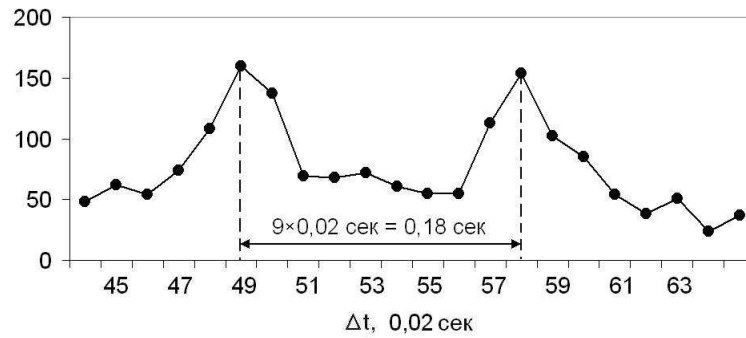


Рис. 3 Результаты экспертного сравнения для последовательностей 0.02-секундных гистограмм. Видно наличие двух экстремумов, соответствующих различиям "звездного" и "солнечного" местного времени. Ось Y – число гистограмм, найденных подобными, ось X – интервал времени между парами сравниваемых гистограмм равный $62 + 0.02 \times \Delta t$.

Полученное расщепление пика местного времени подобно расщеплению суточного периода повторяемости гистограмм на два периода равных один солнечным, а другой звездным суткам [5–7].

3 Дальнейшее развитие экспериментов по исследованию эффекта местного времени

Представленный выше эксперимент показал наличие эффекта местного времени для расстояний между точками проведения измерений порядка 15 км и расщепление пика местного времени на два субпика. Естественный вопрос, который возникает в этой связи – чему равно минимальное расстояние, на котором описанная выше картина будет повторяться? В этой связи был поставлен представленный ниже эксперимент.

Таблица 2. Координаты мобильной измерительной системы и соответствующие им долготная разность угловых координат мест проведения измерений α , разница долготного времени Δt , долготная разность координат мест измерений Δl и величина расщепления пика местного времени $\Delta \tau$.

№	Координаты мобильной изм. системы	α	Δt , сек	Δl , км	$\Delta \tau$, сек
1	54°48.16' с.ш., 37°43.54' в.д.	5.95'	23.8	6	0.066
2	54°49.28' с.ш., 37°41.44' в.д.	3.85'	15.4	3.9	0.043
3	54°50.126' с.ш., 37°39.207' в.д.	1.618'	6.47	1.6	0.018
4	54°49.989' с.ш., 37°38.127' в.д.	0.538'	2.152	0.5	0.006

В эксперименте использовались две измерительных системы: стационарная, расположенная в г. Пущино (54°50.037' с.ш., 37°37.589' в.д.) и мобильная. Было выполнено четыре серии синхронных измерений. GPS – координаты мобильной измерительной системы для каждой серии измерений приведены во втором столбце таблицы 2. Долготная разность угловых координат мест проведения измерений, α , дана в третьем столбце таблицы. Разница долготного времени Δt и долготная разность координат мест измерений Δl даны, соответственно в четвертом и пятом столбцах таблицы. В последнем столбце приведена величина расщепления пика местного времени $\Delta \tau$.

Методика обработки экспериментальных данных была той же, что и в эксперименте Пущино-Большевик. Было обнаружено, что в пределах точности эксперимента была воспроизведена картина эффекта местного времени аналогичная описанной выше.

4 Обсуждение

Эффект местного времени, как отмечено в [1], связан с вращательным движением Земли. Самое простое объяснение этого феномена могло бы быть следующим. Через время Δt равное разности долготных времен в местах проведения измерений, измерительная №2 попадает в ту же точку пространства, где до этого была система №1, что и обуславливает подобие формы наблюдаемых гистограмм. Однако, кроме вращательного Земле присуще еще и поступательное, орбитальное движение, скорость которого значительно превышает скорость вращательного движения. Поэтому утверждение о том, что измерительная система №2 попадет в ту же точку пространства, становится неверным. Здесь можно говорить только о направлениях. Действительно, если мы проведем две плоскости, проходящие через ось вращения Земли и точки проведения измерений, то через время Δt плоскость №2 будет параллельна плоскости №1. Отсюда можно сделать вывод о том, что подобие формы гистограмм каким-то образом связано с направлением в пространстве.

Расщепление суточного периода повторяемости формы гистограмм на солнечный и звездный говорит о том, что в пространстве существуют два выделенных направления: на Солнце и на "сферу неподвижных звезд". Действительно, через время равное 1436 мин Земля совершает один полный оборот вокруг своей оси и плоскость измерительной системы становится параллельной направлению, которое она имела одни звездные сутки назад. А еще через 4 мин в эту плоскость попадает Солнце, что совпадает с солнечными сутками равными 1440 мин.

Предположим, что обнаруженное нами расщепление (рис. 3) имеет ту же природу, что и расщепление суточного периода на солнечный и звездный. Тогда из разности между солнечным и звездным периодами ΔT равной $\Delta T = 4$ мин вычисляем коэффициент пропорциональности k :

$$(1) \quad k = \frac{4 \text{ мин}}{24 \text{ ч}} = \frac{240 \text{ сек}}{86400 \text{ сек}} \approx 2.78 \cdot 10^{-3}$$

Разность долготного времени Пуцдино-Большевик t равна $t \approx 62.7$ сек. Отсюда, разность звездного и солнечного периодов, соответствующая данному Δt :

$$(2) \quad \Delta t = kt = 62.7 \times 2.78 \cdot 10^{-3} \approx 0.17 \text{ сек.}$$

Как показано на рис. 3, разность между пиками в распределении интервалов равна 0.18 сек, что с учетом точности определения пиков (0.02 сек) совпадает с расчетной величиной. На этом основании мы можем говорить о том, что обнаруженное нами расщепление пика местного времени обусловлено теми же причинами, какие вызывают появление солнечного и звездного периодов. То же подтверждается и данными, приведенными в таблице 2.

Говоря о выделенных направлениях в пространстве, неявно предполагается, что измерительная система является "направленной" и в силу этого может чувствовать, разрешать эти направления. Подобные представления, вполне приемлемые для случая, когда мы говорим о расщеплении суточного периода, становятся проблематичными, в случае расщепления, обнаруженного нами в эффекте местного времени. Здесь угол, который должна разрешать измерительная система, уже настолько мал, что говорить о какой-либо присущей ей диаграмме направленности не приходится. В этом случае приходится признать, что мы имеем дело с динамически меняющейся картиной флуктуаций пространства-времени в околоземном пространстве, каким-то образом тесно связанной с выделенными направлениями, обсуждавшимися выше. Другими словами, мы можем говорить о ярко выраженной анизотропии околоземного пространства-времени.

Результаты, полученные в настоящей работе, обосновывают возможность исследования эффекта макроскопических флуктуаций на сравнительно небольших пространственных масштабах. Дальнейшее уменьшение этого масштаба является нашей ближайшей задачей. В то же время, субпики, полученные в результате расщепления пика местного времени, также состоят из одной-двух гистограмм, т. е. являются бесструктурными. Это обстоятельство также ставит в качестве одной из будущих задач исследование структуры субпиков пика местного времени.

Список литературы

1. Шноль С. Э., Коломбет В. А., Пожарский Э. В., Зенченко Т. А., Зверева И. М., Конрадов А. А. О реализации дискретных состояний в ходе флуктуаций в макроскопических процессах // Успехи Физич. Наук, 1998, т. 168, № 10 с. 1129–1140.
2. С. Э. Шноль, Т. А. Зенченко, К. И. Зенченко, Э. В. Пожарский, В. А. Коломбет, А. А. Конрадов. Закономерное изменение тонкой структуры статистических распределений как следствие космофизических причин // УФН 2000, 170 (2), с. 214–218.
3. С. Э. Шноль. Закономерные изменения тонкой структуры статистических распределений в случайных процессах, как следствие арифметических и космофизических причин. Труды семинара "Время, хаос и математические проблемы" выпуск 3, М.: Книжный Дом "Университет", 2004, с. 121–154.
4. В. А. Панчелюга, В. А. Коломбет, А. В. Каминский, М. С. Панчелюга, С. Э. Шноль. Эффект местного времени в шумовых процессах. // Вестник Калужского университета, 2006, в печати.
5. С. Э. Шноль. Макроскопические флуктуации как следствие арифметических и космофизических причин (Факторы, определяющие тонкую структуру гистограмм, возможно, находятся за пределами Солнечной системы) // Биофизика 2001, т. 46 №5 с. 775–782.
6. S. E. Shnoll, K. I. Zenchenko, and N. V. Udaltsova. Cosmophysical Effects in the Structure of Daily and Yearly Periods of Changes in the Shape of Histograms Constructed from the Measurements of ^{239}Pu alpha-Activity // Biophysics, 2004 Vol. 49, Suppl. 1, p. 155.
7. S. E. Shnoll, K. I. Zenchenko, N. V. Udaltsova, Cosmo-physical effects in structure of the daily and yearly periods of change in the shape of the histograms constructed by results of measurements of alpha-activity Pu-239, 2005 <http://arxiv.org/abs/physics/0504092>.

The study of the effect of local time on small Space-Time scale

V. A. Panchelyuga, V. A. Kolombet, M. S. Panchelyuga, S. E. Shnoll

Institute of theoretical and experimental biophysics of RAS, Pushino
panvic333@yahoo.com, shnoll@iteb.ru

The paper presents the research dedicated to the further study of one of the effects of the macroscopic fluctuations phenomenon – the effect of local time. The existence of this effect is shown in the case when the difference of lengthy time between the places of measurement is approximatively 2 seconds; this corresponds to a spatial distance of nearly 500 m. The structure of the distribution of intervals in the neighborhood of the peak of local time is studied, and as result is established its splitting. The obtained results lead to the conclusion of existence of Space-Time anisotropy.

Key-words: fluctuations, effect of local time, anisotropy.

MSC: 83-05, 74E10.

ОКТОНИОНЫ¹

Джон С. Баэз

Математический факультет, Калифорнийский Университет

baez@math.ucr.edu

Октонионы – это наибольшая из четырех нормированных алгебр с делением. Хотя и несколько пренебрегаемые из-за их неассоциативности, они стоят на пересечении многих интересных областей математики. Здесь мы опишем октонионы, их отношение к клиффордовым алгебрам и спинорам, периодичности Ботта, проективной и Лоренцевой геометрии, йордановым алгебрам и исключительным группам Ли. Мы также затронем их приложения в квантовой логике, специальной теории относительности и суперсимметрии.

Ключевые слова: октонионы, алгебры с делением, неассоциативность.

1 Введение

Существует ровно четыре нормированные алгебры с делением: действительные числа (\mathbb{R}), комплексные числа (\mathbb{C}), кватернионы (\mathbb{H}), и октонионы (\mathbb{O}). Действительные числа подобны надежному кормильцу в семье, это полностью упорядоченное поле, которому мы все доверяем. Комплексные числа – это слегка неудавшийся, но все же представительный младший брат: не упорядочены, но алгебраически завершены. Кватернионы, будучи некоммутативными, – эксцентричный кузин, которого отстраняют на важных семейных советах. Октонионы же словно сумасшедший старый дядюшка, никогда не спускающийся со своего чердака: они *неассоциативны*.

Большинство математиков слышали историю про то, как Гамильтон изобрел кватернионы. В 1835, в возрасте 30 лет, он открыл возможность использования комплексных чисел как пар действительных чисел. Очарованный связью между \mathbb{C} и 2-мерной геометрией, он пытался много лет изобрести большую алгебру, которая бы играла сходную роль в 3-мерной геометрии. На современном языке это значит, что он искал 3-мерную нормированную алгебру с делением. Его поиск достиг своей кульминации в октябре 1843. Позже Гамильтон писал своему сыну: «Каждое утро в начале вышеупомянутого месяца, когда я спускался к завтраку, твой младший брат Уильям Эдвин и ты сам спрашивали меня: "Ну как, папа, можешь ли ты *умножать* триплеты?" На что я всегда должен был отвечать, опечаленно качая головой: "Нет, я могу только *складывать* и вычитать их".» Проблема, конечно же, состояла в том, что не существует 3-мерной нормированной алгебры с делением. Гамильтону в действительности нужна была 4-мерная алгебра.

Наконец, 16-го октября 1843 года, прогуливаясь с женой вдоль Королевского Канала в Дублине перед собранием Ирландской королевской академии, Гамильтон совершил свое великое открытие. "Можно сказать, я тогда ощутил короткое замыкание гальванической цепи в своих мыслях; и искры, которые посыпались от него, были *фундаментальными уравнениями между i, j, k* ; точно такие же, как я их использовал всегда с тех пор." И в порыве прославленного математического вандализма он вырезал эти уравнения на камне Бромгамского моста: [$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$].

Одна из причин, по которой эта история хорошо известна, – Гамильтон провел остаток своей жизни, полностью захваченный кватернионами и их приложениями к геометрии [41, 49] [45, 53]. И на время кватернионы стали модными. Они составляли обязательную экзаменационную тему в Дублине, в ряде американских университетов они были единственным современным математическим предметом. Много из того, что мы сейчас делаем с помощью скаляров и векторов в \mathbb{R}^3 , было тогда сделано посредством действительных и мнимых кватернионов. Развилась школа

¹ArXiv:math.RA/0105155 v4 23 Apr 2002, пер. А. Э.

"кватернионистов", которая после смерти Гамильтона возглавлялась Питером Тэйттом из Эдинбурга и Бенжамином Пирсом из Гарварда. Тэйт написал 8 книг по кватернионам, делая акцент на их применении в физике. Когда Гиббс изобрел новую систему обозначения скалярного и векторного произведений, Тэйт забраковал ее как "гермафродитное уродство". Последовала полемическая война, с участием таких светил, как Хевисайд, на стороне векторов. В конце концов кватернионы проиграли, приобрев слабый налет позора, от которого они никогда полностью так и не освободились [27].

Не столь хорошо известно открытие октонионов другом Гамильтона по колледжу Джоном Т. Грейвсом. Именно интерес Грейвса к алгебре натолкнул Гамильтона на раздумия о комплексных числах и триплетях. В тот самый день после своей решающей прогулки Гамильтон послал восьмистраничное письмо Грейвсу с описанием кватернионов. Грейвс ответил 26-го октября, высказав восхищение Гамильтону за смелость идеи, но добавив "Все же в этой системе есть нечто, что приводит меня в замешательство. Пока мне не совсем ясно, до какой степени мы свободны создавать произвольные мнимости и наделять их сверхестественными свойствами." Он спросил: "Если с помощью вашей алхимии вы можете приготовить три фунта золота, стоит ли на этом останавливаться?"

Тогда же Грейвс принялся за работу над своим собственным золотом! 26-го декабря он написал Гамильтону описание новой 8-мерной алгебры, которую он назвал "октавами". Он показал, что они были нормированной алгеброй с делением, и использовал их для выражения произведения двух сумм восьми точных квадратов как другой суммы восьми точных квадратов: "теорема восьми квадратов" [52].

В январе 1844 года Грейвс послал Гамильтону три письма, подробно излагающих его открытие. Он рассмотрел идею общей теории " 2^m -ионов" и попытался построить 16-мерную нормированную алгебру с делением, но "встретился с неожиданным помехой" и пришел к сомнению относительно возможности этого. Гамильтон предложил опубликовать открытие Грейвса, но будучи занятым работой над кватернионами, постоянно откладывал это. В июле он написал Грейвсу, отмечая, что октонионы неассоциативны: " $A \cdot BC = AB \cdot C = ABC$, если A, B, C – кватернионы, но это не так, вообще говоря, с вашими октавами." Фактически Гамильтон первый ввел понятие "ассоциативности" задолго до других, так что октонионы смогли сыграть роль в разъяснении важности этого понятия.

Тем временем молодой Артур Кэли, новичок из Кембриджа, думал о кватернионах с тех пор как Гамильтон объявил об их существовании. Он полагал, что ищет взаимосвязь между кватернионами и гиперэллиптическими функциями. В марте 1845 года он опубликовал статью в *Философском Журнале*, озаглавленную "Об эллиптических функциях Якоби в ответ преподобному Б. Бронвину; и о кватернионах" [18]. Большая часть этой статьи была попыткой опровергнуть статью, указывающую ошибки в работе Кэли по эллиптическим функциям. Видимо, в последний момент он прикрепил к статье описание октонионов. В действительности, эта работа так изобиловала ошибками, что была исключена из собраний его работ — за исключением части об октонионах [19].

Расстроенный, что его обошли в публикациях, Грейвс приложил послесловие к своей статье, которая появилась в следующем выпуске того же журнала, говоря что он знал об октонионах с Рождества 1843. 14-го июня 1847 Гамильтон поместил краткую заметку в Труды королевской Ирландской академии, удостоверявшую приоритет Грейвса. Но было слишком поздно: октонионы стали известны как "числа Кэли". Что еще хуже, позднее Грейвс обнаружил, что его теорема восьми квадратов была открыта С. Ф. Дегеном в 1818 [28, 30].

Почему же октонионы томились в такой безвестности по сравнению с кватернионами? Кроме их довольно бесславного рождения, еще одна причина состоит в том, что у них не было такого неустанного заступника, каким был Гамильтон. Но конечно, причина этого в том, что октонионы испытывали недостаток в ясных приложениях к геометрии и физике. Единичные кватернионы формируют группу $SU(2)$, которая является двойным накрытием группы вращения $SO(3)$. Это делает их прекрасно подходящими для изучения вращений и угловых моментов, особенно в контексте квантовой механики. Сегодня мы рассматриваем это явление как частный случай теории клиффордовых алгебр. Большинство из нас уже не приписывают кватернионам того космиче-

ского значения, которого утверждал для них Гамильтон. Но они прекрасно приспособлены для нашего понимания порядка вещей.

Октонионы же, с другой стороны, нет. Их отношение к геометрии было достаточно смутным вплоть до 1925 года, когда Эли Картан описал "тройственность" (triality – триальность), – симметрию между векторами и спинорами в 8-мерном евклидовом пространстве [17]. Их возможное значение в физике было отмечено в 1934 г. в работе Йордана, фон Неймана и Вигнера по основаниям квантовой механики [59]. Однако, попытки Йордана и других применить октонионную квантовую механику к ядерной физике и физике элементарных частиц не привели к большим успехам. Работа по этим направлениям продолжалась довольно медленно до 1980-х годов, когда было осознано, что октонионы объясняют некоторые любопытные особенности теории струн [65]. Лагранжиан для классических суперструн включает соотношение между векторами и спинорами в пространстве-времени Минковского, которое справедливо только в размерностях 3, 4, 6, и 10. Заметьте, что эти числа на 2 больше, чем размерности \mathbb{R} , \mathbb{C} , \mathbb{H} и \mathbb{O} . Как мы увидим, это не просто совпадение: кратко, изоморфизмы

$$\begin{aligned}\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) &\cong \mathfrak{so}(2, 1) \\ \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) &\cong \mathfrak{so}(3, 1) \\ \mathfrak{sl}(2, \mathbb{H}) &\cong \mathfrak{so}(5, 1) \\ \mathfrak{sl}(2, \mathbb{O}) &\cong \mathfrak{so}(9, 1)\end{aligned}$$

позволяют нам трактовать спинор в одной из этих размерностей как пару элементов соответствующей алгебры с делением. Завораживает, что среди этих лагранжианов суперструн 10-размерный октонионный дает наиболее перспективного кандидата для реалистичной теории фундаментальной физики. Однако, все еще не существует *доказательства*, что октонионы пригодны для понимания реального мира. Можно только надеяться, что этот вопрос в конце концов будет разрешен тем или иным путем.

Кроме их возможной роли в физике, октонионы важны еще потому, что они связывают друг с другом некоторые алгебраические структуры, кажущиеся в противном случае изолированными и необъяснимыми исключениями. Как будет объяснено далее, концепция октонионного проективного пространства $\mathbb{O}\mathbb{P}^n$ имеет смысл только для $n \leq 2$, в силу неассоциативности \mathbb{O} . Это означает, что различные структуры, связанные с действительными, комплексными и кватернионными проективными пространствами, имеют октонионные аналоги только для $n \leq 2$.

Простые алгебры Ли являются прекрасным примером этого феномена. Существует 3 бесконечных семейства "классических" простых алгебр Ли, которые проистекают из групп изометрий проективных пространств $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$, $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ и $\mathbb{H}\mathbb{P}^n$. Существуют еще 5 "исключительных" простых алгебр Ли. Они были открыты Киллингом и Картаном в конце 1800-ых. В то время смысл этих исключений был покрыт тайной: они не могли появиться как группы симметрий известных структур. Только позже стала ясной их связь с октонионами. Оказалось, что 4 из них проистекают из групп изометрий проективных плоскостей над \mathbb{O} , $\mathbb{O} \otimes \mathbb{C}$, $\mathbb{O} \otimes \mathbb{H}$ и $\mathbb{O} \otimes \mathbb{O}$. Оставшаяся пятая есть группа автоморфизмов октонионов!

Другой хороший пример – классификация простых формально действительных Йордановых алгебр. Кроме нескольких бесконечных семейств этих алгебр, существует "исключительная" Йорданова алгебра, которая состоит из 3×3 эрмитовых октонионных матриц. Минимальные проекции в этой Йордановой алгебре соответствуют точкам $\mathbb{O}\mathbb{P}^2$ и группа автоморфизмов этой алгебры точно та же, как группа изометрий $\mathbb{O}\mathbb{P}^2$.

Октонионы также имеют удивительные связи с топологией. В 1957 году Рауль Ботт подсчитал группы гомотопий (homotopy groups) топологической группы $O(\infty)$, которая является индуктивным пределом ортогональных групп $O(n)$ при $n \rightarrow \infty$. Он доказал, что они повторяются с периодом 8:

$$\pi_{i+8}(O(\infty)) \cong \pi_i(O(\infty)).$$

Это известно как "периодичность Ботта". Он также подсчитал первые 8:

$$\begin{array}{ll}
\pi_0(O(\infty)) \cong \mathbb{Z}_2 & \pi_4(O(\infty)) \cong 0 \\
\pi_1(O(\infty)) \cong \mathbb{Z}_2 & \pi_5(O(\infty)) \cong 0 \\
\pi_2(O(\infty)) \cong 0 & \pi_6(O(\infty)) \cong 0 \\
\pi_3(O(\infty)) \cong \mathbb{Z} & \pi_7(O(\infty)) \cong \mathbb{Z}
\end{array}$$

Заметьте, что ненулевые группы гомотопий встречаются здесь в размерностях на 1 меньших, чем размерности $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ и \mathbb{O} . Это не совпадение! В нормированной алгебре с делением левое умножение на элемент с нормой 1 определяет ортогональное преобразование алгебры и таким образом элемент из $O(\infty)$. Это дает нам отображения сфер S^0, S^1, S^3 и S^7 на $O(\infty)$ и эти отображения порождают группы гомотопий в тех размерностях.

Получив это, можно естественным образом догадаться, что повторение с периодом 8 гомотопических групп $O(\infty)$ в некотором смысле вызвано октонионами. Как мы увидим дальше, это правда. Наоборот, периодичность Ботта тесно связана с проблемой, как много точечных линейно независимых гладких векторных полей могут быть найдены на n -сфере [56]. Существует n таких векторных полей только когда $n + 1 = 1, 2, 4$ или 8 , и это может быть использовано, чтобы доказать, что алгебры с делением над действительными числами могут возникать только в таких размерностях.

В дальнейшем изложении мы попытаемся объяснить октонионы и их роль в алгебре, геометрии и топологии. В разделе 2 даны четыре построения октонионов: первое – через их таблицу умножения, следующее – используя плоскость Фано, затем – используя конструкцию Кэли-Диксона, и последнее – используя клиффордовы алгебры, спиноры и обобщенную концепцию "тройственности" пропагандируемую Франком Адамсом [2]. Каждый подход имеет свои достоинства. В разделе 3 обсуждаются проективные линии и плоскости над нормированными алгебрами с делением – особенно \mathbb{O} – и описывается их отношение к периодичности Ботта, к исключительной Йордановой алгебре и к изоморфизмам алгебр Ли, перечисленным выше. В заключение, в разделе 4 обсуждаются октонионные построения исключительных групп Ли, в особенности "магический квадрат".

1.1 Предварительные замечания

Перед тем как начать нашу экскурсию, зафиксируем некоторые определения. **Векторное пространство** всегда будет для нас конечномерным модулем над полем действительных чисел. **Алгебра** A будет векторным пространством, которое снабжено билинейным отображением $m: A \times A \rightarrow A$, называемым "умножением", и элементом $1 \in A$, называемым "единицей", таким что $m(1, a) = m(a, 1) = a$. Как обычно, сокращаем $m(a, b)$ до ab . Мы не будем предполагать, что наши алгебры являются ассоциативными! Задав алгебру, мы будем свободно считать действительные числа элементами этой алгебры посредством отображения $\alpha \mapsto \alpha 1$.

Алгебра A является **алгеброй с делением**, если даны $a, b \in A$ с $ab = 0$, тогда либо $a = 0$, либо $b = 0$. Эквивалентно, A есть алгебра с делением, если операции левого и правого умножения на любой ненулевой элемент являются обратимыми. **Нормированная алгебра с делением** есть алгебра A , которая является также нормированным векторным пространством со свойством $\|ab\| = \|a\| \|b\|$. Это подразумевает, что A есть алгебра с делением и $\|1\| = 1$.

Мы должны предупредить читателя о некоторых тонкостях. Мы говорим, что алгебра A имеет **инверсии относительно умножения** (multiplicative inverses), если для любого ненулевого $a \in A$ существует элемент $a^{-1} \in A$ с $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$. Ассоциативная алгебра имеет инверсии умножения, если она является алгеброй деления. Однако, это нарушается для неассоциативных алгебр! В разделе 2.2 мы построим алгебры, которые имеют инверсии умножения, но не являются алгебрами с делением. С другой стороны, можно построить алгебру с делением без инверсий умножения, взяв кватернионы и слегка модифицируя произведение, установив $i^2 = -1 + \epsilon j$ для некоторого малого ненулевого действительного числа ϵ , в то время как остальную часть таблицы умножения оставим неизменной. Элемент i тогда имеет как левую, так и правую обратные величины (inverses), но они не равны. (Мы благодарим Давида Русина за этот пример.)

Существует три уровня ассоциативности. Алгебра является **степенно-ассоциативной**, если подалгебра, порожденная любым одним элементом, является ассоциативной. Она является **альтернативной**, если подалгебра, порожденная любыми двумя элементами, является ассоциативной. Окончательно, если подалгебра, порожденная любыми тремя элементами, является ассоциативной, то алгебра ассоциативна.

Как мы увидим, октонионы не ассоциативны, но они альтернативны. Как можно проверить подобный момент? Согласно теореме Эмиля Артина [84], алгебра A является альтернативной, если для всех $a, b \in A$ имеем

$$(aa)b = a(ab), \quad (ab)a = a(ba), \quad (ba)a = b(aa) \quad (1)$$

Фактически любые два из этих уравнений подразумевают оставшееся, так что обычно выбирают первое и последнее в качестве определения "альтернативности". Чтобы убедиться в этом, заметим, что любая алгебра имеет трилинейное отображение

$$[\cdot, \cdot, \cdot] : A^3 \rightarrow A$$

называемое **ассоциатором** и задаваемое выражением

$$[a, b, c] = (ab)c - a(bc).$$

Ассоциатор измеряет дефект ассоциативности, точно так же, как коммутатор $[a, b] = ab - ba$ измеряет дефект коммутативности. Коммутатор является антисимметричным (alternating) билинейным отображением, это означает, что он переключает знак всякий раз, когда два аргумента меняются:

$$[a, b] = -[b, a]$$

или, что тоже самое, что он обнуляется, когда они оказываются равными:

$$[a, a] = 0.$$

Отсюда возникает вопрос, является ли ассоциатор тоже антисимметричным (alternating)? В действительности, это выполняется точно, когда A альтернативна! Причина заключается в том, что каждое уравнение в (1) говорит, что ассоциатор обращается в нуль, когда определенная пара аргументов равна, или эквивалентно, он меняет знак в том случае, когда пара аргументов меняется местами. Заметим, однако, что если ассоциатор меняет знак, когда мы переставляем i -ый и j -ый аргументы, и еще когда переставляем j -ый и k -ый аргументы, то он должен менять знак, когда мы переключаем i -ый и k -ый. Таким образом любые два из уравнений (1) предполагают третье.

Теперь мы можем высказать утверждения о выдающихся свойствах \mathbb{R} , \mathbb{C} , \mathbb{H} , и \mathbb{O} :

Теорема 1. $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ и \mathbb{O} есть единственные нормированные алгебры с делением.

Теорема 2. $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ и \mathbb{O} есть единственные альтернативные алгебры с делением.

Первая теорема возвращает нас к работе Гурвица 1898 г. [55]. Она была впоследствии обобщена по многим направлениям, например, на алгебры над другими полями. Версия второй теоремы появилась в работе Цорна 1930 г. [100] – парня с леммой. Современные доказательства этих теорем можно найти в прекрасной книге Шафера по неассоциативным алгебрам [84]. Мы кратко опишем два доказательства теоремы Гурвица в Разделе 2.3.

Заметим, что мы *не* утверждаем, что $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ и \mathbb{O} являются единственными алгебрами с делением. Это неверно. К примеру, мы уже описали способ получения 4-мерных алгебр с делением, которые не имеют инверсии умножения. Однако, всё же верен такой факт:

Теорема 3. Все алгебры с делением имеют размерность 1, 2, 4 или 8.

Это было независимо доказано Кервейром [62] и Боттом–Милнором [11] в 1958. Об этом доказательстве будет немного сказано в Разделе 3.1. Однако, в дальнейшем в фокус нашего взгляда не попадут основные результаты по алгебрам с делением. Вместо этого мы сосредоточимся на особых свойствах октонионов. Начнем с их построения.

2 Построение октонионов

Простейший способ построения октонионов дается их таблицей умножения. Октонионы являются 8-мерной алгеброй с базисом $1, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7$ и их умножение задано этой таблицей, которая описывает результат перемножения элемента в i -ой строке на элемент в j -ом столбце:

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	-1	e_4	e_7	$-e_2$	e_6	$-e_5$	$-e_3$
e_2	$-e_4$	-1	e_5	e_1	$-e_3$	e_7	$-e_6$
e_3	$-e_7$	$-e_5$	-1	e_6	e_2	$-e_4$	e_1
e_4	e_2	$-e_1$	$-e_6$	-1	e_7	e_3	$-e_5$
e_5	$-e_6$	e_3	$-e_2$	$-e_7$	-1	e_1	e_4
e_6	e_5	$-e_7$	e_4	$-e_3$	$-e_1$	-1	e_2
e_7	e_3	e_6	$-e_1$	e_5	$-e_4$	$-e_2$	-1

Таблица 1 — Таблица умножения октонионов

К сожалению, эта таблица почти совершенно непрозрачна! Единственные интересные моменты, которые можно узнать из нее, это:

- e_1, \dots, e_7 являются квадратными корнями -1 ,
- e_i и e_j антикоммутируют когда $i \neq j$: $e_i e_j = -e_j e_i$,
- тождество **цикличности индексов** имеет вид: $e_i e_j = e_k \implies e_{i+1} e_{j+1} = e_{k+1}$, где мы считаем индексы действующими в \mathbb{Z}_7 ,
- тождество **удваивания индексов** имеет вид: $e_i e_j = e_k \implies e_{2i} e_{2j} = e_{2k}$.

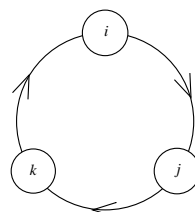
Вместе с одним нетривиальным произведением типа $e_1 e_2 = e_4$, этих фактов достаточно для заполнения всей таблицы умножения. Однако, нам безусловно нужен лучший способ запоминания произведения октонионов. Желательно, чтобы нам стало так же удобно с умножением октонионов, как с умножением матриц! И в конечном счете, нам нужен более концептуальный подход к октонионам, который объяснит их особые свойства и как они согласуются с другими математическими идеями. В дальнейшем мы даём некоторые дополнительные описания умножения октонионов, восходя от хорошего мнемонического описания к нескольким более глубоким и концептуальным.

2.1 Плоскость Фано

Кватернионы \mathbb{H} являются 4-мерной алгеброй с базисом $1, i, j, k$. Для описания произведения можно было бы дать таблицу умножения, но легче запомнить что:

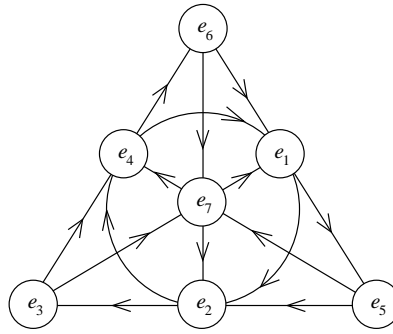
- 1 является единицей по умножению (multiplicative identity),
- i, j и k есть квадратные корни -1 ,
- выполняются $ij = k, ji = -k$ и все тождества, полученные из них посредством циклических перестановок (i, j, k) .

Можно подытожить последнее правило на рисунке:



Когда мы умножаем два элемента, следуя по часовой стрелке по окружности, мы получим следующий за ними, например, $ij = k$. Но когда мы умножаем два элемента, следуя против часовой стрелки, мы получим *минус* следующий элемент: например, $ji = -k$.

Можно использовать схему того же рода, чтобы запомнить, как умножаются октонионы:



Это – **плоскость Фано**, маленькое приспособление (gadget) с 7 точками и 7 линиями. "Линии" – это стороны (равностороннего) треугольника, его высоты и окружность, содержащая все середины сторон. Каждая пара различных точек лежит на уникальной линии. Каждая линия содержит три точки и каждая из этих троек имеет циклическую упорядоченность, показанную стрелками. Если e_i, e_j и e_k циклически упорядочены этим способом, то

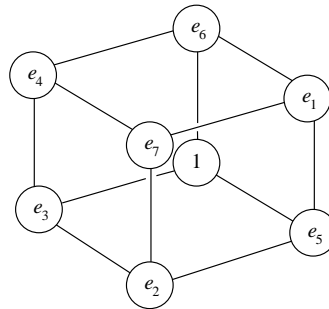
$$e_i e_j = e_k, \quad e_j e_i = -e_k.$$

Вместе со следующими правилами:

- 1 – единица по умножению,
- e_1, \dots, e_7 – квадратные корни -1 ,

плоскость Фано полностью описывает алгебраическую структуру октонионов. Удвоение индексов соответствует вращению картинки на треть полного угла.

Это, конечно, лаконичная мнемоника, но не скрывается ли за этим нечто более глубокое? Да! Плоскость Фано является проективной плоскостью над 2-элементным полем \mathbb{Z}_2 . Другими словами, она состоит из линий, проходящих сквозь начало координат в векторном пространстве \mathbb{Z}_2^3 . Поскольку каждая такая линия содержит единственный ненулевой элемент, можно также думать о плоскости Фано, как состоящей из семи ненулевых элементов \mathbb{Z}_2^3 . Если начало координат в \mathbb{Z}_2^3 соответствует $1 \in \mathbb{O}$, мы получим следующую картину октонионов:



Заметим, что плоскости, проходящие через начало координат этого 3-мерного векторного пространства, дают подалгебры \mathbb{O} , изоморфные кватернионам; линии, проходящие через начало координат, дают подалгебры, изоморфные комплексным числам, а само начало координат дает подалгебру, изоморфную действительным числам.

Что в действительности мы имеем здесь – это описание октонионов как "закрученной групповой алгебры" (twisted group algebra). Задана любая группа G , групповая алгебра $\mathbb{R}[G]$ состоит из всех конечных формальных линейных комбинаций элементов G с действительными коэффициентами. Это – ассоциативная алгебра с произведением, полученным из произведения группы G . Можно использовать любую функцию

$$\alpha: G^2 \rightarrow \{\pm 1\}$$

для "закручивания" этого произведения, определяющего новое произведение

$$\star: \mathbb{R}[G] \times \mathbb{R}[G] \rightarrow \mathbb{R}[G]$$

посредством:

$$g \star h = \alpha(g, h) gh,$$

где $g, h \in G \subset \mathbb{R}[G]$. Можно записать уравнение, включающее α , которая обеспечит ассоциативность этого нового произведения. В этом случае назовем α "2-коциклом". Если α удовлетворяет определенному дополнительному уравнению, произведение \star будет также коммутативным и мы назовем α "стабильным 2-коциклом". Например, групповая алгебра $\mathbb{R}[\mathbb{Z}_2]$ изоморфна произведению 2 копий \mathbb{R} , но мы можем закрутить (twist) ее посредством стабильного 2-коцикла для получения комплексных чисел. Групповая алгебра $\mathbb{R}[\mathbb{Z}_2^2]$ изоморфна произведению 4 копий \mathbb{R} , но можно закрутить ее с помощью 2-коцикла и получить кватернионы. Аналогично, групповая алгебра $\mathbb{R}[\mathbb{Z}_2^3]$ есть произведение 8 копий \mathbb{R} , и что действительно мы сделали в этом разделе, – это описали функцию α , которая позволяет закручивать эту групповую алгебру для получения октонионов. Так как октонионы неассоциативны, эта функция не является 2-коциклом. Однако, ее кограница есть "стабильный 3-коцикл", который позволяет определить новый ассоциатор и сплетение (braiding) для категории \mathbb{Z}_2^3 -градуированных векторных пространств, превратив ее в симметричную моноидальную категорию (monoidal category) [4]. В этой симметричной моноидальной категории октонионы являются коммутативным моноидным объектом. В менее технических терминах: эта категория обеспечивает контекст в котором октонионы *являются* коммутативными и ассоциативными! До сих пор эта идея только начала разрабатываться.

2.2 Конструкция Кэли-Диксона

Было бы хорошо иметь конструкцию нормированных алгебр с делением $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$, которая объясняла бы, почему каждая алгебра закономерно уместается внутри следующей. Было бы хорошо, если бы эта конструкция проясняла, почему \mathbb{H} некоммутативна и \mathbb{O} неассоциативна. Было бы даже лучше, если бы эта конструкция давала бесконечную последовательность алгебр, каждый раз удваивающихся по размерности, с нормированными алгебрами с делением в качестве первых четырех членов. Фактически такая конструкция существует: она называется конструкцией Кэли-Диксона.

Как заметил Гамильтон, комплексные числа $a + bi$ могут мыслиться как пара (a, b) действительных чисел. Сложение осуществляется покомпонентно, а умножение происходит так:

$$(a, b)(c, d) = (ac - db, ad + cb).$$

Можно также определить сопряжение комплексных чисел посредством

$$(a, b)^* = (a, -b).$$

Теперь, поскольку мы имеем комплексные числа, мы можем аналогичным путем определить кватернионы. Кватернионы могут быть рассматриваться как пара комплексных чисел. Сложение выполняется покомпонентно, а умножение проводится так:

$$(a, b)(c, d) = (ac - db^*, a^*d + cb). \quad (2)$$

Эта формула совсем подобна нашей формуле умножения комплексных чисел, но с добавлением в нее пары сопряженных. Если мы включим их в предыдущую формулу, ничего не изменится, так как сопряжение действительных чисел – это просто само число. Можно также определить сопряженное кватерниона посредством

$$(a, b)^* = (a^*, -b). \quad (3)$$

Игра продолжается! Теперь мы можем определить октонион как пару кватернионов. Как и прежде, мы будем складывать и умножать их, используя формулы (2) и (3). Этот прием для получения новых алгебр из старых называется **конструкцией Кэли-Диксона**.

Почему действительные числа, комплексные числа, кватернионы и октонионы имеют инверсии умножения? Принимаем это в качестве очевидного факта для действительных чисел. Для комплексных чисел можно проверить, что

$$(a, b)(a, b)^* = (a, b)^*(a, b) = k(1, 0),$$

где k – действительное число, квадрат нормы (a, b) . Это означает, что всякий раз, когда (a, b) не равно нулю, ее обратная величина (multiplicative inverse) равна $(a, b)^*/k$. Можно проверить, что то же самое выполняется для кватернионов и октонионов.

Но это, конечно, приводит к вопросу: почему не существует *бесконечной* последовательности алгебр с делением, каждая из которых получается из предыдущей с помощью построения Кэли–Диксона? Ответ состоит в том, что каждый раз, когда мы применяем данное построение, наша алгебра становится чуть хуже. Сначала мы теряем то, что каждый элемент равен своему сопряженному, затем теряем коммутативность, затем ассоциативность, и в заключение теряем собственно алгебру с делением.

Чтобы ясно понять это, нужно рассуждать чуть более формально. Определим ***-алгебру** как алгебру A , снабженную **сопряжением**, то есть действительно-линейным отображением $*$: $A \rightarrow A$ со свойствами

$$a^{**} = a, \quad (ab)^* = b^* a^*$$

для всех $a, b \in A$. Будем говорить, что *-алгебра является **действительной**, если $a = a^*$ для каждого элемента a алгебры. Назовем *-алгебру A **хорошо нормированной**, если $a + a^* \in \mathbb{R}$ и $aa^* = a^*a > 0$ для всех ненулевых $a \in A$. Если A – хорошо нормированная, положим

$$\operatorname{Re}(a) = (a + a^*)/2 \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{Im}(a) = (a - a^*)/2,$$

и определим норму на A посредством

$$\|a\|^2 = aa^*.$$

Если A является хорошо нормированной, она имеет обратные величины, задаваемые так:

$$a^{-1} = a^*/\|a\|^2.$$

Если A хорошо нормирована и альтернативна, A является нормированной алгеброй с делением. Чтобы увидеть это, заметим, что для любых $a, b \in A$ все 4 элемента a, b, a^*, b^* принадлежат ассоциативной алгебре, порожденной посредством $\operatorname{Im}(a)$ и $\operatorname{Im}(b)$, так что

$$\|ab\|^2 = (ab)(ab)^* = ab(b^*a^*) = a(bb^*)a^* = \|a\|^2\|b\|^2.$$

Начиная с любой *-алгебры A , построение Кэли–Диксона дает новую *-алгебру A' . Элементы A' являются парами $(a, b) \in A^2$, умножение и сопряжение определяется используя уравнения (2) и (3). Следующие утверждения показывают эффект многократного применения построения Кэли–Диксона:

Утверждение 1. A' никогда не действительна.

Утверждение 2. A является действительной (и таким образом коммутативной) $\iff A'$ является коммутативной.

Утверждение 3. A коммутативна и ассоциативна $\iff A'$ ассоциативна.

Утверждение 4. A ассоциативна и хорошо нормирована $\iff A'$ альтернативна и хорошо нормирована.

Утверждение 5. A хорошо нормирована $\iff A'$ хорошо нормирована.

Все эти утверждения следуют из прямых расчетов; доказывать их здесь значило бы лишь лишать читателя удовольствия сделать это самому. Из этих утверждений следует, что:

$$\begin{aligned} \mathbb{R} - \text{действительная коммутативная ассоциативная хорошо нормированная } *-\text{алгебра} &\implies \\ \mathbb{C} - \text{коммутативная ассоциативная хорошо нормированная } *-\text{алгебра} &\implies \\ \mathbb{H} - \text{ассоциативная хорошо нормированная } *-\text{алгебра} &\implies \\ \mathbb{O} - \text{альтернативная хорошо нормированная } *-\text{алгебра} &\implies \end{aligned}$$

и следовательно, что $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ и \mathbb{O} – нормированные алгебры с делением. Также следует, что октонионы не являются ни действительными, ни коммутативными, ни ассоциативными.

Если мы продолжим применение процесса Кэли-Диксона к октонионам, то получим последовательность $*$ -алгебр размерности 16, 32, 64 и т. д. Первая из них называется **седенионы**, по-видимому указывая на то, что она 16-мерная [67]. Из выше перечисленных результатов следует, что все $*$ -алгебры из этой последовательности хорошо нормированы, но не являются ни действительными, ни коммутативными, ни альтернативными. Все они имеют обратные величины, поскольку они хорошо нормированы. Но они не являются алгебрами с делением, так как явный расчет демонстрирует, что седенионы, и поэтому все прочие, имеют делители нуля. Фактически [24, 73], делители нуля с единичной нормой в случае седенионов образуют подпространство, гомеоморфное исключительной группе Ли G_2 .

Конструкция Кэли-Диксона дает хороший путь для получения последовательности $\mathbb{R}, \mathbb{H}, \mathbb{C}, \mathbb{O}$ и основных свойств этих алгебр. Но в чем смысл этой конструкции? Для ответа на этот вопрос лучше всего определить A' как алгебру, образованную присоединением к A элемента i , удовлетворяющего $i^2 = -1$ вместе со следующими соотношениями:

$$a(ib) = i(a^*b), \quad (ai)b = (ab^*)i, \quad (ia)(bi^{-1}) = (ab)^* \quad (4)$$

для всех $a, b \in A$. Преобразуем A' в $*$ -алгебру, используя исходное сопряжение на элементах A и устанавливая $i^* = -i$. Просто проверить, что каждый элемент A' может быть записан единственным способом как $a + ib$ для некоторых $a, b \in A$, и что это описание конструкции Кэли-Диксона станет эквивалентным нашему предыдущему, если положить $(a, b) = a + ib$.

В чем смысл соотношений (4)? Это просто: *они выражают сопряжение в понятиях сопряжения!* Это игра слов на двойном понимании слова "сопряжение" (conjugation). На самом деле, я имею в виду, что они выражают $*$ -операцию в A как конъюгацию посредством i . В частности, имеем

$$a^* = (ia)i^{-1} = i(ai^{-1})$$

для всех $a \in A$. Заметим, что когда A' ассоциативна, любое одно из соотношений в (4) влечет два других. Только когда A' является неассоциативной, действительно требуются все три соотношения.

Эта интерпретация конструкции Кэли-Диксона позволяет легче увидеть, что происходит при многократном применении конструкции начиная с \mathbb{R} . В \mathbb{R} $*$ -операция не делает ничего, поэтому когда мы проводим конструкцию Кэли-Диксона, сопряжение посредством i не должно влиять на элементы \mathbb{R} . Поскольку \mathbb{R} коммутативна, это означает, что $\mathbb{C} = \mathbb{R}'$ коммутативна. Но \mathbb{C} теперь уже не действительна, так как $i^* = -i$.

Теперь применим конструкцию Кэли-Диксона к \mathbb{C} . Так как \mathbb{C} коммутативна, $*$ -операция в \mathbb{C} является автоморфизмом. Всякий раз когда имеется ассоциативная алгебра A , оснащенная автоморфизмом α , можно всегда расширить A до большей ассоциативной алгебры посредством присоединения обратимого элемента x :

$$\alpha(a) = xax^{-1}$$

для всех $a \in A$. Поскольку \mathbb{C} ассоциативна, это значит, что $\mathbb{C}' = \mathbb{H}$ тоже ассоциативна. Но так как \mathbb{C} не является действительной, \mathbb{H} не может быть коммутативной, поскольку сопряжение посредством нового присоединенного элемента i должно действовать нетривиально.

Наконец, применим конструкцию Кэли-Диксона к \mathbb{H} . Поскольку \mathbb{H} некоммутативна, $*$ -операция в \mathbb{H} не является автоморфизмом; это только антиавтоморфизм. Это означает, что невозможно выразить ее как конъюгацию посредством некоторого элемента большей ассоциативной алгебры. Таким образом, $\mathbb{H}' = \mathbb{O}$ должна быть неассоциативной.

2.3 Клиффордовы Алгебры

Уильям Клиффорд изобрел свои алгебры в 1876 в качестве попытки обобщить кватернионы на высшие размерности, опубликовав работу о них двумя годами позже [23]. Если задано

пространство V с действительным скалярным произведением, **клиффордова алгебра** $\text{Cliff}(V)$ является ассоциативной алгеброй, свободно порожденной посредством V по модулю соотношений

$$v^2 = -\|v\|^2$$

для всех $v \in V$. Эквивалентно, она является ассоциативной алгеброй, свободно порожденной посредством V по модулю соотношений

$$vw + wv = -2\langle v, w \rangle$$

для всех $v, w \in V$. Если $V = \mathbb{R}^n$ с его обычным скалярным произведением, назовем его клиффордовой алгеброй $\text{Cliff}(n)$. Конкретно, это ассоциативная алгебра, свободно порожденная n антикоммутирующими квадратными корнями из -1 . Исходя из этого, легко видно, что

$$\text{Cliff}(0) = \mathbb{R}, \quad \text{Cliff}(1) = \mathbb{C}, \quad \text{Cliff}(2) = \mathbb{H}.$$

До сих пор эта последовательность напоминает итерационное построение Кэли-Диксона – но октонионы *не* являются клиффордовой алгеброй, поскольку они не ассоциативны. Тем не менее, есть глубокая связь между клиффордовыми алгебрами и нормированными алгебрами с делением. Эта взаимосвязь дает хороший путь для доказательства, что $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ и \mathbb{O} являются единственными нормированными алгебрами с делением. Это также ключевой момент для понимания геометрического значения октонионов.

Чтобы увидеть эту связь, во-первых предположим, что \mathbb{K} – нормированная алгебра с делением. Левое умножения на любой элемент $a \in \mathbb{K}$ дает оператор

$$L_a : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}, \quad x \mapsto ax.$$

Если $\|a\| = 1$, оператор L_a сохраняет норму, поэтому он отображает единичную сферу \mathbb{K} на себя. Поскольку \mathbb{K} – алгебра с делением, можно найти оператор этой формы, отображающий любую точку на единичной сфере в любую другую точку. Единичная сфера в \mathbb{K} может иметь столь богатую симметрию в единственном случае, если норма на \mathbb{K} возникает из скалярного произведения. Даже лучше, это скалярное произведение является единственным, поскольку можно использовать поляризационное тождество

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{2}(\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2)$$

для восстановления произведения из нормы.

Используя это скалярное произведение, будем говорить, что элемент $a \in \mathbb{K}$ **мнимый**, если он ортогонален элементу 1, и пусть $\text{Im}(\mathbb{K})$ будет пространством мнимых элементов \mathbb{K} . Можно также представить $\text{Im}(\mathbb{K})$ как касательное пространство единичной сферы в \mathbb{K} в точке 1. Имеется хорошее следствие: поскольку $a \mapsto L_a$ отображает единичную сферу в \mathbb{K} на группу Ли ортогональных преобразований \mathbb{K} , оно должно отсылать (send) $\text{Im}(\mathbb{K})$ к алгебре Ли кососопряженных (skew-adjoint) преобразований \mathbb{K} . Кратко, L_a кососопряженная всегда, когда a мнимое.

Связь с алгебрами Клиффорда проявляется, когда мы вычисляем квадрат от L_a для $a \in \text{Im}(\mathbb{K})$. Это проще всего сделать, когда a имеет норму 1. Тогда L_a является одновременно ортогональной и кососопряженной. Для любого ортогонального преобразования мы можем найти некоторый ортонормированный базис, в котором его матрица блочно-диагональна и строится из 2×2 блоков которые выглядят так:

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

и возможно из 1×1 блока вида (1). Такое преобразование может быть кососопряженным только тогда, когда оно состоит целиком из 2×2 блоков формы

$$\pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

В этом случае, его квадрат равен -1 . Мы, таким образом, имеем $L_a^2 = -1$, когда $a \in \text{Im}(\mathbb{K})$ имеет норму 1. Следовательно,

$$L_a^2 = -\|a\|^2$$

для всех $a \in \text{Im}(\mathbb{K})$. Таким образом, мы получили представление клиффордовой алгебры $\text{Cliff}(\text{Im}(\mathbb{K}))$ на \mathbb{K} . Любая n -мерная нормированная алгебра с делением, таким образом, даёт n -мерное представление $\text{Cliff}(n - 1)$. Как мы увидим далее, это накладывает большие ограничения.

Мы уже описали клиффордовы алгебры по $\text{Cliff}(2)$ включительно. Дальнейшие вычисления [54, 78] дают следующую таблицу, в которой мы используем $A[n]$ для обозначения $n \times n$ матриц с элементами из алгебры A :

n	0	1	2	3	4	5	6	7
$\text{Cliff}(n)$	\mathbb{R}	\mathbb{C}	\mathbb{H}	$\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$	$\mathbb{H}[2]$	$\mathbb{C}[4]$	$\mathbb{R}[8]$	$\mathbb{R}[8] \oplus \mathbb{R}[8]$

Таблица 2 – Клиффордовы Алгебры

Начиная с размерности 8, происходит нечто изумительное: таблица продолжается следующим образом:

$$\text{Cliff}(n + 8) \cong \text{Cliff}(n) \otimes \mathbb{R}[16].$$

Другими словами, $\text{Cliff}(n + 8)$ состоит из 16×16 матриц с элементами из $\text{Cliff}(n)$. Такое 8-периодическое поведение было открыто Картаном в 1908 [16], но мы позволим себе называть это периодичностью Ботта, поскольку она имеет множество далеко идущих топологических приложений, некоторые из которых открыл Ботт.

Поскольку клиффордовы алгебры строятся из матричных алгебр над \mathbb{R}, \mathbb{C} и \mathbb{H} , легко определить их представления. Любое представление является прямой суммой неприводимых представлений. Единственное неприводимое представление $\mathbb{R}[n]$ есть очевидное представление посредством матричного умножения на \mathbb{R}^n . Подобным образом, единственным неприводимым представлением $\mathbb{C}[n]$ является очевидное представление на \mathbb{C}^n , и единственным неприводимым представлением $\mathbb{H}[n]$ является очевидное представление на \mathbb{H}^n .

Взглянув на вышеприведённую таблицу, мы видим что если только n не равно 3 или 7 по модулю 8, $\text{Cliff}(n)$ является действительной, комплексной или кватернионной матричной алгеброй, так что она имеет единственное неприводимое представление. По причинам, разъяснённым ниже, это неприводимое представление известно как пространство **пиноров** и обозначается P_n . Когда n равно 3 или 7 по модулю 8, алгебра $\text{Cliff}(n)$ является прямой суммой двух действительных или кватернионных матричных алгебр, так что она имеет два неприводимых представления, которые мы называем **положительными пинорами** P_n^+ и **отрицательными пинорами** P_n^- . Мы суммируем эти результаты в следующей таблице:

n	$\text{Cliff}(n)$	неприводимые представления
0	\mathbb{R}	$P_0 = \mathbb{R}$
1	\mathbb{C}	$P_1 = \mathbb{C}$
2	\mathbb{H}	$P_2 = \mathbb{H}$
3	$\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$	$P_3^+ = \mathbb{H}, P_3^- = \mathbb{H}$
4	$\mathbb{H}[2]$	$P_4 = \mathbb{H}^2$
5	$\mathbb{C}[4]$	$P_5 = \mathbb{C}^4$
6	$\mathbb{R}[8]$	$P_6 = \mathbb{R}^8$
7	$\mathbb{R}[8] \oplus \mathbb{R}[8]$	$P_7^+ = \mathbb{R}^8, P_7^- = \mathbb{R}^8$

Таблица 3 – Пинорные представления

Исследуя эту таблицу, мы видим, что в пределах размерностей, указанных в таблице, n -мерное представление $\text{Cliff}(n-1)$ существует только для $n = 1, 2, 4$, и 8 . Как насчёт высших размерностей? Согласно периодичности Ботта, неприводимые представления $\text{Cliff}(n+8)$ получаются при помощи тензорного умножения $\text{Cliff}(n)$ на \mathbb{R}^{16} . Это приводит к умножению размерности на 16 , так что легко проверить, что для $n > 8$ неприводимые представления $\text{Cliff}(n-1)$ всегда имеют размерность большую n .

Следовательно, нормированные алгебры с делением возможны только в размерностях $1, 2, 4$, и 8 . Сконструировав $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ и \mathbb{O} , мы также знаем, что нормированные алгебры с делением *существуют* в этих размерностях. Остаётся единственный вопрос, являются ли они *уникальными*. Для этого поможет более глубоко исследовать отношение между нормированными алгебрами с делением и конструкцией Кэли-Диксона. В последующем, мы обрисует подход, основанный на идеях, изложенных в книге Шпрингера и Фельдкампта [90].

Для начала предположим, что \mathbb{K} – нормированная алгебра с делением. Тогда имеется единственный линейный оператор $*$: $\mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ такой, что $1^* = 1$ и $a^* = -a$ для $a \in \text{Im}(\mathbb{K})$. При помощи некоторых вычислений можно доказать, что это превращает \mathbb{K} в хорошо нормированную $*$ -алгебру.

Далее, предположим, что \mathbb{K}_0 – некоторая подалгебра нормированной алгебры с делением \mathbb{K} . Нетрудно убедиться, что \mathbb{K}_0 является хорошо нормированной $*$ -алгеброй в собственных пределах. Если \mathbb{K}_0 не является всей \mathbb{K} , можно найти элемент $i \in \mathbb{K}$, который ортогонален любому элементу из \mathbb{K}_0 . Без потери общности, мы будем полагать, что этот элемент имеет норму, равную единице. Поскольку этот элемент i ортогонален к $1 \in \mathbb{K}_0$, он является мнимым. Из определения $*$ -оператора следует, что $i^* = -i$, и из ранее полученных в этой секции результатов мы имеем $i^2 = -1$. Дальнейшими вычислениями можно показать, что для всех $a, a' \in \mathbb{K}_0$ мы имеем

$$a(ia') = i(a^*a'), \quad (ai)a' = (aa^*)i, \quad (ia)(a'i^{-1}) = (aa')^*$$

Первый же взгляд на уравнение (4) обнаруживает, что это есть в точности соотношения, определяющие конструкцию Кэли-Диксона! При небольшом размышлении оказывается, что подалгебра \mathbb{K} , порождённая \mathbb{K}_0 и i , изоморфна (как $*$ -алгебра) \mathbb{K}'_0 , т. е. $*$ -алгебре, полученной из \mathbb{K}_0 при помощи конструкции Кэли-Диксона.

Таким образом, всякий раз, когда мы имеем нормированную алгебру с делением \mathbb{K} , мы можем найти цепочку подалгебр $\mathbb{R} = \mathbb{K}_0 \subset \mathbb{K}_1 \subset \dots \subset \mathbb{K}_n = \mathbb{K}$ такую, что $\mathbb{K}_{i+1} \cong \mathbb{K}'_i$. Чтобы построить \mathbb{K}_{i+1} , нужно всего лишь выбрать элемент единичной нормы из \mathbb{K} , который ортогонален любому элементу из \mathbb{K}_i . Следовательно, единственными нормированными алгебрами с делением размерности $1, 2, 4$ и 8 являются $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ и \mathbb{O} . Это также даёт другое доказательство того, что не существует нормированных алгебр с делением других размерностей: если бы такие были, они были бы 16 -мерными, а именно \mathbb{O}' – седенионы. Но как упоминалось в разделе 2.2, можно непосредственно убедиться в том, что седенионы не являются алгеброй с делением.

2.4 Спиноры и тройственности

Неассоциативная алгебра с делением может показаться слишком странным предметом, чтобы беспокоиться по ее поводу, однако понятие тройственности (triality) позволяет ей выглядеть немного более естественно. Понятие двойственности (дуальности, duality) играет важную роль повсюду в линейной алгебре. Понятие тройственности похоже на него, но значительно хитроумнее (subtler). Пусть даны два векторных пространства V_1 и V_2 , тогда можно определить **двойственность** как билинейное отображение

$$f: V_1 \times V_2 \rightarrow \mathbb{R},$$

которое не вырождено, в том смысле, что если зафиксировать любой из аргументов на произвольном ненулевом значении, то линейный функционал, порождаемый на другом векторном пространстве, также является ненулевым. Подобным образом, для заданных векторных пространств V_1, V_2 и V_3 , **тройственность** есть трилинейное отображение

$$t: V_1 \times V_2 \times V_3 \rightarrow \mathbb{R},$$

которое невырождено в том смысле, что если зафиксировать произвольные два аргумента на любых ненулевых значениях, то линейный функционал, индуцированный на третьем пространстве, также является ненулевым.

Двойственности возникают легко. Тройственности возникают гораздо реже. Допустим, у нас есть тройственность

$$t: V_1 \times V_2 \times V_3 \rightarrow \mathbb{R}.$$

Посредством дуализации мы можем превратить его в билинейное отображение

$$m: V_1 \times V_2 \rightarrow V_3^*$$

которое мы называем "умножением". Благодаря невырожденности нашей тройственности, левое умножение на любой ненулевой элемент из V_1 задаёт изоморфизм из V_2 на V_3^* . Аналогично, правое умножение на любой ненулевой элемент из V_2 определяет изоморфизм из V_1 на V_3^* . Если мы выберем ненулевые элементы $e_1 \in V_1$ и $e_2 \in V_2$, мы можем тем самым отождествить пространства V_1 , V_2 и V_3^* с одним векторным пространством, скажем V . Заметим, что это отождествляет все три вектора $e_1 \in V_1$, $e_2 \in V_2$ и $e_1 e_2 \in V_3^*$ с одним и те же вектором $e \in V$. Мы, таким образом, получили произведение

$$m: V \times V \rightarrow V$$

для которого e является левой и правой единицей. Поскольку левое или правое умножение на любой ненулевой элемент является изоморфизмом, V является теперь алгеброй с делением! Обратное, любая алгебра с делением определяет тройственность.

Из теоремы 3 следует, что тройственности возникают только в размерностях 1, 2, 4 или 8. Это весьма глубокая теорема. Для сравнения, классификация Гурвица *нормированных* алгебр с делением доказывается легко. И не удивительно, поскольку они соответствуют частному виду тройственности, который мы называем "нормированной" тройственностью.

Точнее, **нормированная тройственность** состоит из пространств со скалярным произведением V_1, V_2, V_3 , снабжённых трилинейным отображением $t: V_1 \times V_2 \times V_3 \rightarrow \mathbb{R}$ с

$$|t(v_1, v_2, v_3)| \leq \|v_1\| \|v_2\| \|v_3\|,$$

и таким, что для всех v_1, v_2 существует $v_3 \neq 0$, для которого эта грань достигнута (bound is attained) – и аналогично для циклических перестановок 1, 2, 3. Для заданной нормированной тройственности выбор единичных векторов в любых двух из пространств V_i позволяет отождествить все три пространства и получить нормированную алгебру с делением. Обратное, любая нормированная алгебра с делением даёт нормированную тройственность.

Однако, откуда возникают нормированные тройственности? Они приходят из теории спиноров! Из раздела 2.3 мы уже знаем, что любая n -мерная нормированная алгебра с делением является представлением $\text{Cliff}(n-1)$, так что имеет смысл поискать нормированные тройственности здесь. На самом деле, представления $\text{Cliff}(n-1)$ дают определённые представления $\text{Spin}(n)$, двойного накрытия группы вращений n измерениях. Они называются "спинорами". Как мы увидим, соотношение между спинорами и векторами даёт прекрасный способ конструирования нормированных тройственностей в размерностях 1, 2, 4 и 8.

Чтобы понять, как это делается, сначала допустим, что $\text{Pin}(n)$ – группа внутри $\text{Cliff}(n)$, состоящая из всех произведений единичных векторов из \mathbb{R}^n . Эта группа является двойным накрытием ортогональной группы $O(n)$, где для любого заданного единичного вектора $v \in \mathbb{R}^n$, мы отображаем оба $\pm v \in \text{Pin}(n)$ в элемент $O(n)$, отражающий поперёк (reflects across) гиперплоскости, перпендикулярной к v . Поскольку каждый элемент $O(n)$ является произведением отражений, это на самом деле гомоморфизм.

Далее, пусть $\text{Spin}(n) \subset \text{Pin}(n)$ – подгруппа, состоящая из всех элементов, являющихся произведениями чётного числа единичных векторов в \mathbb{R}^n . Элемент из $O(n)$ имеет определитель, равный единице, если и только если (iff) он является произведением чётного числа отражений, так что точно так же, как $\text{Pin}(n)$ является двойным накрытием $O(n)$, $\text{Spin}(n)$ является двойным накрытием $\text{SO}(n)$. Вместе с неприличной французской шуткой, которую мы не будем разъяснять, эта аналогия является источником терминов 'Pin' и 'pinor'.

Поскольку $\text{Pin}(n)$ находится внутри $\text{Cliff}(n)$, неприводимые представления $\text{Cliff}(n)$ ограничиваются представлениями $\text{Pin}(n)$, которые всё ещё оказываются неприводимыми. Они опять называются **пинорами**, и мы знаем, чему они равны из Таблицы 3. Подобным образом, $\text{Spin}(n)$ находится внутри подалгебры

$$\text{Cliff}_0(n) \subseteq \text{Cliff}(n),$$

состоящей из всех линейных комбинаций произведений чётного числа векторов из \mathbb{R}^n . Таким образом, неприводимые представления $\text{Cliff}_0(n)$ ограничены представлениями $\text{Spin}(n)$, которые всё ещё оказываются неприводимыми. Они называются **спинорами** – но мы предупреждаем читателя, что этот термин уже используется для обозначения многих незначительно различающихся разновидностей этого понятия.

На самом деле, существует изоморфизм

$$\phi: \text{Cliff}(n-1) \rightarrow \text{Cliff}_0(n),$$

заданный следующим образом:

$$\phi(e_i) = e_i e_n, \quad 1 \leq i \leq n-1,$$

где $\{e_i\}$ – ортонормированный базис в \mathbb{R}^n . Таким образом, спиноры в n измерениях – это то же самое, что и пиноры в $n-1$ измерениях! Таблица 3, следовательно, приводит к таблице 4, в которой мы используем аналогичные обозначения, но с ‘ S ’ вместо ‘ P ’:

n	$\text{Cliff}_0(n)$	неприводимые представления
1	\mathbb{R}	$S_1 = \mathbb{R}$
2	\mathbb{C}	$S_2 = \mathbb{C}$
3	\mathbb{H}	$S_3 = \mathbb{H}$
4	$\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$	$S_4^+ = \mathbb{H}, S_4^- = \mathbb{H}$
5	$\mathbb{H}[2]$	$S_5 = \mathbb{H}^2$
6	$\mathbb{C}[4]$	$S_6 = \mathbb{C}^4$
7	$\mathbb{R}[8]$	$S_7 = \mathbb{R}^8$
8	$\mathbb{R}[8] \oplus \mathbb{R}[8]$	$S_8^+ = \mathbb{R}^8, S_8^- = \mathbb{R}^8$

Таблица 4 – Спинорные представления

Мы называем S_n^+ и S_n^- **правыми** и **левыми** спинорными представлениями. Для $n > 8$ можно вычислить спинорные представления, используя периодичность Ботта:

$$S_{n+8} \cong S_n \otimes \mathbb{R}^{16}$$

и подобным же образом для правых и левых спиноров.

Теперь, кроме своих пинорных представлений, группа $\text{Pin}(n)$ имеет также неприводимое представление, где мы сперва применяем гомоморфизм $2-1 \text{ Pin}(n) \rightarrow O(n)$ и затем используем очевидное представление $O(n)$ на \mathbb{R}^n . Мы называем его **векторным** представлением V_n . Как векторное пространство V_n есть просто \mathbb{R}^n и $\text{Cliff}(n)$ порождается \mathbb{R}^n , поэтому мы имеем включение (inclusion)

$$V_n \hookrightarrow \text{Cliff}(n).$$

Используя это, мы можем ограничить действие клиффордовой алгебры на пиноры отображением

$$\begin{aligned} m_n: V_n \times P_n^\pm &\rightarrow P_n^\pm & n \equiv 3, 7 \pmod{8} \\ m_n: V_n \times P_n &\rightarrow P_n & \text{в противном случае.} \end{aligned}$$

Это отображение на самом деле является сплетающим (intertwining) оператором между представлениями $\text{Pin}(n)$. Если мы ограничим векторное представление подгруппой $\text{Spin}(n)$, оно останется неприводимым. Это не всегда верно для пинорных представлений, но мы всегда можем

разложить их в прямую сумму спинорных представлений. Применяя это разложение к отображению m_n , мы получаем отображение

$$\begin{aligned} m_n: V_n \times S_n^\pm &\rightarrow S_n^\mp & n \equiv 0, 4 \pmod{8} \\ m_n: V_n \times S_n &\rightarrow S_n & \text{противном случае.} \end{aligned}$$

Все спинорные представления, встречающиеся здесь, являются самодвойственными (self-dual, самодуальными), так что можно провести дуализацию вышеприведённых отображений и переинтерпретировать их как трilinearные отображения

$$\begin{aligned} t_n: V_n \times S_n^+ \times S_n^- &\rightarrow \mathbb{R} & n \equiv 0, 4 \pmod{8} \\ t_n: V_n \times S_n \times S_n &\rightarrow \mathbb{R} & \text{в противном случае.} \end{aligned}$$

Эти трilinearные отображения являются кандидатами в тройственности! Однако, они могут быть тройственностями лишь когда размерность векторного представления согласована с размерностью подходящего спинорного представления. В пределах, охваченных вышеприведённой таблицей, это имеет место только для $n = 1, 2, 4, 8$. В этих случаях мы на самом деле получаем нормированные тройственности, которые в свою очередь порождают нормированные алгебры с делением:

$$\begin{aligned} t_1: V_1 \times S_1 \times S_1 &\rightarrow \mathbb{R} & \text{дает } \mathbb{R}, \\ t_2: V_2 \times S_2 \times S_2 &\rightarrow \mathbb{R} & \text{дает } \mathbb{C}, \\ t_4: V_4 \times S_4^+ \times S_4^- &\rightarrow \mathbb{R} & \text{дает } \mathbb{H}, \\ t_8: V_8 \times S_8^+ \times S_8^- &\rightarrow \mathbb{R} & \text{дает } \mathbb{O}. \end{aligned}$$

В более высоких размерностях, спинорные представления становятся больше векторных представлений, так что мы больше не получаем новых тройственностей таким способом – и конечно же, их не существует.

Из четырёх нормированных тройственностей та, которая порождает алгебру октонионов, имеет интересное свойство, которого не имеют остальные. Чтобы видеть это свойство, необходимо обратить пристальное внимание на разницу между нормированной тройственностью и нормированной алгеброй с делением. Чтобы построить нормированную алгебру с делением \mathbb{K} из нормированной тройственности $t: V_1 \times V_2 \times V_3 \rightarrow \mathbb{R}$, необходимо произвольно выбрать единичные вектора в двух из трёх пространств, так что группа симметрии \mathbb{K} меньше, чем группа симметрии t . Более точно, определим **автоморфизм** нормированной тройственности $t: V_1 \times V_2 \times V_3 \rightarrow \mathbb{R}$ как тройку сохраняющих норму отображений $f_i: V_i \rightarrow V_i$ таких, что

$$t(f_1(v_1), f_2(v_2), f_3(v_3)) = t(v_1, v_2, v_3)$$

для всех $v_i \in V_i$. Эти автоморфизмы образуют группу, которую мы называем $\text{Aut}(t)$. Если мы конструируем нормированную алгебру с делением \mathbb{K} из t выбором единичных векторов $e_1 \in V_1, e_2 \in V_2$, мы имеем

$$\text{Aut}(\mathbb{K}) \cong \{(f_1, f_2, f_3) \in \text{Aut}(t) : f_1(e_1) = e_1, f_2(e_2) = e_2\}.$$

В частности, оказывается, что

$$\begin{aligned} 1 &\cong \text{Aut}(\mathbb{R}) \subseteq \text{Aut}(t_1) \cong \{(g_1, g_2, g_3) \in \text{O}(1)^3 : g_1 g_2 g_3 = 1\} \\ \mathbb{Z}_2 &\cong \text{Aut}(\mathbb{C}) \subseteq \text{Aut}(t_2) \cong \{(g_1, g_2, g_3) \in \text{U}(1)^3 : g_1 g_2 g_3 = 1\} \times \mathbb{Z}_2 \\ \text{SO}(3) &\cong \text{Aut}(\mathbb{H}) \subseteq \text{Aut}(t_4) \cong \text{Sp}(1)^3 / \{\pm(1, 1, 1)\} \\ \text{G}_2 &\cong \text{Aut}(\mathbb{O}) \subseteq \text{Aut}(t_8) \cong \text{Spin}(8), \end{aligned} \tag{5}$$

где

$$\text{O}(1) \cong \mathbb{Z}_2, \quad \text{U}(1) \cong \text{SO}(2), \quad \text{Sp}(1) \cong \text{SU}(2)$$

есть единичные сферы в \mathbb{R} , \mathbb{C} и \mathbb{H} соответственно – единственные сферы, которые являются группами Ли. G_2 – просто другое название для группы автоморфизмов алгебры октонионов; мы будем изучать эту группу в разделе 4.1. Более широкая группа $\text{Spin}(8)$ действует как автоморфизмы на тройственности, порождающей алгебру октонионов, причём действует интересным образом. Для любого заданного элемента $g \in \text{Spin}(8)$, существуют единственные элементы $g_{\pm} \in \text{Spin}(8)$ такие, что

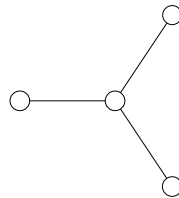
$$t(g(v_1), g_+(v_2), g_-(v_3)) = t(v_1, v_2, v_3)$$

для всех $v_1 \in V_8, v_2 \in S_8^+$, и $v_3 \in S_8^-$. Более того, отображения

$$\alpha_{\pm}: g \rightarrow g_{\pm}$$

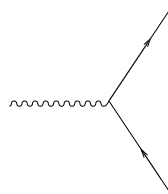
являются внешними автоморфизмами $\text{Spin}(8)$. На самом деле, $\text{Out}(\text{Spin}(8))$ является группой перестановок трёх символов, и существуют внешние автоморфизмы которые имеют своим результатом перестановку векторного, левого спинорного и правого спинорного представлений каким угодно образом; α_+ и α_- входят в их число.

Вообще говоря, внешние автоморфизмы простых групп Ли возникают из симметрий их диаграмм Дынкина. Из всех простых групп Ли $\text{Spin}(8)$ имеет самую симметричную диаграмму Дынкина! Она выглядит следующим образом:



Здесь три внешние вершины соответствуют векторному, левому спинорному и правому спинорному представлениям $\text{Spin}(8)$, в то время как центральный узел соответствует присоединенному представлению (adjoint representation) – то есть, представлению $\text{Spin}(8)$ на её собственной алгебре Ли, более известной как $\mathfrak{so}(8)$. Внешние автоморфизмы, соответствующие симметриям этой диаграммы, были открыты в 1925 году Картаном [17], который назвал эти симметрии **тройственностями**. Более общее понятие "тройственности", которое мы здесь обсуждаем, возникло позже, по-видимому благодаря Адамсу [2].

Конструкция алгебр с делением из тройственностей имеет соблазнительные связи с физикой. В Стандартной модели физики частиц, все частицы, кроме бозона Хиггса, преобразуются как векторы или спиноры. Векторные частицы называются также "калибровочными бозонами" и они служат переносчиками сил в Стандартной Модели. Спинорные частицы называются ещё "фермионами", и они соответствуют основным формам материи: кваркам и лептонам. Взаимодействие между материей и силами описывается трехлинейной схемой, включающей два спинора и один вектор. Эта схема часто изображается в виде Фейнмановской диаграммы:



где прямые линии обозначают спиноры, а волнистая – вектор. Самым известным примером является процесс поглощения или излучения фотона электроном.

Восхитительно, что математика одного и того же типа может быть использована как для построения нормированных алгебр с делением, так и для описания взаимодействия между материей и силами. Может ли это быть важным для физики? На первый взгляд, проблема здесь заключается в том, что в физике используются спиноры, связанные с группой Лоренца, а не с группой вращения, в силу того, что пространство-время имеет лоренцеву, а не евклидову метрику. Однако, в разделе 3.3 мы описываем способ обхода этой проблемы. Точно так же, как

октонионы дают спинорное представление $\text{Spin}(8)$, пары октонионов дают спинорные представления $\text{Spin}(9, 1)$. Это одна из причин, по которой так много физических теорий лучше всего работают в десятимерном пространстве! Примеры включают в себя теорию суперструн [29, 46], суперсимметричные калибровочные теории [35, 65, 85] и расширение Джеффри Диксона Стандартной модели, основанное на алгебре $\mathbb{C} \otimes \mathbb{H} \otimes \mathbb{O}$, в которой три силы естественно возникают из трёх множителей в этом тензорном произведении [31].

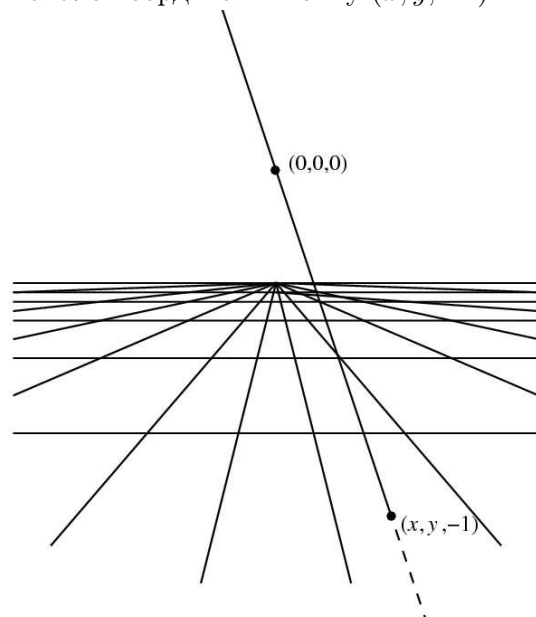
3 Октонионная проективная геометрия

Проективная геометрия – освященный веками предмет, восходящий к исследованиям перспективы живописцами Возрождения. Для наших глаз параллельные прямые – например, железнодорожные рельсы – представляются сходящимися на бесконечности. Если сменить точку наблюдения, расстояния и углы оказываются другими, но точки остаются точками и прямые остаются прямыми. Эти факты наводят на мысль о модификации евклидовой планиметрии, основанной на понятиях множества точек, множества прямых и отношении, посредством которого "точка лежит на прямой", и удовлетворяющей следующим аксиомам:

- Для любых двух разных точек имеется единственная прямая, на которой лежат они обе.
- Для любых двух разных прямых имеется единственная точка, лежащая на них обеих.
- Существуют четыре точки такие, что никакие три из них не лежат на одной прямой.
- Существуют четыре прямые, никакие три из которых не имеют точки, лежащей на всех трёх этих прямых.

Структура, удовлетворяющая таким аксиомам, называется **проективной плоскостью**. Часть обаяния этого определения заключается в том, что оно "самодуально": если мы поменяем друг на друга слова "точка" и "прямая" (и то же сделаем с отношением кто на ком лежит), определение останется тем же самым.

Мы уже встречали один, наименьший из всех, пример проективной плоскости в разделе 2.1: плоскость Фано. Пример, тесно связанный с перспективой, – это вещественная проективная плоскость \mathbb{RP}^2 . Здесь точки являются прямыми, проходящими через начало координат в \mathbb{R}^3 , прямые – это плоскости, проходящие через начало координат в \mathbb{R}^3 , и отношением "лежать на" является включение (inclusion). Каждая точка $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ определяет точку в \mathbb{RP}^2 , а именно прямую в \mathbb{R}^3 , содержащую начало координат и точку $(x, y, -1)$:



Имеются также и другие точки в \mathbb{RP}^2 , "точки на бесконечности", соответствующие прямым, проходящим через начало координат в \mathbb{R}^3 , которые не пересекают плоскость $\{z = -1\}$. Например, любая точка на горизонте на рисунке определяет точку на бесконечности.

Проективная геометрия в высших размерностях также интересна. Можно определить **проективное пространство** при помощи следующих аксиом:

- Для любых двух разных точек p, q имеется единственная прямая pq , на которой лежат они обе.
- Для любой прямой имеются как минимум три точки, лежащие на этой прямой.
- Если a, b, c, d являются разными точками и имеется точка, лежащая одновременно на ab и cd , то существует точка, лежащая одновременно на ac и bd .

Для данного проективного пространства и множества S точек в этом пространстве определим **накрытие** (span) S как наименьшее множество T точек, содержащее S , такое, что если a и b лежат в T , то в нём же лежат все остальные точки прямой ab . **Размерность** проективного пространства по определению на единицу меньше, чем минимальная мощность (cardinality) множества, которое охватывает (натягивает, to span) всё пространство. Читатель может с радостью убедиться, что двумерное проективное пространство – это то же самое, что и проективная плоскость [44].

Если \mathbb{K} – произвольное поле, то существует n -мерное проективное пространство, называемое $\mathbb{K}\mathbb{P}^n$, где точками являются прямые, проходящие через начало координат в \mathbb{K}^{n+1} , прямыми являются плоскости, проходящие через начало координат в \mathbb{K}^{n+1} , и отношением "лежать на" является включение. На самом деле, эта конструкция работает даже тогда, когда \mathbb{K} является всего лишь **телом** (skew field): кольцом, таким что каждый ненулевой элемент имеет левый и правый обратный ему элемент относительно умножения. Необходимо всего лишь быть немного аккуратным при определении прямых и плоскостей, проходящих через начало координат в \mathbb{K}^{n+1} . Чтобы это проделать, мы обычным образом используем тот факт, что \mathbb{K}^{n+1} есть \mathbb{K} -бимодуль. Мы полагаем, что прямой, проходящей через начало, является любое множество

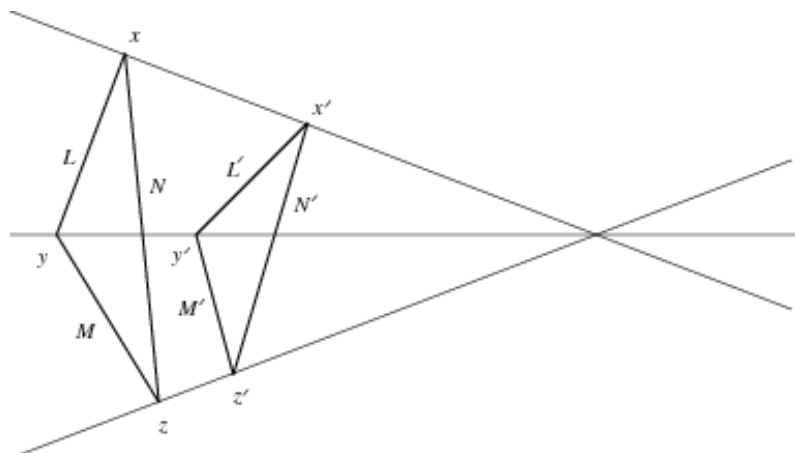
$$L = \{\alpha x : \alpha \in \mathbb{K}\},$$

где $x \in \mathbb{K}^{n+1}$ – не нуль, и что плоскостью, проходящей через начало координат, является любое множество

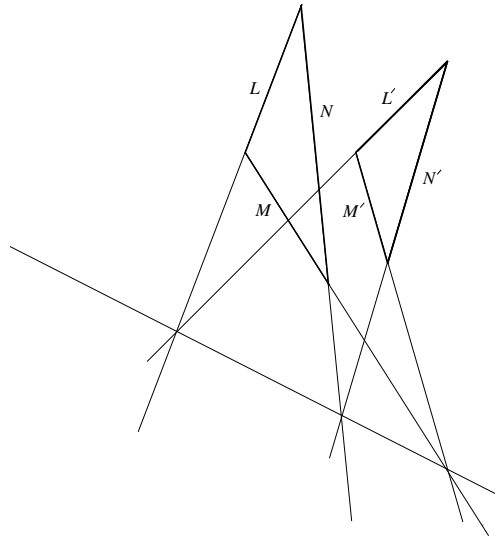
$$P = \{\alpha x + \beta y : \alpha, \beta \in \mathbb{K}\},$$

где $x, y \in \mathbb{K}^{n+1}$ – такие элементы, что из $\alpha x + \beta y = 0$ следует $\alpha, \beta = 0$.

Из данного примера возникает естественный вопрос, *любое* ли проективное n -мерное пространство представляет собой форму $\mathbb{K}\mathbb{P}^n$ для некоторого тела \mathbb{K} . Ответ на этот вопрос весьма неожидан: да, но только если $n > 2$. Проективные плоскости являются более хитроумными (subtle) [91]. Проективная плоскость возникает из тела тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет дополнительной аксиоме, т. н. аксиоме Дезарга, которая заключается в следующем. Определим **треугольник** как тройку точек, которые не лежат все сразу на одной прямой. Теперь, предположим, мы имеем два треугольника xyz и $x'y'z'$. Стороны каждого треугольника определяют три прямые скажем LMN и $L'M'N'$. Иногда прямая через x и x' , прямая через y и y' , и прямая через z и z' будут все пересекаться в одной и той же точке:



Аксиома Дезарга утверждает, что всякий раз в таком случае имеет место ещё и следующее: пересечение L и L' , пересечение M и M' , и пересечение N и N' все лежат на одной прямой:



Эта аксиома автоматически выполняется для проективных пространств размерности 3 и более, но не для проективных плоскостей. Проективные плоскости, удовлетворяющие этой аксиоме, называются **дезарговыми**.

Аксиома Дезарга симпатична, но как она связана с телами? Предположим, мы начнём с проективной плоскости P и попробуем восстановить из неё тело. Мы можем выбрать любую прямую L , выбрать на ней три различные точки, назвать их $0, 1$, и ∞ , и положить $\mathbb{K} = L - \{\infty\}$. Копируя геометрические конструкции, которые работают для $P = \mathbb{RP}^2$, мы можем определить сложение и умножение точек на \mathbb{K} . Вообще говоря, полученная структура $(\mathbb{K}, +, 0, \cdot, 1)$ не будет телом. Даже хуже, она будет зависеть от сделанного нами выбора нетривиальным образом. Однако, если мы примем аксиому Дезарга, эти проблемы исчезают. Мы таким образом получаем однозначное соответствие между классами изоморфизмов тел и классами изоморфизмов дезарговых проективных плоскостей.

Проективная геометрия была модной в 1800-х годах, когда в неё внесли значительный вклад такие знаменитости, как Понселе, Брайансон, Штайнер и фон Штаудт. Позже она была оставлена в тени другими формами геометрии. Однако, работа над этой темой продолжалась, и в 1933 Рут Муфанг сконструировала замечательный пример недезарговой проективной плоскости, используя октонионы [74]. Как мы увидим, эта проективная плоскость заслуживает наименования $\mathbb{O}\mathbb{P}^2$.

Тридцатые годы XX столетия выявили другую причину интереса к проективной геометрии: квантовая механика! Квантовая механика мучительно отлична от классической ньютоновой механики, которую мы приучились любить. В классической механике, наблюдаемые величины описываются вещественнозначными функциями. В квантовой механике они часто описываются эрмитовыми $n \times n$ комплексными матрицами. В обоих случаях, наблюдаемые величины замкнуты относительно сложения и умножения на действительные скаляры. Однако, в квантовой механике наблюдаемые величины не образуют ассоциативной алгебры. Тем не менее, можно возводить наблюдаемые величины в степень и из операции возведения в квадрат можно сконструировать коммутативное, но не ассоциативное произведение:

$$a \circ b = \frac{1}{2}((a + b)^2 - a^2 - b^2) = \frac{1}{2}(ab + ba).$$

В 1932 Паскаль Йордан попытался более глубоко понять эту ситуацию при помощи выделения минимального набора аксиом, которым должна удовлетворять "алгебра наблюдаемых величин" [57]. Он изобрёл определение того, что теперь называется **формально действительной йордановой алгеброй**: коммутативная и степенно-ассоциативная алгебра, удовлетворяющая

$$a_1^2 + \dots + a_n^2 = 0 \implies a_1 = \dots = a_n = 0$$

для всех n . Последнее условие снабжает эту алгебру частичной упорядоченностью: если мы запишем $a \leq b$, когда элемент $b - a$ является суммой квадратов, это значит, что из $a \leq b$ и $b \leq a$ следует $a = b$. Хотя это не очевидно, любая формально действительная йорданова алгебра удовлетворяет тождеству

$$a \circ (b \circ a^2) = (a \circ b) \circ a^2$$

для всех элементов a и b . Любая коммутативная алгебра, удовлетворяющая этому тождеству, называется **йордановой алгеброй**. Йордановы алгебры автоматически обладают степенной ассоциативностью.

В 1934 Йордан опубликовал работу вместе с фон Нейманом и Вигнером, в которой дал классификацию всех формально действительных йордановых алгебр [59]. Эта классификация красива и лаконична. **Идеал** в йордановой алгебре A есть подпространство $B \subseteq A$ такое, что из $b \in B$ следует, что $a \circ b \in B$ для всех $a \in A$. Йорданова алгебра A является **простой**, если её единственными идеалами являются $\{0\}$ и сама A . Любая формально действительная йорданова алгебра является прямой суммой простых алгебр. Простые формально действительные йордановы алгебры состоят из четырёх бесконечных семейств и одного исключения.

1. Алгебра $\mathfrak{h}_n(\mathbb{R})$ с произведением $a \circ b = \frac{1}{2}(ab + ba)$.
2. Алгебра $\mathfrak{h}_n(\mathbb{C})$ с произведением $a \circ b = \frac{1}{2}(ab + ba)$.
3. Алгебра $\mathfrak{h}_n(\mathbb{H})$ с произведением $a \circ b = \frac{1}{2}(ab + ba)$.
4. Алгебра $\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}$ с произведением $(v, \alpha) \circ (w, \beta) = (\alpha w + \beta v, \langle v, w \rangle + \alpha\beta)$.
5. Алгебра $\mathfrak{h}_3(\mathbb{O})$ с произведением $a \circ b = \frac{1}{2}(ab + ba)$.

Здесь мы говорим, что квадратная матрица с элементами из $*$ -алгебры A является **эрмитовой**, если она равна своей сопряжённой транспонированной, и что $\mathfrak{h}_n(A)$ обозначает эрмитовы $n \times n$ матрицы с элементами из A . Йордановы алгебры четвертого семейства называются **спиновыми факторами** (spin factors), в то время как $\mathfrak{h}_3(\mathbb{O})$ называется **исключительной йордановой алгеброй**. Эта классификация поднимает ряд очевидных вопросов. Почему природа предпочитает йордановы алгебры $\mathfrak{h}_n(\mathbb{C})$ всем остальным? И так ли это? Могли бы другие йордановы алгебры – даже исключительная алгебра – играть какую-то роль в квантовой физике? Несмотря на многие исследования, ответов на эти вопросы нет до сих пор.

Кажется, на статью Йордана вместе с фон Нейманом и Вигнером не оказало никакого влияния открытие Муфанг $\mathbb{O}\mathbb{P}^2$, но на самом деле они взаимосвязаны. **Проецирование** (проекция, projection) в формально действительной йордановой алгебре определяется как элемент p с $p^2 = p$. В знакомом случае $\mathfrak{h}_n(\mathbb{C})$, они соответствуют эрмитовым матрицам с собственными значениями 0 и 1, так что они используются для описания наблюдаемых величин, которые принимают только два значения – например, "истина" и "ложь". Это предполагает трактовку проецирований в формально действительной йордановой алгебре как высказываний (propositions) в своего рода "квантовой логике". Частичная упорядоченность помогает это сделать: для данных проекций p и q говорят, что из p следует q , если $p \leq q$.

Соотношение между йордановыми алгебрами и квантовой логикой уже интересно [34], но настоящая радость (fun) начинается, когда мы заметим, что проекции в $\mathfrak{h}_n(\mathbb{C})$ соответствуют подпространствам \mathbb{C}^n . Это устанавливает взаимосвязь с проективной геометрией [98], поскольку проекции на 1-мерные подпространства соответствуют точкам в $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$, в то время как проекции на 2-мерные подпространства соответствуют прямым. Даже лучше, можно вычислить размерность подпространства $V \subseteq \mathbb{C}^n$ из соответствующего проецирования $p: \mathbb{C}^n \rightarrow V$, используя только частичный порядок в проецированиях: V имеет размерность d , если и только если (iff) наидлиннейшая цепь различающихся проецирований

$$0 = p_0 < \dots < p_i = p$$

имеет длину $i = d$. На деле, это можно использовать в качестве определения **ранга** проецирования в любой формально действительной йордановой алгебре. Мы можем тогда попытаться сконструировать проективное пространство, точками которого являются проекции ранга-1, а

прямыми – проекции ранга-2, с отношением "лежать на", задаваемым частичной упорядоченностью \leq .

Если мы попытаемся сделать это, начиная с $\mathfrak{h}_n(\mathbb{R})$, $\mathfrak{h}_n(\mathbb{C})$ или $\mathfrak{h}_n(\mathbb{H})$, мы добьемся успеха, если $n \geq 2$, и мы получим проективные пространства $\mathbb{R}P^n$, $\mathbb{C}P^n$ и $\mathbb{H}P^n$ соответственно. Если мы попробуем сделать это, начиная со спиновых факторов $\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}$, у нас получится, если $n \geq 2$, и мы получим ряд одномерных проективных пространств, относящихся к лоренцевой геометрии. Наконец, в 1949 году Йордан [58] открыл, что если мы попробуем эту конструкцию начиная с исключительной йордановой алгебры, мы получим проективную плоскость, открытую Муфанг: $\mathbb{O}P^2$.

В дальнейшем мы опишем октонионную проективную плоскость и исключительную йорданову алгебру более детально. Но сначала рассмотрим октонионную проективную прямую и йорданову алгебру $\mathfrak{h}_2(\mathbb{O})$.

3.1 Проективные прямые

Одномерное проективное пространство называется **проективной прямой**. Проективные прямые не очень интересны с точки зрения аксиоматической проективной геометрии, поскольку они имеют только одну прямую, на которой лежат все точки. Тем не менее, они могут быть интересны с точки зрения геометрии и топологии. Это в особенности верно для октонионной проективной прямой. Как мы увидим, это пространство имеет глубокую связь с периодичностью Ботта, а также с лоренцевой геометрией 10-мерного пространства-времени.

Предположим, что \mathbb{K} – нормированная алгебра с делением. Мы уже определили $\mathbb{K}P^1$, когда \mathbb{K} ассоциативна, но это определение плохо работает для октонионов: разумнее будет обходной путь через йордановы алгебры. Пусть $\mathfrak{h}_2(\mathbb{K})$ – пространство 2×2 эрмитовых матриц с элементами из \mathbb{K} . Легко проверить, что оно становится йордановой алгеброй с произведением $a \circ b = \frac{1}{2}(ab + ba)$. Мы можем попытаться построить проективное пространство из этой йордановой алгебры, используя конструкцию предыдущего раздела. Чтобы увидеть, удастся ли это, нам нужно изучить проекции в $\mathfrak{h}_2(\mathbb{K})$. Небольшое вычисление показывает, что кроме тривиальных проекций 0 и 1, все они имеют форму

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^*x & x^*y \\ y^*x & y^*y \end{pmatrix},$$

где $(x, y) \in \mathbb{K}^2$ имеет

$$\|x\|^2 + \|y\|^2 = 1.$$

Все эти нетривиальные проекции имеют ранг 1, так что они являются точками нашего предполагаемого проективного пространства. Наше предполагаемое проективное пространство имеет только одну прямую, соответствующую проекции 1, и все точки лежат на этой прямой. Легко проверить, что аксиомы проективного пространства соблюдаются. Поскольку это проективное пространство одномерно, мы успешно создали **проективную прямую над \mathbb{K}** . Мы называем множество точек этой проективной прямой $\mathbb{K}P^1$.

Для произвольного ненулевого элемента $(x, y) \in \mathbb{K}^2$, мы можем нормировать его и затем использовать вышеприведенную формулу, чтобы получить точку в $\mathbb{K}P^1$, которую мы называем $[(x, y)]$. Это позволяет нам описать $\mathbb{K}P^1$ в терминах прямых, проходящих через начало координат, как следует далее. Определим отношение эквивалентности ненулевых элементов \mathbb{K}^2 посредством

$$(x, y) \sim (x', y') \iff [(x, y)] = [(x', y')].$$

Мы называем класс эквивалентности по этому отношению **прямой, проходящей через начало координат** в \mathbb{K}^2 . Мы можем теперь отождествить точки в $\mathbb{K}P^1$ с прямыми, проходящими через начало координат в \mathbb{K}^2 .

Будьте осторожны: \mathbb{K} – октонионы, если прямая, проходящая через начало координат, содержащая (x, y) не всегда равна

$$\{(\alpha x, \alpha y) : \alpha \in \mathbb{K}\}.$$

Это верно лишь тогда, когда \mathbb{K} ассоциативно, или когда x или y равны 1. К счастью, $(x, y) \sim (y^{-1}x, 1)$ когда $y \neq 0$ и $(x, y) \sim (1, x^{-1}y)$ когда $x \neq 0$. Таким образом, в обоих случаях мы получаем конкретное описание прямой, проходящей через начало координат и содержащей (x, y) : когда $x \neq 0$, она равна

$$\{(\alpha(y^{-1}x), \alpha) : \alpha \in \mathbb{K}\},$$

и когда $y \neq 0$, она равна

$$\{(\alpha, \alpha(x^{-1}y)) : \alpha \in \mathbb{K}\}.$$

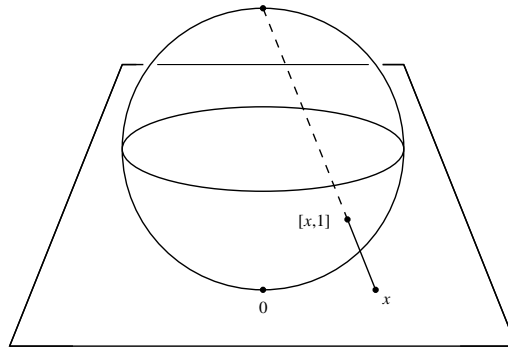
В частности, прямая, проходящая через начало координат и содержащая (x, y) , всегда является действительным векторным пространством, изоморфным \mathbb{K} .

Мы можем превратить $\mathbb{K}\mathbb{P}^1$ в многообразие следующим образом. С помощью вышеизложенных наблюдений, мы можем покрыть его двумя координатными сетками: одна, содержащая все точки вида $[(x, 1)]$, и другая, содержащая все точки вида $[(1, y)]$. Легко проверить, что $[(x, 1)] = [(1, y)]$ если и только если $y = x^{-1}$, так что функция перехода от первых координат ко вторым есть отображение $x \mapsto x^{-1}$. Поскольку эта функция перехода и обратная к ней являются гладкими на пересечении двух систем координат, $\mathbb{K}\mathbb{P}^1$ становится гладким многообразием.

Размышляя о геометрии проективных прямых, удобно визуализировать комплексный случай, поскольку $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ – просто хорошо знакомая "риманова сфера". В этом случае отображение

$$x \mapsto [(x, 1)]$$

задается стереографической проекцией:



где выбрана сфера единичного диаметра. Это отображение из \mathbb{C} в $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ является взаимно однозначным почти везде за исключением единственной точки на бесконечности, т. е. "северного полюса". Подобным образом, отображение

$$y \mapsto [(1, y)]$$

не определено для южного полюса. Соединяя первое отображение с обратным ко второму, мы получаем отображение $x \mapsto x^{-1}$, которое носит название "конформной инверсии". Южное полушарие римановой сферы состоит из всех точек $[(x, 1)]$ с $\|x\| \leq 1$, в то время как северное полушарие состоит из всех $[(1, y)]$ с $\|y\| \leq 1$. Единичные комплексные числа x дают точки $[(x, 1)] = [(1, x^{-1})]$ на экваторе.

Все эти идеи безболезненно обобщаются на $\mathbb{K}\mathbb{P}^1$ для любой нормированной алгебры с делением \mathbb{K} . Прежде всего, как гладкое многообразие $\mathbb{K}\mathbb{P}^1$ является просто сферой с размерностью, равной размерности \mathbb{K} :

$$\begin{aligned} \mathbb{R}\mathbb{P}^1 &\cong S^1 \\ \mathbb{C}\mathbb{P}^1 &\cong S^2 \\ \mathbb{H}\mathbb{P}^1 &\cong S^4 \\ \mathbb{O}\mathbb{P}^1 &\cong S^8. \end{aligned}$$

Мы можем считать ее одноточечной компактификацией (one-point compactification) \mathbb{K} . "Южное полушарие", "северное полушарие" и "экватор" \mathbb{K} описываются точно так же, как это было

сделано выше для комплексного случая. Также, как и в комплексном случае, отображения $x \mapsto [(x, 1)]$ и $y \mapsto [(1, y)]$ сохраняют углы по отношению к обычной евклидовой метрике на \mathbb{K} и к круговой метрике на сфере.

Одной из приятных особенностей $\mathbb{K}\mathbb{P}^1$ является то, что она изначально снабжена векторным расслоением (vector bundle), слой (fiber) которого над точкой $[(x, y)]$ является прямой, проходящей через начало координат и соответствующей этой точке. Это расслоение называется **каноническим линейным расслоением** (canonical line bundle), $L_{\mathbb{K}}$. Разумеется, когда мы имеем дело с конкретной алгеброй с делением, "прямая" означает копию этой алгебры с делением, так что если мы считаем их вещественными векторными расслоениями, $L_{\mathbb{R}}, L_{\mathbb{C}}, L_{\mathbb{H}}$ и $L_{\mathbb{O}}$ имеют размерности 1, 2, 4 и 8, соответственно.

Эти расслоения играют важную роль в топологии, так что лучше понимать их несколькими различными способами. Вообще, любое k -мерное вещественное векторное расслоение над S^n может быть сформировано, если взять тривиальные расслоения над северным и южным полушарием и склеить их вместе по экватору посредством отображения $f: S^{n-1} \rightarrow O(k)$. Следовательно, необходимо иметь возможность построить канонические линейные расслоения $L_{\mathbb{R}}, L_{\mathbb{C}}, L_{\mathbb{H}}$ и $L_{\mathbb{O}}$, используя отображения

$$\begin{aligned} f_{\mathbb{R}}: S^0 &\rightarrow O(1) \\ f_{\mathbb{C}}: S^1 &\rightarrow O(2) \\ f_{\mathbb{H}}: S^3 &\rightarrow O(4) \\ f_{\mathbb{O}}: S^7 &\rightarrow O(8). \end{aligned}$$

Что представляют собой эти отображения? Мы можем описать их всех одновременно. Предположим, что \mathbb{K} является нормированной алгеброй с делением размерности n . В южном полушарии $\mathbb{K}\mathbb{P}^1$ мы можем отождествить любой слой $L_{\mathbb{K}}$ с \mathbb{K} посредством отображения точки $(\alpha x, \alpha)$ на прямой $[(x, 1)]$ в элемент $\alpha \in \mathbb{K}$. Это тривиализирует каноническое линейное расслоение над южным полушарием. Аналогично, мы можем тривиализовать это расслоение над северным полушарием посредством отображения точки $(\beta, \beta y)$ на прямой $[(1, y)]$ в элемент $\beta \in \mathbb{K}$. Если $x \in \mathbb{K}$ имеет норму 1, то $[(x, 1)] = [(1, x^{-1})]$ является точкой экватора, так что мы получаем две тривиализации слоя над этой точкой. Они связаны следующим образом: если $(\alpha x, \alpha) = (\beta, \beta x^{-1})$, то $\beta = \alpha x$. Отображение $\alpha \mapsto \beta$ таким образом является правым умножением на x . Вкратце,

$$f_{\mathbb{K}}: S^{n-1} \rightarrow O(n)$$

есть просто отображение, отсылающее любой элемент единичной нормы $x \in \mathbb{K}$ на операцию правого умножения на x .

Важность отображения $f_{\mathbb{K}}$ становится наиболее ясной, если мы составим индуктивный предел групп $O(n)$, используя очевидные включения $O(n) \hookrightarrow O(n+1)$, при этом получается топологическая группа, называемая $O(\infty)$. Поскольку $O(n)$ включена в $O(\infty)$, мы можем считать $f_{\mathbb{K}}$ отображением из S^{n-1} в $O(\infty)$. Его гомотопический класс $[f_{\mathbb{K}}]$ имеет следующее изумительное свойство, упомянутое во Введении:

- $[f_{\mathbb{R}}]$ порождает $\pi_0(O(\infty)) \cong \mathbb{Z}_2$.
- $[f_{\mathbb{C}}]$ порождает $\pi_1(O(\infty)) \cong \mathbb{Z}$.
- $[f_{\mathbb{H}}]$ порождает $\pi_3(O(\infty)) \cong \mathbb{Z}$.
- $[f_{\mathbb{O}}]$ порождает $\pi_7(O(\infty)) \cong \mathbb{Z}$.

Другой хороший вид на канонические линейные расслоения $L_{\mathbb{K}}$ исходит из взгляда на их расслоения единичных сфер. Любой слой $L_{\mathbb{K}}$ естественным образом является пространством со скалярным произведением, поскольку он является прямой, проходящей через начало координат в \mathbb{K}^2 . Если взять единичную сферу в каждом слое, мы получим расслоение $(n-1)$ -сфер над $\mathbb{K}\mathbb{P}^1$, называемое **расслоением Хопфа** (Hopf bundle):

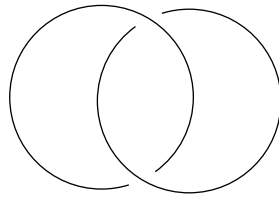
$$p_{\mathbb{K}}: E_{\mathbb{K}} \rightarrow \mathbb{K}\mathbb{P}^1$$

Проекция $p_{\mathbb{K}}$ называется **отображением Хопфа** (Hopf map). Полное пространство $E_{\mathbb{K}}$ состоит из всех единичных векторов в \mathbb{K}^2 , так что оно является сферой размерности $2n-1$. Вкратце,

расслоения Хопфа выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned}\mathbb{K} = \mathbb{R} &: S^0 \hookrightarrow S^1 \rightarrow S^1 \\ \mathbb{K} = \mathbb{C} &: S^1 \hookrightarrow S^3 \rightarrow S^2 \\ \mathbb{K} = \mathbb{H} &: S^3 \hookrightarrow S^7 \rightarrow S^4 \\ \mathbb{K} = \mathbb{O} &: S^7 \hookrightarrow S^{15} \rightarrow S^8\end{aligned}$$

Можно лучше понять отображения Хопфа, рассматривая образы инверсии (inverse image) точек. Образ инверсии $p_{\mathbb{K}}^{-1}(x)$ любой точки $x \in S^n$ есть $(n-1)$ -сфера в S^{2n-1} ; образ инверсии любой пары различающихся точек есть пара связанных сфер этого типа. Когда $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ мы получаем связанные окружности в S^3 , которые образуют знаменитое **сцепление Хопфа** (Hopf link):



Когда $\mathbb{K} = \mathbb{O}$, мы получаем пару связанных 7-сфер в S^{15} .

Для количественной характеристики такого понятия связи можно использовать "инварианты Хопфа". Предположим на время, что n – любое натуральное число, большее единицы, и пусть $f: S^{2n-1} \rightarrow S^n$ – любое гладкое отображение. Если ω – нормализованная форма объёма на S^n , то $f^*\omega$ является замкнутой n -формой на S^{2n-1} . Поскольку n -ая когомология S^{2n-1} обращается в нуль, $f^*\omega = d\alpha$ для некоторой $(n-1)$ -формы α . Определим **инвариант Хопфа** для f как число

$$H(f) = \int_{S^{2n-1}} \alpha \wedge d\alpha.$$

Легко видеть, что оно инвариантно относительно гладких гомотопий отображения f .

Чтобы видеть, как инвариант Хопфа связан с сцеплением (linking), можно вычислить его, используя гомологию, а не когомологию. Если взять любые два регулярных значения f , скажем x и y , инверсные образы этих точек являются компактными ориентированными $(n-1)$ -мерными подмногообразиями S^{2n-1} . Мы всегда можем найти ориентированное n -мерное подмногообразие $X \subset S^{2n-1}$, которое имеет границу, равную $f^{-1}(x)$ и пересекает $f^{-1}(y)$ трансверсально (поперек). Размерности X и $f^{-1}(y)$ добавляются к $2n-1$, так что их индекс пересечения (intersection number) хорошо определен. В силу двойственности между гомологией и когомогией, этот индекс равен инварианту Хопфа $H(f)$. Это показывает, что инвариант Хопфа – целое число. Более того, это показывает, что когда инвариант Хопфа не равен нулю, инверсные образы x и y сцеплены (linked).

Используя любой из этих подходов, можно вычислить инвариант Хопфа для $p_{\mathbb{C}}$, $p_{\mathbb{H}}$ и $p_{\mathbb{O}}$. Оказывается, что для них всех инвариант Хопфа равен единице. Отсюда, например, следует, что обратные образы неодинаковых точек под $p_{\mathbb{O}}$ являются нетривиально сцепленными 7-сферами в S^{15} . Из этого также следует, что $p_{\mathbb{C}}$, $p_{\mathbb{H}}$ и $p_{\mathbb{O}}$ дают нетривиальные элементы $\pi_{2n-1}(S^n)$ для $n = 2, 4$ и 8 . На самом деле, эти элементы порождают свободную от кручения часть $\pi_{2n-1}(S^n)$.

Глубокое исследование инварианта Хопфа является одним из способов доказать, что любая алгебра с делением должна иметь размерность 1, 2, 4 или 8. Можно показать, что если существует n -мерная алгебра с делением, то S^{n-1} должна быть **параллелизуемой**: она должна допускать $n-1$ поточечно линейно независимых гладких векторных полей. Можно также показать, что для $n > 1$ S^{n-1} параллелизуемо, если (и только если) существует отображение $f: S^{2n-1} \rightarrow S^n$ с $H(f) = 1$ [3, 11, 62]. Жёсткая часть показывает, что отображение из S^{2n-1} в S^n может иметь инвариант Хопфа, равный единице, только если $n = 2, 4$, или 8 . Это было доказано Адамсом приблизительно в 1958 г. [1].

3.2 $\mathbb{O}\mathbb{P}^1$ и периодичность Ботта

Мы уже касались периодичности Ботта, когда мы упоминали, что клиффордова алгебра Cliff_{n+8} изоморфна алгебре 16×16 матриц с элементами, лежащими в Cliff_n . Это только одно из многих взаимосвязанных "8-периодических" явлений, которые известны под названием периодичности Ботта. Появление числа 8 здесь не является совпадением: все эти явления связаны с октонионами! Поскольку этот изумительный факт в какой-то мере недооценивается, по-видимому стоит немного рассказать о нём. Здесь мы сконцентрируемся на тех аспектах, которые связаны с $\mathbb{O}\mathbb{P}^1$ и каноническим октонионным линейным расслоением над этим пространством.

Начнём с К-теории. Это – способ получения информации о топологическом пространстве, исследуя векторные расслоения над ним. Если в этом пространстве имеются дыры, то будут нетривиальные векторные расслоения, которые перекручиваются при обходе вокруг дыр. Простейшим примером является расслоение "лента Мёбиуса" над S^1 , одномерное вещественное векторное расслоение, которое имеет 180° перекрут (twist) при обходе по кругу. На самом деле, это просто каноническое линейное расслоение $L_{\mathbb{R}}$. Канонические линейные расслоения $L_{\mathbb{C}}$, $L_{\mathbb{H}}$ и $L_{\mathbb{O}}$ предоставляют более высоко-размерные аналоги этого примера.

К-теория учит исследовать векторные расслоения над топологическим пространством X с помощью построения абелевой группы следующим образом. Прежде всего, возьмём множество, состоящее из всех классов изоморфизмов вещественных векторных расслоений над X . Возможность вычисления прямых сумм векторных расслоений обеспечивает это множество операцией "сложения", тем самым превращая его в коммутативный моноид. Далее, формально присоединим ко всем элементам этого множества "обратные элементы по сложению" (additive inverses), получив абелеву группу. Эта группа называется $KO(X)$, **вещественной К-теорией** для X . Можно было бы начать с комплексных векторных расслоений и получить группу, называемую $K(X)$, но здесь мы будем интересоваться вещественными векторными расслоениями.

Любое вещественное векторное расслоение E над X даёт элемент $[E] \in KO(X)$, и эти элементы порождают данную группу. Если мы выберем точку в X , имеется очевидный гомоморфизм $\dim: KO(X) \rightarrow \mathbb{Z}$, ставящий в соответствие $[E]$ размерность слоя E в этой точке. Поскольку эта размерность является весьма очевидным и скучным инвариантом векторных расслоений, лучше иметь дело с ядром этого гомоморфизма, которое называется **редуцированной** вещественной К-теорией X и обозначается $\widetilde{KO}(X)$. Это инвариант пунктированных пространств (pointed spaces), т. е. пространств, снабжённых выделенной точкой, или **базисной точкой**.

Любая сфера становится пунктированным пространством, если мы выберем северный полюс базисной точкой. Редуцированная действительная К-теория первых восьми сфер выглядит следующим образом:

$$\begin{array}{ll}
 \widetilde{KO}(S^1) \cong \mathbb{Z}_2 & \\
 \widetilde{KO}(S^2) \cong \mathbb{Z}_2 & \\
 \widetilde{KO}(S^3) \cong 0 & [L_{\mathbb{R}}] \text{ порождает } \widetilde{KO}(S^1). \\
 \widetilde{KO}(S^4) \cong \mathbb{Z} & \text{где, как можно догадаться, } [L_{\mathbb{C}}] \text{ порождает } \widetilde{KO}(S^2). \\
 \widetilde{KO}(S^5) \cong 0 & [L_{\mathbb{H}}] \text{ порождает } \widetilde{KO}(S^4). \\
 \widetilde{KO}(S^6) \cong 0 & [L_{\mathbb{O}}] \text{ порождает } \widetilde{KO}(S^8). \\
 \widetilde{KO}(S^7) \cong 0 & \\
 \widetilde{KO}(S^8) \cong \mathbb{Z} &
 \end{array}$$

Как упоминалось в предыдущем разделе, можно построить любое k -мерное вещественное векторное расслоение над S^n , используя отображение $f: S^{n-1} \rightarrow O(k)$. На самом деле, классы изоморфизмов таких расслоений представляют собой взаимно однозначное соответствие с классами гомотопий таких отображений. Более того, два таких расслоения определяют один и тот же элемент $\widetilde{KO}(X)$ тогда и только тогда, когда соответствующие отображения становятся гомотопически эквивалентными после объединения их с включениями $O(k) \hookrightarrow O(\infty)$, где $O(\infty)$ есть прямой предел групп $O(k)$. Следовательно,

$$\widetilde{KO}(S^n) \cong \pi_{n-1}(O(\infty)).$$

Из этого факта следует список групп гомотопий $O(\infty)$, которые появляются во Введении. Это также значит, что для доказательства периодичности Ботта для следующих групп гомотопий

$$\pi_{i+8}(O(\infty)) \cong \pi_i(O(\infty)),$$

достаточно доказать периодичность Ботта для вещественной К-теории.

$$\widetilde{KO}(S^{n+8}) \cong \widetilde{KO}(S^n).$$

Почему периодичность Ботта присутствует в вещественной К-теории? Оказывается, что существует градуированное кольцо KO с

$$KO_n = \widetilde{KO}(S^n).$$

Произведение в этом кольце возникает из возможности вычислять "скрещенные произведения" (smash products) сфер и также вещественных векторных расслоений над этими сферами. Умножение на $[L_{\mathbb{O}}]$ даёт изоморфизм

$$\begin{aligned} \widetilde{KO}(S^n) &\rightarrow \widetilde{KO}(S^{n+8}) \\ x &\mapsto [L_{\mathbb{O}}]x \end{aligned}$$

Другими словами, каноническое октонионное линейное расслоение над $\mathbb{O}P^1$ порождает периодичность Ботта!

Можно гораздо больше сказать об этом факте и о том, как он связан с периодичностью Ботта клиффордовых алгебр, но это, увы, уведет нас слишком далеко от темы. Мы рекомендуем заинтересованному читателю обратиться к какому-нибудь начальному руководству по К-теории, например, к работе Дейла Хьюзмоллера [56]. К сожалению, все известные мне книги умаляют роль октонионов. Чтобы выявить её, надо иметь в виду связь между октонионами и клиффордовыми алгебрами, которое обсуждалось выше в разделе 2.3.

3.3 $\mathbb{O}P^1$ и лоренцева геометрия

В разделе 3.1 мы наметили систематический подход к проективным прямым над нормированными алгебрами с делением. Самый знаменитый пример – это сфера Римана $\mathbb{C}P^1$. Как подчеркивал Пенроуз, [77], это пространство имеет замечательную взаимосвязь с лоренцевой геометрией – другими словами, со специальной теорией относительности. Все конформные преобразования Римановой сферы возникают из дробных линейных преобразований

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}.$$

Легко видеть, что группа таких преобразований изоморфна $PSL(2, \mathbb{C})$: 2×2 комплексных матриц с определителем, равным 1, по модулю скалярных кратных единицы. Менее очевидно, что она также изоморфна группе Лоренца $SO_0(3, 1)$: единичной компоненте² группы линейных преобразований \mathbb{R}^4 , которая сохраняет метрику Минковского

$$x \cdot y = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 - x_4y_4.$$

Этот факт имеет красивое объяснение в понятиях "небесной сферы". Математически, это 2-сфера, состоящая из всех прямых вида $\{\alpha x\}$, где $x \in \mathbb{R}^4$ имеет $x \cdot x = 0$. В частной теории относительности такие прямые представляют световые лучи, так что небесная сфера – это сфера, на которой как будто лежат звезды, когда вы смотрите на ночное небо. Эта сфера наследует конформную структуру от метрики Минковского на \mathbb{R}^4 . Это даёт возможность отождествить небесную сферу с $\mathbb{C}P^1$, из чего следует, что группа Лоренца действует как группа конформных преобразований $\mathbb{C}P^1$. Более конкретно это значит, что если вы проносите мимо Земли со

² identity component, имеется в виду подгруппа с единичным детерминантом.

скоростью, близкой к скорости света, то созвездия на небе будут искажены, но все *углы* будут сохранены.

На самом деле, эти результаты не ограничиваются комплексным случаем: те же идеи столь же хорошо работают для других нормированных алгебр с делением! Алгебры \mathbb{R} , \mathbb{C} , \mathbb{H} и \mathbb{O} связаны с лоренцевой геометрией в размерностях 3, 4, 6 и 10, соответственно [68–70, 85, 93]. Даже лучше, полное объяснение этого факта приводит к новым взаимоотношениям между нормированными алгебрами с делением и спинорами. В последующем мы объясним, как это работает для всех четырёх нормированных алгебр с делением, уделив особое внимание особенностям октонионного случая.

Чтобы заложить основу, прежде всего вспомним наиболее таинственный из всех четырёх бесконечных рядов йордановых алгебр, перечисленных в начале раздела 3: спиновые множители (spin factors). Мы описали их довольно конкретно, но более абстрактный подход выявляет их родство (kinship) с клиффордовыми алгебрами. Для данного n -мерного действительного пространства V со скалярным произведением, примем, что **спиновые множители** $J(V)$ – йорданова алгебра, свободно порождённая V по модулю отношений

$$v^2 = \|v\|^2.$$

Поляризуя и применяя закон коммутативности, получим

$$v \circ w = \langle v, w \rangle,$$

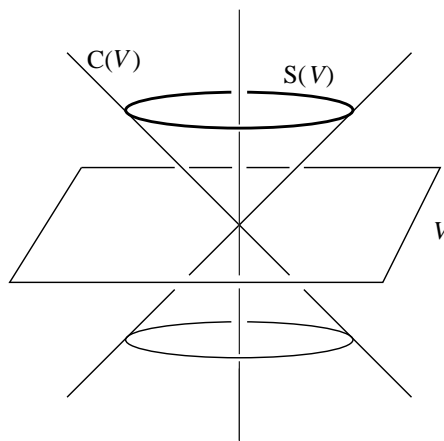
так что $J(V)$ изоморфно $V \oplus \mathbb{R}$ с произведением

$$(v, \alpha) \circ (w, \beta) = (\alpha w + \beta v, \langle v, w \rangle + \alpha\beta).$$

Хотя йордановы алгебры были изобретены для квантовомеханических исследований, спиновые множители также глубоко связаны с частной теорией относительности. Мы можем считать $J(V) \cong V \oplus \mathbb{R}$ за **пространство-время Минковского**, с пространством V и временем \mathbb{R} . Причина этого в том, что $J(V)$ естественным образом наделяется симметричной билинейной формой сигнатуры $(n, 1)$, **метрикой Минковского**:

$$(v, \alpha) \cdot (w, \beta) = \langle v, w \rangle - \alpha\beta.$$

Группа линейных преобразований, сохраняющих метрику Минковского, называется $O(n, 1)$, а её единичная компонента называется **группой Лоренца** $SO_0(n, 1)$. Мы определяем **световой конус** $C(V)$ как совокупность всех ненулевых $x \in J(V)$ с $x \cdot x = 0$. Одномерное подпространство $J(V)$, порожденное (spanned) элементом светового конуса, называется **световым лучом**, а пространство всех световых лучей называется **небесной сферой** $S(V)$. Мы можем отождествить небесную сферу с единичной сферой в V , поскольку каждый световой луч порождён элементом вида $(v, 1)$, где $v \in V$ имеет норму, равную единице. Здесь дано изображение светового конуса и небесной сферы, когда V двумерно:



Когда V как минимум двумерно, можно построить проективное пространство из йордановой алгебры $J(V)$. Результат является ничем иным, как небесной сферой! Чтобы убедиться в этом, заметим, что в стороне от элементов 0 и 1 все проекции в $J(V)$ имеют вид $p = \frac{1}{2}(v, 1)$, где норма $v \in V$ равна единице. Они являются точками нашего проективного пространства, но как мы уже видели, они также соответствуют точкам небесной сферы. Наше проективное пространство имеет лишь одну линию, соответствующую проекции $1 \in J(V)$. Можно визуализировать эту линию, как и саму небесную сферу.

Как всё это связано с нормированными алгебрами с делением? Чтобы ответить на этот вопрос, рассмотрим нормированную алгебру с делением \mathbb{K} размерности n . Тогда йорданова алгебра $\mathfrak{h}_2(\mathbb{K})$ скрытым образом является также спиновым множителем! Существует изоморфизм

$$\phi: \mathfrak{h}_2(\mathbb{K}) \rightarrow J(\mathbb{K} \oplus \mathbb{R}) \cong \mathbb{K} \oplus \mathbb{R} \oplus \mathbb{R},$$

заданный соотношением

$$\phi \begin{pmatrix} \alpha + \beta & x \\ x^* & \alpha - \beta \end{pmatrix} = (x, \beta, \alpha), \quad x \in \mathbb{K}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \quad (6)$$

Более того, определитель матриц из $\mathfrak{h}_2(\mathbb{K})$ хорошо определён даже тогда, когда \mathbb{K} не коммутативна или не ассоциативна:

$$\det \begin{pmatrix} \alpha + \beta & x \\ x^* & \alpha - \beta \end{pmatrix} = \alpha^2 - \beta^2 - \|x\|^2,$$

и мы, очевидно, имеем

$$\det(a) = -\phi(a) \cdot \phi(a)$$

для всех $a \in \mathfrak{h}_2(\mathbb{K})$.

Эти факты имеют целый ряд замечательных следствий. Прежде всего, поскольку йордановы алгебры $J(\mathbb{K} \oplus \mathbb{R})$ и $\mathfrak{h}_2(\mathbb{K})$ изоморфны, также изоморфны и ассоциированные с ними проективные пространства. Мы уже видели, что первое пространство является небесной сферой $S(\mathbb{K} \oplus \mathbb{R})$, и что последнее пространство есть $\mathbb{K}\mathbb{P}^1$. Отсюда следует, что

$$\mathbb{K}\mathbb{P}^1 \cong S(\mathbb{K} \oplus \mathbb{R}).$$

Это даёт другое доказательство того, что мы уже видели в разделе 3.1: $\mathbb{K}\mathbb{P}^1$ является n -сферой. Но отсюда следует большее. Лоренцева группа $SO_0(n+1, 1)$ имеет очевидное действие на небесной сфере, и обычная конформная структура на сфере инвариантна относительно этого действия. Используя вышеприведенный изоморфизм, мы можем естественным образом перенести групповое действие и инвариантную конформную структуру на $\mathbb{K}\mathbb{P}^1$.

Во-вторых, отсюда следует, что сохраняющие определитель линейные преобразования $\mathfrak{h}_2(\mathbb{K})$ образуют группу, изоморфную $O(n+1, 1)$. Как мы можем найти какие-нибудь преобразования такого типа? Если $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, это легко: когда $g \in SL(2, \mathbb{R})$ и $x \in \mathfrak{h}_2(\mathbb{R})$, мы снова имеем $gxg^* \in \mathfrak{h}_2(\mathbb{R})$ и

$$\det(gxg^*) = \det(x).$$

Это даёт гомоморфизм из $SL(2, \mathbb{R})$ в $O(2, 1)$. Этот гомоморфизм переводит два элемента в один, поскольку и $g = 1$, и $g = -1$ действуют тривиально, и отображает $SL(2, \mathbb{R})$ на единичную компоненту $O(2, 1)$. Отсюда следует, что $SL(2, \mathbb{R})$ является двойным накрытием $SO_0(2, 1)$. Точно такая же конструкция работает для $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, так что $SL(2, \mathbb{C})$ является двойным накрытием $SO_0(3, 1)$.

Для двух других нормированных алгебр с делением вышеприведённые вычисления с определителями не проходят, и даже определение группы $SL(2, \mathbb{K})$ становится весьма хитрым, так что мы начинаем с рассуждений на уровне алгебр Ли. Мы говорим, что $m \times m$ матрица с элементами из нормированной алгебры с делением \mathbb{K} **бесследова**, если сумма её диагональных элементов равна нулю. Любая такая бесследовая матрица действует как действительный

линейный оператор на \mathbb{K}^m . Когда \mathbb{K} коммутативна или ассоциативна, пространство операторов, возникающее из $m \times m$ бесследовых матриц с элементами из \mathbb{K} , замкнуто относительно коммутаторов, а в противном случае – нет. Поэтому определим $\mathfrak{sl}(m, \mathbb{K})$ как алгебру Ли \mathbb{K}^m , порождённую операторами этого вида. Эта алгебра Ли, в свою очередь, порождает группу Ли действительных линейных операторов на \mathbb{K}^m , называемую $SL(m, \mathbb{K})$. Заметим, что умножение в этой группе задано композицией действительных линейных операторов, которая ассоциативна даже для $\mathbb{K} = \mathbb{O}$.

Алгебра Ли $\mathfrak{sl}(m, \mathbb{K})$ изначально возникает с представлением: её **фундаментальным представлением** как действительных линейных операторов на \mathbb{K}^m , заданных соотношением

$$a: x \mapsto ax, \quad x \in \mathbb{K}^m$$

всякий раз, когда $a \in \mathfrak{sl}(m, \mathbb{K})$ реально соответствует бесследовой $m \times m$ матрице с элементами из \mathbb{K} . Тензорирова (tensoring) фундаментальное представление с дуальным к нему, мы получаем представление $\mathfrak{sl}(m, \mathbb{K})$ на пространстве матриц $\mathbb{K}[m]$, заданных соотношением

$$a: x \mapsto ax + xa^*, \quad x \in \mathbb{K}[m]$$

всякий раз, когда a является бесследовой матрицей с элементами из \mathbb{K} . Поскольку $ax + xa^*$ эрмитова всякий раз, когда эрмитова x , это представление ограничивается представлением $\mathfrak{sl}(m, \mathbb{K})$ на $\mathfrak{h}_m(\mathbb{K})$. Оно в свою очередь может быть возведено в экспоненту, чтобы получить представление группы $SL(m, \mathbb{K})$ на $\mathfrak{h}_m(\mathbb{K})$.

Теперь вернёмся к случаю $m = 2$. Можно показать, что представление $SL(2, \mathbb{K})$ на $\mathfrak{h}_2(\mathbb{K})$ сохраняет определитель, просто проверив, что

$$\left. \frac{d}{dt} \det(x + t(ax + xa^*)) \right|_{t=0} = 0$$

когда x лежит в $\mathfrak{h}_2(\mathbb{K})$ и $a \in \mathbb{K}[2]$ бесследова. Здесь ключевой момент – удостовериться, что вычисления не испорчены некоммутативностью или неассоциативностью. Отсюда следует, что имеется гомоморфизм

$$\alpha_{\mathbb{K}}: SL(2, \mathbb{K}) \rightarrow SO_0(n + 1, 1).$$

Можно проверить, что это – гомоморфизм на, и его ядро состоит из матриц ± 1 . Таким образом, если мы определим

$$PSL(2, \mathbb{K}) = SL(2, \mathbb{K}) / \{\pm 1\},$$

то получим изоморфизмы

$$\begin{aligned} PSL(2, \mathbb{R}) &\cong SO_0(2, 1) \\ PSL(2, \mathbb{C}) &\cong SO_0(3, 1) \\ PSL(2, \mathbb{H}) &\cong SO_0(6, 1) \\ PSL(2, \mathbb{O}) &\cong SO_0(9, 1). \end{aligned}$$

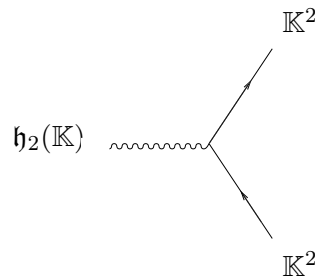
Объединяя это вместе с нашими предыдущими рассуждениями, получим, что $PSL(2, \mathbb{K})$ действует как конформные преобразования $\mathbb{K}\mathbb{P}^1$.

В заключение несколько слов о том, как всё это связано со спинорами. Аппарат клиффордовых алгебр и спиноров без труда расширяется от случая пространств со скалярным произведением, до векторных пространств, снабжённых неопределённой метрикой. В частности, группа Лоренца $SO_0(n + 1, 1)$ имеет двойное накрытие, называемое $Spin(n + 1, 1)$, и эта группа имеет определённые представления, называемые спинорными представлениями. Когда $n = 1, 2, 4$ или 8 , мы на самом деле имеем

$$Spin(n + 1, 1) \cong SL(2, \mathbb{K}),$$

где \mathbb{K} – нормированная алгебра с делением размерности n . Фундаментальное представление $SL(2, \mathbb{K})$ на \mathbb{K}^2 является левым спинорным представлением $Spin(n + 1, 1)$. Дуальное к нему является правым спинорным представлением. Более того, взаимодействие между векторами и

спинорами, которое является основой теорий суперсимметрии в пространствах-временах размерности 3, 4, 6 и 10, является просто действием $\mathfrak{h}_2(\mathbb{K})$ на \mathbb{K}^2 посредством матричного умножения. На диаграмме Фейнмана это выглядит следующим образом:



В случае $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ Пенроуз [77] описал замечательный прием для получения точек небесной сферы из спиноров. На самом деле, он также работает и для других нормированных алгебры с делением: если $(x, y) \in \mathbb{K}^2$ не является нулём, эрмитова матрица

$$\begin{pmatrix} x & \\ & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^* & y^* \\ & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xx^* & xy^* \\ yx^* & yy^* \end{pmatrix}$$

ненулевая, но с нулевым определителем, так что она определяет точку на небесной сфере. Если мы ограничиваемся спинорами единичной нормы, этот прием сводится к отображению Хопфа. Более того, он проясняет любопытную двойную роль $\mathbb{K}\mathbb{P}^1$ как одновременно небесной сферы в частной теории относительности и пространства высказываний в квантовой логике, связанным с йордановой алгеброй $\mathfrak{h}_2(\mathbb{K})$: любая точка небесной сферы соответствует высказыванию, определяющему состояние спинора!

3.4 $\mathbb{O}\mathbb{P}^2$ Исключительная Йорданова Алгебра

Октонионы замечательны сами по себе, но подлинное волшебство начинается, когда мы используем их для построения исключительной йордановой алгебры $\mathfrak{h}_3(\mathbb{O})$ и ассоциированного с ним проективного пространства, октонионной проективной плоскости. Группы симметрии этих структур оказываются исключительными группами Ли, и тройственность приобретает сверхестественное всепроникающее влияние на все явления, поскольку элемент $\mathfrak{h}_3(\mathbb{O})$ состоит из трёх октонионов и трёх вещественных чисел. Используя соотношение между нормированными алгебрами с делением и тройственностями, мы получаем изоморфизм

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}_3(\mathbb{O}) &\cong \mathbb{R}^3 \oplus V_8 \oplus S_8^+ \oplus S_8^- \\ \begin{pmatrix} \alpha & z^* & y^* \\ z & \beta & x \\ y & x^* & \gamma \end{pmatrix} &\mapsto ((\alpha, \beta, \gamma), x, y, z), \end{aligned} \tag{7}$$

где $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ и $x, y, z \in \mathbb{O}$. Исследование йорданова произведения в $\mathfrak{h}_3(\mathbb{O})$ тогда открывает удивительный факт: в то время как поверхностно это произведение определено с использованием структуры $*$ -алгебры на \mathbb{O} , оно на самом деле может быть определено с использованием только естественных отображений

$$V_8 \times S_8^+ \rightarrow S_8^-, \quad V_8 \times S_8^- \rightarrow S_8^+, \quad S_8^+ \times S_8^- \rightarrow V_8$$

вместе со скалярными произведениями этих трёх пространств. Вся эта информация содержится в нормированной тройственности

$$t_8: V_8 \times S_8^+ \times S_8^- \rightarrow \mathbb{R},$$

так что любой автоморфизм этой тройственности даёт автоморфизм $\mathfrak{h}_3(\mathbb{O})$. В разделе 2.4 мы видели, что $\text{Aut}(t_8) \cong \text{Spin}(8)$. После небольших выкладок отсюда следует, что

$$\text{Spin}(8) \subseteq \text{Aut}(\mathfrak{h}_3(\mathbb{O})).$$

Однако, это описание $\mathfrak{h}_3(\mathbb{O})$ в терминах 8-мерной евклидовой геометрии является всего лишь частью более широкого описания – описания, помещенного в десятимерное пространство-время Минковского! Если считать $\mathfrak{h}_2(\mathbb{O})$ расположенной в нижнем правом углу $\mathfrak{h}_3(\mathbb{O})$, мы получим изоморфизм

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}_3(\mathbb{O}) &\cong \mathbb{R} \oplus \mathfrak{h}_2(\mathbb{O}) \oplus \mathbb{O}^2 \\ \begin{pmatrix} \alpha & \psi^* \\ \psi & a \end{pmatrix} &\mapsto (\alpha, a, \psi). \end{aligned} \tag{8}$$

Мы видели в разделе 3.3, что $a \in \mathfrak{h}_2(\mathbb{O})$ и $\psi \in \mathbb{O}^2$ могут быть отождествлены с вектором и спинором в десятимерном пространстве-времени Минковского соответственно. Подобным образом, α является скаляром.

Это описание даёт представление $\text{Spin}(9, 1)$ как линейных преобразований $\mathfrak{h}_3(\mathbb{O})$. К сожалению, большинство таких преобразований не сохраняют йорданово произведение на $\mathfrak{h}_3(\mathbb{O})$. Как мы увидим, они сохраняют только меньшую структуру на $\mathfrak{h}_3(\mathbb{O})$: *определиТЕЛЬ*. Однако, преобразования, возникающие из подгруппы $\text{Spin}(9) \subset \text{Spin}(9, 1)$, всё же сохраняют йорданово произведение. Можно убедиться в этом следующим образом. Как представление $\text{Spin}(9)$, $\mathfrak{h}_2(\mathbb{O})$ расщепляется на "пространство" и "время":

$$\mathfrak{h}_2(\mathbb{O}) \cong V_9 \oplus \mathbb{R}$$

с двумя частями, соответствующими бесследовым элементам $\mathfrak{h}_2(\mathbb{O})$ и вещественным кратным единицы соответственно. С другой стороны, спинорное представление $\mathfrak{so}(9)$ расщепляется как $S_8^+ \oplus S_8^-$, когда мы ограничиваем его до $\mathfrak{so}(8)$, так что мы имеем

$$\mathbb{O}^2 \cong S_9.$$

Мы, таким образом, получаем изоморфизм

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}_3(\mathbb{O}) &\cong \mathbb{R}^2 \oplus V_9 \oplus S_9 \\ \begin{pmatrix} \alpha & \psi^* \\ \psi & a + \beta \end{pmatrix} &\mapsto ((\alpha, \beta), a, \psi), \end{aligned} \tag{9}$$

где $a \in \mathfrak{h}_2(\mathbb{O})$ имеет нулевой след и β является вещественным кратным единицы. В этих понятиях можно легко проверить, что йорданово произведение в $\mathfrak{h}_3(\mathbb{O})$ строится из инвариантных операций над скалярами, векторами и спинорами в девяти размерностях. Отсюда следует, что

$$\text{Spin}(9) \subseteq \text{Aut}(\mathfrak{h}_3(\mathbb{O})).$$

Более детально это изложено в книге Харвея [54].

Это не исчерпывает всех симметрий $\mathfrak{h}_3(\mathbb{O})$, поскольку существуют другие автоморфизмы, возникающие из группы перестановок трёх символов, которые действуют на $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ и $(x, y, z) \in \mathbb{O}^3$ очевидным образом. Также любая матрица $g \in \text{O}(3)$ действует посредством сопряжения (acts by conjugation) как автоморфизм на $\mathfrak{h}_3(\mathbb{O})$; поскольку элементы матрицы g действительны, здесь нет проблем с отсутствием ассоциативности. Группа $\text{Spin}(9)$ 36-мерна, но полная группа автоморфизмов $\mathfrak{h}_3(\mathbb{O})$ гораздо больше: она 52-мерна. Как объясняется в разделе 4.2, она носит имя F_4 .

Однако, уже с теми автоморфизмами, которые мы имеем, можно делать нечто интересное: их можно использовать для диагонализации любого элемента в $\mathfrak{h}_3(\mathbb{O})$. Чтобы увидеть это, прежде всего заметим, что группа вращений, и следовательно $\text{Spin}(9)$, действует транзитивно на единичной сфере в V_9 . Это значит, что можно использовать автоморфизм в нашей подгруппе $\text{Spin}(9)$ для приведения любого элемента $\mathfrak{h}_3(\mathbb{O})$ к виду

$$\begin{pmatrix} \alpha & z^* & y^* \\ z & \beta & x \\ y & x^* & \gamma \end{pmatrix},$$

где x действителен. Следующий шаг заключается в применении автоморфизма, который делает y и z действительными, не затрагивая один x . Чтобы это проделать, заметим, что подгруппа $\text{Spin}(9)$, фиксирующая любой ненулевой вектор в V_9 , изоморфна $\text{Spin}(8)$. Если ограничить представление S_9 этой подгруппой, она расщепляется как $S_8^+ \oplus S_8^-$, и после определённых действий [54] можно показать, что $\text{Spin}(8)$ действует на $S_8^+ \oplus S_8^- \cong \mathbb{O}^2$ таким образом, что любой элемент $(y, z) \in \mathbb{O}^2$ может быть переведён в элемент, обе компоненты которого действительны. Завершающим шагом является выбор нашего элемента из $\mathfrak{h}_3(\mathbb{O})$ со всеми реальными компонентами и использовать автоморфизм для его диагонализации. Это можно сделать сопряжением его с подходящей матрицей из $O(3)$.

Чтобы понять \mathbb{OP}^2 , нам нужно понять проекции в $\mathfrak{h}_3(\mathbb{O})$. Это тот случай, когда возможность диагонализации матриц $\mathfrak{h}_3(\mathbb{O})$ посредством автоморфизмов возникает легко. С точностью до автоморфизма, любая проекция в $\mathfrak{h}_3(\mathbb{O})$ выглядит как одна из этих четырёх:

$$p_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad p_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad p_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad p_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Теперь след матрицы в $\mathfrak{h}_3(\mathbb{O})$ инвариантен относительно автоморфизмов, потому что его можно определить используя только структуру йордановой алгебры:

$$\text{tr}(a) = \frac{1}{9} \text{tr}(L_a), \quad a \in \mathfrak{h}_3(\mathbb{O}),$$

где L_a – левое умножение на a . Отсюда следует, что след любой проекции в $\mathfrak{h}_3(\mathbb{O})$ равен 0, 1, 2 или 3. Более того, ранг любой проекции $p \in \mathfrak{h}_3(\mathbb{O})$ равен её следу. Чтобы увидеть это, сначала заметим, что $\text{tr}(p) \geq \text{rank}(p)$, поскольку из $p < q$ следует, что $\text{tr}(p) < \text{tr}(q)$, и след увеличивается целочисленными шагами. Таким образом, необходимо лишь показать, что $\text{tr}(p) \leq \text{rank}(p)$. Для этого достаточно рассмотреть четыре проекции, показанные выше, поскольку как след, так и ранг инварианты относительно автоморфизмов. Поскольку $p_0 < p_1 < p_2 < p_3$, ясно, что для этих проекций мы в самом деле имеем $\text{tr}(p) \leq \text{rank}(p)$.

Отсюда следует, что точки октонионной проективной плоскости являются проекциями со следом 1 в $\mathfrak{h}_3(\mathbb{O})$, в то время как прямые являются проекциями со следом 2. Вычисления [54] показывают, что любая проекция со следом 1 имеет вид

$$p = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^* & y^* & z^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xx^* & xy^* & xz^* \\ yx^* & yy^* & yz^* \\ zx^* & zy^* & zz^* \end{pmatrix}, \quad (10)$$

где $(x, y, z) \in \mathbb{O}^3$ имеет

$$(xy)z = x(yz), \quad \|x\|^2 + \|y\|^2 + \|z\|^2 = 1.$$

С другой стороны, любая проекция со следом 2 имеет вид $1-p$, где p имеет след 1. Это устанавливает взаимно однозначное соответствие между точками и прямыми в октонионной проективной плоскости. Если мы используем это соответствие, чтобы считать их обеих проекциями следа-1, точка p лежит на прямой p' тогда и только тогда, когда $p < 1-p'$. Конечно, $p < 1-p'$, если и только если $p' < 1-p$. Симметрия этого отношения означает, что октонионная проективная плоскость самодуальна! Это также верно для действительной, комплексной и кватернионной проективных плоскостей. Во всех случаях операция, которая взаимно заменяет точки прямыми и наоборот, соответствует в квантовой логике "отрицанию" (negation) высказываний [98].

Мы используем \mathbb{OP}^2 для обозначения множества точек в октонионной проективной плоскости. Для любого заданного элемента $(x, y, z) \in \mathbb{O}^3$ с $(xy)z = x(yz)$, можно нормировать его и тогда применить уравнение (10), чтобы получить точку $[(x, y, z)] \in \mathbb{OP}^2$. Повторяя стратегию, которая работала для \mathbb{OP}^1 , можно превратить \mathbb{OP}^2 в гладкое многообразие, накрыв его тремя системами координат:

- одна система координат, содержащая все точки вида $[(x, y, 1)]$,
- одна система координат, содержащая все точки вида $[(x, 1, z)]$,
- одна система координат, содержащая все точки вида $[(1, y, z)]$.

Это можно проверить простым вычислением. Единственная интересная часть – проверка того, что всякий раз, когда ассоциативный закон может оказаться необходимым, мы можем использовать либо альтернативность октонионов, либо тот факт, что только тройки с $(xy)z = x(yz)$ дают точки $[(x, y, z)] \in \mathbb{O}\mathbb{P}^2$.

Мы, таким образом, получили следующую картину октонионной проективной плоскости. Как многообразие, $\mathbb{O}\mathbb{P}^2$ 16-мерно. Прямые в $\mathbb{O}\mathbb{P}^2$ являются копиями $\mathbb{O}\mathbb{P}^1$, и, следовательно, – 8-сферами. Для любых двух разных точек в $\mathbb{O}\mathbb{P}^2$ имеется единственная прямая, на которой лежат они обе. Для любых двух разных прямых имеется единственная точка, лежащая на них обеих. Имеется преобразование "двойственности", которое отображает точки в прямые и наоборот, сохраняя это соотношение принадлежности (инцидентности). В частности, поскольку пространство всех точек, лежащих на любой заданной прямой, является копией $\mathbb{O}\mathbb{P}^1$, таким же является и пространство всех прямых, содержащих заданную точку!

Чтобы погрузиться (dig) в геометрию $\mathbb{O}\mathbb{P}^2$ более глубоко, необходима другая важная структура на исключительной йордановой алгебре: детерминант (определитель). Мы видели в разделе 3.3, что, несмотря на отсутствие коммутативности и ассоциативности, детерминант матрицы из $\mathfrak{h}_2(\mathbb{O})$ является хорошо определённым и полезным понятием. То же самое верно для $\mathfrak{h}_3(\mathbb{O})$! Можно определить **детерминант** матрицы в $\mathfrak{h}_3(\mathbb{O})$ посредством соотношения

$$\det \begin{pmatrix} \alpha & z^* & y^* \\ z & \beta & x \\ y & x^* & \gamma \end{pmatrix} = \alpha\beta\gamma - (\alpha\|x\|^2 + \beta\|y\|^2 + \gamma\|z\|^2) + 2\text{Re}(xyz).$$

Мы можем выразить это в терминах следа и произведения с помощью

$$\det(a) = \frac{1}{3}\text{tr}(a^3) - \frac{1}{2}\text{tr}(a^2)\text{tr}(a) + \frac{1}{6}\text{tr}(a)^3.$$

Это показывает, что определитель инвариантен относительно всех автоморфизмов $\mathfrak{h}_3(\mathbb{O})$. Однако, определитель инвариантен даже относительно более широкой группы линейных преобразований. Как мы увидим в разделе 4.4, эта группа 78-мерна: она является некомпактной действительной формой исключительной группы Ли E_6 . Эти дополнительные симметрии побуждают выяснить, как далеко мы можем развить геометрию, исходя только из детерминанта и структуры векторного пространства $\mathfrak{h}_3(\mathbb{O})$.

Определитель является кубической формой на $\mathfrak{h}_3(\mathbb{O})$, так что имеется единственная симметричная трilinearная форма

$$(\cdot, \cdot, \cdot): \mathfrak{h}_3(\mathbb{O}) \times \mathfrak{h}_3(\mathbb{O}) \times \mathfrak{h}_3(\mathbb{O}) \rightarrow \mathbb{R},$$

такая, что

$$(a, a, a) = \det(a).$$

Дуализируя ее, мы получим так называемое **кросс-произведение** (cross product)

$$\times: \mathfrak{h}_3(\mathbb{O}) \times \mathfrak{h}_3(\mathbb{O}) \rightarrow \mathfrak{h}_3(\mathbb{O})^*.$$

Явным образом, оно задается выражением

$$(a \times b)(c) = (a, b, c).$$

Несмотря на своё название, это произведение коммутативно.

Мы уже видели, что точки $\mathbb{O}\mathbb{P}^2$ соответствуют проекциям следа 1 в $\mathfrak{h}_3(\mathbb{O})$. Фройденталь [40] заметил, что они являются тем же самым, что и элементы $p \in \mathfrak{h}_3(\mathbb{O})$ с $\text{tr}(p) = 1$ и $p \times p = 0$. Даже

лучше, мы можем опустить уравнение $\text{tr}(p) = 1$ до тех пор, пока мы условились оперировать *классами эквивалентности* ненулевых элементов, удовлетворяющих соотношению $p \times p = 0$, где два таких элемента являются эквивалентными, когда один является ненулевым действительным кратным другому. Каждый такой класс эквивалентности $[p]$ соответствует уникальной точке в $\mathbb{O}\mathbb{P}^2$, и мы получаем этим способом все точки.

Для двух данных точек $[p]$ и $[q]$, их кросс-произведение $p \times q$ хорошо определено с точностью до ненулевого действительного множителя. Это означает, что мы определяем "прямую" как класс эквивалентности элементов $p \times q \in \mathfrak{h}_3(\mathbb{O})^*$, где снова два элемента полагаются эквивалентными, если один является ненулевым действительным кратным другому. Фройденталь показал, что мы получим проективную плоскость, изоморфную $\mathbb{O}\mathbb{P}^2$, если мы возьмём эти наши определения точек и прямых и поставим, что точка $[p]$ лежит на прямой $[L]$ тогда и только тогда, когда $L(p) = 0$. Заметим, что это уравнение имеет смысл, даже несмотря на то, что L и p определены лишь с точностью до ненулевых действительных множителей.

Одним из следствий всего этого является то, что можно восстановить структуру $\mathbb{O}\mathbb{P}^2$ как проективную плоскость, исходя только из определителя на $\mathfrak{h}_3(\mathbb{O})$: структура йордановой алгебры не требуется! Однако, чтобы получить отображение "двойственности", взаимно заменяющее точки и прямые с сохранением отношения принадлежности, требуется немного больше: необходимо невырожденное спаривание

$$\langle a, b \rangle = \text{tr}(ab)$$

на $\mathfrak{h}_3(\mathbb{O})$. Это устанавливает изоморфизм

$$\mathfrak{h}_3(\mathbb{O}) \cong \mathfrak{h}_3(\mathbb{O})^*.$$

Оказывается, что этот изоморфизм отображает точки в прямые, и, на самом деле, он устанавливает взаимно однозначное соответствие между точками и прямыми. Мы можем использовать это соответствие, чтобы полагать точки и прямые в $\mathbb{O}\mathbb{P}^2$ классами эквивалентности элементов $\mathfrak{h}_3(\mathbb{O})$. В этих терминах точка p лежит на прямой ℓ , если и только если $\langle \ell, p \rangle = 0$. Эта взаимосвязь симметрична! Отсюда следует, что если мы взаимно заменим друг на друга точки и прямые, используя это соответствие, отношение принадлежности сохранится.

Мы, таким образом, получили весьма изящный инструментарий для работы с $\mathbb{O}\mathbb{P}^2$. Если мы используем изоморфизм между $\mathfrak{h}_3(\mathbb{O})$ и дуальной к ней алгеброй для переинтерпретации кросс-произведения в качестве отображения

$$\times: \mathfrak{h}_3(\mathbb{O}) \times \mathfrak{h}_3(\mathbb{O}) \rightarrow \mathfrak{h}_3(\mathbb{O}),$$

тогда не только прямая, проходящая через разные точки $[p]$ и $[q]$, задаётся соотношением $[p \times q]$, но также точка, в которой две разные прямые $[\ell]$ и $[m]$ пересекаются, задается посредством $[\ell \times m]$. Тройка точек $[p]$, $[q]$ и $[r]$ лежит на одной прямой (коллинеарна), если и только если $(p, q, r) = 0$, и тройка прямых $[\ell]$, $[m]$, $[n]$ пересекается в точке, если и только если $(\ell, m, n) = 0$. В дополнение к тому, имеется очаровательная связка тождеств, относящихся к йордановому произведению, определителю, кросс-произведению и скалярному произведению в $\mathfrak{h}_3(\mathbb{O})$.

Для более глубокого ознакомления с октонионной геометрией читателю настоятельно рекомендуется обратиться к оригинальным работам Фройдентеля [39–42], Джека Титца [94, 95] и Тони Шпрингера [87–89]. Книга Хельмута Зальцмана и др. также хороша [82]. К сожалению, сейчас мы вынуждены попрощаться с этим предметом и начать нашу экскурсию по исключительным группам. Однако, мы вернёмся к изучению симметрий $\mathbb{O}\mathbb{P}^2$ и исключительной йордановой алгебры в разделах 4.2 и 4.4.

4 Исключительные Алгебры Ли

18 октября 1887 Вильгельм Киллинг написал письмо Фридриху Энгелю, сообщив, что он закончил классификацию простых алгебр Ли. В следующие три года эта революционная работа была опубликована в серии статей [63]. Кроме того, что сейчас называется "классическими" простыми алгебрами Ли, он заявил о нахождении шести "исключительных" алгебр – новых

математических объектов, о существовании которых никто до тех пор не подозревал. На самом деле, он дал строгое построение только наименьших из них. В своей диссертации в 1894 г. Картан [14] построил все из них и отметил, что две 52-мерные исключительные алгебры Ли, открытые Киллингом, изоморфны, так что на самом деле их только пять.

Классификация Киллинга-Картана простых алгебр Ли ввела значительную часть техники, которая излагается в любом современном вводном курсе этого предмета, например, корни и веса. В дальнейшем мы будем избегать этой техники, поскольку мы хотим вместо этого видеть исключительные алгебры Ли как октонионные родственники классических алгебр – немного эксцентричные, но всё же обладающие близкой связью с *геометрией*, в частности с римановой геометрией проективных плоскостей. Отчасти также по этой причине мы будем фокусировать внимание на компактных действительных формах простых алгебр Ли.

Классические простые алгебры Ли можно упорядочить в три бесконечных семейства:

$$\begin{aligned} \mathfrak{so}(n) &= \{x \in \mathbb{R}[n]: x^* = -x, \operatorname{tr}(x) = 0\}, \\ \mathfrak{su}(n) &= \{x \in \mathbb{C}[n]: x^* = -x, \operatorname{tr}(x) = 0\}, \\ \mathfrak{sp}(n) &= \{x \in \mathbb{H}[n]: x^* = -x\}. \end{aligned}$$

Соответствующие группы Ли есть:

$$\begin{aligned} \mathrm{SO}(n) &= \{x \in \mathbb{R}[n]: xx^* = 1, \det(x) = 1\}, \\ \mathrm{SU}(n) &= \{x \in \mathbb{C}[n]: xx^* = 1, \det(x) = 1\}, \\ \mathrm{Sp}(n) &= \{x \in \mathbb{H}[n]: xx^* = 1\}. \end{aligned}$$

Они естественным образом возникают как группы симметрии проективных пространств над \mathbb{R} , \mathbb{C} и \mathbb{H} соответственно. Более точно, они возникают как группы **изометрий**: преобразования, сохраняющие определённую риманову метрику. Рассмотрим вкратце эти группы в виде своего рода разогрева перед исключительными группами.

Сначала рассмотрим проективное пространство $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$. Мы можем представлять его как единичную сферу в \mathbb{R}^{n+1} с отождествлёнными противоположными точками x и $-x$. Оно наследует от сферы риманову метрику, и очевидное действие группы вращения $O(n+1)$ как изометрий сферы приводит к действию этой группы как изометрий $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ с этой метрикой. На самом деле, группа всех изометрий $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ есть просто

$$\mathrm{Isom}(\mathbb{R}\mathbb{P}^n) \cong O(n+1)/O(1),$$

где $O(1) = \{\pm 1\}$ – подгруппа $O(n+1)$, тривиально действующая на $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$. Алгебра Ли этой группы изометрий есть

$$\mathfrak{isom}(\mathbb{R}\mathbb{P}^n) \cong \mathfrak{so}(n+1).$$

Случай $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ весьма похож. Мы представляем его как единичную сферу в \mathbb{C}^{n+1} с точками x и αx , отождествлёнными всякий раз, когда α является единичным комплексным числом. Оно, таким образом, наследует риманову метрику от этой сферы, и унитарная группа $U(n+1)$ действует как изометрии. Если мы рассматриваем только связную компоненту группы изометрий и игнорируем обращающие ориентацию изометрии, которые возникают из комплексного сопряжения, мы имеем

$$\mathrm{Isom}_0(\mathbb{C}\mathbb{P}^n) \cong U(n+1)/U(1),$$

где $U(1)$ – подгруппа, тривиально действующая на $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$. Алгебра Ли этой группы изометрий есть

$$\mathfrak{isom}(\mathbb{C}\mathbb{P}^n) \cong \mathfrak{su}(n+1).$$

Случай $\mathbb{H}\mathbb{P}^n$ является более тонким, поскольку мы должны принять во внимание некоммутативность кватернионов. Мы можем представить $\mathbb{H}\mathbb{P}^n$ как единичную сферу в \mathbb{H}^{n+1} с точками x и αx , отождествлёнными всякий раз, когда α является единичным кватернионом и, как и ранее,

$\mathbb{H}\mathbb{P}^n$ наследует риманову метрику. Группа $\mathrm{Sp}(n+1)$ действует как группа изометрий $\mathbb{H}\mathbb{P}^n$, но это действие возникает из *правого* умножения, так что

$$\mathrm{Isom}(\mathbb{H}\mathbb{P}^n) \cong \mathrm{Sp}(n+1)/\{\pm 1\},$$

поскольку не $\mathrm{Sp}(1)$, а только её центр $\{\pm 1\}$ действует тривиально на $\mathbb{H}\mathbb{P}^n$ посредством правого умножения. На уровне алгебр Ли это даёт

$$\mathfrak{isom}(\mathbb{H}\mathbb{P}^n) \cong \mathfrak{sp}(n+1).$$

Для любителей октонионов заманчиво попытаться провести подобное построение, исходя из $\mathbb{O}\mathbb{P}^2$. Несмотря на то, что отсутствие ассоциативности превращает подобные вещи в трюк, мы показываем в разделе 4.2, что на самом деле это может быть сделано. Оказывается, что $\mathrm{Isom}(\mathbb{O}\mathbb{P}^2)$ – одна из исключительных групп Ли, а именно F_4 . Подобным образом, исключительные группы Ли E_6 , E_7 и E_8 в определённом тонком смысле являются группами изометрии проективных плоскостей над алгебрами $\mathbb{C} \otimes \mathbb{O}$, $\mathbb{H} \otimes \mathbb{O}$ и $\mathbb{O} \otimes \mathbb{O}$. Вместе с F_4 все эти группы могут быть определены посредством построения так называемого "магического квадрата", при котором используется значительная часть той алгебры, которую мы до сих пор описывали. Три версии этой конструкции объясняются в разделе 4.3. Затем мы рассматриваем группы E_6 , E_7 и E_8 по отдельности в последующих разделах. Но прежде всего, нужно ввести G_2 : наименьшую из исключительных групп Ли, являющуюся ничем иным, как группой автоморфизмов октонионов.

4.1 G_2

В 1914 Эли Картан заметил, что наименьшая из исключительных групп Ли G_2 является группой автоморфизмов октонионов [15]. Её алгебра Ли \mathfrak{g}_2 является поэтому $\mathrm{der}(\mathbb{O})$, дифференцированием октонионов. Примем эти факты в качестве определения G_2 и её алгебры Ли и выведем некоторые следствия.

Как выглядят автоморфизмы октонионов? Один из способов проанализировать это затрагивает подалгебры октонионов. Любой октонион e_1 , квадрат которого равен -1 , порождает подалгебру \mathbb{O} , изоморфную \mathbb{C} . Если мы затем выберем любой октонион e_2 , квадрат которого равен -1 и который антикоммутирует с e_1 , элементы e_1, e_2 порождают подалгебру, изоморфную \mathbb{H} . Наконец, если мы выберем октонион e_3 , квадрат которого равен -1 и который антикоммутирует с e_1, e_2 и e_1e_2 , то элементы e_1, e_2, e_3 порождают всю \mathbb{O} . Назовем такую тройку октонионов **базисной тройкой**. Для любой заданной базисной тройки существует единственный способ определить e_4, \dots, e_7 таким образом, чтобы была справедлива полная таблица умножения в разделе 2. На самом деле, это следует из замечаний по конструкции Кэли-Диксона в конце раздела 2.3.

Отсюда следует, что для двух любых заданных базисных троек существует уникальный автоморфизм \mathbb{O} , отображающий одну в другую. Обратное, очевидно, что любой автоморфизм отображает базисные тройки в базисные тройки. Это даёт изящное описание группы G_2 , описанное далее.

Зафиксируем базисную тройку e_1, e_2, e_3 . Имеется уникальный автоморфизм октонионов, отображающий её в любую другую базисную тройку, скажем e'_1, e'_2, e'_3 . Наше описание базисных троек пока было полностью алгебраическим, но мы можем посмотреть на них более геометрически: базисная тройка есть любая тройка единичных мнимых октонионов, т. е. мнимых октонионов единичной нормы, таких, что каждый из них ортогонален алгебре, порождённой двумя другими. Это значит, что наш автоморфизм может отображать e_1 в любую точку e'_1 на 6-сфере единичных мнимых октонионов, затем отображать e_2 в любую точку e'_2 на 5-сфере единичных мнимых октонионов, ортогональных к e'_1 , и затем отображать e_3 в любую точку e'_3 на 3-сфере единичных мнимых октонионов, ортогональных к e'_1, e'_2 и $e'_1e'_2$. Отсюда следует, что

$$\dim G_2 = \dim S^6 + \dim S^5 + \dim S^3 = 14.$$

Тройственное описание (triatlity description) октонионов в разделе 2.4 даёт другую картину G_2 . Прежде всего, вспомним, что $\mathrm{Spin}(8)$ является группой автоморфизмов тройственности

$t_8: V_8 \times S_8^+ \times S_8^- \rightarrow \mathbb{R}$. Чтобы построить октонионы из этой тройственности, необходимо выбрать единичные векторы в любых двух из этих пространств, так что мы можем представлять G_2 как подгруппу $\text{Spin}(8)$, фиксирующую единичные векторы в V_8 и S_8^+ . Подгруппа $\text{Spin}(8)$, фиксирующая единичный вектор в V_8 , является просто $\text{Spin}(7)$, и когда мы ограничиваем представление S_8^+ до $\text{Spin}(7)$, мы получим спинорное представление S_7 . Таким образом, G_2 есть подгруппа $\text{Spin}(7)$, фиксирующая единичный вектор в S_7 . Поскольку $\text{Spin}(7)$ действует транзитивно на единичной сфере S^7 в этом спинорном представлении [2], мы имеем

$$\text{Spin}(7)/G_2 = S^7.$$

Отсюда следует, что

$$\dim G_2 = \dim(\text{Spin}(7)) - \dim S^7 = 21 - 7 = 14.$$

Картина станет несколько более яркой, если мы вспомним, что после выбора единичных векторов в V_8 и S_8^+ , мы можем отождествить оба эти представления с октонионами, с обоими единичными векторами, соответствующими $1 \in \mathbb{O}$. Таким образом, получается следующее: подгруппа $\text{Spin}(8)$, которая фиксирует 1 в векторном представлении на \mathbb{O} , есть $\text{Spin}(7)$; подгруппа, фиксирующая 1 в векторном и правом спинорном представлениях одновременно, есть G_2 . Эта подгруппа также фиксирует элемент 1 в левом спинорном представлении $\text{Spin}(8)$ на \mathbb{O} .

Теперь, используя векторное представление $\text{Spin}(8)$ на \mathbb{O} , мы получаем гомоморфизмы

$$G_2 \hookrightarrow \text{Spin}(8) \rightarrow \text{SO}(\mathbb{O}),$$

где $\text{SO}(\mathbb{O}) \cong \text{SO}(8)$ является группой вращений октонионов, рассматриваемых как действительное векторное пространство со скалярным произведением $\langle x, y \rangle = \text{Re}(x^*y)$. Отображение из $\text{Spin}(8)$ на $\text{SO}(\mathbb{O})$ отображает два элемента в один, но если мы ограничим его до G_2 , мы получим взаимно однозначное отображение.

$$G_2 \hookrightarrow \text{SO}(\mathbb{O}).$$

На уровне алгебр Ли эта конструкция даёт включение

$$\mathfrak{g}_2 \hookrightarrow \mathfrak{so}(\mathbb{O}),$$

где $\mathfrak{so}(\mathbb{O}) \cong \mathfrak{so}(8)$ является алгеброй Ли косо-сопряжённых (skew-adjoint) действительных линейных преобразований октонионов. Поскольку \mathfrak{g}_2 14-мерна, а $\mathfrak{so}(\mathbb{O})$ 28-мерна, полезно точно понять, откуда берутся дополнительные 14 размерностей. На самом деле, они появляются из двух копий $\text{Im}(\mathbb{O})$, 7-мерного пространства, состоящего из всех мнимых октонионов.

Более точно, мы имеем:

$$\mathfrak{so}(\mathbb{O}) = \mathfrak{g}_2 \oplus L_{\text{Im}(\mathbb{O})} \oplus R_{\text{Im}(\mathbb{O})} \tag{11}$$

(прямая сумма векторных пространств, а не алгебр Ли), где $L_{\text{Im}(\mathbb{O})}$ – пространство линейных преобразований \mathbb{O} , заданных посредством левого умножения на мнимые октонионы, и $R_{\text{Im}(\mathbb{O})}$ – пространство линейных преобразований \mathbb{O} , заданных посредством правого умножения на мнимые октонионы [84]. Чтобы увидеть это, сначала проверим, что левое умножение на мнимый октонион является косо-сопряжённым. Используя поляризацию, достаточно заметить, что

$$\langle x, ax \rangle = \text{Re}(x^*(ax)) = \text{Re}((x^*a)x) = \text{Re}((a^*x)^*x) = -\text{Re}((ax)^*x) = -\langle ax, x \rangle$$

для всех $a \in \text{Im}(\mathbb{O})$ и $x \in \mathbb{O}$. Заметим, что эти вычисления используют только правило альтернативности, а не ассоциативности, поскольку все x, x^* и a лежат в алгебре, порождённой двумя элементами a и $\text{Im}(x)$. Подобная аргументация показывает, что правое умножение на мнимый октонион косо-сопряжено. Отсюда следует, что все $\mathfrak{g}_2, L_{\text{Im}(\mathbb{O})}$ и $R_{\text{Im}(\mathbb{O})}$ естественным образом лежат в $\mathfrak{so}(8)$. Далее, с помощью ряда простых вычислений можно проверить, что

$$L_{\text{Im}(\mathbb{O})} \cap R_{\text{Im}(\mathbb{O})} = \{0\}$$

и

$$\mathfrak{g}_2 \cap (L_{\text{Im}(\mathbb{O})} + R_{\text{Im}(\mathbb{O})}) = \{0\}.$$

Из факта, что размерности 3 частей добавляются до 28, следует уравнение (11).

Мы уже видели, что G_2 сидит внутри $SO(8)$, но можно сказать точнее: она в действительности сидит внутри $SO(7)$. В заключение, любой автоморфизм октонионов сохраняет единицу, и таким образом сохраняет пространство октонионов, ортогональное единице. Это пространство есть просто $\text{Im}(\mathbb{O})$, так что мы получаем включение

$$G_2 \hookrightarrow SO(\text{Im}(\mathbb{O})),$$

где $SO(\text{Im}(\mathbb{O})) \cong SO(7)$ – группа вращений мнимых октонионов. На уровне алгебр Ли это даёт включение

$$\mathfrak{g}_2 \hookrightarrow \mathfrak{so}(\text{Im}(\mathbb{O})).$$

Поскольку \mathfrak{g}_2 14-мерна, а $\mathfrak{so}(\text{Im}(\mathbb{O}))$ 21-мерна, полезно увидеть, откуда берутся дополнительные семь размерностей. После исследования уравнения (11) ясно, что эти дополнительные размерности должны появляться из преобразований в $L_{\text{Im}(\mathbb{O})} \oplus R_{\text{Im}(\mathbb{O})}$, которые уничтожают единицу $1 \in \mathbb{O}$. Преобразования, которые делают это, имеют в точности вид

$$\text{ad}_a = L_a - R_a$$

для $a \in \text{Im}(\mathbb{O})$. Мы, таким образом, получаем

$$\mathfrak{so}(\text{Im}(\mathbb{O})) \cong \mathfrak{der}(\mathbb{O}) \oplus \text{ad}_{\text{Im}(\mathbb{O})}, \quad (12)$$

где $\text{ad}_{\text{Im}(\mathbb{O})}$ есть 7-мерное пространство таких преобразований.

Можно суммировать вышеизложенные результаты следующим образом:

Теорема 4. *Компактная действительная форма алгебры Ли \mathfrak{g}_2 задается выражением*

$$\mathfrak{g}_2 = \mathfrak{der}(\mathbb{O}) \subset \mathfrak{so}(\text{Im}(\mathbb{O})) \subset \mathfrak{so}(\mathbb{O})$$

и мы имеем

$$\begin{aligned} \mathfrak{so}(\text{Im}(\mathbb{O})) &= \mathfrak{der}(\mathbb{O}) \oplus \text{ad}_{\text{Im}(\mathbb{O})} \\ \mathfrak{so}(\mathbb{O}) &= \mathfrak{der}(\mathbb{O}) \oplus L_{\text{Im}(\mathbb{O})} \oplus R_{\text{Im}(\mathbb{O})}, \end{aligned}$$

где скобки Ли в $\mathfrak{so}(\text{Im}(\mathbb{O}))$ и $\mathfrak{so}(\mathbb{O})$ построены из естественных билинейных операций над слагаемыми.

Как мы уже видели, G_2 имеет 7-мерное представление $\text{Im}(\mathbb{O})$. В действительности, это наименьшее нетривиальное представление G_2 , так что имеет смысл понять его как можно большим числом разных способов. Пространство $\text{Im}(\mathbb{O})$ имеет как минимум три естественные структуры, которые сохраняются преобразованиями в G_2 . Они дают больше описаний G_2 как группы симметрий и они также проливают некоторый новый свет на октонионы. Первые две из этих структур, описываемых нами, аналогичны более знакомым, которые существуют в трёхмерном пространстве мнимых кватернионов $\text{Im}(\mathbb{H})$. Третья явно использует неассоциативность октонионов.

Прежде всего, и $\text{Im}(\mathbb{H})$, и $\text{Im}(\mathbb{O})$ замкнуты относительно коммутатора. В случае $\text{Im}(\mathbb{H})$ коммутатор, разделенный на 2, является знакомым **векторным произведением** (cross product) в трёх размерностях:

$$a \times b = \frac{1}{2}[a, b].$$

Можно дать такое же определение для $\text{Im}(\mathbb{O})$, получая семимерный аналог векторного произведения. Как для $\text{Im}(\mathbb{H})$, так и для $\text{Im}(\mathbb{O})$ векторное произведение билинейно и антикоммукативно. Векторное произведение превращает $\text{Im}(\mathbb{H})$ в алгебру Ли, – но не $\text{Im}(\mathbb{O})$. И для $\text{Im}(\mathbb{H})$, и для $\text{Im}(\mathbb{O})$ векторное произведение имеет два замечательных геометрических свойства. С одной стороны, его норма определяется формулой

$$\|a \times b\|^2 + \langle a, b \rangle^2 = \|a\|^2 \|b\|^2,$$

или эквивалентно,

$$\|a \times b\| = |\sin \theta| \|a\| \|b\|,$$

где θ есть угол между a и b . С другой стороны, $a \times b$ ортогонально к a и b . Оба эти свойства следуют из простых вычислений. Для $\text{Im}(\mathbb{H})$ эти два свойства достаточны для определения $x \times y$ с точностью до знака. Для $\text{Im}(\mathbb{O})$ они недостаточны – но они становятся достаточными, если мы также используем факт, что $x \times y$ лежит внутри копии $\text{Im}(\mathbb{H})$, содержащей x и y .

Ясно, что группа всех действительных линейных преобразований $\text{Im}(\mathbb{H})$, сохраняющая векторное произведение, есть просто $\text{SO}(3)$, которая также является группой автоморфизмов кватернионов. Подобным образом можно показать, что группа вещественно-линейных преобразований на $\text{Im}(\mathbb{O})$, сохраняющая векторное произведение, есть в точности G_2 . Чтобы увидеть это, для начала заметим, что любой элемент G_2 сохраняет векторное произведение на $\text{Im}(\mathbb{O})$, поскольку векторное произведение определено с использованием октонионного умножения. Чтобы убедиться в обратном, т. е. что любое преобразование, сохраняющее векторное произведение, лежит в G_2 , достаточно выразить умножение мнимых октонионов в терминах их векторного произведения. Используя это тождество:

$$a \times b = ab + \langle a, b \rangle,$$

на самом деле достаточно выразить скалярное произведение на $\text{Im}(\mathbb{O})$ через векторное произведение. Здесь работает следующее тождество:

$$\langle a, b \rangle = -\frac{1}{6} \text{tr}(a \times (b \times \cdot)), \tag{13}$$

где правая часть отсылает к следу преобразования

$$a \times (b \times \cdot): \text{Im}(\mathbb{O}) \rightarrow \text{Im}(\mathbb{O}).$$

Во-вторых, и $\text{Im}(\mathbb{H})$, и $\text{Im}(\mathbb{O})$ снабжены естественной 3-формой, или, другими словами, антисимметричным трilinearным функционалом. Он задается выражением

$$\phi(x, y, z) = \langle x, yz \rangle.$$

В случае $\text{Im}(\mathbb{H})$ это просто обычная форма объёма, и группа действительных линейных преобразований, сохраняющих её, есть $\text{SL}(3, \mathbb{R})$. В случае $\text{Im}(\mathbb{O})$ действительные линейные преобразования, сохраняющие ϕ , являются в точности преобразованиями группы G_2 . Доказательство этого, данное Робертом Брайантом, можно найти в книге Риза Харвея [54]. 3-форма ϕ играет важную роль в теории "многообразий Джойса" [60], которые являются 7-мерными римановыми многообразиями с группой голономий, равной G_2 .

В-третьих, и $\text{Im}(\mathbb{H})$, и $\text{Im}(\mathbb{O})$ замкнуты относительно ассоциатора. Для $\text{Im}(\mathbb{H})$ это скучно, поскольку ассоциатор равен нулю. С другой стороны, для $\text{Im}(\mathbb{O})$ ассоциатор уже интересен. На самом деле, из результатов Харвея [54] следует, что действительное линейное преобразование $T: \text{Im}(\mathbb{O}) \rightarrow \text{Im}(\mathbb{O})$ сохраняет ассоциатор тогда и только тогда, когда $\pm T$ лежит в G_2 . Таким образом, группа симметрии ассоциатора немного больше, чем G_2 : она есть $G_2 \times \mathbb{Z}_2$.

Теперь необходимо сделать запутывающее признание: все эти три структуры на $\text{Im}(\mathbb{O})$ – почти одно и то же! Исходя из векторного произведения

$$\times: \text{Im}(\mathbb{O}) \times \text{Im}(\mathbb{O}) \rightarrow \text{Im}(\mathbb{O})$$

мы можем восстановить обычное скалярное произведение на $\text{Im}(\mathbb{O})$ с помощью уравнения (13). Это скалярное произведение позволяет дуализировать векторное произведение и получить трilinearный функционал, который с точностью до константы равен именно 3-форме

$$\phi: \text{Im}(\mathbb{O}) \times \text{Im}(\mathbb{O}) \times \text{Im}(\mathbb{O}) \rightarrow \mathbb{R}.$$

Векторное произведение также определяет ориентацию на $\text{Im}(\mathbb{O})$ (доказательство этого мы оставляем читателю в качестве упражнения). Это позволяет вычислить дуальность Ходжа (Hodge dual) от ϕ , получая 4-форму ψ , т. е. антисимметричный тетралаинейный функционал

$$\psi: \text{Im}(\mathbb{O}) \times \text{Im}(\mathbb{O}) \times \text{Im}(\mathbb{O}) \times \text{Im}(\mathbb{O}) \rightarrow \mathbb{R}.$$

Дуализируя ещё раз, получим тернарную операцию, которая с точностью до постоянного множителя, является ассоциатором:

$$[\cdot, \cdot, \cdot]: \text{Im}(\mathbb{O}) \times \text{Im}(\mathbb{O}) \times \text{Im}(\mathbb{O}) \rightarrow \text{Im}(\mathbb{O}).$$

Мы завершаем этот раздел удобной явной формулой для всех дифференцирований октонионов. В ассоциативной алгебре A любой элемент x определяет **внутреннее дифференцирование** (inner derivation) $\text{ad}_x: A \rightarrow A$ посредством

$$\text{ad}_x(a) = [x, a],$$

где скобка означает коммутатор $xa - ax$. В неассоциативной алгебре эта формула обычно не определяет дифференцирование. Однако, если A альтернативна, любая пара элементов $x, y \in A$ определяет дифференцирование $D_{x,y}: A \rightarrow A$ посредством

$$D_{x,y}a = [[x, y], a] - 3[x, y, a], \quad (14)$$

где $[a, b, x]$ обозначает ассоциатор $(ab)x - a(bx)$. Более того, когда A – нормированная алгебра с делением, любое дифференцирование есть линейная комбинация дифференцирований этого вида. К сожалению, доказательство этих фактов представляется весьма трудоемким [84].

4.2 F_4

Вторая наименьшая из исключительных групп Ли – это 52-мерная группа F_4 . Геометрическое значение этой группы было выяснено в целом ряде почти одновременных статей различных математиков. В 1949 Йордан построил октонионную проективную плоскость, используя проекции в $\mathfrak{h}_3(\mathbb{O})$. Год спустя Арман Борель [10] заметил, что F_4 является группой изометрий 16-мерной проективной плоскости. На самом деле, эта плоскость – ни что иное, как $\mathbb{O}\mathbb{P}^2$. Также в 1950 Клод Шевалье и Ричард Шафер [21] показали, что F_4 является группой автоморфизмов $\mathfrak{h}_3(\mathbb{O})$. В 1951 Фройденталь [39] начал длинную серию работ, в которых он описал не только F_4 , но также и другие исключительные группы Ли, используя октонионную проективную геометрию. Для ознакомления с этими исследованиями до сих пор нет способа лучше, чем прочитать его классическую работу 1964 г. по группам Ли и основаниям геометрии [42].

Примем результат Шевалье и Шафера за определение F_4 :

$$F_4 = \text{Aut}(\mathfrak{h}_3(\mathbb{O})).$$

Её алгебра Ли, таким образом, есть

$$\mathfrak{f}_4 = \mathfrak{der}(\mathfrak{h}_3(\mathbb{O})).$$

Как мы видели в разделе 3.4, точки $\mathbb{O}\mathbb{P}^2$ соответствуют проекциям следа 1 в исключительной йордановой алгебре. Отсюда следует, что F_4 действует, как преобразования $\mathbb{O}\mathbb{P}^2$. На самом деле, мы можем снабдить $\mathbb{O}\mathbb{P}^2$ римановой метрикой, для которой F_4 является группой изометрий. В качестве пояснения, опишем $\mathbb{O}\mathbb{P}^2$ как частное пространство (quotient space) F_4 .

В разделе 3.4 мы видели, что исключительная йорданова алгебра может быть построена с использованием естественных операций на скалярных, векторных и спинорных представлениях $\text{Spin}(9)$. Это означает, что $\text{Spin}(9)$ является подгруппой F_4 . Уравнение (9) выявляет то, что $\text{Spin}(9)$ является в точности подгруппой, фиксирующей элемент

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку этот элемент является проекцией следа 1, он соответствует точке $\mathbb{O}\mathbb{P}^2$. Мы уже видели, что F_4 действует транзитивно на $\mathbb{O}\mathbb{P}^2$. Отсюда следует, что

$$\mathbb{O}\mathbb{P}^2 \cong F_4/\text{Spin}(9). \tag{15}$$

Этот факт имеет различные красивые побочные результаты (nice spinoffs). Во-первых, он даёт лёгкий способ вычислить размерность F_4 :

$$\dim(F_4) = \dim(\text{Spin}(9)) + \dim(\mathbb{O}\mathbb{P}^2) = 36 + 16 = 52.$$

Во-вторых, поскольку F_4 компактна, можно выбрать любую риманову метрику на $\mathbb{O}\mathbb{P}^2$ и усреднить её относительно действия этой группы. Группа изометрии полученной метрики будет автоматически включать F_4 как подгруппу. При помощи дальнейших вычислений [6], можно показать что на самом деле

$$F_4 = \text{Isom}(\mathbb{O}\mathbb{P}^2)$$

и таким образом

$$\mathfrak{f}_4 = \mathfrak{isom}(\mathbb{O}\mathbb{P}^2).$$

Из уравнения (15) также следует, что касательное пространство в выбранной нами точке $\mathbb{O}\mathbb{P}^2$ изоморфно $\mathfrak{f}_4/\mathfrak{so}(9)$. Но мы уже знаем, что это касательное пространство является именно \mathbb{O}^2 , или другими словами, спинорным представлением $\mathfrak{so}(9)$. Мы, таким образом, имеем

$$\mathfrak{f}_4 \cong \mathfrak{so}(9) \oplus S_9 \tag{16}$$

как векторные пространства, где $\mathfrak{so}(9)$ является подалгеброй Ли. Скобка в \mathfrak{f}_4 построена из скобки в $\mathfrak{so}(9)$, действия $\mathfrak{so}(9) \otimes S_9 \rightarrow S_9$ и отображения $S_9 \otimes S_9 \rightarrow \mathfrak{so}(9)$, полученного дуализацией этого действия. Мы можем также переписать это описание \mathfrak{f}_4 в терминах октонионов следующим образом:

$$\mathfrak{f}_4 \cong \mathfrak{so}(\mathbb{O} \oplus \mathbb{R}) \oplus \mathbb{O}^2.$$

Последняя формула подразумевает, что мы разлагаем \mathfrak{f}_4 с дальнейшим использованием расщепления $\mathbb{O} \oplus \mathbb{R}$ на \mathbb{O} и \mathbb{R} . Легко видеть, глядя на матрицы, что для всех n, m мы имеем

$$\mathfrak{so}(n + m) \cong \mathfrak{so}(n) \oplus \mathfrak{so}(m) \oplus V_n \otimes V_m. \tag{17}$$

Более того, когда мы ограничиваем представление S_9 до $\mathfrak{so}(8)$, оно расщепляется на прямую сумму $S_8^+ \oplus S_8^-$. Используя эти факты и уравнения (16), мы видим, что

$$\mathfrak{f}_4 \cong \mathfrak{so}(8) \oplus V_8 \oplus S_8^+ \oplus S_8^-. \tag{18}$$

Эта формула подчеркивает тесную связь между \mathfrak{f}_4 и тройственностью: скобка Ли в \mathfrak{f}_4 полностью построена из отображений, относящихся к $\mathfrak{so}(8)$ и её трём 8-мерным неприводимым представлениям! Можно переписать это способом, выявляющим роль октонионов:

$$\mathfrak{f}_4 \cong \mathfrak{so}(\mathbb{O}) \oplus \mathbb{O}^3.$$

Несмотря на всю элегантность, ни одно из этих описаний \mathfrak{f}_4 не даёт удобной картины всех дифференцирований исключительной йордановой алгебры. На самом деле, имеется красивая картина такого рода для $\mathfrak{h}_3(\mathbb{K})$ всякий раз, когда \mathbb{K} является нормированной алгеброй с делением. Один из способов получить дифференцирование йордановой алгебры $\mathfrak{h}_3(\mathbb{K})$ – это получить дифференцирование \mathbb{K} и подействовать ею на каждый элемент матриц из $\mathfrak{h}_3(\mathbb{K})$. Другой способ использует элементы

$$\mathfrak{sa}_3(\mathbb{K}) = \{x \in \mathbb{K}[3]: x^* = -x, \text{tr}(x) = 0\}.$$

Для данного $x \in \mathfrak{sa}_3(\mathbb{K})$ имеется дифференцирование ad_x на $\mathfrak{h}_3(\mathbb{K})$, заданное посредством

$$\text{ad}_x(a) = [x, a].$$

На самом деле, [5], любое дифференцирование $\mathfrak{h}_3(\mathbb{K})$ может быть единственным образом выражена в виде линейной комбинации производных этих двух типов, так что мы имеем

$$\mathfrak{der}(\mathfrak{h}_3(\mathbb{K})) \cong \mathfrak{der}(\mathbb{K}) \oplus \mathfrak{sa}_3(\mathbb{K}) \quad (19)$$

как векторные пространства. В случае октонионов из такого разложения следует, что

$$\mathfrak{f}_4 \cong \mathfrak{g}_2 \oplus \mathfrak{sa}_3(\mathbb{O}).$$

В уравнении (19) подпространство $\mathfrak{der}(\mathbb{K})$ всегда является подалгеброй Ли, а $\mathfrak{sa}_3(\mathbb{K})$ не является, если только \mathbb{K} не коммутативна и ассоциативна – в этом случае $\mathfrak{der}(\mathbb{K})$ равняется нулю. Тем не менее, имеется формула для скобок в $\mathfrak{der}(\mathfrak{h}_3(\mathbb{K}))$, которая применяется в любом случае. [75]. Для заданных $D, D' \in \mathfrak{der}(\mathbb{K})$ и $x, y \in \mathfrak{sa}_3(\mathbb{K})$, имеем

$$\begin{aligned} [D, D'] &= DD' - D'D \\ [D, \text{ad}_x] &= \text{ad}_{Dx} \\ [\text{ad}_x, \text{ad}_y] &= \text{ad}_{[x,y]_0} + \frac{1}{3} \sum_{i,j=1}^3 D_{x_{ij}, y_{ij}}, \end{aligned} \quad (20)$$

где D действует на x покомпонентно, $[x, y]_0$ – бесследовая часть коммутатора $[x, y]$, и $D_{x_{ij}, y_{ij}}$ является дифференцированием \mathbb{K} , определённой с использованием уравнения (14).

Суммируя эти различные описания \mathfrak{f}_4 , мы имеем:

Теорема 5. *Компактная действительная форма \mathfrak{f}_4 задается посредством*

$$\begin{aligned} \mathfrak{f}_4 &\cong \text{isom}(\mathbb{O}\mathbb{P}^2) \\ &\cong \mathfrak{der}(\mathfrak{h}_3(\mathbb{O})) \\ &\cong \mathfrak{der}(\mathbb{O}) \oplus \mathfrak{sa}_3(\mathbb{O}) \\ &\cong \mathfrak{so}(\mathbb{O} \oplus \mathbb{R}) \oplus \mathbb{O}^2 \\ &\cong \mathfrak{so}(\mathbb{O}) \oplus \mathbb{O}^3, \end{aligned}$$

где в каждом случае скобка Ли построена из естественных билинейных операций над слагаемыми.

4.3 Магический Квадрат

Около 1956 Борис Розенфельд [79] высказал замечательную идею: точно так же, как F_4 является группой изометрии проективной плоскости над октонионами, исключительные группы Ли E_6 , E_7 и E_8 являются группами изометрии проективных плоскостей над следующими тремя алгебрами соответственно:

- **биооктонионы**, $\mathbb{C} \otimes \mathbb{O}$,
- **кватероктонионы**, $\mathbb{H} \otimes \mathbb{O}$,
- **октооктонионы**, $\mathbb{O} \otimes \mathbb{O}$.

В этой идее определённно имеется нечто правильное, поскольку можно было бы ожидать, что эти проективные плоскости имеют размерность 32, 64 и 128, и на самом деле существуют компактные римановы многообразия с этими размерностями, имеющими E_6 , E_7 и E_8 в качестве своих групп изометрии. Проблема в том, что биооктонионы, кватероктонионы и октооктонионы не являются алгебрами с делением, так что определить проективные плоскости над ними – нетривиальная задача!

Ситуация не так плоха для биооктонионов: $\mathfrak{h}_3(\mathbb{C} \otimes \mathbb{O})$ есть простая йорданова алгебра, хотя она и не является формально действительной, и можно использовать её для определения $(\mathbb{C} \otimes \mathbb{O})\mathbb{P}^2$ способом, смоделированным после одного из построений $\mathbb{O}\mathbb{P}^2$. Розенфельд заявил, что подобная конструкция работает для для кватероктонионов и октооктонионов, но оказывается, что это не так. Среди других проблем, $\mathfrak{h}_3(\mathbb{H} \otimes \mathbb{O})$ и $\mathfrak{h}_3(\mathbb{O} \otimes \mathbb{O})$ не становятся йордановыми

алгебрами относительно произведения $a \circ b = \frac{1}{2}(ab + ba)$. Можно найти разбросанные по литературе [6, 42, 43] разочарованные комментарии по поводу отсутствия действительно красивых конструкций $(\mathbb{H} \otimes \mathbb{O})\mathbb{P}^2$ и $(\mathbb{O} \otimes \mathbb{O})\mathbb{P}^2$. Одна из проблем заключается в том, что эти пространства не удовлетворяют обычным аксиомам для проективной плоскости. Титц обращался к этой проблеме в своей теории "зданий", которая позволяет конструировать геометрию, имеющую любую желательную алгебраическую группу в качестве симметрий [97]. Но увы, до сих пор кажется, что скорейший путь добраться до кватрооктонионных и октооктонионных проективных плоскостей заключается в том, чтобы, *стартуя от групп* Ли E_7 и E_8 , затем найти факторпространства от деления на подходящие подгруппы.

Вкратце, требуется много работы перед тем, как можно будет объявить о полном выяснении геометрического значения групп Ли E_6, E_7 и E_8 . К счастью, идеи Розенфельда могут быть использованы для изящного построения их алгебр Ли. Это носит имя "магического квадрата". Титц [96] и Фройденталь [41] нашли две совершенно различных версии этого построения около 1958, но мы начнём с представления упрощенной версии, опубликованной Е. Б. Винбергом [99] в 1966.

Сначала рассмотрим проективную плоскость $\mathbb{K}\mathbb{P}^2$, когда \mathbb{K} является нормированной алгеброй с делением. Точки этой плоскости являются проекциями ранга-1 в йордановой алгебре $\mathfrak{h}_3(\mathbb{K})$, и эта плоскость допускает риманову метрику такую, что

$$\text{isom}(\mathbb{K}\mathbb{P}^2) \cong \text{der}(\mathfrak{h}_3(\mathbb{K})).$$

Более того, мы видели в уравнении (19), что

$$\text{der}(\mathfrak{h}_3(\mathbb{K})) \cong \text{der}(\mathbb{K}) \oplus \mathfrak{sa}_3(\mathbb{K}).$$

Вместе с наблюдениями Розенфельда, эти факты могли бы дать повод надеяться, что всякий раз, когда имеется пара нормированных алгебр с делением \mathbb{K} и \mathbb{K}' , существует риманово многообразие $(\mathbb{K} \otimes \mathbb{K}')\mathbb{P}^2$ с

$$\text{isom}((\mathbb{K} \otimes \mathbb{K}')\mathbb{P}^2) \cong \text{der}(\mathbb{K}) \oplus \text{der}(\mathbb{K}') \oplus \mathfrak{sa}_3(\mathbb{K} \otimes \mathbb{K}'),$$

где для любой *-алгебры мы определяем

$$\begin{aligned} \mathfrak{sh}_n(A) &= \{x \in A[n]: x^* = x, \text{tr}(x) = 0\} \\ \mathfrak{sa}_n(A) &= \{x \in A[n]: x^* = -x, \text{tr}(x) = 0\}. \end{aligned}$$

Это стало мотивом Винберговского определения **магического квадрата** алгебр Ли

$$M(\mathbb{K}, \mathbb{K}') = \text{der}(\mathbb{K}) \oplus \text{der}(\mathbb{K}') \oplus \mathfrak{sa}_3(\mathbb{K} \otimes \mathbb{K}').$$

Теперь, когда $\mathbb{K} \otimes \mathbb{K}'$ коммутативно и ассоциативно, $\mathfrak{sa}_3(\mathbb{K} \otimes \mathbb{K}')$ является алгеброй Ли с коммутатором в качестве её скобок Ли, но в действительно интересных случаях это не так. Таким образом, чтобы превратить $M(\mathbb{K}, \mathbb{K}')$ в алгебру Ли, мы должны снабдить её гораздо более хитроумной скобкой. Мы уже рассматривали частный случай $\mathbb{K}' = \mathbb{R}$ в уравнении (20). В общем случае, скобка Ли в $M(\mathbb{K}, \mathbb{K}')$ задаётся следующим образом:

1. $\text{der}(\mathbb{K})$ и $\text{der}(\mathbb{K}')$ – коммутирующие подалгебры Ли в $M(\mathbb{K}, \mathbb{K}')$.
2. Скобка $D \in \text{der}(\mathbb{K}) \oplus \text{der}(\mathbb{K}')$ с $x \in \mathfrak{sa}_3(\mathbb{K} \otimes \mathbb{K}')$ задаётся применением D к каждому элементу матрицы x , используя естественное действие $\text{der}(\mathbb{K}) \oplus \text{der}(\mathbb{K}')$ как дифференцирований $\mathbb{K} \otimes \mathbb{K}'$.
3. Для данного $X, Y \in \mathfrak{sa}_3(\mathbb{K} \otimes \mathbb{K}')$

$$[X, Y] = [X, Y]_0 + \frac{1}{3} \sum_{i,j=1}^3 D_{X_{ij}, Y_{ij}}.$$

Здесь $[X, Y]_0$ – бесследовая часть 3×3 матрицы $[X, Y]$, и для данных $x, y \in \mathbb{K} \otimes \mathbb{K}'$ мы определяем $D_{x,y} \in \mathfrak{der}(\mathbb{K}) \oplus \mathfrak{der}(\mathbb{K}')$ следующим образом: $D_{x,y}$ является действительным билинейным по x и y , и

$$D_{a \otimes a', b \otimes b'} = \langle a', b' \rangle D_{a,b} + \langle a, b \rangle D_{a',b'},$$

где $a, b \in \mathbb{K}$, $a', b' \in \mathbb{K}'$, и $D_{a,b}, D_{a',b'}$ определены, как в уравнении (14).

С таким построением мы волшебным образом получаем следующий квадрат алгебр Ли:

	$\mathbb{K}' = \mathbb{R}$	$\mathbb{K}' = \mathbb{C}$	$\mathbb{K}' = \mathbb{H}$	$\mathbb{K}' = \mathbb{O}$
$\mathbb{K} = \mathbb{R}$	$\mathfrak{so}(3)$	$\mathfrak{su}(3)$	$\mathfrak{sp}(3)$	\mathfrak{f}_4
$\mathbb{K} = \mathbb{C}$	$\mathfrak{su}(3)$	$\mathfrak{su}(3) \oplus \mathfrak{su}(3)$	$\mathfrak{su}(6)$	e_6
$\mathbb{K} = \mathbb{H}$	$\mathfrak{sp}(3)$	$\mathfrak{su}(6)$	$\mathfrak{so}(12)$	e_7
$\mathbb{K} = \mathbb{O}$	\mathfrak{f}_4	e_6	e_7	e_8

Таблица 5 – Магический квадрат алгебр Ли $M(\mathbb{K}, \mathbb{K}')$

Мы будем главным образом интересоваться последним рядом (или столбцом), единственным, в котором участвуют октонионы. В этом случае можно принять конструкцию магического квадрата в качестве *определения* алгебр Ли \mathfrak{f}_4, e_6, e_7 и e_8 . Это определение оказывается совместимым с нашими предыдущими определениями \mathfrak{f}_4 .

Начиная с винберговского определения магического квадрата алгебр Ли, можно легко восстановить оригинальное определение Титца. Чтобы это сделать, необходимы два факта. Во-первых,

$$\mathfrak{sa}_3(\mathbb{K} \otimes \mathbb{K}') \cong \mathfrak{sa}_3(\mathbb{K}') \oplus (\mathrm{Im}(\mathbb{K}) \otimes \mathfrak{sh}_3(\mathbb{K}')).$$

Это легко увидеть непосредственной проверкой подходящих матриц. Во-вторых,

$$\mathfrak{der}(\mathfrak{h}_3(\mathbb{K})) \cong \mathfrak{der}(\mathbb{K}) \oplus \mathfrak{sa}_3(\mathbb{K})$$

как векторные пространства. Это просто уравнения (19). Начав с винберговского определения и применив эти два факта, мы получим

$$\begin{aligned} M(\mathbb{K}, \mathbb{K}') &= \mathfrak{der}(\mathbb{K}) \oplus \mathfrak{der}(\mathbb{K}') \oplus \mathfrak{sa}_3(\mathbb{K} \otimes \mathbb{K}') \\ &\cong \mathfrak{der}(\mathbb{K}) \oplus \mathfrak{der}(\mathbb{K}') \oplus \mathfrak{sa}_3(\mathbb{K}') \oplus (\mathrm{Im}(\mathbb{K}) \otimes \mathfrak{sh}_3(\mathbb{K}')) \\ &\cong \mathfrak{der}(\mathbb{K}) \oplus \mathfrak{der}(\mathfrak{h}_3(\mathbb{K}')) \oplus (\mathrm{Im}(\mathbb{K}) \otimes \mathfrak{sh}_3(\mathbb{K}')). \end{aligned}$$

Последняя строка есть определение Титца магического квадрата алгебр Ли. В отличие от винберговского, оно не является явно симметричным по \mathbb{K} и \mathbb{K}' . Это неудачное свойство отчасти обусловлено тем, что $\mathfrak{der}(\mathbb{K}) \oplus \mathfrak{der}(\mathfrak{h}_3(\mathbb{K}'))$ является замечательно большой подалгеброй Ли. Эта подалгебра действует на $\mathrm{Im}(\mathbb{K}) \otimes \mathfrak{sh}_3(\mathbb{K}')$ очевидным образом, используя факт, что любое дифференцирование \mathbb{K} отображает $\mathrm{Im}(\mathbb{K})$ на себя, и любое дифференцирование $\mathfrak{h}_3(\mathbb{K}')$ отображает $\mathfrak{sh}_3(\mathbb{K}')$ на себя. Однако, скобки двух элементов в $(\mathrm{Im}(\mathbb{K}) \otimes \mathfrak{sh}_3(\mathbb{K}'))$ являются своего рода путаницей.

Ещё одно описание магического квадрата было недавно дано Бартоном и Садбэри, [5]. Оно подчеркивает роль тройственности. Пусть $\mathfrak{tri}(\mathbb{K})$ является алгеброй Ли группы $\mathrm{Aut}(t)$, где t – нормированная тройственность, создающая нормированную алгебру с делением \mathbb{K} . Из уравнений (5) мы имеем

$$\begin{aligned} \mathfrak{tri}(\mathbb{R}) &\cong \{0\} \\ \mathfrak{tri}(\mathbb{C}) &\cong \mathfrak{u}(1)^2 \\ \mathfrak{tri}(\mathbb{H}) &\cong \mathfrak{sp}(1)^3 \\ \mathfrak{tri}(\mathbb{O}) &\cong \mathfrak{so}(8). \end{aligned} \tag{21}$$

Чтобы выразить магический квадрат в терминах этих алгебр Ли, необходимы три факта. Во-первых, легко видеть, что

$$\mathfrak{sh}_3(\mathbb{K}) \cong \mathbb{K}^3 \oplus \mathbb{R}^2.$$

Во-вторых, Бартон и Садбэри показали, что как векторные пространства,

$$\mathfrak{der}(\mathfrak{h}_3(\mathbb{K})) \cong \mathfrak{tri}(\mathbb{K}) \oplus \mathbb{K}^3.$$

Это следует из уравнения (21) для каждого случая по отдельности, но они дали унифицированное доказательство, охватывающее все варианты. В-третьих, они показали, что векторные пространства

$$\mathfrak{tri}(\mathbb{K}) \cong \mathfrak{der}(\mathbb{K}) \oplus \text{Im}(\mathbb{K})^2.$$

Теперь, начиная с определения магического квадрата Титца, применяя первые два факта, перегруппировывая члены, и применяя третий факт, мы получаем магический квадрат по версии Бартона и Садбэри:

$$\begin{aligned} M(\mathbb{K}, \mathbb{K}') &\cong \mathfrak{der}(\mathbb{K}) \oplus \mathfrak{der}(\mathfrak{h}_3(\mathbb{K}')) \oplus (\text{Im}(\mathbb{K}) \otimes \mathfrak{sh}_3(\mathbb{K}')) \\ &\cong \mathfrak{der}(\mathbb{K}) \oplus \mathfrak{tri}(\mathbb{K}') \oplus \mathbb{K}'^3 \oplus \text{Im}(\mathbb{K}) \otimes (\mathbb{K}'^3 \oplus \mathbb{R}^2) \\ &\cong \mathfrak{der}(\mathbb{K}) \oplus \text{Im}(\mathbb{K})^2 \oplus \mathfrak{tri}(\mathbb{K}') \oplus (\mathbb{K} \otimes \mathbb{K}')^3 \\ &\cong \mathfrak{tri}(\mathbb{K}) \oplus \mathfrak{tri}(\mathbb{K}') \oplus (\mathbb{K} \otimes \mathbb{K}')^3. \end{aligned}$$

В следующих трёх разделах мы используем все эти разные версии магического квадрата, чтобы получить ряд октонионных описаний e_6 , e_7 и e_8 . Для экономии места мы обычно опускаем формулы для скобок Ли в этих описаниях. Однако, терпеливый читатель может восстановить их с помощью статьи Бартона и Садбэри, которая переполнена полезными формулами.

Продолжая экскурс в исключительные алгебры Ли, мы установим связь с работой Адамса [2], построив \mathfrak{f}_4 , e_6 , e_7 , и e_8 с помощью спиноров и алгебр Ли групп вращений:

$$\begin{aligned} \mathfrak{f}_4 &\cong \mathfrak{so}(9) \oplus S_9 \\ e_6 &\cong \mathfrak{so}(10) \oplus \mathfrak{u}(1) \oplus S_{10} \\ e_7 &\cong \mathfrak{so}(12) \oplus \mathfrak{sp}(1) \oplus S_{12}^+ \\ e_8 &\cong \mathfrak{so}(16) \oplus S_{16}^+ \end{aligned}$$

как векторные пространства. Заметим, что числа 9, 10, 12 и 16 на 8 больше, чем размерности \mathbb{R} , \mathbb{C} , \mathbb{H} и \mathbb{O} . Как обычно, это не простое совпадение! В терминах октонионов, периодичность Ботта означает, что

$$S_{n+8} \cong S_n \otimes \mathbb{O}^2.$$

Это даёт следующее описание спиноров в размерностях ≤ 16 :

$S_1 = \mathbb{R}$	$S_9 = \mathbb{O}^2$
$S_2 = \mathbb{C}$	$S_{10} = (\mathbb{C} \otimes \mathbb{O})^2$
$S_3 = \mathbb{H}$	$S_{11} = (\mathbb{H} \otimes \mathbb{O})^2$
$S_4^\pm = \mathbb{H}$	$S_{12}^\pm = (\mathbb{H} \otimes \mathbb{O})^2$
$S_5 = \mathbb{H}^2$	$S_{13} = (\mathbb{H}^2 \otimes \mathbb{O})^2$
$S_6 = \mathbb{C}^4$	$S_{14} = (\mathbb{C}^4 \otimes \mathbb{O})^2$
$S_7 = \mathbb{O}$	$S_{15} = (\mathbb{O} \otimes \mathbb{O})^2$
$S_8^\pm = \mathbb{O}$	$S_{16}^\pm = (\mathbb{O} \otimes \mathbb{O})^2$

Таблица 6 – Спинорные представления (переработанные)

Поскольку спиноры в размерностях 1, 2, 4 и 8 изоморфны алгебрам деления \mathbb{R} , \mathbb{C} , \mathbb{H} и \mathbb{O} , спиноры в размерностях, на 8 больших, изоморфны "плоскостям" \mathbb{O}^2 , $(\mathbb{C} \otimes \mathbb{O})^2$, $(\mathbb{H} \otimes \mathbb{O})^2$ и $(\mathbb{O} \otimes \mathbb{O})^2$ – и таким образом тесно связаны с f_4 , e_6 , e_7 и e_8 благодаря магическому квадрату.

4.4 E_6

Мы начинаем с 78-мерной исключительной группы Ли E_6 . Как мы отмечали в разделе 3.4, имеется красивое описание определённой некомпактной действительной формы E_6 как группы коллинеаций $\mathbb{O}\mathbb{P}^2$, или, что эквивалентно, группы линейных преобразований $\mathfrak{h}_3(\mathbb{O})$, сохраняющих детерминант. Но перед тем, как в них углубиться, мы рассмотрим построения магических квадратов алгебры Ли e_6 . Винберговская конструкция даёт

$$e_6 = \mathfrak{det}(\mathbb{O}) \oplus \mathfrak{sa}_3(\mathbb{C} \otimes \mathbb{O}).$$

Конструкция Титца, которая асимметрична, даёт

$$e_6 \cong \mathfrak{det}(\mathfrak{h}_3(\mathbb{O})) \oplus \mathfrak{sh}_3(\mathbb{O})$$

и также

$$e_6 \cong \mathfrak{det}(\mathbb{O}) \oplus \mathfrak{det}(\mathfrak{h}_3(\mathbb{C})) \oplus (\mathrm{Im}(\mathbb{O}) \otimes \mathfrak{sh}_3(\mathbb{C})).$$

Конструкция Бартона-Садбэри даёт

$$e_6 \cong \mathfrak{tri}(\mathbb{O}) \oplus \mathfrak{tri}(\mathbb{C}) \oplus (\mathbb{C} \otimes \mathbb{O})^3.$$

Можно использовать любую из них для определения размерности e_6 . К примеру, мы имеем

$$\dim(e_6) = \dim(\mathfrak{det}(\mathfrak{h}_3(\mathbb{O}))) + \dim(\mathfrak{sh}_3(\mathbb{O})) = 52 + 26 = 78.$$

Начиная с конструкции Бартона-Садбэри и используя конкретные описания $\mathfrak{tri}(\mathbb{O})$ и $\mathfrak{tri}(\mathbb{C})$ из уравнения (21), мы получаем

$$e_6 \cong \mathfrak{so}(\mathbb{O}) \oplus \mathfrak{so}(\mathbb{C}) \oplus \mathrm{Im}(\mathbb{C}) \oplus (\mathbb{C} \otimes \mathbb{O})^3$$

Используя уравнение (17), мы можем переписать это в виде

$$e_6 \cong \mathfrak{so}(\mathbb{O} \oplus \mathbb{C}) \oplus \mathrm{Im}(\mathbb{C}) \oplus (\mathbb{C} \otimes \mathbb{O})^2$$

и оказывается, что слагаемое $\mathfrak{so}(\mathbb{O} \oplus \mathbb{C}) \oplus \mathrm{Im}(\mathbb{C})$ на самом деле является подалгеброй Ли e_6 . Этот результат можно также найти в книге Адамса [2], сформулированный следующим образом:

$$e_6 \cong \mathfrak{so}(10) \oplus \mathfrak{u}(1) \oplus S_{10}$$

На самом деле, он описывает скобки в e_6 в терминах естественных операций, относящихся к $\mathfrak{so}(10)$ и её спинорному представлению S_{10} . Забавно выглядящий множитель $\mathfrak{u}(1)$ возникает из того факта, что спинорное представление является комплексным. Скобка элемента $\mathfrak{u}(1)$ и элемента S_{10} является другим элементом S_{10} , определённым посредством очевидного действия $\mathfrak{u}(1)$ на этом комплексном пространстве.

Если мы определим E_6 как односвязную группу с алгеброй Ли e_6 , из результатов Адамса следует, что подгруппа, порождённая подалгеброй Ли $\mathfrak{so}(10) \oplus \mathfrak{u}(1)$ изоморфна $(\mathrm{Spin}(10) \times \mathrm{U}(1))/\mathbb{Z}_4$. Это позволяет определить **биоктонионную проективную плоскость** посредством

$$(\mathbb{C} \otimes \mathbb{O})\mathbb{P}^2 = E_6 / ((\mathrm{Spin}(10) \times \mathrm{U}(1))/\mathbb{Z}_4)$$

и сделать вывод, что касательная плоскость в любой точке этого многообразия изоморфна $S_{10} \cong (\mathbb{C} \otimes \mathbb{O})^2$.

Поскольку E_6 компактна, мы можем задать E_6 -инвариантную риманову метрику на биоктонионной проективной плоскости усреднением любой метрики по отношению к действию этой

группы. Оказывается [6], что группа изометрий этой метрики в точности является E_6 , так что мы имеем

$$E_6 \cong \text{Isom}((\mathbb{C} \otimes \mathbb{O})\mathbb{P}^2).$$

Отсюда следует, что

$$e_6 \cong \text{isom}((\mathbb{C} \otimes \mathbb{O})\mathbb{P}^2).$$

Суммируя, мы имеем шесть октонионных описаний e_6 :

Теорема 6. *Компактная действительная форма e_6 задается посредством*

$$\begin{aligned} e_6 &\cong \text{isom}((\mathbb{C} \otimes \mathbb{O})\mathbb{P}^2) \\ &\cong \text{det}(\mathbb{O}) \oplus \text{det}(\mathfrak{h}_3(\mathbb{C})) \oplus (\text{Im}(\mathbb{O}) \otimes \mathfrak{sh}_3(\mathbb{C})) \\ &\cong \text{det}(\mathfrak{h}_3(\mathbb{O})) \oplus \mathfrak{sh}_3(\mathbb{O}) \\ &\cong \text{det}(\mathbb{O}) \oplus \mathfrak{sa}_3(\mathbb{C} \otimes \mathbb{O}) \\ &\cong \mathfrak{so}(\mathbb{O} \oplus \mathbb{C}) \oplus \text{Im}(\mathbb{C}) \oplus (\mathbb{C} \otimes \mathbb{O})^2 \\ &\cong \mathfrak{so}(\mathbb{O}) \oplus \mathfrak{so}(\mathbb{C}) \oplus \text{Im}(\mathbb{C}) \oplus (\mathbb{C} \otimes \mathbb{O})^3, \end{aligned}$$

где в каждом случае скобка Ли в e_6 строится из естественных билинейных операций над слагаемыми.

Наименьшие нетривиальные представления E_6 27-мерны: на самом деле она имеет два неэквивалентных представления этой размерности, которые дуальны друг к другу. Но исключительная йорданова алгебра также 27-мерна, и в 1950 эта улика (clue) привела Шевалье и Шафера [21] к замечательному описанию E_6 как симметрий этой алгебры. Эти симметрии не сохраняют произведение, а только детерминант.

Более точно, группа линейных преобразований $\mathfrak{h}_3(\mathbb{O})$, сохраняющая определитель, оказывается некомпактной действительной формой E_6 . Эта действительная форма иногда называется $E_{6(-26)}$, поскольку её форма Киллинга имеет сигнатуру -26 . Чтобы в этом убедиться, заметим, что любой автоморфизм $\mathfrak{h}_3(\mathbb{O})$ сохраняет определитель, так что мы получаем включение

$$F_4 \hookrightarrow E_{6(-26)}.$$

Это значит, что F_4 есть компактная подгруппа $E_{6(-26)}$. На самом деле, это максимальная компактная подгруппа, поскольку если бы существовали большие подгруппы, можно было бы усреднить риманову метрику на $\mathbb{O}\mathbb{P}^2$ по отношению к этой группе и получить метрику с группой изометрии, большей, чем F_4 , но такой метрики не существует. Отсюда следует, что форма Киллинга на алгебре Ли $e_{6(-26)}$ отрицательно определена на её 52-мерной максимальной компактной алгебре Ли \mathfrak{f}_4 , и положительно определена на дополнительном к нему 26-мерном подпространстве, и сигнатура, следовательно, равна $26 - 52 = -26$.

Мы видели в разделе 3.4, что структура проективной плоскости $\mathbb{O}\mathbb{P}^2$ может быть построена, исходя только из функции определителя на векторном пространстве $\mathfrak{h}_3(\mathbb{O})$. Отсюда следует, что $E_{6(-26)}$ действует как **коллинеации** на $\mathbb{O}\mathbb{P}^2$, т.е. преобразования, сохраняющие прямые. На самом деле, группа коллинеаций $\mathbb{O}\mathbb{P}^2$ есть в точности $E_{6(-26)}$:

$$E_{6(-26)} \cong \text{Coll}(\mathbb{O}\mathbb{P}^2).$$

Более того, точно так же, как группа изометрий $\mathbb{O}\mathbb{P}^2$, фиксирующая избранную точку, является копией $\text{Spin}(9)$, группа коллинеаций, фиксирующая избранную точку, есть $\text{Spin}(9, 1)$. Этот факт следует из определённых выкладок, начинающихся с уравнения (8), и даёт коммутативный квадрат включений:

$$\begin{array}{ccc} \text{Spin}(9) & \longrightarrow & \text{Isom}(\mathbb{O}\mathbb{P}^2) \cong F_4 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Spin}(9, 1) & \longrightarrow & \text{Coll}(\mathbb{O}\mathbb{P}^2) \cong E_{6(-26)}, \end{array}$$

где группы сверху являются максимальными компактными подгруппами групп внизу. Таким образом в очень реальном смысле F_4 относится к 9-мерной евклидовой геометрии так же, как $E_{6(-26)}$ относится к 10-мерной лоренцевой геометрии.

4.5 E_7

Теперь мы обратимся к 133-мерной исключительной группе Ли E_7 . В 1954 Фройденталь [41] описал эту группу как группу автоморфизмов 56-мерной октонионной структуры, теперь называемой "тройной системой Фройдентала". Мы кратко описываем эту идею ниже, но сначала дадим несколько конструкций магических квадратов. Винберговская версия магического квадрата дает

$$e_7 = \mathfrak{der}(\mathbb{H}) \oplus \mathfrak{der}(\mathbb{O}) \oplus \mathfrak{sa}_3(\mathbb{H} \otimes \mathbb{O}).$$

Версия Титца дает

$$e_7 \cong \mathfrak{der}(\mathbb{H}) \oplus \mathfrak{der}(\mathfrak{h}_3(\mathbb{O})) \oplus (\mathrm{Im}(\mathbb{H}) \otimes \mathfrak{sh}_3(\mathbb{O})). \quad (22)$$

и также

$$e_7 \cong \mathfrak{der}(\mathbb{O}) \oplus \mathfrak{der}(\mathfrak{h}_3(\mathbb{H})) \oplus (\mathrm{Im}(\mathbb{O}) \otimes \mathfrak{sh}_3(\mathbb{H})).$$

По версии Бартона-Садбери:

$$e_7 \cong \mathfrak{tri}(\mathbb{O}) \oplus \mathfrak{tri}(\mathbb{H}) \oplus (\mathbb{H} \otimes \mathbb{O})^3. \quad (23)$$

Начиная с уравнения (22) и пользуясь тем, что $\mathfrak{der}(\mathbb{H}) \cong \mathrm{Im}(\mathbb{H})$ 3-мерна, получаем элегантную формулу:

$$e_7 \cong \mathfrak{der}(\mathfrak{h}_3(\mathbb{O})) \oplus \mathfrak{h}_3(\mathbb{O})^3.$$

Это предоставляет блестящую возможность вычислить размерность e_7 :

$$\dim(e_7) = \dim(\mathfrak{der}(\mathfrak{h}_3(\mathbb{O}))) + 3 \dim(\mathfrak{h}_3(\mathbb{O})) = 52 + 3 \cdot 27 = 133.$$

Начиная с уравнения (23) и пользуясь конкретными описаниями $\mathfrak{tri}(\mathbb{H})$ и $\mathfrak{tri}(\mathbb{O})$ из уравнения (21), мы получаем

$$e_7 \cong \mathfrak{so}(\mathbb{O}) \oplus \mathfrak{so}(\mathbb{H}) \oplus \mathrm{Im}(\mathbb{H}) \oplus (\mathbb{H} \otimes \mathbb{O})^3.$$

Используя уравнение (17), можно переписать это в виде

$$e_7 \cong \mathfrak{so}(\mathbb{O} \oplus \mathbb{H}) \oplus \mathrm{Im}(\mathbb{H}) \oplus (\mathbb{H} \otimes \mathbb{O})^2.$$

Хотя из проделанных нами вычислений это не очевидно, прямое слагаемое $\mathfrak{so}(\mathbb{O} \oplus \mathbb{H}) \oplus \mathrm{Im}(\mathbb{H})$ здесь на самом деле является подалгеброй Ли e_7 . Этот результат также можно найти в книге Адамса на менее октонионном языке [2]:

$$e_7 \cong \mathfrak{so}(12) \oplus \mathfrak{sp}(1) \oplus S_{12}^+$$

Он описывает скобку в e_7 в терминах естественных операций, затрагивающих $\mathfrak{so}(12)$ и её спинорное представление S_{12}^+ . Множитель забавного вида $\mathfrak{sp}(1)$ появляется потому, что это представление – кватернионное. Скобки элемента $\mathfrak{sp}(1)$ и элемента S_{12}^+ являются элементом S_{12}^+ , определённым с использованием естественного действия $\mathfrak{sp}(1)$ в этом пространстве.

Если принять, что E_7 – односвязная группа с алгеброй Ли e_7 , из результата Адамса [2] следует, что подгруппа, порождённая подалгеброй Ли $\mathfrak{so}(12) \oplus \mathfrak{sp}(1)$, изоморфна $(\mathrm{Spin}(12) \times \mathrm{Sp}(1))/\mathbb{Z}_2$. Это позволяет определить **кватероктонионную проективную плоскость** посредством

$$(\mathbb{H} \otimes \mathbb{O})\mathbb{P}^2 = E_7 / ((\mathrm{Spin}(12) \times \mathrm{Sp}(1))/\mathbb{Z}_2)$$

и сделать вывод, что касательная плоскость в любой точке этого многообразия изоморфна $S_{12}^+ \cong (\mathbb{H} \otimes \mathbb{O})^2$. Можно определить E_7 -инвариантную риманову метрику на этом многообразии методом усреднения по групповому действию. Тогда оказывается [6], что

$$E_7 \cong \mathrm{Isom}((\mathbb{H} \otimes \mathbb{O})\mathbb{P}^2)$$

и таким образом

$$e_7 \cong \mathfrak{isom}((\mathbb{H} \otimes \mathbb{O})\mathbb{P}^2).$$

Суммируя, имеем следующие семь октонионных описаний e_7 :

Теорема 7. Компактная действительная форма e_7 задается выражением

$$\begin{aligned} e_7 &\cong \text{isom}((\mathbb{H} \otimes \mathbb{O})\mathbb{P}^2) \\ &\cong \text{der}(\mathfrak{h}_3(\mathbb{O})) \oplus \mathfrak{h}_3(\mathbb{O})^3 \\ &\cong \text{der}(\mathbb{O}) \oplus \text{der}(\mathfrak{h}_3(\mathbb{H})) \oplus (\text{Im}(\mathbb{O}) \otimes \mathfrak{sh}_3(\mathbb{H})) \\ &\cong \text{der}(\mathbb{H}) \oplus \text{der}(\mathfrak{h}_3(\mathbb{O})) \oplus (\text{Im}(\mathbb{H}) \otimes \mathfrak{sh}_3(\mathbb{O})) \\ &\cong \text{der}(\mathbb{O}) \oplus \text{der}(\mathbb{H}) \oplus \mathfrak{sa}_3(\mathbb{H} \otimes \mathbb{O}) \\ &\cong \mathfrak{so}(\mathbb{O} \oplus \mathbb{H}) \oplus \text{Im}(\mathbb{H}) \oplus (\mathbb{H} \otimes \mathbb{O})^2 \\ &\cong \mathfrak{so}(\mathbb{O}) \oplus \mathfrak{so}(\mathbb{H}) \oplus \text{Im}(\mathbb{H}) \oplus (\mathbb{H} \otimes \mathbb{O})^3, \end{aligned}$$

где в каждом случае скобка Ли в e_7 строится из естественных билинейных операций над слагаемыми.

Перед тем, как был изобретён магический квадрат, Фройденталь [41] использовал другую октонионную конструкцию для исследования E_7 . Наименьшее нетривиальное представление этой группы 56-мерно. Фройденталь показал, что можно определить 56-мерное пространство

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & x \\ y & \beta \end{pmatrix} : x, y \in \mathfrak{h}_3(\mathbb{O}), \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

и снабдить это пространство симплектической структурой

$$\omega: F \times F \rightarrow \mathbb{R}$$

и трilinearным произведением

$$\tau: F \times F \times F \rightarrow F$$

таким, что группа линейных преобразований, сохраняющих обе эти структуры, является определённой некомпактной действительной формой E_7 , а именно $E_{7(-25)}$. Симплектическая структура и трilinearное произведение на F удовлетворяют некоторым соотношениям, и алгебраисты сделали их определением "Фройденталевской" тройной системы [13, 36, 72]. Геометрическое значение этого, весьма сложного, рода структур недавно было прояснено некоторыми физиками, работающими в теории струн. В конце предыдущего раздела мы упомянули связь между между 9-мерной евклидовой геометрией и F_4 , и соответствующую связь между 10-мерной лоренцевой геометрией и $E_{6(-26)}$. Мурат Гюнайдин [48] расширил его до соотношения между 10-мерной конформной геометрией и $E_{7(-25)}$, и в работе с Килианом Кёпселем и Германом Николаи [49] явно указал, как оно связано с тройными системами Фройдентала.

4.6 E_8

С 248 размерностями E_8 является наибольшей из исключительных групп Ли и в некоторых отношениях наиболее загадочной. Легче всего понять группу, представляя её как симметрии структуры, которая уже понятна. Из всех простых групп Ли, E_8 единственная, наименьшее нетривиальное представление которой является сопряжённым представлением. Это значит, что в контексте линейной алгебры E_8 наиболее просто описывается как группа симметрий её собственной алгебры Ли! Одним из выходов из этого порочного круга могло бы стать описание E_8 как изометрий риманова многообразия. Как уже упоминалось, E_8 является группой изометрий 128-мерного многообразия, называемого $(\mathbb{O} \otimes \mathbb{O})\mathbb{P}^2$. Но увы, кажется, никто не знает, как определить $(\mathbb{O} \otimes \mathbb{O})\mathbb{P}^2$ без предшествующего определения E_8 . Таким образом, эта группа остаётся немного таинственной.

На данный момент, чтобы подойти к E_8 , необходимо начинать с её алгебры Ли. Можно определить её, используя одну из трёх эквивалентных конструкций магического квадрата, объяснённых в разделе 4.3. Конструкция Винберга даёт

$$e_8 = \text{der}(\mathbb{O}) \oplus \text{der}(\mathbb{O}) \oplus \mathfrak{sa}_3(\mathbb{O} \otimes \mathbb{O}).$$

Конструкция Титца даёт

$$e_8 \cong \mathfrak{der}(\mathbb{O}) \oplus \mathfrak{der}(\mathfrak{h}_3(\mathbb{O})) \oplus (\mathrm{Im}(\mathbb{O}) \otimes \mathfrak{sh}_3(\mathbb{O})).$$

Конструкция Бартона-Садбэри даёт

$$\begin{aligned} e_8 &\cong \mathfrak{tri}(\mathbb{O}) \oplus \mathfrak{tri}(\mathbb{O}) \oplus (\mathbb{O} \otimes \mathbb{O})^3 \\ &\cong \mathfrak{so}(\mathbb{O}) \oplus \mathfrak{so}(\mathbb{O}) \oplus (\mathbb{O} \otimes \mathbb{O})^3. \end{aligned} \quad (24)$$

Можно использовать любую из них, чтобы подсчитать размерность e_8 ; например, последняя даёт

$$\dim e_8 = 28 + 28 + 3 \cdot 8^2 = 248.$$

Чтобы подчеркнуть важность тройственности, мы можем переписать уравнение (24) в виде:

$$e_8 \cong \mathfrak{so}(8) \oplus \mathfrak{so}(8) \oplus (V_8 \otimes V_8) \oplus (S_8^+ \otimes S_8^+) \oplus (S_8^- \otimes S_8^-). \quad (25)$$

Здесь скобка Ли строится из естественных отображений, относящихся к $\mathfrak{so}(8)$ и её трем 8-мерным неприводимым представлениям. В частности, $\mathfrak{so}(8) \oplus \mathfrak{so}(8)$ является подалгеброй Ли, и первая копия $\mathfrak{so}(8)$ действует на первый множитель в $V_8 \otimes V_8$, $S_8^+ \otimes S_8^+$, и $S_8^- \otimes S_8^-$, в то время, как вторая копия действует на второй множитель в каждом из них. Читателю предлагается сравнить это с описанием \mathfrak{f}_4 в уравнении (18).

Теперь, из уравнения (17) следует, что

$$\mathfrak{so}(16) \cong \mathfrak{so}(8) \oplus \mathfrak{so}(8) \oplus (V_8 \otimes V_8).$$

Вместе с уравнением (25) это подразумевает, что e_8 содержит $\mathfrak{so}(16)$ в качестве подалгебры Ли. Это действительно так! Даже лучше: если ограничить правое спинорное представление $\mathfrak{so}(16)$ до $\mathfrak{so}(8) \oplus \mathfrak{so}(8)$, оно разлагается как

$$S_{16}^+ \cong (S_8^+ \otimes S_8^+) \oplus (S_8^- \otimes S_8^-),$$

так что мы получаем

$$e_8 \cong \mathfrak{so}(16) \oplus S_{16}^+ \quad (26)$$

или на более октонионном языке

$$e_8 \cong \mathfrak{so}(\mathbb{O} \oplus \mathbb{O}) \oplus (\mathbb{O} \otimes \mathbb{O})^2,$$

где мы используем $\mathfrak{so}(V)$ для обозначения алгебры Ли кососопряжённых (skew-adjoint) действительных линейных преобразований линейного пространства с действительным скалярным произведением V .

Действительно замечательный факт относительно уравнения (26) заключается в том, что скобка Ли в e_8 целиком строится из естественных отображений, относящихся к $\mathfrak{so}(16)$ и S_{16}^+ :

$$\mathfrak{so}(16) \otimes \mathfrak{so}(16) \rightarrow \mathfrak{so}(16), \quad \mathfrak{so}(16) \otimes S_{16}^+ \rightarrow S_{16}^+, \quad S_{16}^+ \otimes S_{16}^+ \rightarrow \mathfrak{so}(16).$$

Первая из них является скобкой Ли в $\mathfrak{so}(16)$, вторая является действием $\mathfrak{so}(16)$ на её правом спинорном представлении и третья получается из второй с помощью двойственности, используя естественное скалярное произведение на $\mathfrak{so}(16)$ и S_{16}^+ для отождествления этих пространств с дуальными им. На самом деле, это очень эффективный способ *определения* e_8 . Если мы принимаем этот подход, мы должны проверить соблюдение тождества Якоби:

$$[[a, b], c] = [a, [b, c]] - [b, [a, c]].$$

Когда все три a, b, c лежат в $\mathfrak{so}(16)$, это всего лишь тождество Якоби для $\mathfrak{so}(16)$. Когда два из них лежат в $\mathfrak{so}(16)$, оно сводится к тому факту, что спиноры действительно образуют представление $\mathfrak{so}(16)$. Благодаря двойственности, то же самое справедливо, когда только одно из них

лежит в $\mathfrak{so}(16)$. Таким образом, достаточно рассмотреть случай, когда a, b, c все лежат в S_{16}^+ . Это единственный случай, который использует какие-то специфические свойства числа 16. К сожалению, здесь по-видимому не обойтись без вычислений методом грубой силы. Два подхода, позволяющие уменьшить муки (rain), можно найти в книгах Адамса [2] и Грина, Шварца и Виттена [46]. Было бы прекрасно найти более концептуальный подход.

Отправляясь от e_8 , можно определить E_8 как односвязную группу Ли с этой алгеброй Ли. Как было показано Адамсом [2], подгруппа E_8 , порождённая подалгеброй Ли $\mathfrak{so}(16) \subset e_8$, есть $\text{Spin}(16)/\mathbb{Z}_2$. Это позволяет определить **октооктонионную проективную плоскость** посредством

$$(\mathbb{O} \otimes \mathbb{O})\mathbb{P}^2 = E_8 / (\text{Spin}(16)/\mathbb{Z}_2).$$

Согласно уравнению (26), касательное пространство в любой точке этого многообразия изоморфно $S_{16}^+ \cong (\mathbb{O} \otimes \mathbb{O})^2$. Это частично оправдывает имя "октооктонионная проективная плоскость", хотя она, по-видимому, не удовлетворяет обычным аксиомам проективной плоскости.

Можно ввести E_8 -инвариантную риманову метрику на октооктонионной проективной плоскости методом усреднения по групповому действию. Оказывается [6], что

$$E_8 \cong \text{Isom}((\mathbb{O} \otimes \mathbb{O})\mathbb{P}^2)$$

и, таким образом

$$e_8 \cong \text{isom}((\mathbb{O} \otimes \mathbb{O})\mathbb{P}^2).$$

Суммируя, мы имеем следующее октонионное описание E_8 :

Теорема 8. *Компактная действительная форма e_8 задается посредством*

$$\begin{aligned} e_8 &\cong \text{isom}((\mathbb{O} \otimes \mathbb{O})\mathbb{P}^2) \\ &\cong \text{der}(\mathbb{O}) \oplus \text{der}(\mathfrak{h}_3(\mathbb{O})) \oplus (\text{Im}(\mathbb{O}) \otimes \mathfrak{sh}_3(\mathbb{O})) \\ &\cong \text{der}(\mathbb{O}) \oplus \text{der}(\mathbb{O}) \oplus \mathfrak{sa}_3(\mathbb{O} \otimes \mathbb{O}) \\ &\cong \mathfrak{so}(\mathbb{O} \oplus \mathbb{O}) \oplus (\mathbb{O} \otimes \mathbb{O})^2 \\ &\cong \mathfrak{so}(\mathbb{O}) \oplus \mathfrak{so}(\mathbb{O}) \oplus (\mathbb{O} \otimes \mathbb{O})^3 \end{aligned}$$

где в каждом случае скобка Ли на e_8 строится из естественных билинейных операций над слагаемыми.

5 Заключение и выводы

Теперь должно быть ясно, что октонионы, кроме того, что являются удивительными математическими объектами сами по себе, также соединяют между собой много важных явлений, взаимосвязи которых иначе были бы совершенно непостижимы. На самом деле, полная картина этих взаимосвязей глубже и тщательнее проработана, чем автор мог объяснить здесь! Он также включает в себя:

- Попытки создать октонионный аналог теории аналитических функций (см. [51] и библиографию к этой работе).
- Роль йордановых пар, йордановых тройных систем и тройных систем Фройденталя в конструкции исключительных групп Ли [13, 36, 37, 49, 51, 71, 72].
- Конструкции E_8 -решётки и решётки Лича, использующие интегральные октонионы [26, 33].
- Тензорно-категорные (tensor-categorical) подходы к нормированным алгебрам деления и инвариант решетчатых трехвалентных графов (framed trivalent graphs), происходящих из квантовой группы, связанной с G_2 [9, 12, 64, 81].
- Октонионные конструкции алгебр вертексных (вершинных) операторов [38].
- Октонионные конструкции исключительных простых супералгебр Ли [92].
- Октонионные конструкции симметрических пространств [6].

- Октонионы и геометрия "мятых (squashed) 7-сфер", т. е. однородных пространств $\text{Spin}(7)/G_2$, $\text{Spin}(6)/\text{SU}(3)$, и $\text{Spin}(5)/\text{SU}(2)$, все из которых диффеоморфны S^7 с её обычной гладкой структурой [22].
- Теория "многообразий Джойса", т. е. 7-мерных римановых многообразий с группой голономии G_2 [60].
- Октонионное отображение Хопфа и инстантонные решения уравнений Янга-Миллса в 8 размерностях [47].
- Октонионные аспекты 10-мерной теории суперструн и 10-мерной теории супер-Янга-Миллса [25, 29, 35, 65, 85, 86].
- Октонионные аспекты 11-мерных теорий супергравитации и супермембран, и роль многообразий Джойса в компактификации 11-мерной супергравитации для получения физических теорий в 4-х мерном пространстве [32].
- Расширение Джефффри Диксона Стандартной Модели, основанное на алгебре $\mathbb{C} \otimes \mathbb{H} \otimes \mathbb{O}$ [31].
- Другие попытки использования октонионов в физике [20, 51, 67, 76].

Автор рекомендует читателю исследовать эти вопросы с помощью приведённых ссылок.

Благодарности

Автор благодарен Джону Барретту, Тоби Баргельсу, Роберту Брайанту, Джефффри Диксону, Джеймсу Долану, Тевиану Дрею, Бертраму Константу, Линусу Крамеру, Пертти Лоунесто, Коринне Маногге, Джону Мак-Кэю, Давиду Русину, Тони Смиту, Антони Садбэри, и Мэттью Винеру за полезные обсуждения.

Литература

- [1] John F. Adams, On the non-existence of elements of Hopf invariant one, *Ann. Math.* **72** (1960), 20–104.
- [2] John F. Adams, *Lectures on Exceptional Lie Groups*, eds. Zafer Mahmud and Mamoru Mimira, University of Chicago Press, Chicago, 1996.
- [3] Michael Atiyah and Friedrich Hirzebruch, Bott periodicity and the parallelizability of the spheres. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **57** (1961), 223–226.
- [4] Helena Albuquerque and Shahn Majid, Quasialgebra structure of the octonions, preprint math.QA/9802116.
- [5] Chris H. Barton and Anthony Sudbery, Magic squares of Lie algebras, preprint math.RA/0001083.
- [6] Arthur L. Besse, *Einstein Manifolds*, Springer, Berlin, 1987, pp. 313–316.
- [7] F. van der Blij, History of the octaves, *Simon Stevin* **34** (1961), 106–125.
- [8] F. van der Blij and Tonny A. Springer, Octaves and triality, *Nieuw Arch. v. Wiskunde* **8** (1960), 158–169.
- [9] Dominik Boos, *Ein tensorkategorieller Zugang zum Satz von Hurwitz*, Diplomarbeit, ETH Zurich, March 1998.
- [10] Armand Borel, Le plan projectif des octaves et les sphères comme espaces homogènes, *Compt. Rend. Acad. Sci.* **230** (1950), 1378–1380.
- [11] Raoul Bott and John Milnor, On the parallelizability of the spheres, *Bull. Amer. Math. Soc.* **64** (1958) 87–89.
- [12] Murray Bremner, Quantum octonions, *Comm. Alg.* **27** (1999), 2809–2831.
- [13] Robert B. Brown, Groups of type E_7 , *Jour. Reine Angew. Math.* **236** (1969), 79–102.
- [14] Élie Cartan, *Sur la structure des groupes de transformations finis et continus*, Thèse, Paris, Nony, 1894.
- [15] Élie Cartan, Les groupes réels simples finis et continus, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **31** (1914), 255–262.

- [16] Élie Cartan, Nombres complexes, in *Encyclopédie des sciences mathématiques*, **1**, ed. J. Molk, 1908, 329–468.
- [17] Élie Cartan, Le principe de dualité et la théorie des groupes simple et semi-simples, *Bull. Sci. Math.* **49** (1925), 361–374.
- [18] Arthur Cayley, On Jacobi's elliptic functions, in reply to the Rev. B. Bronwin; and on quaternions, *Philos. Mag.* **26** (1845), 208–211.
- [19] Arthur Cayley, On Jacobi's elliptic functions, in reply to the Rev. B. Bronwin; and on quaternions (appendix only), in *The Collected Mathematical Papers*, Johnson Reprint Co., New York, 1963, p. 127.
- [20] Sultan Catto, Carlos J. Moreno and Chia-Hsiung Tze, *Octonionic Structures in Physics*, to appear.
- [21] Claude Chevalley and Richard D. Schafer, The exceptional simple Lie algebras F_4 and E_6 , *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **36** (1950), 137–141.
- [22] Yvonne Choquet-Bruhat and Cécile DeWitt-Morette, *Analysis, Manifolds and Physics*, part II, Elsevier, Amsterdam, 2000, pp. 263–274.
- [23] William K. Clifford, Applications of Grassmann's extensive algebra, *Amer. Jour. Math.* **1** (1878), 350–358.
- [24] Frederick R. Cohen, On Whitehead squares, Cayley–Dickson algebras and rational functions, *Bol. Soc. Mat. Mexicana* **37** (1992), 55–62.
- [25] E. Corrigan and T. J. Hollowood, The exceptional Jordan algebra and the superstring, *Comm. Math. Phys.* **122** (1989), 393–410.
- [26] Harold Scott MacDonald Coxeter, Integral Cayley numbers, *Duke Math. Jour.* **13** (1946), 561–578.
- [27] Michael J. Crowe, *A History of Vector Analysis*, University of Notre Dame Press, Notre Dame, 1967.
- [28] C. W. Curtis, The four and eight square problem and division algebras, in *Studies in Modern Algebra*, ed. A. Albert, Prentice–Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1963, pp. 100–125.
- [29] Pierre Deligne *et al.*, eds., *Quantum Fields and Strings: A Course for Mathematicians*, 2 volumes, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 1999.
- [30] Leonard E. Dickson, On quaternions and their generalization and the history of the eight square theorem, *Ann. Math.* **20** (1919), 155–171.
- [31] Geoffrey M. Dixon, *Division Algebras: Octonions, Quaternions, Complex Numbers and the Algebraic Design of Physics*, Kluwer, Dordrecht, 1994.
- [32] M. J. Duff, ed., *The World in Eleven Dimensions: Supergravity, Supermembranes and M-Theory*, Institute of Physics Publishing, Bristol, 1999.
- [33] Noam Elkies and Benedict H. Gross, The exceptional cone and the Leech lattice, *Internat. Math. Res. Notices* **14** (1996), 665–698.
- [34] Gerard G. Emch, *Algebraic Methods in Statistical Mechanics and Quantum Field Theory*, Wiley-Interscience, New York, 1972.
- [35] J. M. Evans, Supersymmetric Yang–Mills theories and division algebras, *Nucl. Phys.* **B298** (1988), 92–108.
- [36] John R. Faulkner, A construction of Lie algebras from a class of ternary algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.* **155** (1971), 397–408.
- [37] John R. Faulkner and Joseph C. Ferrar, Exceptional Lie algebras and related algebraic and geometric structures, *Bull. London Math. Soc.* **9** (1977), 1–35.
- [38] Alex J. Feingold, Igor B. Frenkel, and John F. X. Ries, *Spinor Construction of Vertex Operator Algebras, Triality, and $E_8^{(1)}$* , Contemp. Math. 121, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 1991.
- [39] Hans Freudenthal, Oktaven, Ausnahmegruppen und Oktavengeometrie, mimeographed notes, 1951. Also available in *Geom. Dedicata* **19** (1985), 7–63.
- [40] Hans Freudenthal, Zur ebenen Oktavengeometrie, *Indag. Math.* **15** (1953), 195–200.

- [41] Hans Freudenthal, Beziehungen der e_7 und e_8 zur Oktavenebene, I, II, *Indag. Math.* **16** (1954), 218–230, 363–368. III, IV, *Indag. Math.* **17** (1955), 151–157, 277–285. V — IX, *Indag. Math.* **21** (1959), 165–201, 447–474. X, XI, *Indag. Math.* **25** (1963) 457–487.
- [42] Hans Freudenthal, Lie groups in the foundations of geometry, *Adv. Math.* **1** (1964), 145–190.
- [43] Hans Freudenthal, Bericht über die Theorie der Rosenfeldschen elliptischen Ebenen, in *Raumtheorie, Wege Der Forschung*, CCLXX, Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, 1978, pp. 283–286.
- [44] Lynn E. Garner, *An Outline of Projective Geometry*, North Holland, New York, 1981.
- [45] Robert Perceval Graves, *Life of Sir William Rowan Hamilton*, 3 volumes, Arno Press, New York, 1975.
- [46] Michael B. Green, John H. Schwarz and Edward Witten, *Superstring Theory*, volume 1, Cambridge University Press, Cambridge, 1987, pp. 344–349.
- [47] B. Grossman, T. E. Kephart, and James D. Stasheff, Solutions to Yang-Mills field equations in eight dimensions and the last Hopf map, *Comm. Math. Phys.* **96** (1984), 431–437.
- [48] Murat Günaydin, Generalized conformal and superconformal group actions and Jordan algebras, *Mod. Phys. Lett.* **A8** (1993), 1407–1416.
- [49] Murat Günaydin, Kilian Koepsell, and Hermann Nicolai, Conformal and quasiconformal realizations of exceptional Lie groups, preprint hep-th/0008063.
- [50] Murat Günaydin, C. Piron and H. Ruegg, Moufang plane and octonionic quantum mechanics, *Comm. Math. Phys.* **61** (1978), 69–85.
- [51] Feza Gürsey and Chia-Hsiung Tze, *On the Role of Division, Jordan, and Related Algebras in Particle Physics*, World Scientific, Singapore, 1996.
- [52] William Rowan Hamilton, Four and eight square theorems, in Appendix 3 of *The Mathematical Papers of William Rowan Hamilton*, vol. 3, eds. H. Halberstam and R. E. Ingram, Cambridge University Press, Cambridge, 1967, pp. 648–656.
- [53] Thomas L. Hankins, *Sir William Rowan Hamilton*, John Hopkins University Press, Baltimore, 1980.
- [54] F. Reese Harvey, *Spinors and Calibrations*, Academic Press, San Diego, 1990.
- [55] Adolf Hurwitz, Über die Composition der quadratischen Formen von beliebig vielen Variablen, *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen* (1898) 309–316.
- [56] Dale Husemoller, *Fibre Bundles*, Springer, Berlin, 1994.
- [57] Pascual Jordan, Über eine Klasse nichtassociativer hyperkomplexer Algebren, *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen* (1932), 569–575.
- [58] Pascual Jordan, Über eine nicht-desarguessche ebene projektive Geometrie, *Abh. Math. Sem. Hamburg* **16** (1949), 74–76.
- [59] Pascual Jordan, John von Neumann, Eugene Wigner, On an algebraic generalization of the quantum mechanical formalism, *Ann. Math.* **35** (1934), 29–64.
- [60] Dominic Joyce, *Compact Manifolds with Special Holonomy*, Oxford U. Press, Oxford, 2000.
- [61] I. L. Kantor and A. S. Solodovnikov, *Hypercomplex Numbers — an Elementary Introduction to Algebras*, Springer, Berlin, 1989.
- [62] Michel Kervaire, Non-parallelizability of the n sphere for $n > 7$, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **44** (1958), 280–283.
- [63] Wilhelm Killing, Die Zusammensetzung der stetigen endlichen Transformationsgruppen I, *Math. Ann.* **31** (1888), 252–290. II, **33** (1889) 1–48. III, **34** (1889), 57–122. IV **36** (1890), 161–189.
- [64] Greg Kuperberg, Spiders for rank 2 Lie algebras, *Comm. Math. Phys.* **180** (1996), 109–151.
- [65] T. Kugo and P.-K. Townsend, Supersymmetry and the division algebras, *Nucl. Phys.* **B221** (1983), 357–380.
- [66] J. M. Landsberg and L. Manivel: The projective geometry of Freudenthal’s magic square, preprint math.AG/9908039.
- [67] Jaak Lohmus, Eugene Paal, and Leo Sorgsepp, *Nonassociative Algebras in Physics*, Hadronic Press, Palm Harbor, Florida, 1994.

- [68] Corinne A. Manogue and Tevian Dray, Octonionic Möbius transformations, *Mod. Phys. Lett.* **A14** (1999), 1243–1256.
- [69] Corinne A. Manogue and Jörg Schray, Finite Lorentz transformations, automorphisms, and division algebras, *Jour. Math. Phys.* **34** (1993), 3746–3767.
- [70] Corinne A. Manogue and Jörg Schray, Octonionic representations of Clifford algebras and triality, *Found. Phys.* **26** (1996), 17–70.
- [71] Kevin McCrimmon, Jordan algebras and their applications, *Bull. Amer. Math. Soc.* **84** (1978), 612–627.
- [72] K. Meyberg, Eine Theorie der Freudenthalschen Tripelsysteme, I, II, *Indag. Math.* **30** (1968), 162–190.
- [73] R. Guillermo Moreno, The zero divisors of the Cayley–Dickson algebras over the real numbers, preprint q-alg/9710013.
- [74] Ruth Moufang, Alternativkörper und der Satz vom vollständigen Vierseit, *Abh. Math. Sem. Hamburg* **9** (1933), 207–222.
- [75] A. L. Onishchik and E. B. Vinberg, eds., *Lie Groups and Lie Algebras III*, Springer, Berlin, 1991, pp. 167–178.
- [76] Susumu Okubo, *Introduction to Octonion and Other Non-Associative Algebras in Physics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [77] Roger Penrose and Wolfgang Rindler, *Spinors and Space-Time*, 2 volumes, Cambridge U. Press, Cambridge, 1985–86.
- [78] Ian R. Porteous, *Topological Geometry*, Cambridge U. Press, 1981.
- [79] Boris A. Rosenfeld, Geometrical interpretation of the compact simple Lie groups of the class E (Russian), *Dokl. Akad. Nauk. SSSR* (1956) **106**, 600–603.
- [80] Boris A. Rosenfeld, *Geometry of Lie Groups*, Kluwer, Dordrecht, 1997.
- [81] Markus Rost, On the dimension of a composition algebra, *Doc. Math.* **1** (1996), 209–214.
- [82] Helmut Salzmann *et al*, *Compact Projective Planes: With an Introduction to Octonion Geometry*, de Gruyter, Berlin, 1995.
- [83] Richard D. Schafer, On algebras formed by the Cayley–Dickson process, *Amer. Jour. of Math.* **76** (1954) 435–446.
- [84] Richard D. Schafer, *Introduction to Non-Associative Algebras*, Dover, New York, 1995.
- [85] Jörg Schray, *Octonions and Supersymmetry*, Ph.D. thesis, Department of Physics, Oregon State University, 1994.
- [86] G. Sierra, An application of the theories of Jordan algebras and Freudenthal triple systems to particles and strings, *Class. Quant. Grav.* **4** (1987), 227–236.
- [87] Tonny A. Springer, The projective octave plane, I–II, *Indag. Math.* **22** (1960), 74–101.
- [88] Tonny A. Springer, Characterization of a class of cubic forms, *Indag. Math.* **24** (1962), 259–265.
- [89] Tonny A. Springer, On the geometric algebra of the octave planes, *Indag. Math.* **24** (1962), 451–468.
- [90] Tonny A. Springer and Ferdinand D. Veldkamp, *Octonions, Jordan Algebras and Exceptional Groups*, Springer, Berlin, 2000.
- [91] Frederick W. Stevenson, *Projective Planes*, W. H. Freeman and Company, San Francisco, 1972.
- [92] Anthony Sudbery, Octonionic description of exceptional Lie superalgebras, *Jour. Math. Phys.* **24** (1983), 1986–1988.
- [93] Anthony Sudbery, Division algebras, (pseudo)orthogonal groups and spinors, *Jour. Phys.* **A17** (1984), 939–955.
- [94] Jacques Tits, Le plan projectif des octaves et les groupes de Lie exceptionnels, *Bull. Acad. Roy. Belg. Sci.* **39** (1953), 309–329.
- [95] Jacques Tits, Le plan projectif des octaves et les groupes exceptionnels E_6 et E_7 , *Bull. Acad. Roy. Belg. Sci.* **40** (1954), 29–40.
- [96] Jacques Tits, Algèbres alternatives, algèbres de Jordan et algèbres de Lie exceptionnelles, *Indag. Math.* **28** (1966), 223–237.

- [97] Jacques Tits, *Buildings of Spherical Type and Finite BN-Pairs*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 386, Springer, Berlin, 1974.
- [98] V. S. Varadarajan, *Geometry of Quantum Theory*, Springer-Verlag, Berlin, 1985.
- [99] E. B. Vinberg, A construction of exceptional simple Lie groups (Russian), *Tr. Semin. Vektorn. Tensorn. Anal.* **13** (1966), 7–9.
- [100] Max Zorn, Theorie der alternativen Ringe, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* **8** (1930), 123–147.
- [101] Max Zorn, Alternativkörper und quadratische Systeme, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* **9** (1933), 395–402.

The Octonions

John C. Baez

Department of Mathematics, University of California
baez@math.ucr.edu

The octonions are the largest of the four normed division algebras. While somewhat neglected due to their nonassociativity, they stand at the crossroads of many interesting fields of mathematics. Here we describe them and their relation to Clifford algebras and spinors, Bott periodicity, projective and Lorentzian geometry, Jordan algebras, and the exceptional Lie groups. We also touch upon their applications in quantum logic, special relativity and supersymmetry.

Key-words: octonions, division algebras, nonassociativity.

ИНФОРМАЦИЯ ДЛЯ АВТОРОВ

В журнале печатаются оригинальные и обзорные статьи российских и зарубежных авторов по тематике: а) Гиперкомплексные числа, б) Геометрии, связанные с гиперкомплексными числами, в) Финслеровы пространства, г) Фракталы, основанные на гиперкомплексных числах, д) Применение гиперкомплексных алгебр в физике, е) Экспериментальные исследования возможной анизотропии пространства-времени и иных проявлений финслеровой геометрии.

Редколлегия информирует авторов статей о принятых ею правилах:

1. Язык статей – русский или английский.
2. Объем статьи не должен превышать 1 печ. листа (24 усл. маш. стр.)
3. Автор предоставляет в редакцию файл статьи в формате \LaTeX (версия $\text{\LaTeX}2_{\epsilon}$, для набора формул используется $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}\text{-}\text{\LaTeX}$) и файл статьи в формате PostScript или PDF.
4. Принимаемые форматы файлов рисунков: для растровых TIFF, GIF, PNG (должна быть возможна инкапсуляция в EPS); для векторных EPS, PDF, TEX. Каждый рисунок должен быть помещен в отдельный файл. Цветовая гамма – черно-белая или серая (8 бит).
5. Текст статьи должен включать аннотацию (в ней не должно быть громоздких формул и ссылок). Глубина разбивки текста не должна превышать трех уровней.
6. Название статьи, аннотация, имена авторов и их организации предоставляются на русском и английском языках.
7. Автор указывает e-mail и телефон для оперативной связи. Возвращение статьи автору на доработку не означает, что она принята к опубликованию.
8. Отклонение от данных правил уменьшает вероятность опубликования статьи. Публикация бесплатна для всех авторов.

ГИПЕРКОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА
В ГЕОМЕТРИИ И ФИЗИКЕ

Научный журнал. Основан в 2003 г.

№ 1 (5), Vol 3, 2006

Главный редактор Павлов Д. Г.

Ответственный секретарь Элиович А. А.

www.polynumbers.ru

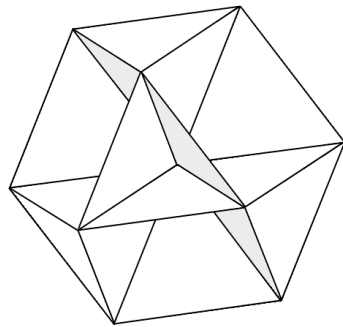
hypercomplex@mail.ru

Свидетельство о регистрации

ПИ № 77-15331 от 30 апреля 2003 г.

ISSN 1814-3946

© "МОЗЭТ", Российское Гиперкомплексное Общество



Типографские данные