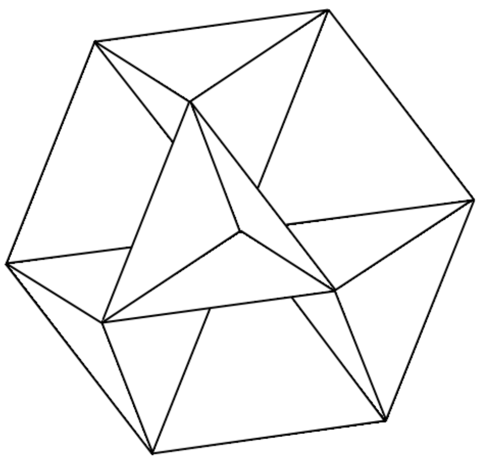
Гиперкомплексные числа в геометрии и физике

2005, № 2 (4)

Научный журнал

Основан в 2003 г.



www.polynumbers.ru

hypercomplex@mail.ru

Оглавление

ОТ СТРУН И БРАН К ЭПИСТЕМОЛОГИИ И ИЗМЕРЕНИЯМ В КОСМОСЕ (PIRT-2005)

В. О. Гладышев

МГТУ им. Н. Э. Баумана

В МГТУ им. Н. Э. Баумана (факультет "Фундаментальные науки", кафедра "Физики") состоялась Вторая Международная научная конференция "Физические интерпретации теории относительности". Программа конференции включала более 100 докладов представителей ведущих научных школ из 25 стран, включая Великобританию, Грецию, Испанию, Нидерланды, Норвегию, Румынию, Турцию, США, Финляндию. Конференция проходила в 2005 году, который объявлен ЮНЕСКО годом физики, и была посвящена 175-летию МГТУ им. Н. Э. Баумана и 100-летию первых основополагающих работ А. Эйнштейна. Конференция с таким названием проводится в Лондоне (Империал колледж) с 1988 года каждые два года. Первая московская конференция была проведена в 2003 году. Информацию о ней можно найти на сайте *http://fn.bmstu.ru/phys/nov/konf/pirt/pirt_main.html*.

На торжественном открытии конференции с приветствиями к участникам выступили руководитель НУК "Фундаментальные науки" Б. П. Назаренко, заведующий кафедрой физики А. Н. Морозов, научный сотрудник Лаборатории им. Оливера Лоджа Физического факультета Ливерпульского университета П. Роулэндс. В программе конференции 2005 года были отражены следующие основные направления:

- Космология, гравитация и структура пространства-времени.
- Время, системы отсчета и основания теории относительности.
- Природа и модели физического вакуума.
- Эпистемология, физические измерения и интерпретации формальных структур.
- Финслеровы обобщения теории относительности.
- Экспериментальные аспекты теории относительности.
- Исторические и философские аспекты теории относительности.

Заседания конференции проходили в конференц-зале МГТУ им. Н. Э. Баумана. Конференция позволила ее участникам познакомиться с научными традициями в старейшем Российском техническом университете, в котором работали такие выдающиеся ученые как Д. И. Менделеев, Н. Е. Жуковский, П. Л. Чебышев, С. А. Чаплыгин, А. С. Ершов, Д. К. Советкин, Ф. М. Дмитриев, А. В. Летников, А. П. Гавриленко и многие другие. После заседаний секций для участников конференции была организована экскурсия по центру Москвы.

* * *

Основная часть докладов традиционно была посвящена математическим основаниям теории относительности, многомерным обобщениям теории относительности, наблюдаемым следствиям теории гравитации и космологии, их физическим интерпретациям, истории создания теории относительности. Обзорный доклад по наблюдательной космологии "Загадки и проблемы стандартной космологической модели" был представлен В. Н. Лукашом (Астрокосмический Центр ФИАН). Недавние данные по анизотропии и поляризации реликтового излучения (WMAP) и крупномасштабной структуре Вселенной позволили независимо восстановить как космологические параметры современного Мира, так и начальные условия для развития ранней Вселенной. С одной стороны, это достижение привело к прорыву в понимании физики очень ранней Вселенной и к созданию стандартной космологической модели. С другой стороны, успех стандартной модели, заострил фундаментальные проблемы физики высоких энергий, поскольку такие «краеугольные камни» космологической модели как темная материя, темная энергия, бариогенезис и инфляция современная физика описать не в состоянии. На повестке дня стоит расширение космологической модели и построение новой физики, основные контуры которой намечаются сегодня наблюдательной космологией.

Участниками конференции было отмечен значительный прогресс, связанный с развитием концепции мира на бране, согласно которой наш мир представляет собой выделенную 4-поверхность (брану) в пространстве большего числа измерений, причем наблюдаемые физические поля должны быть сосредоточены на бране. В программе конференции данной концепции был посвящен ряд докладов. Среди них можно отметить доклады Д. Синглтон (Калифорнийский государственный университет, Фресно, США), К. А. Бронникова (Российский Университет Дружбы Народов), Б. Э. Мейеровича (Институт физических проблем им. П. Л. Капицы РАН). Представленные результаты имеют важное значение для отбора жизнеспособных моделей мира на бране с целью их дальнейшего изучения и применения в космологии и физике частиц.

Часть докладов традиционно посвящена аксиоматике теории пространства времени. В докладе Ю. С. Владимирова (Физический факультет МГУ им. М. В. Ломоносова) были изложены основы бинарной геометрофизики, представляющей собой новый подход к построению объединенной теории пространства-времени и физических взаимодействий. Предложенная автором теория опирается на идеи квантовой теории, многомерных геометрических моделей физических взаимодействий. В этом подходе используется идея о макроскопической природе пространства-времени, согласно которой классические пространственно-временные представления справедливы лишь при описании достаточно сложных макросистем и теряют силу в микромире. В частности, гравитационные взаимодействия не являются первичными, а определяются другими взаимодействиями и возникают вместе с понятиями классического пространства-времени.

Привлек внимание дискуссионный доклад М. Е. Герценштейна (Институт ядерной физики им. Д. В. Скобельцина МГУ им. М. В. Ломоносова), в котором автор доказывает, что корректный учет поляризации вакуума позволяет устранить появление бесконечных величин в электродинамике, другими словами, на малых расстояниях электростатический потенциал слабее, чем это следует из закона Кулона. Детальному описанию структуры электрического поля также посвящен доклад В. Б. Розанова (Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН) и Т. Ярман (Айсик университет, Стамбул, Турция). Развиваемый подход позволяет объяснить замедление распада мюонов.

Математической связи уравнений электродинамики с уравнениями общей теории относительности посвящен доклад П. де Хаас (Вельюс Колледж, Апелдорн, Нидерланды). В работе обсуждаются пределы, при которых ограничения Эйнштейна для энергетического тензора напряжений могут выходить за рамки применимости классической электродинамики. Физическое происхождение принципа общей ковариантности в теории относительности обсуждали со времени создания теории относительности. В программе конференции этому вопросу были посвящены доклады А. Чаморро (Университет Страны Басков, Испания) и А. Л. Холмецкого (Беларусский государственный университет, Минск, Белоруссия).

Наряду с многомерными обобщениями теории относительности, такими как многомерные теории Калуцы-Клейна, теория суперструн, концепция бран, теории суперсимметрий продолжаются поиски новых метрических функций. В этом случае римановы представления заменяются обобщенными.

В докладе М. Пауна (Университет Трансильвании, Брасов, Румыния) рассмотрены уравнения Эйнштейна в обобщенном пространстве Лагранжа. Автором обнаружено, что исследуемое пространство может оказаться весьма удобным для построения объединенной релятивистской модели.

К числу обобщенных геометрий относится также финслерова геометрия. Философским и математическим основаниям финслеровых расширений теории относительности посвящен доклад Д. Г. Павлова (МГТУ им. Н. Э. Баумана). В докладе анализируется связь гиперкомплексных чисел с финслеровыми представлениями, которая обнаруживает новые классы симметрий. Обнаружение данных симметрий является стимулом для поиска новых свойств в законах сохранения физики.

В настоящее время, наряду с финслеровым, изучаются также и другие подходы к проблеме нарушения лоренцевой симметрии. Среди них наиболее популярным является струнно-мотивированный подход. Он основан на таком расширении Стандартной Модели сильных, слабых и электромагнитных взаимодействий, при котором фундаментальные поля рассматриваются на фоне релятивистски неинвариантного (например векторного) конденсата. Другими словами, в рамках SME подхода нарушение лоренцевой симметрии достигается за счет нарушения релятивистской симметрии.

Доклад Г. Ю. Богословского (НИИ ядерной физики им. Д. В. Скобельцына, МГУ им. М. В. Ломоносова Россия) посвящен разработке финслерова подхода к проблеме нарушения лоренцевой симметрии. Как показано автором, финслеров подход допускает нарушение лоренцевой симметрии без нарушения релятивистской симметрии.

Исследования, посвященные финслеровой геометрии, как правило, имеют академический характер. К числу таких докладов следует отнести доклады В. Балана (Политехнический университет, Бухарест, Румыния) и Р. Тавакола (Лондонский Университет, Лондон, Великобритания). В этих докладах сделаны обзоры финслеровых пространств, рассмотрены уравнения движущихся систем отсчета и соответствующих условий интегрируемости для 3-мерных финслеровых пространств, показано, что в рамках финслеровой геометрии возможно получение пространств с постоянной гауссовой кривизной, обсуждается нарушение лоренцевой симметрии как эффекта физики планковских масштабов.

В связи с этим, особый интерес представляют работы, которые открывают путь для обсуждения новых наблюдаемых следствий финслерового обобщения псевдоевклидовой геометрии теории относительности.

В докладе Р. Г. Зарипова (Институт механики и машиностроения КазНЦ РАН, Казань) впервые изучается нестандартная синхронизация часов в инерциальной системе отсчета на основе определения физического временного интервала и физического пространственного расстояния, что приводит к анизотропии однонаправленных скоростей света. Данный метод позволяет использовать сигнальный метод синхронизации часов Пуанкаре в релятивистской физике при построении различных финслеровых геометрий пространства-времени.

К числу оригинальных идей в области изучения природы гравитации, следует отнести идею, предложенную в 1937 году Г. Гамовым и Е. Теллером, согласно которой силы гравитационного притяжения можно объяснить обменом нейтрино-антинетринными парами частицами макроскопических тел. В докладе В. М. Корюкина (Марийский государственный технический университет, Йошкар-Ола) для объяснения природы гравитационных явлений используется нейтринный фон Вселенной. При этом эффект Казимира служит аналогом для расчета Ньютоновских сил притяжения между макроскопическими телами. Данная работа позволяет нестандартным образом взглянуть на проблему детектирования гравитационных волн. Существующие экспериментальные результаты в области регистрации гравитационного излучения, которое было предсказано А. Эйнштейном пока не дают однозначного ответа о существовании гравитационных волн. В связи с этим прогресс в развитии теории относительности часто связывают с экспериментами нового поколения, такими как регистрация гравитационных волн наземными или космическими гравитационными антеннами.

Современные методы регистрации гравитационных волн обсуждаются в докладах В. И. Пустовойта (Научно-технологический центр уникального приборостроения РАН, Москва) и С. В. Сипарова (Унивеситет гражданской авиации, С-Петербург). В докладе В. И. Пустовойта предложено использовать многослойные структуры в качестве зеркал резонатора Фабри-Перо для повышения эффективности преобразования гравитационных волн в регистрируемый сигнал. В докладе С. В. Сипарова предложен новый метод радионаблюдения за космическими мазарами, который позволит по вариациям в линиях поглощения зарегистрировать гравитационную волну от периодического космического излучателя.

Часть представленных работ относится к теоретическому анализу существования или свойств гипотетической темной материи. К числу таких докладов относятся доклады Т. Сантола (Технологический университет в Тампере, Финляндия) и А. Д. Долгова (Институт теоретической и экспериментальной физики РАН, Национальный институт ядерной физики, Феррара, Италия). В докладе А. Д. Долгова обсуждается проблема вакуума в космологии. Так как астрономические данные свидетельствуют о ненулевой антигравитирующей темной энергии, автором анализируются возможные пути объяснения отличия на 2 порядка между теорией и наблюдениями.

В докладе Т. Сантола приходит к заключению, что наблюдения подтверждают модель сферически закрытого динамического пространства без темной энергии. При таком подходе энергия покоя вещества возникает как энергетическая масса, которая появляется благодаря движению пространства в направлении 4-радиуса структуры и скорость света в пространстве становится фиксированной по отношению к скорости пространства в 4 измерениях.

Прямой проверкой гипотезы существования темной материи могла бы стать регистрация ее частиц. Доклад Г. Н. Измайлова (Московский авиационный институт) относится к экспериментальному направлению поиска гипотетических частиц темной материи – WIMPов. В работе впервые указано на возможность использования когерентных состояний для регистрации слабовзаимодействующих частиц.

В последние годы широко обсуждается вопрос о возможном космологическом ускорении расширения Вселенной. В докладе В. Я. Варгашкина (Орловский государственный технический университет, Орёл) выполнена оценка параметров ускоренного расширения Вселенной с учётом влияния фактора гравитационного самолинзирования на фотометрию квазаров.

Не вызывает сомнения, что классические работы в области астрономии и небесной механики должны рассматриваться с учетом эффектов теории относительности. В связи с этим особенно интересны работы, обнаруживающие новые практические аспекты в области спутниковых космических систем.

В докладе А. В. Родникова (МГТУ им. Н. Э. Баумана) выполнен анализ относительного движения тросовой системы, перемещающейся по геоцентрической орбите. В работе показывается, что если орбитальная система представляет собой не обычную связку двух тел, а так называемый "леер", то есть трос, оба конца которого закреплены на протяженном теле (орбитальной станции), то существует принципиальная возможность преобразования произвольного неограниченного относительно станции движения материальной точки в периодическое с помощью захватывающего устройства, перемещающегося по инерции вдоль леера.

Значение оптических методов исследований в области проверки современных представлений о свойствах пространственно-временного континуума и изучения наблюдаемой части Вселенной трудно переоценить. В связи с этим особое методическое значение имеет работа Ю. Я. Голубя (МГТУ им. Н. Э. Баумана), В. С. Горелика (Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН) посвященная расчету показателя преломления и эффективной массы фотона в глобулярном фотонном кристалле.

Авторами рассчитана зависимость групповой скорости от волнового вектора и показано, что эффективная масса фотонов может быть как положительной, так и отрицательной и имеет разрыв при смене знака.

Влияние дисперсии на результаты фундаментальных оптических экспериментов обсуждалось неоднократно. Однако, в оптике движущихся сред существуют также и другие эффекты, которые способны оказывать существенное влияние на результаты измерений. Так, например, в работе H. R. Bilger & W. K. Stowell был поставлен эксперимент, в котором свет распространялся во вращающемся оптическом диске в кольцевом интерферометре. Как и следовало ожидать авторы зарегистрировали эффект Физо в материале стекла, однако, несмотря на высокую точность измерений, в теоретической модели не учитывался эффект нарушения закона Снеллиуса на границе раздела сред на торцевой поверхности вращающегося диска, и, тем не менее, результаты эксперимента совпали с предсказаниями расчетов. Это вызывает удивление, так как нарушение закона преломления на тангенциальном скачке скорости является одним из фундаментальных следствий электродинамики.

Фундаментальный аспект этого вопроса состоит в том, что уравнения электродинамики движущихся сред проверены лишь в ряде частных случаев. Прикладным аспектом является ответ на вопрос, в какой степени показания того или иного интерферометра, движущегося по земной орбите, зависят от положения и ориентации.

В связи с этим интерес представляют модели экспериментов (и их последующая реализация), в которых свет распространяется в трехмерном поле скоростей. Возможность осуществления подобных экспериментов обсуждается в докладе В. О. Гладышева, Т. М. Гладышевой, В. Е. Зубарева (МГТУ им. Н. Э. Баумана). Данные работы ведутся на кафедре физики МГТУ им. Н. Э. Баумана при поддержке Совета по грантам Президента РФ.

* * *

Основной целью организаторов конференции является поиск новых и обсуждение классических наблюдаемых следствий теории относительности и гравитации, таких, в частности, как излучение и регистрация гравитационных волн, отклонение электромагнитного излучения вблизи массивных объектов и др., которые оказывают влияние на решение задач астронавигации, проявляются во влиянии на процессы распространения электромагнитного излучения в космологических масштабах, должны учитываться при точном пространственно-временном описании событий. В связи с этим, подводя итоги конференции, на которой участниками обсуждались предложения о проведении новых тестов теории относительности, включая космические, обсуждались результаты астрономических наблюдений последних лет, а также результаты их статистической обработки, их достоверность, а также допустимые физические интерпретации новых теоретических предсказаний, можно сделать заключение о растущей тенденции к практическому использованию результатов теории относительности и электродинамики, а также их современных обобщений.

По итогам работы конференции изданы избранные труды, информация о трудах опубликована на сайте кафедры физики МГТУ им. Н. Э. Баумана.

ПЕРВЫЙ МЕЖДУНАРОДНЫЙ НАУЧНЫЙ СЕМИНАР "ГЕОМЕТРИЯ ФИНСЛЕРОВЫХ ПРОСТРАНСТВ С МЕТРИКОЙ БЕРВАЛЬДА-МООРА"

Д. Г. Павлов, С. В. Сипаров

МГТУ им Н. Э. Баумана, geom2004@mail.ru

Гос. ун-т гражданской авиации, Санкт-Петербург, sergey@siparov.spb.su

С 15 по 22 октября 2005 года в Каире прошел первый международный научный семинар, организованный некоммерческим фондом развития исследований по финслеровой геометрии "Финслеровская премия" при поддержке МГТУ им. Н. Э. Баумана (ректор И. Б. Федоров, зав. кафедрой физики А. Н. Морозов, сотрудники МГТУ Т. М. Гладышева, В. О. Гладышев и Д. Г. Павлов). Семинар явился логическим продолжением работы финслеровой секции международной конференции "Физические интерпретации теории относительности" (Москва, 2005). В нем приняли участие ученые России, Румынии, Китая и Великобритании.

Научная программа

Во вступительном докладе Д. Павлова обсуждалось пространство с метрикой Бервальда-Моора с точки зрения живущего в нем наблюдателя. Было показано, что в определенном диапазоне параметров оно практически неотличимо от пространства-времени СТО. Различия возникают лишь при достаточно специфических условиях. Таким образом, геометрия физического пространства-времени может рассматриваться на четырех уровнях: первый – классическая геометрия Галилея-Ньютона на основе линейной метрической формы, второй – геометрия Минковского-Эйнштейна на основе квадратичной формы, третий может оказаться связанным с кубической метрикой Чернова и, наконец, четвертый – с метрической функцией Бервальда-Моора, имеющей четвертый порядок. Четвертый уровень является красивым и простым, но одновременно и самым содержательным. Это обусловлено, в частности, тем, что геометрия такого пространства оказывается тесно связанной с коммутативной и ассоциативной т. н. квадрагиперболической алгеброй гиперкомплексных чисел (не являющихся кватернионами Гамильтона). При этом простота структуры квадрачисел не означает тривиальности связанного с ними пространства, в котором, помимо привычных изометрических и конформных преобразований, выделенную в метрическом плане роль играют еще несколько классов отображений, принципиально отсутствующих в квадратичных геометриях.

Всестороннему исследованию последней проблемы был посвящен доклад Г. Гарасько, в котором была установлена связь между обобщенно конформными преобразованиями в пространстве квадрачисел и обобщенно аналитическими функциями от них же.

В докладе Г. Асанова были в явном виде приведены формулы для преобразований координат пространства Бервальда-Моора, аналогичные преобразованиям Лоренца пространства Минковского. Аналогичные соотношения в другом виде были ранее получены Г. Богословским и Г. Гарасько, что вызвало оживленную дискуссию о приоритете.

Г. Богословский сообщил об изменениях, которым в пространстве с метрикой Бервальда-Моора подвергаются уравнения, связывающие канонический 4-импульс частицы с ее 3-скоростью. Эта работа замечательна тем, что раскрывает перед метрикой Бервальда-Моора широкие возможности использования в исследованиях, где применяются методы Гамильтонова формализма.

Как показал В. Чернов, геометрия пространства с метрикой Бервальда-Моора имеет тесную и естественную связь не только с уже используемыми физикой геометриями Галилея и Минковского, но и с пока еще не изученной геометрией, метрика которой выражается через третьи степени компонент вектора. Такая метрическая функция задает пространство, являющееся промежуточным случаем между пространством СТО и пространством с метрикой Бервальда-Моора.

В докладе С. Лебедева были предложены многоиндексные обобщения не только метрического тензора, но и коэффициентов связности, что развивает качественный подход, предложенный Д. Павловым. Применение таких методов вычисления тензора кривизны может привести к постоянной ненулевой величине скалярной кривизны для индикатрис пространств Бервальда-Моора. При использовании традиционных методов, использующих двухиндексные метрические тензоры и трехиндексные коэффициенты связности, эта величина оказывается нулевой.

Своеобразную черту под выступлениями российских теоретиков подвел С. Сипаров, обративший внимание собравшихся на фундаментальные проблемы, возникающие при использовании финслеровой геометрии в физике. Одновременно в докладе указывались обстоятельства, продуктивное исследование которых возможно именно на пути использования представлений об анизотропии пространства-времени, и был предложен простой подход к построению канонических уравнений для пространств с метрикой Бервальда-Моора.

Единственная экспериментальная работа, представленная на семинаре, была выполнена В. Панчелюгой и С. Шнолем. На примере исследования альфа-распада было показано, что тонкая структура функции распределения скорости этого распада в зависимости от времени весьма чувствительна к пространственной ориентации специально сконструированной лабораторной установки. Вывод, к которому пришли авторы работы, состоит в том, что на физические процессы в реальном мире влияет некоторая глобальная анизотропия, которую, быть может, как раз и следует искать в связи с финслеровским типом геометрии реального пространства-времени.

Другие экспериментальные данные, указывающие на возможную анизотропию, были получены в работах Ж.-П. Лумине (Франция) и Д. Макмиллана (США). Эти авторы были приглашены на семинар, но не смогли приехать в связи с поздним оповещением о дате его проведения. Возможно, встреча с ними состоится примерно через год там же в Каире на следующем семинаре.

Румынские ученые во главе с заведующим кафедрой геометрии Брашовского Государственного Университета Г. Атанасиу представили ряд докладов, связанных с введенным Д. Павловым понятием скалярного полипроизведения, обобщающего обычное скалярное произведение в римановых пространствах на более сложный случай пространств с финслеровыми неквадратичными метриками.

Так, в докладе В. Балана и Н. Бринзей обсуждалось векторное расслоение с метрикой Бервальда-Моора для вертикальной составляющей, в то время как для горизонтальной составляющей использовалась флаг-Финслерова метрика. Последняя представляет собой полипроизведение, приведенное к более традиционному виду. Для рассмотренной модели были построены уравнения Максвелла и Эйнштейна.

В докладе Г. Атанасиу, В. Балана и М. Неагу были введены 4-полиформы для импульсов, аналогичные координатным полипроизведениям, и исследовано их приложение для обобщенных Гамильтоновых пространств. Эта работа во многом переплеталась с докладом С. Лебедева, что указывает на непротиворечивость используемого подхода.

В докладе М. Пауна были представлены инвариантные финслеровы системы отсчета для метрик Бервальда-Моора.

В обобщающих докладах Г. Атанасиу и Н. Бринзей и Г. Атанасиу и В. Балана обсуждалось метрика Бервальда-Моора для касательных и кокасательных расслоений второго порядка.

Обсуждение результатов, полученных румынскими коллегами, привело к договоренности о подписании трехлетнего контракта между фондом "Финслеровская премия" и Брашовским Университетом (Румыния) на выполнение последним исследований в области пространств с метриками Бервальда-Моора и Чернова.

В докладе китайского ученого К. Мо было показано, что все биинвариантные финслеровские метрики на компактной связной группе Ли принадлежат метрикам типа Бервальда. Эта работа носила выраженный математический характер.

Английский ученый М. Райт, известный организатор международных научных семинаров, посвященных злободневным вопросам современной физики и математики, присутствовал на семинаре в качестве наблюдателя. По окончании семинара он выразил желание принять участие в последующей разработке данной тематики и стать официальным представителем фонда "Финслеровская премия" в Великобритании и Франции. Аналогичное пожелание высказал и Д. Масленников, проживающий в настоящее время в Египте.

Культурная программа

Участники семинара посетили главные пирамиды Египта. В этом им способствовали специалисты по египетской культуре Т. Шеркова и О. Кругляков. Участникам был также показан документальный фильм "Запретные темы истории" (с возможностью прослушивания английского текста), снятый по результатам прошлогодней экспедиции в Египет. Автор нескольких книг по альтернативной истории Египта и режиссер этого фильма А. Скляров (являющийся, кстати, выпускником МФТИ), дал свои комментарии на проблемы происхождения пирамид, что вызвало оживленную дискуссию.

* * *

Все доклады и экскурсии снимались на видео профессиональным оператором С. Бондаренко. В планы оргкомитета входит разместить соответствующую информацию в Интернете, а также смонтировать небольшой фильм о самых интересных моментах семинара. Настоящий, четвертый, номер журнала "Гиперкомплексные числа в геометрии и физике" в значительной мере посвящен теме Каирского семинара.

ФИЛОСОФСКИЕ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВАНИЯ ФИНСЛЕРОВЫХ РАСШИРЕНИЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Д. Г. Павлов

Московский Государственный Технический Университет им Н. Э. Баумана
geom2004@mail.ru

Предпринимается попытка опровергнуть предубеждения современных физиков в бесперспективности финслеровых геометрий в качестве естественных расширений псевдоримановых представлений о пространстве-времени. Показана возможность простых и наглядных построений в финслеровых пространствах, наличие в некоторых из них богатства групп непрерывных симметрий, с которыми естественно связывать различные законы сохранения, а также возможность обобщения понятия скалярного произведения с билинейной симметрической формы от двух векторов на полилинейную симметрическую форму от трех и более.

Ключевые слова: финслеровы пространства, индикатриса, обобщенно-конформные преобразования.

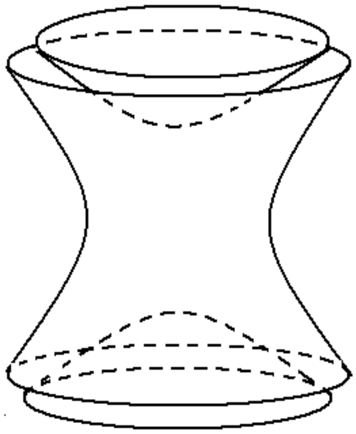
Исторически первое известное упоминание о принципиальной возможности существования геометрий, чей линейный элемент не обязан быть связываемым с корнем квадратным из квадратичной формы от дифференциалов компонент, принадлежит Риману. В связи с этим, такие геометрии, вполне уместно было бы называть римановыми, однако ныне их все же принято связывать с именем другого ученого – Финслера. Отчасти в данном казусе виноват сам Риман, так как буквально вслед за высказыванием о правомочности неквадратичных метрик, заявил, что такие геометрии слишком сложны, плохо интерпретируемы и, навряд ли, обладают сколь-нибудь своеобразным содержанием [1]. Как ни странно, абсолютное большинство современных физиков считает практически так же. Одной из целей данной работы является желание хотя бы отчасти поколебать эту несправедливую уверенность и показать, что финслерова геометрия в самом ближайшем будущем может стать той ареной, на которой продолжится развитие физики вообще и общей теории относительности в частности.

Конечно, пренебрежение финслеровой геометрией возникло не на пустом месте и к пессимистическому выводу о ее перспективах и Римана, и многих его современных последователей привели достаточно серьезные соображения. Первое из них, носящее скорее субъективный характер и связанное с предубеждением о сложности и малой наглядности, было уже высказано выше. Другим мощным сдерживающим фактором явилось доказательство в конце девятнадцатого – начале двадцатого века ряда теорем [2, 3], согласно которым группы симметрий, оставляющие инвариантным линейный элемент, оказываются обладающими максимальным числом независимых параметров именно в случаях квадратичных геометрий. Сомневаться же в рациональности использования в физике наиболее богатых на симметрии многообразий сегодня, похоже, не приходится. Третья причина была обусловлена отсутствием вплоть до последнего времени естественной альтернативы понятию скалярного произведения, широко используемого в римановых построениях. В связи с чем, в финслеровой геометрии доминирующее влияние приобрел так называемый финслеров метрический тензор [4], по сути, явившийся лишь незначительной модификацией риманова тензора и потому его использование лишь усугубило проблему. Следующий аргумент против финслеровой геометрии многие связывают с наблюдаемым фактом высокой степени изотропности окружающего нас трехмерного пространства. Поскольку финслеровы метрики приводят к анизотропии, значит, если и следует использовать неквадратичные геометрии, то лишь слабо отличающиеся от римановых. Наконец последняя, казалось бы, никак не коррелирующая с геометрией причина была обусловлена теоремой Фробениуса, утверждающей, что гиперкомплексные алгебры, обладающие обычными арифметическими законами сложения и умножения, связаны только с действительными и комплексными числами. Некоторые математики увидели в этой теореме, в общем-то, не следующий из нее вывод, что классификация чисел далее комплексных не распространяется, а, следовательно, и мощнейший стимул изучения геометрий ассоциированных с соответствующим кругом гиперкомплексных алгебр оказался временно не задействованным.

Как будет показано ниже, к настоящему времени все приведенные выше аргументы против использования финслеровых построений применительно к реальному пространству-времени, если и не преодолены полностью, то значительно поколеблены, а, значит, нет и поводов относиться к финслеровой геометрии, как к второстепенному приложению к римановой.

* * *

Начнем с утверждения о сложности и малой наглядности. По сути, единственное отличие некоторых финслеровых пространств от привычной и во многом именно потому кажущейся наглядной евклидовой геометрии заключается в том, что множество точек, равноудаленных от некоторой фиксированной точки (а это ни что иное, как определение сферы) оказывается не обычной евклидовой сферой, а более сложной гиперповерхностью. Однако, даже в ставшей почти классической геометрии Минковского, такое множество отличается от евклидовой сферы и представляет собой объединение трех гиперболоидов: двух действительных и одного мнимого. Обычно их изображают в трехмерном аффинном пространстве в виде, как это представлено на рис. 1, а. Сегодня вряд ли кого удивляет, что эта поверхность, достаточно сильно отличающаяся от обычной сферы, в геометрическом смысле именно таковой и является. В простейших линейных финслеровых пространствах все почти аналогично псевдоевклидову случаю, с той разницей, что в аффинном представлении сфера (индикатриса) может выглядеть еще более экзотично, например так, как это изображено на рис. 1, б.



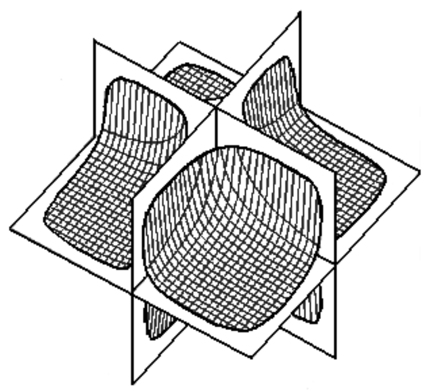
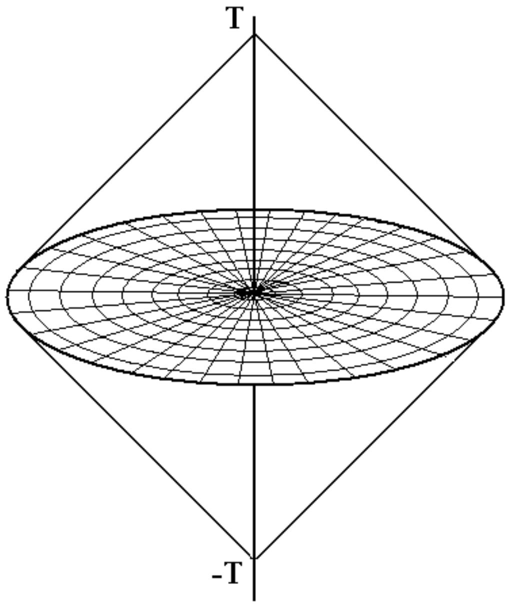


Рис. 1: Примеры индикатрис в трехмерном а) псевдоевклидовом и б) финслеровом пространствах.

Вслед за сферами можно ввести и другие элементарные поверхности, например, соответствующие евклидову понятию гиперплоскости. Для этого достаточно заметить, что гиперплоскость квадратичных пространств – это множество точек, каждая из которых удалена на одинаковое расстояние от двух фиксированных точек (рис. 2, а). В пространствах с другой метрикой так определенная поверхность уже не совпадает с аффинной плоскостью и, скажем, может выглядеть так, как изображено на рис. 2, б. Оперируя этими и другими простейшими геометрическими объектами, геометрия, существенно отличающаяся от евклидовой, предстает перед нами, если и не очевидной, то достаточно простой и логичной.



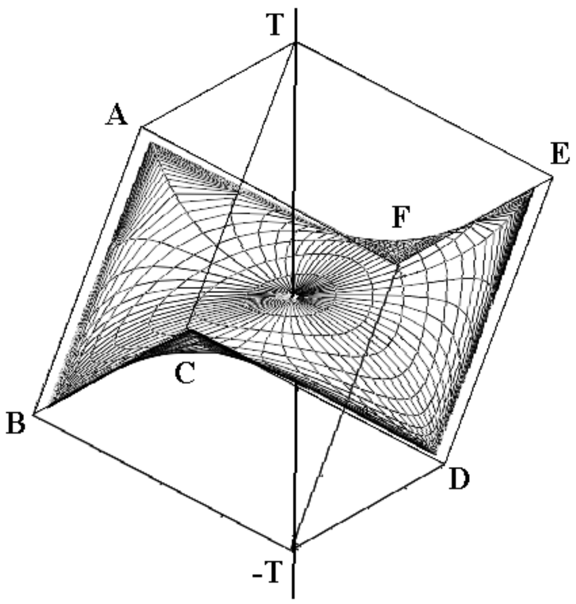


Рис. 2: Пример поверхностей, точки которых равноотстоят от двух фиксированных точек (T и $-T$) в трехмерном а) псевдоевклидовом и б) финслеровом пространствах.

Таким образом, в неквадратичных пространствах поверхности в метрическом плане играющие роль гиперплоскостей, в аффинном смысле таковыми не являются и это оказывается весьма существенным обстоятельством, так как приводит к необходимости отказаться от автоматического использования многих приемов римановой геометрии основывающихся на свойствах плоскости и, в частности, от метода касательных расслоений. При этом, естественно, такой отказ не обязан быть абсолютным, просто необходимо крайне осторожно относиться к формальным заимствованиям и там где требуется – разрабатывать естественные альтернативы.

* * *

Переходя к проблеме уникального богатства на симметрии именно квадратичных (то есть римановых) геометрий, следует отметить, что этот факт относится только к симметриям типа обычных движений, то есть, к линейным преобразованиям, оставляющим инвариантными расстояния между точками. Однако даже в случае квадратичных пространств к метрически выделенным, кроме изометрических преобразований относятся еще и преобразования, сохраняющие не длины, а углы. Такие преобразования иногда называют конформными движениями. Но ведь это те же симметрии, только нелинейные. И вот достаточно неожиданно выясняется, что, проигрывая квадратичным пространствам в разнообразии изометрических преобразований, некоторые финслеровы пространства оказываются существенно богаче тех в смысле симметрий общего нелинейного вида [6].

Но в вопросе о симметриях есть еще одно, даже более серьезное, чем сравнение конформных преобразований, обстоятельство. Симметрии пространств, к которым относятся многие финслеровы пространства, не ограничиваются одними изометриями и конформными движениями. Для них метрически выделенными оказываются преобразования, сохраняющие не только длины и углы, но и специфические для финслеровых геометрий величины, связываемые уже не с одним и с двумя, а с тремя и более векторами. В квадратичных пространствах таких величин невозможно построить, поэтому подобного рода преобразования в римановых геометриях отсутствуют в принципе. Но в финслеровых пространствах они есть и являются не менее, а вероятно даже и более интересными, чем конформные. Таким образом, в некоторых финслеровых пространствах, в качестве своеобразной компенсации за относительную бедность изометрий, возникают не только более богатые группы конформных преобразований, но и существуют условия для появления целых классов новых метрически выделенных нелинейных отображений, которые, до появления подходящего собственного имени, временно будем называть *обобщенно конформными* [6].

На сегодняшний день нам известны только отдельные представители обобщенно конформных преобразований и только для некоторых финслеровых пространств. При этом решение задачи их полного перечисления является, на наш взгляд, одной из приоритетных в современной финслеровой геометрии. Следует отметить, что так ставящаяся задача достаточно сложна, поскольку предполагает работу уже не только с группами симметрий, но и с их обобщениями, например такими, когда некоторые множества преобразований связаны между собой не только би-, но и n-арными операциями, а те, в свою очередь, могут не иметь при этом в своем составе тождественного или обратного преобразования. По сути, речь идет о новом взгляде на широко известную Эрлангенскую программу Клейна, в которой основная задача геометрии была обозначена, как изучение групп симметрий. Сейчас же предлагается сосредоточиться на расширении самого понятия симметрии и перейти от его достаточно частного случая обязанного своим появлением изометрическим и конформным преобразованиям, к связанным с уже обобщенно конформными отображениями.

* * *

Перейдем теперь к проблеме скалярного произведения и тесно связанному с ней понятию метрического тензора. В двадцатых годах прошлого века Сингом, Тейлором и Бервальдом [4] было предложено определение финслерова метрического тензора, который с одной стороны наследовал одно из основных свойств обычного риманова метрического тензора иметь два индекса, а с другой -– отражал специфическую особенность неквадратичных геометрий опираться на понятие обобщенной сферы, так называемую индикатрису. При всем удобстве такого подхода, он обладает определенной ограниченностью, основной причиной которой является то, что данный метрический тензор базируется не на собственном для конкретной финслеровой геометрии обобщении скалярного произведения, а заимствует структуру тензора совершенно иной (то есть квадратичной) природы. Образно выражаясь, финслерову геометрию стали строить не на специально для нее подготовленном основании, а на фундаменте, предназначенном для совершенно другого здания. Вряд ли, при этом стоило ожидать особой элегантности получившейся конструкции. При этом абсолютное большинство физиков и математиков в своих выводах о малой перспективности финслеровых построений опираются именно на созерцание такой достаточно ущербной постройки.

Между тем, существует целый класс финслеровых пространств, которые допускают естественное расширение понятия скалярного произведения. В таких пространствах роль билинейной симметрической формы от двух векторов начинает играть полилинейная симметрическая форма от m векторов [5], а место квадрата длины вектора занимает его m-я степень. Принципиальным следствием такого расширения оказывается необходимость пересмотреть сложившуюся практику безальтернативного применения двухиндексного финслерова метрического тензора, упоминавшегося выше, заменяя его тензором, связанным с соответствующей полилинейной формой. Очевидно, что в таком общем случае у метрического тензора уже не два, а большее число индексов. Преимущество подобной замены, помимо того, что она абсолютно естественна, заключается в том, что количество независимых компонент нового метрического тензора резко возрастает при той же размерности пространства. Так, в четырехмерных пространствах с кубической формой метрический тензор имеет уже не десять независимых компонент, как в классической ОТО, а двадцать. В пространствах же с квадранарной формой у метрического тензора уже тридцать пять независимых компонент. По сути, это означает, что системы уравнений, определяющих в соответствующих финслеровых многообразиях поля нового тензора, должны оказаться существенно более богатыми, чем система уравнений Эйнштейна, причем, оставаясь в рамках четырех измерений!

Следует отметить, что данное направление развития финслеровой геометрии и ее применений к физике идеологически достаточно близко к ОТО, однако связано с необходимостью разработки принципиально нового математического аппарата. В частности, привычное разделение компонент тензоров на ко- и контравариантные, по-видимому, потребуется расширить, а это значит – понадобятся способы не только поднятия и опускания индексов, но и более сложные методы жонглирования ими.

* * *

Не менее интересна и проблема изотропности направлений. Традиционно считается, что если исходить из четырехмерности реального пространства-времени, то чуть ли не единственными метриками, удовлетворительно согласующимися с наблюдаемой в экспериментах высокой степенью изотропии окружающего нас трехмерного пространства, являются метрики Галилея и Минковского, содержащие евклидово пространство, как подпространство. При этом, часто упускается из виду, что сами эти четырехмерные пространства относятся к типично анизотропным, поскольку в них любое времениподобное направление кардинально отличается от всякого пространственноподобного. Кроме того, есть примеры четырехмерных финслеровых пространств, не содержащих евклидово подпространство, но в которых с точки зрения наблюдателя, воспринимаемое тем трехмерное окружение, будет *казаться* практически изотропным, во всяком случае, в некотором диапазоне параметров. Более того, уже сейчас можно назвать минимум две финслеровы метрические функции, которые приводят именно к таким квазиизотропным эффектом.

Одна из этих финслеровых метрик связана не с квадратичной, а с кубической формой и имеет вид симметрического многочлена третьей степени:

$$S^3 = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4\,. \tag{1}$$

Первым обратил внимание на данную метрику в контексте ее возможного отношения к геометрии реального пространства-времени профессор Самарского Аэрокосмического университета Владимир Михайлович Чернов, поэтому ее и связанное с нею пространство, я позволю себе называть его именем. Необычной особенностью пространства Чернова является то, что оно вообще не содержит непрерывных вращений, другими словами, группа линейных преобразований, аналогичная группе Лоренца в нем -– нульпараметрическая. Однако, несмотря на это, утверждение, что данное пространство может с успехом конкурировать с пространством Минковского в качестве арены физических явлений не является абсурдным. Дело в том, что, отсутствуя в качестве изометрических симметрий, группа Лоренца может присутствовать в нем как одна из подгрупп обобщенно конформных преобразований. К сожалению, пространство Чернова еще слишком мало изучено, чтобы однозначно заявлять об этом. Уверен, что пристальное изучение данного пространства и исследование групп его нелинейных симметрий помогут нам выйти за рамки привычных квадратичных представлений и приблизиться к пониманию существенно более сложных финслеровых пространств, чьи метрические формы имеют еще более высокий порядок.

В частности, к таким пространствам относится четырехмерное пространство с метрикой Бервальда-Моора, имеющей в одном из базисов вид симметрического многочлена (вернее моночлена) четвертой степени:

$$S^4 = x_1 x_2 x_3 x_4. \tag{2}$$

Кстати, нелишним будет отметить, что квадратичная форма пространства Минковского в аналогичном базисе, состоящем из четырех векторов лежащих на световом конусе, имеет также вид симметрического многочлена, только второй степени:

$$S^2 = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_4 + x_2 x_3 + x_2 x_4 + x_3 x_4. \tag{3}$$

Это поистине удивительное обстоятельство, которое по не очень понятным причинам почти не обсуждалось физиками, на наш взгляд, является ключевым в понимании тесной родственной связи трех геометрий, одна из которых общепризнанна, а две других с метриками (1) и (2), вполне вероятно, смогут стать не менее популярными в самом ближайшем будущем. Во всяком случае, в каждой из них с точки зрения наблюдателя, ассоциируемого с некоторой мировой линией, окружающий Мир предстает в виде пары: одномерного времени и трехмерного пространства, расстояния в котором в определенном диапазоне параметров соответствуют евклидовой геометрии. Иными словами, в определенном приближении реализуется геометрия пространства-времени классической физики Галилея-Ньютона.

* * *

Как ни парадоксально, самым содержательным и сложным из трех пространств оказывается то, что связано с метрической функцией Бервальда-Моора, которая хоть и выглядит наиболее элементарно, приводит к геометрии, включающей в себя в качестве последовательных приближений две остальные, а заодно, как отмечалось выше, и геометрию классической физики. Но у данного пространства имеется еще одно чрезвычайно важное обстоятельство. В отличие от пространств Галилея, Минковского и Чернова оно непосредственным образом связано с пожалуй самым фундаментальным понятием математики – *числом.* Причем эта связь реализуется практически так же, как между геометрией евклидовой плоскости и алгеброй комплексных чисел, а так же между геометрией четырехмерного евклидова пространства и алгеброй кватернионов. Только в отличие от последней, алгебра соответствующая пространству с метрикой Бервальда-Моора (назовем ее алгеброй квадрачисел), является коммутативно-ассоциативной и она изоморфна прямой сумме четырех действительных алгебр. Более простую четырехкомпонентную алгебру просто трудно представить.

С другой стороны, стоящая за этой простейшей алгеброй геометрия, далеко не тривиальна. Она оказывается таковой благодаря разнообразию нелинейных операций связанных с обобщенно конформными преобразованиями, примерно так же, как существование бесконечнопараметрической группы конформных преобразований евклидовой плоскости приводит к превращению, в общем-то, элементарной алгебры комплексных чисел в мощнейший аппарат комплексного анализа. Как известно, одним из последствий подобного симбиоза оказывается возможность построения на комплексной плоскости весьма интересных геометрических объектов: алгебраических фракталов, среди которых – носящие имена Жюлиа и Мандельброта. Красота и гармония комплексных фракталов настолько замечательны, что, глядя на них, поневоле возникает желание повторить аналогичные построения и в многомерных пространствах. Представляется, что, используя квадрачисла, мы, как раз, и получаем соответствующую возможность, причем в этом случае фрактальные объекты могут изображаться трехмерными и к тому же эволюционирующими во времени.

Идея, что физику можно строить, отталкиваясь от гиперкомплексных числовых структур, принадлежит Уильяму Гамильтону, которому, как известно, принадлежит честь открытия первой гиперкомплексной алгебры – алгебры кватернионов. Замечу, что этот выдающийся математик известен многими достижениями, но кватернионы считал самым главным своим открытием и именно им он самозабвенно посвятил большую часть оставшейся жизни. И хотя претворить в жизнь красивейшую идею связать с кватернионами значительную часть физики ни ему, ни многочисленным его последователям так и не удалось, кватернионы, все равно, являются самыми известными гиперчислами, а их приложения достаточно интересны и многочисленны. Как знать, быть может то, что не удалось Гамильтону с кватернионами, окажется достижимым на основе более элементарных квадрачисел и мы, как некогда Пифагор, когда-нибудь сможем воскликнуть: “Все сущее – суть числа”. Только естественно, вместо достаточно узкого понимания под числами рациональных, действительных или комплексных представителей будем рассматривать существенно более широкий круг их гиперкомплексных расширений, а вместо обычной евклидовой или псевдоевклидовой геометрии – их финслеровы обобщения.

Литература

1. Б. Риман: О гипотезах, лежащих в основании геометрии. В кн. Об основаниях геометрии. ТТЛ, М. 1956.

2. Г. Гельмгольц: О фактах, лежащих в основаниях геометрии. В кн. Об основаниях геометрии. ТТЛ, М. 1956.

3. С. Ли: Замечания на работу Гельмгольца “О фактах, лежащих в основаниях геометрии”. В кн. Об основаниях геометрии. ТТЛ, М. 1956.

4. Х. Рунд: Дифференциальная геометрия финслеровых пространств. Наука, М. 1981.

5. Д. Г. Павлов: Обобщение аксиом скалярного произведения. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **1 (1)**, 2004.

6. Г. И. Гарасько: Обобщение понятия конформных преобразований. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **1 (3)**, 2005.

СВЯЗЬ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ОБОБЩЕННО-КОНФОРМНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ С ОБОБЩЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИМИ ФУНКЦИЯМИ В ПОЛИЧИСЛОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Г. И. Гарасько

Всероссийский электротехнический институт, Москва
gri9z@mail.ru

В настоящей работе установлена связь между функциями, осуществляющими элементарные обобщенно-конформное преобразование в пространстве невырожденных полчисел и обобщенно-аналитическими функциями той же поличисловой переменной. Кроме общих построений, в работе рассматриваются конкретные примеры для комплексных и гиперкомплексных чисел H_4. Для указанных поличисел показано: эта связь может быть установлена так, что при переходе к конформным преобразованиям обобщенно-аналитические функции становятся аналитическими.

Ключевые слова: конформные преобразования, аналитические функции, гиперкомплексные числа.

Введение

На комплексной плоскости конформные преобразования осуществляются аналитическими функциями комплексной переменной (конформные преобразования I рода) или комплексно сопряженными аналитическими функциями (преобразования II рода). Для поличисел размерности больше двух приходится несколько обобщать понятия аналитичности функций [1] и конформных преобразований [2], поэтому связи между этими обобщенными понятиями необходимо изучить заново.

Поличисловое пространство $P_n \ni X$,

$$X = x^i e_i\,, \quad e_k e_j = p^i_{kj} e_i\,, \tag{1}$$

где x^i координаты в базисе e_i, называется невырожденным, если компоненты тензора

$$q_{ij} = p^m_{ik} p^k_{mj} \tag{2}$$

образуют невырожденную матрицу, и следовательно можно построить дважды контравариантный тензор q^{ij}:

$$q^{im} q_{mj} = q_{jm} q^{mi} = \delta^i_j\,. \tag{3}$$

Функция

$$\Phi(X) = \varphi^1(x^1, x^2, ..., x^n)e_1 + \varphi^2(x^1, x^2, ..., x^n)e_2 + ... + \varphi^n(x^1, x^2, ..., x^n)e_n \tag{4}$$

поличисловой переменной $X \in P_n$ называется *обобщенно-аналитической* [1], если существуют такой объект связности $\tilde{\Gamma}^i_{kj}$ и такая функция

$$\dot{\Phi}(X) = \dot{\varphi}^1(x^1, x^2, ..., x^n)e_1 + \dot{\varphi}^2(x^1, x^2, ..., x^n)e_2 + ... + \dot{\varphi}^n(x^1, x^2, ..., x^n)e_n\,, \tag{5}$$

что
$$\tilde{D}\Phi(X) = \dot{\Phi}(X)dX\,, \tag{6}$$
где
$$\tilde{D}\Phi(X) = (\tilde{\nabla}_k\varphi^i)dx^k e_i\,,\ \ \tilde{\nabla}_k\varphi^i = \frac{\partial\varphi^i}{\partial x^k} + \tilde{\Gamma}^i_{kj}\varphi^j\,. \tag{7}$$
Из формул (6), (7) получим
$$\frac{\partial\varphi^i}{\partial x^k} + \tilde{\Gamma}^i_{kj}\varphi^j = p^i_{kj}\dot{\varphi}^j\,. \tag{8}$$
Если ε^i – координаты единицы в базисе e_i, то
$$\varepsilon^k p^i_{kj} = \delta^i_j, \tag{9}$$
поэтому
$$\dot{\varphi}^i = \varepsilon^m\left(\frac{\partial\varphi^i}{\partial x^m} + \tilde{\Gamma}^i_{mj}\varphi^j\right)\,. \tag{10}$$

Таким образом, обобщенно-аналитической функции должны удовлетворять соотношениям Коши-Римана:
$$\frac{\partial\varphi^i}{\partial x^k} + \tilde{\Gamma}^i_{kj}\varphi^j = p^i_{kj}\varepsilon^s\left(\frac{\partial\varphi^j}{\partial x^s} + \tilde{\Gamma}^j_{sm}\varphi^m\right)\,, \tag{11}$$
или кратко
$$\tilde{\nabla}_k\varphi^i = p^i_{kj}\varepsilon^s\tilde{\nabla}_s\varphi^j\,. \tag{12}$$
Функции φ^i являются компонентами контравариантного тензора. Если $\tilde{\Gamma}^j_{sm} = 0$, то $\Phi(X)$ – аналитическая функция поличисловой переменной P_n.

Взаимно однозначное отображение одной области $O_X \ni X$ на ту же или на другую область $O_Y \ni Y$
$$y^i = f^{(i)}(x^1, x^2, ..., x^n) \tag{13}$$
поличислового пространства $P_n \supset O_X, O_Y$ называется *элементарным обобщенно-конформным* [2], если функции $f^{(i)}$ являются решениями системы дифференциальных уравнений
$$\frac{\partial^2 f^{(i)}}{\partial x^k\partial x^l} = \Gamma^m_{kl}\frac{\partial f^{(i)}}{\partial x^m}\,, \tag{14}$$
где
$$\Gamma^m_{kl} = \frac{1}{2}(p_l\delta^m_k + p_k\delta^m_l) - \Delta^{pm}_{kl}\frac{\partial L}{\partial x^p}\,, \tag{15}$$
p_l, L – некоторые тензорные поля, а Δ^{pm}_{kl} – числовой тензор, определяемый метрикой поличислового пространства, то есть тензором p^i_{kj}. Функции $f^{(i)}(x^1, x^2, ..., x^n)$ – это скалярные функции точки пространства.

Группа обобщенно-конформных преобразований включает в себя элементарные обобщенно-конформные преобразования, обратные им и всевозможные произведения выше названных.

Построение обобщенно-аналитических функций

Предположим, что нам известно элементарное обобщенно-конформное преобразование (13)
$$O_X \xrightarrow{f} O_Y \tag{16}$$

в пространстве P_n, тогда нам известны n скалярных функций $f^{(i)}(x^1, ..., x^n)$, из которых можно образовать n ковариантных тензоров

$$\varphi_i^{(k)} = \frac{\partial f^{(k)}}{\partial x^i} \,. \tag{17}$$

Существует много разных способов построения обобщенно-аналитических функций на основе функций $\varphi_i^{(k)}$. Особо важны такие способы построения, которые дают аналитические функции, если функции $f^{(i)}(x^1, ..., x^n)$ есть компоненты аналитической функции. Приведем два наиболее интересные, на наш взгляд, и простые способа.

I способ

Так как поличисловое пространство невырождено, то существует тензор q^{ij} (2), (3); а значит, можно построить n контравариантных векторов

$$\varphi^{(s)i} = q^{ij}\varphi_j^{(s)} \,. \tag{18}$$

Для того чтобы функции $\varphi^{(s)i}$ являлись компонентами обобщенно-аналитической функции $\Phi^{(s)}(X)$, необходимо и достаточно выполнение соотношений Коши-Римана (11). Подставим (18) в (11), используем формулы

$$\frac{\partial f^{(s)}}{\partial x^m}\frac{\partial x^k}{\partial f^{(s)}} = \delta_m^k \tag{19}$$

и (3), получим

$$\tilde{\Gamma}^i_{kj} + q^{im}\tilde{\Gamma}^r_{km}q_{rj} = p^i_{kt}\varepsilon^s\left(\tilde{\Gamma}^t_{sj} + q^{tm}\tilde{\Gamma}^r_{sm}q_{rj}\right) \,. \tag{20}$$

Эта система линейных уравнений относительно $\tilde{\Gamma}^i_{kj}$ содержит n^3 неизвестных. Не все из этих уравнений линейно независимы, так как существует, по крайней мере, n^2 линейных зависимостей между этими линейными уравнениями, чтобы это установить, достаточно свернуть левую и правую части системы (20) с тензором ε^k. Общее решение системы линейных уравнений можно всегда представить как сумму частного решения, в данном случае

$$\tilde{\Gamma}^i_{(p)kj} = -q^{im}\Gamma^r_{km}q_{rj} \,, \tag{21}$$

и общего решения $\tilde{\Gamma}^i_{(0)kj}$ соответствующего однородного уравнения. Объект

$$\tilde{\Gamma}^i_{(0)kj} = p^i_{kt}D^t_j(x^1, ..., x^n) + \delta^i_k d_j(x^1, ..., x^n) \,, \tag{22}$$

где D^t_j, d_j – произвольные поля, является решением однородной системы уравнений (20) и формально содержит $(n^2 + n)$ произвольных функций, но нам не удалось строго доказать для произвольных невырожденных поличисел P_n, что (22) есть общее решение однородной системы уравнений. Тем не менее, того произвола, который содержится в (22), достаточно для построения обобщенно-аналитических функций комплексной и H_4 переменных.

Итак, если $f^{(i)}(x^1, x^2, ..., x^n)$ – функции осуществляющие элементарное обобщенно-конформное преобразование, то функции $\varphi^{(s)i}$ являются компонентами n обобщенно-аналитически функций

$$\Phi^{(s)}(X) = \varphi^{(s)i}e_i \tag{23}$$

с объектами связности

$$\tilde{\Gamma}^i_{kj} = \tilde{\Gamma}^i_{(p)kj} + \tilde{\Gamma}^i_{(0)kj} \,, \tag{24}$$

при этом за счет имеющегося произвола должно выполняться обязательное условие: когда $\Phi^{(s)}(X)$ – аналитическая функция,

$$\tilde{\Gamma}^i_{kj} \equiv 0\,. \tag{25}$$

Заметим, что это условие всегда можно выполнить, если $\tilde{\Gamma}^i_{(0)kj}$ – есть общее решение однородной системы уравнений (20), так как соотношения Коши-Римана выполняются при условии (25) для аналитических функций переменной P_n.

II способ

Образуем тензор вида

$$\omega_{ij} = a_{(st)}(x^1, ..., x^n)\frac{\partial f^{(s)}}{\partial x^i}\frac{\partial f^{(t)}}{\partial x^j}\,, \tag{26}$$

где $a_{(st)}$ – скалярные функции точки, причем матрица $(a_{(st)})$ невырожденная. Тогда матрица (ω_{ij}) также является невырожденной, поэтому можно построить тензор ω^{ij}:

$$\omega^{ik}\omega_{kj} = \omega_{jk}\omega^{ki} = \delta^i_k\,. \tag{27}$$

Если матрица $(a_{(st)})$ несимметрическая, то и матрица (ω_{ij}) – тоже несимметрическая. Частные производные от элементов матрицы (ω_{ij}) определяются формулой

$$\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x^k} = \frac{\partial a_{(st)}}{\partial x^k}\frac{\partial f^{(s)}}{\partial x^i}\frac{\partial f^{(t)}}{\partial x^j} + \Gamma^m_{ki}\omega_{mj} + \omega_{im}\Gamma^m_{kj}\,, \tag{28}$$

тогда частные производные от контравариантного тензора ω^{ij} можно вычислять по формуле

$$\frac{\partial \omega^{ir}}{\partial x^k} = -\omega^{ip}\frac{\partial \omega_{pj}}{\partial x^k}\omega^{jr}\,. \tag{29}$$

Построим компоненты обобщенно аналитической функции следующим образом:

$$\varphi^{(s)i} = \omega^{ir}\frac{\partial f^{(s)}}{\partial x^r}\,. \tag{30}$$

Подставим $\varphi^{(s)i}$ в соотношения Коши-Римана для обобщенно-аналитических функций, получим систему линейных уравнений для определения $\tilde{\Gamma}^i_{kq}$, причем общее решение соответствующей однородной системы будет таким же, как в I-м способе, а частное решение будет иметь вид

$$\tilde{\Gamma}^i_{(p)kq} = \Gamma^i_{kq} + \omega^{ir}\frac{\partial a_{(st)}}{\partial x^k}\frac{\partial f^{(s)}}{\partial x^r}\frac{\partial f^{(t)}}{\partial x^q}\,. \tag{31}$$

Если матрица (a_{st}) является числовой, то получим

$$\tilde{\Gamma}^i_{(p)kq} = \Gamma^i_{kq}\,. \tag{32}$$

Общее решение соответствующей однородной системы следует выбирать, как и выше, таким образом, чтобы в результате решение обладало свойством: когда функции (30) являются компонентами аналитической функции, $\tilde{\Gamma}^i_{kq} \equiv 0$.

Комплексные числа

Пусть
$$F(z) = f^{(1)} + i f^{(2)} = u + iv \tag{33}$$
– аналитическая функция комплексной переменой $z = x + iy$.

В работе [2] получены объекты Γ^m_{kl} для компонент аналитической функции $F(z)$ комплексной переменной,
$$\Gamma^m_{kl} = \frac{1}{2\Lambda}\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial x^l}\delta^m_k + \frac{\partial\Lambda}{\partial x^k}\delta^m_l - g^{mp}\frac{\partial\Lambda}{\partial x^p}g_{kl}\right), \tag{34}$$
где
$$(g_{ij}) = (g^{ij}) = diag(1,\, 1)\,, \qquad \Lambda = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 . \tag{35}$$

I способ

Учитывая, что
$$(q_{ij}) = (q^{ij}) = diag(1,\, -1)\,, \tag{36}$$
получим
$$(\varphi^{(1)i}) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}\right), (\varphi^{(2)i}) = \left(\frac{\partial v}{\partial x}, -\frac{\partial u}{\partial x}\right). \tag{37}$$
Компоненты $\varphi^{(1)i}$ и $\varphi^{(2)i}$, являются компонентами двух аналитических функций. Первая – это производная от исходной аналитической функции, а так как компоненты второй функции удовлетворяют соотношениям Коши-Римана, то и она является аналитической.

Подберем $\tilde\Gamma^i_{(0)kj}$ таким образом, чтобы для конформного преобразования первого рода $\tilde\Gamma^m_{kl} = 0$. Подставим (34) в (21), добавим $\tilde\Gamma^m_{(0)kl}$ (22) и эту сумму приравняем к нулю. В результате получим систему уравнений
$$-\frac{1}{2}\left(q^{im}\frac{\partial \ln|\Lambda|}{\partial x^m}q_{kj} + \frac{\partial \ln|\Lambda|}{\partial x^k}\delta^i_j - q^i_k\frac{\partial \ln|\Lambda|}{\partial x^p}q^p_j\right) + p^i_{kt}D^t_j + \delta^i_k d_j = 0\,, \tag{38}$$
где
$$(q^i_k) = diag(1\,, -1)\,. \tag{39}$$
Из этой системы уравнений найдем:
$$\left.\begin{aligned} D^1_1 &= \frac{1}{2}\frac{\partial \ln|\Lambda|}{\partial x} - d_1\,,\ D^1_2 = \frac{1}{2}\frac{\partial \ln|\Lambda|}{\partial y} - d_2\,,\\ D^2_1 &= -\frac{1}{2}\frac{\partial \ln|\Lambda|}{\partial y}\,, \qquad D^2_2 = \frac{1}{2}\frac{\partial \ln|\Lambda|}{\partial x}\,, \end{aligned}\right\} \tag{40}$$
где d_1 и d_2 – произвольные функции.

II способ

Пусть
$$(a_{(st)}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{41}$$
то есть
$$\omega_{ij} = \frac{\partial u}{\partial x^i}\frac{\partial u}{\partial x^j} + \frac{\partial v}{\partial x^i}\frac{\partial v}{\partial x^j}\,. \tag{42}$$

Используя соотношения Коши-Римана для аналитической функции $F(z) = u + iv$, имеем

$$(\omega_{ij}) = \Delta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} , \tag{43}$$

где

$$\Delta = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 , \tag{44}$$

а значит

$$(\omega^{ij}) = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \tag{45}$$

Построим функции $\varphi^{(s)i}$:

$$(\varphi^{(1)i}) = \left(\omega^{ij}\frac{\partial u}{\partial x^j}\right) = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{pmatrix} , \tag{46}$$

$$(\varphi^{(2)i}) = \left(\omega^{ij}\frac{\partial v}{\partial x^j}\right) = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial v}{\partial x} \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} \end{pmatrix} . \tag{47}$$

Так как

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)^{-1} = \frac{1}{\Delta}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial v}{\partial x}\right) , \qquad \left(\frac{\partial v}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial x}\right)^{-1} = \frac{1}{\Delta}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial x}\right) , \tag{48}$$

$\varphi^{(1)i}$ и $\varphi^{(2)i}$ – компоненты аналитических функций комплексной переменной. Выясним возможно ли так подобрать в данном случае функции D^t_l и d_l в объектах связности $\tilde{\Gamma}^m_{kl}$, чтобы $\tilde{\Gamma}^m_{kl} = 0$. Для этого надо решить систему линейных уравнений

$$\frac{\partial L}{\partial x^l}\delta^m_k + \frac{\partial L}{\partial x^k}\delta^m_l - g^{mp}\frac{\partial L}{\partial x^p}g_{kl} + p^m_{kt}D^t_l + \delta^m_k d_l = 0 \tag{49}$$

относительно неизвестных функций D^t_l, d_l. Эта система уравнений является совместной и имеет следующее решение:

$$\left.\begin{aligned} D^1_1 &= -\frac{1}{2}\frac{\partial L}{\partial x} - d_1 , \ D^1_2 = -\frac{1}{2}\frac{\partial L}{\partial y} - d_2 , \\ D^2_1 &= \frac{1}{2}\frac{\partial L}{\partial y} , \qquad\quad D^2_2 = -\frac{1}{2}\frac{\partial L}{\partial x} . \end{aligned}\right\} \tag{50}$$

Поличисла H_4

В пространстве H_4 произвольная аналитическая функция в ψ-базисе имеет вид

$$F(X) = f^{(1)}(\xi^1)\psi_1 + f^{(2)}(\xi^2)\psi_2 + f^{(3)}(\xi^3)\psi_3 + f^{(4)}(\xi^4)\psi_4 , \tag{51}$$

где

$$X = \xi^i\psi_i , \qquad \psi_i\psi_j = p^k_{ij}\psi_k , \qquad p^k_{ij} = \delta_{ij}\delta^k_{i\_} , \tag{52}$$

$i = i_-$, но по этой паре индексов не ведется суммирование. Система уравнений для функций $f^{(i)}$, которые осуществляют элементарное обобщенно-конформные преобразования в координатном пространстве поличисел H_4, имеет следующий вид:

$$\frac{\partial^2 f^{(i)}}{\partial\xi^k\partial\xi^l} = \left[\frac{1}{2}(p_l\delta^m_k + p_k\delta^m_l) - p^m_{kl}\frac{\partial L}{\partial\xi^{l-}}\right]\frac{\partial f^{(i)}}{\partial\xi^m}\,. \tag{53}$$

Любая аналитическая функция переменной H_4, которая осуществляет взаимно однозначное отображение некоторой области координатного пространства H_4 на ту же или некоторую другую область того же пространства, определяет конформное преобразование и удовлетворяет системе уравнений (53) с

$$p_i = 0\,, \qquad L = -\ln\left|\frac{\dot f^{(1)}\dot f^{(2)}\dot f^{(3)}\dot f^{(4)}}{const}\right|\,. \tag{54}$$

I способ

Так как в пространстве H_4 можно образовать тензор

$$q_{ij} = p^m_{ik}p^k_{mj}, \qquad (q_{ij}) = diag(1,1,1,1), \tag{55}$$

то существует и дважды контравариантный тензор q^{ij}, причем

$$(q^{ij}) = diag(1,1,1,1). \tag{56}$$

Очевидно: если $f^{(s)}$ – компоненты аналитической функции, то и $\varphi^{(s)i}$ (18) – компоненты аналитической функции. Попытаемся подобрать $\tilde\Gamma^i_{(0)kj}$ (22) таким образом, чтобы в этом случае $\tilde\Gamma^i_{kj} = 0$. Решая систему линейных уравнений

$$q^{im}p^r_{km}\frac{\partial L}{\partial\xi^{m-}}q_{rj} + p^i_{kt}D^t_j + \delta^i_k d_j = 0 \tag{57}$$

относительно неизвестных D^i_j и d_j, получим:

$$D^i_j = -\delta^i_j\frac{\partial L}{\partial\xi^{j-}} - d_j\,. \tag{58}$$

Итак, условие обращения в нуль объекта $\tilde\Gamma^i_{kj}$, когда функции $f^{(s)}$ осуществляют конформное преобразование, всегда можно выполнить, положив

$$d_i = 0\,, \qquad D^i_k = -\delta^i_k\frac{\partial L}{\partial\xi k_-}\,. \tag{59}$$

II способ

Определим тензор ω_{ij} следующим образом:

$$\omega_{ij} = \frac{\partial f^{(1)}}{\partial\xi^i}\frac{\partial f^{(1)}}{\partial\xi^j} + \frac{\partial f^{(2)}}{\partial\xi^i}\frac{\partial f^{(2)}}{\partial\xi^j} + \frac{\partial f^{(3)}}{\partial\xi^i}\frac{\partial f^{(3)}}{\partial\xi^j} + \frac{\partial f^{(4)}}{\partial\xi^i}\frac{\partial f^{(4)}}{\partial\xi^j}\,, \tag{60}$$

тогда, если $f^{(s)}$ – компоненты аналитической функции переменной H_4, получим

$$(\omega_{ij}) = \begin{pmatrix} (\dot f^{(1)})^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\dot f^{(2)})^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\dot f^{(3)})^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\dot f^{(4)})^2 \end{pmatrix}, \tag{61}$$

$$\left.\begin{aligned}
(\varphi^{(1)i}) &= \left(\frac{1}{\dot f^{(1)}(\xi^1)}, 0, 0, 0\right) ,\\
(\varphi^{(2)i}) &= \left(0, \frac{1}{\dot f^{(2)}(\xi^2)}, 0, 0\right) ,\\
(\varphi^{(3)i}) &= \left(0, 0, \frac{1}{\dot f^{(3)}(\xi^3)}, 0\right) ,\\
(\varphi^{(4)i}) &= \left(0, 0, 0, \frac{1}{\dot f^{(4)}(\xi^4)}\right) .
\end{aligned}\right\} \tag{62}$$

Таким образом, $\varphi^{(s)i}$ – компоненты аналитических функций переменной H_4, поэтому надо потребовать, чтобы в этом случае объекты $\tilde\Gamma^m_{kl}$ обращались в нуль, то есть выполнялась следующая система уравнений:

$$-p^m_{kl}\frac{\partial L}{\partial \xi^{l_-}} + p^m_{kt}D^t_l + \delta^m_k d_l = 0 \,. \tag{63}$$

Эта система линейных уравнений относительно D^t_l и d_l является совместной и имеет следующее решение:

$$D^i_j = \delta^i_j \frac{\partial L}{\partial \xi^{j_-}} - d_j \,. \tag{64}$$

Заключение

В работе [1] отмечалось, что сформулированное в ней понятие обобщенно-аналитической функции слишком общо и нужны некоторые дополнительны условия (или условие) для выделения из этого множества функций физически значимого подмножества. В то же время понятие конформных преобразований в работе [2] обобщено, на наш взгляд, минимально возможным образом. Поэтому мы убеждены, что единственным и достаточным требованием для выделения физически значимого подмножества из множества обобщенно-аналитических функций полечисловой переменной является следующее: любая физически значимая обобщенно-аналитическая функция поличисловой переменной P_n может быть получена тем или иным образом из обобщенно-конформных преобразований пространства P_n так, что, когда обобщенно-конформные преобразования осуществляются компонентами аналитических функций, получалась бы аналитические функции. В настоящей работе показано, что установить такое соответствие между обобщенно-конформными преобразованиями и физически значимым классом обобщенно-аналитических функций вполне возможно.

Литература

[1] Г. И. Гарасько: Обобщенно-аналитические функции поличисловой переменной, Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **1** (2004), 75 – 88.

[2] Г. И. Гарасько: Обобщение понятия конформных преобразований, Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **1 (3)** (2005), 16 – 25.

The connection between the elementary generalized conformal transformations with the generalized-analytic functions in the polynumber space

G. I. Garas'ko

Electrotechnical institute of Russia, Moscow
gri9z@mail.ru

In this work a connection between functions which provide the elementary generalized-conformal transformations in the space of non-degenerate poly-numbers and the generalized-analytic functions of the same poly-number variable. Besides general constructions, in this work are examined concrete examples for complex numbers and hypercomplex numbers H_4. For these poly-numbers it is shown that this connection can be set in such a manner, that in particular if passing to conformal transformations, the generalized-analytic functions become analytic.

Key-words: conformal transformations, analytic functions, hypercomplex numbers.
MSC: 30G35, 32A20, 53A30.

4-ИМПУЛЬС ЧАСТИЦЫ И УРАВНЕНИЕ МАССОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ В ПОЛНОСТЬЮ АНИЗОТРОПНОМ ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ

Г. Ю. Богословский

НИИ ядерной физики им. Д. В. Скобельцына,
МГУ им. М. В. Ломоносова
bogoslov@theory.sinp.msu.ru

Работа посвящена исследованию модели плоского полностью анизотропного пространства-времени, метрика которого является обобщением финслеровой метрики Бервальда-Моора. Действие для массивной частицы в таком анизотропном пространстве определено исходя из соображений релятивистской инвариантности и минимальности на прямой мировой линии. С помощью вариационного принципа получены формулы, связывающие канонический 4-импульс частицы с ее 3-скоростью. Показано, что соответствующая массовая поверхность является инвариантом группы релятивистской симметрии полностью анизотропного пространства-времени.

Ключевые слова: финслеровы пространства, метрика Бервальда-Моора, вариационный принцип, массовая поверхность, инварианты, анизотропия.

Введение

Как известно, в рамках Общей теории относительности пространство-время является римановым. При этом, в силу уравнений Эйнштейна, распределение и движение материи определяет лишь его кривизну и никак не влияет на геометрию касательных пространств. Другими словами, вне зависимости от распределения и свойств материальной среды, заполняющей риманово пространство-время, любое плоское касательное пространство-время остается пространством-временем Специальной теории относительности, т. е. — пространством Минковского.

Вообще говоря, плоское пространство-время не обязательно должно обладать геометрией Минковского. Такая геометрия присуща ему только в том случае, если в качестве однородной группы изометрий оно допускает 6-параметрическую группу Лоренца. Последняя, как известно, включает в себя 3-параметрические лоренцевы бусты и подгруппу 3D вращений. Если же 3D изотропия плоского пространства-времени каким-либо образом нарушена, то его метрика уже не описывается квадратичной формой дифференциалов координат, а является некоторой (вообще говоря, достаточно произвольной) однородной функцией дифференциалов координат второй степени однородности. В таком случае говорят, что плоское пространство-время обладает финслеровой геометрией [1].

Уже сравнительно давно (см., в частности, [2]–[7]) предпринимаются попытки обобщить теорию поля и уравнения Эйнштейна для финслерова пространства-времени. Сложность такой задачи состоит прежде всего в том, что финслеров метрический тензор зависит не только от точек основного многообразия, но и от геометрических объектов, вообще говоря, произвольной природы. Поэтому всякий заметный прогресс в этой области связан с привлечением дополнительных физических идей. Отметим, в частности, исключительно плодотворную идею о нарушении лоренцевой симметрии при относительных скоростях инерциальных систем отсчета, крайне близких к скорости света. Эта идея была высказана в работах [8], [9] в качестве наиболее вероятной причины отсутствия так называемого эффекта GZK [10], [11] и привела в конечном счете [12] к открытию жизнеспособной модели плоского пространства-времени с частично нарушенной 3D изотропией. Модель, о которой идет речь, описывается следующей финслеровой метрикой:

$$ds^2 = \left[\frac{(dx_0 - \boldsymbol{\nu} d\boldsymbol{x})^2}{dx_0^2 - d\boldsymbol{x}^2}\right]^r (dx_0^2 - d\boldsymbol{x}^2)\,, \tag{1}$$

где единичный вектор $\boldsymbol{\nu}$ указывает выделенное направление в 3D пространстве, а безразмерный параметр r определяет величину анизотропии, т. е. степень отклонения финслеровой метрики (1) от метрики изотропного пространства Минковского. При этом ясно, что метрика Минковского является предельным случаем метрики (1) при $r = 0$.

Для построения целостной картины динамики пространственно-временного многообразия важное значение имеет и другой предельный случай, а именно, $r = 1$. Согласно (1), метрика ds вырождается в этом случае в полный дифференциал абсолютного времени. Такая трансформация метрики позволяет сделать вывод о возможности фазовых переходов в геометрической структуре пространства-времени и связать их с фазовыми переходами, которые возникают в системе взаимодействующих фундаментальных полей при спонтанном нарушении калибровочной симметрии. Ниже, данную проблему мы обсудим более подробно, а сейчас обратим внимание на еще одно важное обстоятельство, касающееся конкретного вида финслеровой метрики (1).

Любая из финслеровых метрик $ds^2 = f((dx_0 - \boldsymbol{\nu} d\boldsymbol{x})^2/(dx_0^2 - d\boldsymbol{x}^2))(dx_0^2 - d\boldsymbol{x}^2)$, где $f((dx_0 - \boldsymbol{\nu} d\boldsymbol{x})^2/(dx_0^2 - d\boldsymbol{x}^2))$ – во многом произвольная функция своего аргумента, тоже описывает некоторое плоское финслерово пространство-время с частично нарушенной 3D изотропией, т. е. — аксиально симметричное финслерово пространство. Однако, если и только если f имеет вид $f = ((dx_0 - \boldsymbol{\nu} d\boldsymbol{x})^2/(dx_0^2 - d\boldsymbol{x}^2))^r$, соответствующая метрика (1) описывает плоское анизотропное пространство-время, которое, помимо 1-параметрической группы вращений вокруг вектора $\boldsymbol{\nu}$, допускает однородную 3-параметрическую группу изометрий, состоящую лишь из некомпактных преобразований. Такие преобразования связывают физически эквивалентные инерциальные системы отсчета в анизотропном пространстве-времени (1) и называются обобщенными преобразованиями Лоренца, или обобщенными лоренцевыми бустами. В результате можно утверждать, что при переходе от пространства Минковского к финслерову пространству (1) с частично нарушенной 3D изотропией лоренцева пространственно-временная симметрия оказывается тоже нарушенной, но релятивистская симметрия, представленная группой обобщенных лоренцевых бустов, остается в силе [13]–[21].

В рамках описанной финслеровой модели источником анизотропии плоского пространства-времени является релятивистски инвариантный аксиально симметричный фермион-антифермионный конденсат, который возникает при спонтанном нарушении исходной калибровочной симметрии и появлении масс у фундаментальных полей материи. В отличие от стандартного механизма Хиггса и альтернативной ему схемы [22], [23], когда вместо конденсата Хиггса рассматривается скалярный фермион-антифермионный конденсат, перестройка вакуума с образованием релятивистски инвариантного аксиально симметричнго фермион-антифермионного конденсата приводит к изменению геометрии плоского пространства-времени; вместо геометрии Минковского возникает финслерова геометрия с метрикой (1). При этом, как уже отмечалось, такой геометрический фазовый переход сохраняет релятивистскую симметрию, но нарушает лоренцеву симметрию теории.

В последнее время, наряду с финслеровым, разрабатывается и другой, струнно мотивированный подход к проблеме нарушения лоренцевой симметрии. Дело в том, что, даже если исходная единая теория обладает лоренцевой симметрией на наиболее фундаментальном уровне, эта симметрия может спонтанно нарушиться за счет образования конденсата векторного или, например, тензорного поля. Предположение о существовании такого конденсата, или постоянного классического поля на фоне пространства Минковского подразумевает, что оно может влиять на динамику фундаментальных полей и тем самым модифицировать Стандартную модель сильных, слабых и электромагнитных взаимодействий. Поскольку при пассивных преобразованиях постоянное классическое поле преобразуется как лоренцев вектор или тензор, естественным способом учета этого влияния является расширение лагранжиана Стандартной модели с помощью дополнительных членов, представляющих собой всевозможные лоренц-ковариантные свертки конденсата со стандартными фундаментальными полями. Феноменологическая теория, основанная на такой лоренц-ковариантной модификации Стандартной модели, получила название расширенной Стандартной модели (SME) [24]–[27]. Эта теория по построению не является лоренц-инвариантной, поскольку ее лагранжиан не остается инвариантным при активных лоренцевых преобразованиях фундаментальных полей на фоне фиксированного конденсата. К сказанному нужно добавить, что в контексте SME нарушение лоренцевой симметрии относительно активных лоренцевых преобразований подразумевает нарушение и релятивистской симметрии, т. к. наличие неинвариантного конденсата нарушает физическую эквивалентность различных инерциальных систем отсчета.

Не исключено, конечно, что природа устроена так, что при планковских масштабах энергии не только лоренцева, но и описанная выше обобщенная лоренцева симметрия окажутся полностью или частично [28] нарушенными. Однако, даже в этом случае более адекватной по сравнению с римановой может оказаться финслерова геометрическая модель пространства-времени. Хотя похожая точка зрения уже нашла свое место в работе [29], нелишне отметить, что при отсутствии у финслерова пространства-времени какой-либо группы локальных изометрий необходимы дополнительные физические критерии, позволяющие выбрать из множества финслеровых метрик лишь те, которые подходят для описания геометрических свойств пространственно-временного многообразия. Например, используя в качестве таких критериев наличие конформной и проективной структур у финслерова пространства, авторы работ [30]–[32] показали, что финслерово пространство-время, удовлетворяющее данным критериям, должно являться специальным финслеровым пространством Бервальда.

Возвращаясь к финслеровым пространствам, допускающим однородные некомпактные 3-параметрические группы изометрий и, следовательно, обладающие релятивистской симметрией, мы в настоящей работе сосредоточимся на дальнейшем исследовании плоского финслерова пространства-времени с полностью нарушенной 3D изотропией.

Релятивистски инвариантное плоское финслерово пространство-время с полностью нарушенной 3D изотропией

С точки зрения теории относительности основное свойство аксиально симметричного финслерова пространства-времени (1) состоит в том, что оно является еще и релятивистски симметричным. Другими словами, преобразования, связывающие различные инерциальные системы отсчета, принадлежат группе его изометрий и сами образуют

3-параметрическую группу. Что касается аксиальной симметрии, то она означает, что при переходе от пространства Минковского к финслерову пространству-времени (1) изотропия 3D пространства нарушается лишь частично. Если в качестве источника анизотропии 3D пространства рассматривать анизотропию фермион-антифермионного конденсата, который образуется при том или ином спонтанном нарушении исходной калибровочной симметрии системы взаимодействующих фундаментальных полей, то напрашивается следующий вывод. Если аксиально симметричный конденсат порождает аксиально симметричное релятивистски инвариантное финслерово пространства-времени (1) и если помимо аксиально симметричного может также возникать полностью анизотропный конденсат, то последний должен порождать полностью анизотропное релятивистски инвариантное финслерово пространство-время. В наиболее общей форме соответствующая полностью анизотропная финслерова метрика была найдена в работе [33]. Как оказалось, она зависит от трех безразмерных параметров r_1, r_2, r_3 и имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} ds = \ & (dx_0 - dx_1 - dx_2 - dx_3)^{(1+r_1+r_2+r_3)/4}(dx_0 - dx_1 + dx_2 + dx_3)^{(1+r_1-r_2-r_3)/4} \\ \times \ & (dx_0 + dx_1 - dx_2 + dx_3)^{(1-r_1+r_2-r_3)/4}(dx_0 + dx_1 + dx_2 - dx_3)^{(1-r_1-r_2+r_3)/4} . \end{aligned} \tag{2}$$

Область возможных значений параметров r_1, r_2, r_3 ограничена условиями

$$1 + r_1 + r_2 + r_3 \geq 0\,,\ 1 + r_1 - r_2 - r_3 \geq 0\,,$$
$$1 - r_1 + r_2 - r_3 \geq 0\,,\ 1 - r_1 - r_2 + r_3 \geq 0$$

и представляет собой тетраэдр $A\,B\,C\,D$, изображенный на Рис. 1.

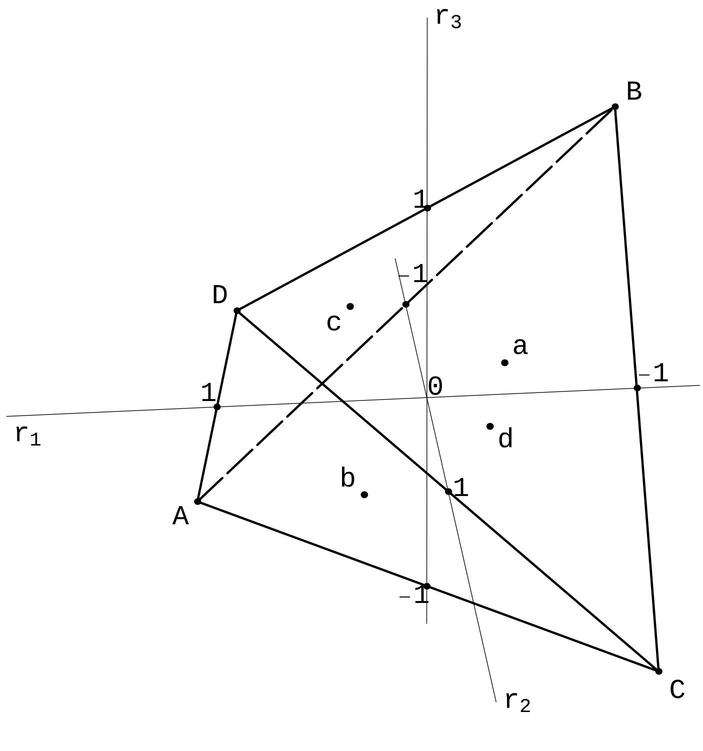


Рис. 1: Область возможных значений параметров $r_1\,, r_2\,, r_3$.

При $r_1 = r_2 = r_3 = 0$ метрика (2) сводится к корню четвертой степени из произведения четырех 1-форм

$$
\begin{aligned}
ds_{_{B-M}} = &\ [\,(dx_0 - dx_1 - dx_2 - dx_3)(dx_0 - dx_1 + dx_2 + dx_3) \\
\times &\ \ (dx_0 + dx_1 - dx_2 + dx_3)(dx_0 + dx_1 + dx_2 - dx_3)\,]^{1/4}\,.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Если, подобно тому, как это сделано в [34], ввести новые координаты ξ_i так, что

$$
\xi_i = A_{ij} x_j\,, \qquad A_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix},
$$

то в этих координатах (3) примет стандартный вид метрики Бервальда-Моора [35], [36], т. е. $ds_{_{B-M}} = \sqrt[4]{\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4}$. Таким образом мы видим, что метрика Бервальда-Моора, представленная с помощью формулы (3), является частным случаем метрики (2) при значении параметров $r_1 = r_2 = r_3 = 0$ (на Рис. 1 это – центральная точка тетраэдра $ABCD$).

Вершине A тетраэдра отвечают следующие значения параметров r_α $(r_1 = 1\,, r_2 = -1\,, r_3 = -1)$; вершине B — $(r_1 = -1\,, r_2 = -1\,, r_3 = 1)$; вершине C — $(r_1 = -1\,, r_2 = 1\,, r_3 = -1)$ и, наконец, вершине D — $(r_1 = 1\,, r_2 = 1\,, r_3 = 1)$. В каждой из этих вершин метрика (2), описывающая пространство-время с полностью нарушенной 3D изотропией, вырождается в соответствующую 1-форму, т. е. — в полный дифференциал абсолютного времени

$$
\begin{aligned}
ds_{_A} &= dx_0 - dx_1 + dx_2 + dx_3\,; \quad ds_{_B} = dx_0 + dx_1 + dx_2 - dx_3\,; \\
ds_{_C} &= dx_0 + dx_1 - dx_2 + dx_3\,; \quad ds_{_D} = dx_0 - dx_1 - dx_2 - dx_3\,.
\end{aligned}
$$

Если теперь сопоставить данное наблюдение с уже отмеченным выше фактом, что метрика (1), описывающая пространство-время с частично нарушенной 3D изотропией, тоже вырождается при $r = 1$ в полный дифференциал абсолютного времени, то такое сопоставление наводит на мысль, что абсолютное время не является стабильным вырожденным состоянием пространства-времени и может трансформироваться либо в частично анизотропное пространство-время (1), либо в полностью анизотропное пространство-время (2). В любом случае соответствующий геометрический фазовый переход от абсолютного времени к четырехмерному пространству-времени можно рассматривать как "Акт Сотворения" 3D пространства. Это явление сопровождается перестройкой вакуумного состояния системы взаимодействующих фундаментальных полей, в результате чего появляются массы у элементарных частиц. Только после завершения описанного процесса понятие пространственной протяженности и понятие системы отсчета наполняются реальным физическим содержанием (в безмассовом мире бессмысленно говорить о пространственной протяженности чего-либо, равно как и о какой-либо системе отсчета[1]). Наконец, обратим внимание еще и на то, что с формальной точки зрения абсолютное время играет роль того связующего звена, посредством которого удовлетворяется принцип соответствия для финслеровых пространств с частично и полностью нарушенной 3D изотропией.

[1] Отметим кстати, что уже в одной из первых единых калибровочных теорий – конформной теории Вейля [37], [38] само понятие пространственно-временного интервала приобретает физический смысл только после нарушения локальной конформной симметрии и появления массы у первоначально безмассового абелева векторного калибровочного поля.

Чтобы исследовать "тонкую структуру" геометрических фазовых переходов, целесообразно рассмотреть здесь некоторые финслеровы метрики, которые можно получить, используя метрику (2) в качестве производящей и выделяя из множества допустимых значений параметров r_1, r_2, r_3 соответствующие характерные подмножества.

Согласно Рис. 1, на грани ABC параметры r_α связаны соотношением $r_3 = -1 - r_1 - r_2$. Поэтому с помощью (2) мы получаем

$$\begin{aligned} ds_{_{ABC}} = \ & (dx_0 - dx_1 + dx_2 + dx_3)^{(1+r_1)/2}(dx_0 + dx_1 - dx_2 + dx_3)^{(1+r_2)/2} \\ \times \ & (dx_0 + dx_1 + dx_2 - dx_3)^{-(r_1+r_2)/2}\,. \end{aligned} \tag{4}$$

В центральной точке d грани ABC параметры r_α имеют значения $r_1 = r_2 = r_3 = -1/3$, а (4) сводится к следующему кубическому корню

$$ds_{_d} = \sqrt[3]{(dx_0 - dx_1 + dx_2 + dx_3)(dx_0 + dx_1 - dx_2 + dx_3)(dx_0 + dx_1 + dx_2 - dx_3)}\,. \tag{5}$$

На грани BCD параметры r_α связаны соотношением $r_3 = 1 + r_1 - r_2$. Соответственно, формула (2) дает

$$\begin{aligned} ds_{_{BCD}} = \ & (dx_0 - dx_1 - dx_2 - dx_3)^{(1+r_1)/2}(dx_0 + dx_1 + dx_2 - dx_3)^{(1-r_2)/2} \\ \times \ & (dx_0 + dx_1 - dx_2 + dx_3)^{-(r_1-r_2)/2}\,. \end{aligned} \tag{6}$$

В центральной точке a грани BCD $r_1 = -1/3$, $r_2 = r_3 = 1/3$ и, вследствие (6), мы снова получаем метрику в форме кубического корня

$$ds_{_a} = \sqrt[3]{(dx_0 - dx_1 - dx_2 - dx_3)(dx_0 + dx_1 - dx_2 + dx_3)(dx_0 + dx_1 + dx_2 - dx_3)}\,. \tag{7}$$

На грани ABD $r_3 = 1 - r_1 + r_2$. В результате

$$\begin{aligned} ds_{_{ABD}} = \ & (dx_0 + dx_1 + dx_2 - dx_3)^{(1-r_1)/2}(dx_0 - dx_1 - dx_2 - dx_3)^{(1+r_2)/2} \\ \times \ & (dx_0 - dx_1 + dx_2 + dx_3)^{(r_1-r_2)/2}\,. \end{aligned} \tag{8}$$

В центральной точке c грани ABD $r_2 = -1/3$, $r_1 = r_3 = 1/3$, а метрика имеет вид

$$ds_{_c} = \sqrt[3]{(dx_0 - dx_1 - dx_2 - dx_3)(dx_0 - dx_1 + dx_2 + dx_3)(dx_0 + dx_1 + dx_2 - dx_3)}\,. \tag{9}$$

На последней, четвертой грани ACD $r_3 = r_1 + r_2 - 1$ и мы получаем

$$\begin{aligned} ds_{_{ACD}} = \ & (dx_0 + dx_1 - dx_2 + dx_3)^{(1-r_1)/2}(dx_0 - dx_1 + dx_2 + dx_3)^{(1-r_2)/2} \\ \times \ & (dx_0 - dx_1 - dx_2 - dx_3)^{(r_1+r_2)/2}\,. \end{aligned} \tag{10}$$

В центральной точке b этой грани $r_1 = r_2 = 1/3$, $r_3 = -1/3$. Поэтому

$$ds_{_b} = \sqrt[3]{(dx_0 - dx_1 - dx_2 - dx_3)(dx_0 - dx_1 + dx_2 + dx_3)(dx_0 + dx_1 - dx_2 + dx_3)}\,. \tag{11}$$

Выясним, наконец, какую форму метрика (2) принимает на шести ребрах тетраэдра $ABCD$. Начнем с ребра BD. Согласно Рис. 1 это ребро является пересечением граней ABD и BCD. Поэтому на нем параметры r_α связаны соотношениями

$$\begin{aligned} 1 - r_1 + r_2 - r_3 = 0\,, \\ 1 + r_1 - r_2 - r_3 = 0\,. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $r_3 = 1$, $r_1 = r_2 = \tilde{r}$. В результате мы получаем

$$ds_{BD} = \left[\frac{(dx_0 - dx_3) - (dx_1 + dx_2)}{(dx_0 - dx_3) + (dx_1 + dx_2)}\right]^{\tilde{r}/2} \sqrt{(dx_0 - dx_3)^2 - (dx_1 + dx_2)^2}\,. \tag{12}$$

В середине ребра BD $r_3 = 1$, $r_1 = r_2 = \tilde{r} = 0$ и (12) сводится к двухмерной метрике Минковского $ds^2 = (dx_0 - dx_3)^2 - (dx_1 + dx_2)^2$.

Рассмотрим ребро AD, которое является пересечением граней ABD и ACD. Параметры r_α связаны на этом ребре соотношениями

$$1 - r_1 + r_2 - r_3 = 0\,,$$
$$1 - r_1 - r_2 + r_3 = 0\,.$$

В результате $r_1 = 1$, $r_2 = r_3 = \tilde{r}$ и

$$ds_{AD} = \left[\frac{(dx_0 - dx_1) - (dx_2 + dx_3)}{(dx_0 - dx_1) + (dx_2 + dx_3)}\right]^{\tilde{r}/2} \sqrt{(dx_0 - dx_1)^2 - (dx_2 + dx_3)^2}\,. \tag{13}$$

В середине ребра AD $r_1 = 1$, $r_2 = r_3 = \tilde{r} = 0$ и (13) снова сводится к двухмерной метрике Минковского $ds^2 = (dx_0 - dx_1)^2 - (dx_2 + dx_3)^2$.

Ребро CD есть пересечение граней ACD и BCD. На этом ребре параметры r_α связаны соотношениями

$$1 - r_1 - r_2 + r_3 = 0\,,$$
$$1 + r_1 - r_2 - r_3 = 0\,.$$

Это дает $r_2 = 1$, $r_1 = r_3 = \tilde{r}$. Следовательно

$$ds_{CD} = \left[\frac{(dx_0 - dx_2) - (dx_1 + dx_3)}{(dx_0 - dx_2) + (dx_1 + dx_3)}\right]^{\tilde{r}/2} \sqrt{(dx_0 - dx_2)^2 - (dx_1 + dx_3)^2}\,. \tag{14}$$

В середине ребра CD $r_2 = 1$, $r_1 = r_3 = \tilde{r} = 0$ и значит
$ds^2 = (dx_0 - dx_2)^2 - (dx_1 + dx_3)^2$.

Ребро CB есть пересечение граней ABC и BCD. На нем параметры r_α связаны соотношениями

$$1 + r_1 + r_2 + r_3 = 0\,,$$
$$1 + r_1 - r_2 - r_3 = 0\,.$$

Отсюда $r_1 = -1$, $r_2 = -r_3 = \tilde{r}$. В результате

$$ds_{CB} = \left[\frac{(dx_0 + dx_1) - (dx_2 - dx_3)}{(dx_0 + dx_1) + (dx_2 - dx_3)}\right]^{\tilde{r}/2} \sqrt{(dx_0 + dx_1)^2 - (dx_2 - dx_3)^2}\,. \tag{15}$$

В середине ребра CB $r_1 = -1$, $r_2 = -r_3 = \tilde{r} = 0$ и $ds^2 = (dx_0 + dx_1)^2 - (dx_2 - dx_3)^2$.

Ребро AB является пересечением граней ABC и ABD и на нем параметры r_α связаны соотношениями

$$1 + r_1 + r_2 + r_3 = 0\,,$$
$$1 - r_1 + r_2 - r_3 = 0\,,$$

т. е. $r_2 = -1$, $r_1 = -r_3 = \tilde{r}$. В результате

$$ds_{AB} = \left[\frac{(dx_0 + dx_2) - (dx_1 - dx_3)}{(dx_0 + dx_2) + (dx_1 - dx_3)}\right]^{\tilde{r}/2} \sqrt{(dx_0 + dx_2)^2 - (dx_1 - dx_3)^2}\,. \tag{16}$$

В середине ребра AB $r_2 = -1$, $r_1 = -r_3 = \tilde{r} = 0$ и $ds^2 = (dx_0 + dx_2)^2 - (dx_1 - dx_3)^2$.

Последнее ребро AC является пересечением граней ABC и ACD. На нем параметры r_α связаны соотношениями

$$1 + r_1 + r_2 + r_3 = 0\,,$$
$$1 - r_1 - r_2 + r_3 = 0\,.$$

Следовательно $r_3 = -1$, $r_1 = -r_2 = \tilde{r}$ и

$$ds_{AC} = \left[\frac{(dx_0 + dx_3) - (dx_1 - dx_2)}{(dx_0 + dx_3) + (dx_1 - dx_2)}\right]^{\tilde{r}/2} \sqrt{(dx_0 + dx_3)^2 - (dx_1 - dx_2)^2}\,. \tag{17}$$

В середине ребра AC $r_3 = -1$, $r_1 = -r_2 = \tilde{r} = 0$ и $ds^2 = (dx_0 + dx_3)^2 - (dx_1 - dx_2)^2$.

В следующем разделе, посвященном релятивистской механике частицы в полностью анизотропном пространстве-времени (2), мы существенно используем преобразования, составляющие однородную 3-параметрическую некомпактную группу изометрий этого пространства-времени. По своему смыслу такая группа представляет собой группу релятивистской симметрии пространства-времени (2). Она, как было выяснено в работе [39], является абелевой, а определяющие ее линейные преобразования имеют вид

$$x'_i = D\,L_{ik}\,x_k\,, \tag{18}$$

где

$$D = e^{-(\,r_1\,\alpha_1 + r_2\,\alpha_2 + r_3\,\alpha_3\,)}\,, \tag{19}$$

L_{ik} — унимодулярные матрицы, причем

$$L_{ik} = \begin{pmatrix} \mathcal{A} & -\mathcal{B} & -\mathcal{C} & -\mathcal{D} \\ -\mathcal{B} & \mathcal{A} & \mathcal{D} & \mathcal{C} \\ -\mathcal{C} & \mathcal{D} & \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ -\mathcal{D} & \mathcal{C} & \mathcal{B} & \mathcal{A} \end{pmatrix}, \tag{20}$$

$$\mathcal{A} = \cosh\alpha_1 \cosh\alpha_2 \cosh\alpha_3 + \sinh\alpha_1 \sinh\alpha_2 \sinh\alpha_3\,,$$
$$\mathcal{B} = \cosh\alpha_1 \sinh\alpha_2 \sinh\alpha_3 + \sinh\alpha_1 \cosh\alpha_2 \cosh\alpha_3\,,$$
$$\mathcal{C} = \cosh\alpha_1 \sinh\alpha_2 \cosh\alpha_3 + \sinh\alpha_1 \cosh\alpha_2 \sinh\alpha_3\,,$$
$$\mathcal{D} = \cosh\alpha_1 \cosh\alpha_2 \sinh\alpha_3 + \sinh\alpha_1 \sinh\alpha_2 \cosh\alpha_3\,,$$

и $\alpha_1\,, \alpha_2\,, \alpha_3$ — групповые параметры.

Преобразования, обратные (18), имеют вид

$$x_i = D^{-1}\,L^{-1}_{ik}\,x'_k\,, \tag{21}$$

где

$$L^{-1}_{ik} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathcal{A}} & -\tilde{\mathcal{B}} & -\tilde{\mathcal{C}} & -\tilde{\mathcal{D}} \\ -\tilde{\mathcal{B}} & \tilde{\mathcal{A}} & \tilde{\mathcal{D}} & \tilde{\mathcal{C}} \\ -\tilde{\mathcal{C}} & \tilde{\mathcal{D}} & \tilde{\mathcal{A}} & \tilde{\mathcal{B}} \\ -\tilde{\mathcal{D}} & \tilde{\mathcal{C}} & \tilde{\mathcal{B}} & \tilde{\mathcal{A}} \end{pmatrix}, \tag{22}$$

$$\tilde{\mathcal{A}} = \cosh\alpha_1 \cosh\alpha_2 \cosh\alpha_3 - \sinh\alpha_1 \sinh\alpha_2 \sinh\alpha_3\,, \tag{23}$$

$$\tilde{\mathcal{B}} = \cosh\alpha_1 \sinh\alpha_2 \sinh\alpha_3 - \sinh\alpha_1 \cosh\alpha_2 \cosh\alpha_3\,, \tag{24}$$

$$\tilde{\mathcal{C}} = \sinh\alpha_1\cosh\alpha_2\sinh\alpha_3 - \cosh\alpha_1\sinh\alpha_2\cosh\alpha_3\,, \tag{25}$$

$$\tilde{\mathcal{D}} = \sinh\alpha_1\sinh\alpha_2\cosh\alpha_3 - \cosh\alpha_1\cosh\alpha_2\sinh\alpha_3\,. \tag{26}$$

Учитывая, что преобразования (18), подобно преобразованиям Лоренца в пространстве Минковского, связывают различные инерциальные системы отсчета в финслеровом пространстве (2), целесообразно вместо групповых параметров $\alpha_1\,,\alpha_2\,,\alpha_3$ использовать компоненты $v_1 = dx_1/dx_0\,,\ v_2 = dx_2/dx_0\,,\ v_3 = dx_3/dx_0$ скорости штрихованной системы отсчета. Хотя соответствующие соотношения можно найти в [39], мы все же их здесь воспроизведем:

$$\begin{aligned}
v_1 &= (\tanh\alpha_1 - \tanh\alpha_2\tanh\alpha_3)/(1-\tanh\alpha_1\tanh\alpha_2\tanh\alpha_3)\,,\\
v_2 &= (\tanh\alpha_2 - \tanh\alpha_1\tanh\alpha_3)/(1-\tanh\alpha_1\tanh\alpha_2\tanh\alpha_3)\,,\\
v_3 &= (\tanh\alpha_3 - \tanh\alpha_1\tanh\alpha_2)/(1-\tanh\alpha_1\tanh\alpha_2\tanh\alpha_3)\,.
\end{aligned}$$

Обратные соотношения выглядят так:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \frac{1}{4}\ln\frac{(1+v_1-v_2+v_3)(1+v_1+v_2-v_3)}{(1-v_1-v_2-v_3)(1-v_1+v_2+v_3)}\,,\\
\alpha_2 &= \frac{1}{4}\ln\frac{(1-v_1+v_2+v_3)(1+v_1+v_2-v_3)}{(1-v_1-v_2-v_3)(1+v_1-v_2+v_3)}\,,\\
\alpha_3 &= \frac{1}{4}\ln\frac{(1-v_1+v_2+v_3)(1+v_1-v_2+v_3)}{(1-v_1-v_2-v_3)(1+v_1+v_2-v_3)}\,.
\end{aligned}$$

Релятивистская механика в плоском полностью анизотропном финслеровом пространстве-времени

Исходя из соображений релятивистской инвариантности и минимальности на прямой мировой линии, запишем действие S для свободной частицы в плоском полностью анизотропном финслеровом пространстве-времени (2).

$$S = -mc\int_a^b ds\,, \tag{27}$$

где ds — интервал в финслеровом пространстве (2). Вариация данного действия имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
\delta S =& -\int_a^b (p_0 d\delta x_0 - p_1 d\delta x_1 - p_2 d\delta x_2 - p_3 d\delta x_3)\\
=& \ (-p_0\delta x_0 + p_1\delta x_1 + p_2\delta x_2 + p_3\delta x_3)|_a^b\\
&+\int_a^b [(dp_0/ds)\delta x_0 - (dp_1/ds)\delta x_1 - (dp_2/ds)\delta x_2 - (dp_3/ds)\delta x_3]ds\,.
\end{aligned} \tag{28}$$

Если мы варьируем мировую линию при условии $(\delta x_i)\,|_a = (\delta x_i)\,|_b = 0$, то принцип наименьшего действия дает $p_i = const$, т.е. прямолинейное инерциальное движение. Если же мы варьируем координаты точки b при условии $p_i = const$, то приходим к следующим соотношениям:

$$p_0 = -\frac{\partial S}{\partial x_0}\,,\quad p_\alpha = \frac{\partial S}{\partial x_\alpha}\,;\qquad \alpha = 1\,,2\,,3. \tag{29}$$

Отсюда ясно, что p_i есть канонический 4-импульс частицы в финслеровом пространстве (2). Его компоненты, выраженные через 3-скорость $v_\alpha = dx_\alpha/dx_0$, имеют вид

$$\begin{aligned} p_0 = \frac{ds}{dx_0}\left(\frac{dx_0}{ds_{_{B-M}}}\right)^4 \{ \; & 1 - v_1^2 - v_2^2 - v_3^2 - 2v_1v_2v_3 \\ + \; & r_1[(1 - v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)v_1 + 2v_2v_3] \\ + \; & r_2[(1 + v_1^2 - v_2^2 + v_3^2)v_2 + 2v_1v_3] \\ + \; & r_3[(1 + v_1^2 + v_2^2 - v_3^2)v_3 + 2v_1v_2]\}\,, \end{aligned} \tag{30}$$

$$\begin{aligned} p_1 = \frac{ds}{dx_0}\left(\frac{dx_0}{ds_{_{B-M}}}\right)^4 \{ \; & (1 - v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)v_1 + 2v_2v_3 \\ + \; & r_1[1 - v_1^2 - v_2^2 - v_3^2 - 2v_1v_2v_3] \\ + \; & r_2[(1 + v_1^2 + v_2^2 - v_3^2)v_3 + 2v_1v_2] \\ + \; & r_3[(1 + v_1^2 - v_2^2 + v_3^2)v_2 + 2v_1v_3]\}\,, \end{aligned} \tag{31}$$

$$\begin{aligned} p_2 = \frac{ds}{dx_0}\left(\frac{dx_0}{ds_{_{B-M}}}\right)^4 \{ \; & (1 + v_1^2 - v_2^2 + v_3^2)v_2 + 2v_1v_3 \\ + \; & r_1[(1 + v_1^2 + v_2^2 - v_3^2)v_3 + 2v_1v_2] \\ + \; & r_2[1 - v_1^2 - v_2^2 - v_3^2 - 2v_1v_2v_3] \\ + \; & r_3[(1 - v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)v_1 + 2v_2v_3]\}\,, \end{aligned} \tag{32}$$

$$\begin{aligned} p_3 = \frac{ds}{dx_0}\left(\frac{dx_0}{ds_{_{B-M}}}\right)^4 \{ \; & (1 + v_1^2 + v_2^2 - v_3^2)v_3 + 2v_1v_2 \\ + \; & r_1[(1 + v_1^2 - v_2^2 + v_3^2)v_2 + 2v_1v_3] \\ + \; & r_2[(1 - v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)v_1 + 2v_2v_3] \\ + \; & r_3[1 - v_1^2 - v_2^2 - v_3^2 - 2v_1v_2v_3] \;\; \}\,, \end{aligned} \tag{33}$$

где

$$\begin{aligned} (dx_0/ds)\left(ds_{_{B-M}}/dx_0\right)^4 = \; & (1 - v_1 - v_2 - v_3)^{(3-r_1-r_2-r_3)\,/\,4} \\ \times \; & (1 - v_1 + v_2 + v_3)^{(3-r_1+r_2+r_3)\,/\,4} \\ \times \; & (1 + v_1 - v_2 + v_3)^{(3+r_1-r_2+r_3)\,/\,4} \\ \times \; & (1 + v_1 + v_2 - v_3)^{(3+r_1+r_2-r_3)\,/\,4}\,, \end{aligned} \tag{34}$$

причем ds — метрика (2), а $ds_{_{B-M}}$ — метрика Бервальда-Моора (3). Отметим, что, начиная с формулы (30), во всех соотношениях положено $m = c = 1$.

Согласно (30)–(33), четыре величины, а именно, энергия p_0 и 3-импульс p_α являются функциями трех компонент v_α скорости частицы. Поэтому соотношения (30)–(33) можно рассматривать как уравнения, определяющие массовую поверхность в параметрической форме, а v_α — как внутренние координаты на ней. Ниже мы покажем, что уравнение массовой поверхности можно получить и в форме алгебраического соотношения для p_i. Что же касается физической стороны дела, то, как и должно быть, энергия p_0, определенная с помощью (30), достигает своего абсолютного минимума $p_0 = 1$ при $v_\alpha = 0$, т. е. для покоящейся частицы. Важно, однако, отметить, что, помимо энергии покоя $p_0 = 1$, у частицы, находящейся в полностью анизотропном пространстве (2), остается отличный от нуля импульс покоя; в силу (31)–(33) $p_1 = r_1\,, p_2 = r_2\,, p_3 = r_3$

при $v_\alpha = 0$. Более того, согласно тем же формулам, направление 3-импульса частицы не совпадает с направлением ее 3-скорости. Это говорит о том, что свободное движение частицы в полностью анизотропном пространстве аналогично движению квазичастицы в полностью анизотропной кристаллической среде.

Как и в случае пространства Минковского, зная 4-импульс частицы в полностью анизотропном пространстве, можно найти ее 3-скорость. Чтобы получить соответствующие формулы, начнем с некоторых полезных промежуточных соотношений, которые выполняются в силу (30)–(33) :

$$\frac{p_0+p_3}{p_1+p_2} = \frac{(1-v_3)(1+r_3)+(v_1+v_2)(r_1+r_2)}{(1-v_3)(r_2+r_3)+(v_1+v_2)(1+r_3)}\,, \tag{35}$$

$$\frac{p_0-p_1}{p_2-p_3} = \frac{(1+v_1)(1-r_1)+(v_2-v_3)(r_2-r_3)}{(1+v_1)(r_2-r_3)+(v_2-v_3)(1-r_1)}\,, \tag{36}$$

$$\frac{p_0+p_1}{p_2+p_3} = \frac{(1-v_1)(1+r_1)+(v_2+v_3)(r_2+r_3)}{(1-v_1)(r_2+r_3)+(v_2+v_3)(1+r_1)}\,. \tag{37}$$

Данные соотношения приводят к следующей системе трех линейных уравнений относительно v_α:

$$a_{\gamma\alpha}v_\alpha = b_\gamma\,, \tag{38}$$

где

$$\begin{aligned}
a_{11} = {}& \quad a_{12} = (p_0+p_3)(1+r_3)-(p_1+p_2)(r_1+r_2)\,,\\
a_{13} = {}& \quad b_1 \;= (p_1+p_2)(1+r_3)-(p_0+p_3)(r_2+r_3)\,,\\
a_{21} = {}& -b_2 \;= (p_0-p_1)(r_2-r_3)-(p_2-p_3)(1-r_1)\,,\\
a_{22} = {}& -a_{23} = (p_0-p_1)(1-r_1)-(p_2-p_3)(r_2-r_3)\,,\\
a_{31} = {}& \quad b_3 \;= (p_2+p_3)(1+r_1)-(p_0+p_1)(r_2+r_3)\,,\\
a_{32} = {}& \quad a_{33} = (p_0+p_1)(1+r_1)-(p_2+p_3)(r_2+r_3)\,.
\end{aligned}$$

При $r_1 = r_2 = r_3 = 0$, т. е. в случае пространства Бервальда-Моора с метрикой (3), система уравнений (38) принимает вид

$$\begin{aligned}
&(p_0+p_3)v_1+(p_0+p_3)v_2+(p_1+p_2)v_3 = (p_1+p_2)\,,\\
&(p_3-p_2)v_1+(p_0-p_1)v_2+(p_1-p_0)v_3 = (p_2-p_3)\,,\\
&(p_2+p_3)v_1+(p_0+p_1)v_2+(p_0+p_1)v_3 = (p_2+p_3)\,.
\end{aligned} \tag{39}$$

Решением системы уравнений (39) являются следующие соотношения:

$$v_1 = \frac{p_1({p_0}^2-{p_1}^2+{p_2}^2+{p_3}^2)-2p_0p_2p_3}{p_0({p_0}^2-{p_1}^2-{p_2}^2-{p_3}^2)+2p_1p_2p_3}\,,$$

$$v_2 = \frac{p_2({p_0}^2+{p_1}^2-{p_2}^2+{p_3}^2)-2p_0p_1p_3}{p_0({p_0}^2-{p_1}^2-{p_2}^2-{p_3}^2)+2p_1p_2p_3}\,,$$

$$v_3 = \frac{p_3({p_0}^2+{p_1}^2+{p_2}^2-{p_3}^2)-2p_0p_1p_2}{p_0({p_0}^2-{p_1}^2-{p_2}^2-{p_3}^2)+2p_1p_2p_3}\,.$$

Как уже отмечалось, четыре функции (30)-(33) от трех переменных v_α определяют массовую поверхность в параметрической форме. Получим теперь уравнение массовой поверхности в алгебраической форме, т. е. в форме $H^4(p_0,\, p_1,\, p_2,\, p_3) = 1$. Чтобы найти явный вид функции $H^4(p_0, p_1, p_2, p_3)$, поступим следующим образом. Сначала выпишем четыре соотношения, которые выполняются в силу (30)–(33):

$$\frac{p_0+p_1+p_2+p_3}{1+r_1+r_2+r_3} = \frac{ds}{dx_0}\left(\frac{dx_0}{ds_{_{B-M}}}\right)^4 (1-v_1+v_2+v_3)\left[(1+v_1)^2-(v_2-v_3)^2\right], \tag{40}$$

$$\frac{p_0+p_1-p_2-p_3}{1+r_1-r_2-r_3} = \frac{ds}{dx_0}\left(\frac{dx_0}{ds_{_{B-M}}}\right)^4 (1-v_1-v_2-v_3)\left[(1+v_1)^2-(v_2-v_3)^2\right], \tag{41}$$

$$\frac{p_0-p_1+p_2-p_3}{1-r_1+r_2-r_3} = \frac{ds}{dx_0}\left(\frac{dx_0}{ds_{_{B-M}}}\right)^4 (1+v_1+v_2-v_3)\left[(1-v_1)^2-(v_2+v_3)^2\right], \tag{42}$$

$$\frac{p_0-p_1-p_2+p_3}{1-r_1-r_2+r_3} = \frac{ds}{dx_0}\left(\frac{dx_0}{ds_{_{B-M}}}\right)^4 (1+v_1-v_2+v_3)\left[(1-v_1)^2-(v_2+v_3)^2\right]. \tag{43}$$

Обратим теперь внимание на структуру выражений, стоящих в правых частях формул (40)-(43). Если принять во внимание структуру общего множителя $(dx_0/ds)\left(ds_{_{B-M}}/dx_0\right)^4$, которую демонстрирует формула (34), то легко заметить, что правые части формул (40)-(43) представляют собой произведения различных степеней четырех характерных "скобок" $(1-v_1-v_2-v_3)$, $(1-v_1+v_2+v_3)$, $(1+v_1-v_2+v_3)$ и $(1+v_1+v_2-v_3)$. Это наблюдение наводит на мысль, что функцию $H^4(p_0, p_1, p_2, p_3)$ следует искать в виде

$$\begin{aligned} H^4(p_0, p_1, p_2, p_3) \;=\; & \left(\frac{p_0+p_1+p_2+p_3}{1+r_1+r_2+r_3}\right)^a \left(\frac{p_0+p_1-p_2-p_3}{1+r_1-r_2-r_3}\right)^b \\ \times\; & \left(\frac{p_0-p_1+p_2-p_3}{1-r_1+r_2-r_3}\right)^c \left(\frac{p_0-p_1-p_2+p_3}{1-r_1-r_2+r_3}\right)^d. \end{aligned} \tag{44}$$

Первое из условий, которые необходимо наложить на константы a, b, c, d, вытекает из физического смысла функции $H(p_0, p_1, p_2, p_3)$ и состоит в том, что эта функция должна иметь физическую размерность, совпадающую с размерностью импульса p_i. Поэтому функция (44) должна являться однородной функцией своих аргументов четвертой степени однородности. Данное требование означает, что

$$a+b+c+d=4. \tag{45}$$

Остальные условия на константы a, b, c, d можно получить, потребовав, чтобы все показатели степени, которые возникнут у четырех характерных "скобок" после подстановки выражений (40)–(43) в (44), оказались бы равными нулю. Именно в этом случае мы получим уравнение массовой поверхности в виде $H^4(p_0, p_1, p_2, p_3) = 1$, а поскольку у нас положено $m = c = 1$, то в обычных единицах ему будет соответствовать уравнение $H^4(p_0, p_1, p_2, p_3) = (mc)^4$.

Итак, если выполнить намеченную программу, то, в дополнение к уравнению (45), мы придем к следующим четырем уравнениям для определения констант a, b, c, d:

$$b+c+d-(3-r_1-r_2-r_3)(a+b+c+d)/4=0, \tag{46}$$

$$a+c+d-(3-r_1+r_2+r_3)(a+b+c+d)/4=0, \tag{47}$$

$$a+b+d-(3+r_1-r_2+r_3)(a+b+c+d)/4=0, \tag{48}$$

$$a+b+c-(3+r_1+r_2-r_3)(a+b+c+d)/4=0. \tag{49}$$

В силу (45), систему пяти уравнений (45)–(49) можно переписать в виде

$$a+b+c+d=4\,, \tag{50}$$
$$b+c+d-(3-r_1-r_2-r_3)=0\,, \tag{51}$$
$$a+c+d-(3-r_1+r_2+r_3)=0\,, \tag{52}$$
$$a+b+d-(3+r_1-r_2+r_3)=0\,, \tag{53}$$
$$a+b+c-(3+r_1+r_2-r_3)=0\,. \tag{54}$$

Очевидно, что, складывая уравнения (51)–(54), мы приходим к (50). Поэтому (50) не является независимым уравнением и для определения четырех констант $a\,,b\,,c\,,d$ у нас остается четверка независимые уравнения (51)–(54), или соответствующая система

$$b+c+d=(3-r_1-r_2-r_3)\,, \tag{55}$$
$$a+c+d=(3-r_1+r_2+r_3)\,, \tag{56}$$
$$a+b+d=(3+r_1-r_2+r_3)\,, \tag{57}$$
$$a+b+c=(3+r_1+r_2-r_3)\,. \tag{58}$$

Решением этой системы являются следующие константы:

$$a=1+r_1+r_2+r_3\,,\ b=1+r_1-r_2-r_3\,,$$
$$c=1-r_1+r_2-r_3\,,\ d=1-r_1-r_2+r_3\,.$$

Данный результат означает, что уравнение массовой поверхности в полностью анизотропном импульсном пространстве имеет вид

$$\left(\frac{p_0+p_1+p_2+p_3}{1+r_1+r_2+r_3}\right)^{(1+r_1+r_2+r_3)}\left(\frac{p_0+p_1-p_2-p_3}{1+r_1-r_2-r_3}\right)^{(1+r_1-r_2-r_3)}$$
$$\times\left(\frac{p_0-p_1+p_2-p_3}{1-r_1+r_2-r_3}\right)^{(1-r_1+r_2-r_3)}\left(\frac{p_0-p_1-p_2+p_3}{1-r_1-r_2+r_3}\right)^{(1-r_1-r_2+r_3)}=1\,. \tag{59}$$

Рассмотрим, наконец, группу релятивистской симметрии полностью анизотропного импульсного пространства и покажем, что преобразования 4-импульсов, образующие эту группу, оставляют уравнение массовой поверхности (59) инвариантным. Из общих соображений ясно, что преобразования релятивистской симметрии полностью анизотропного импульсного пространства индуцируются соответствующими преобразованиями (18) полностью анизотропного пространства событий (2). Чтобы в явном виде построить линейные преобразования 4-импульсов, представляющие группу релятивистской симметрии, мы будем исходить из определения канонического 4-импульса (29).

Итак, вследствие (29) и (21) справедливы соотношения

$$p'_0=-\frac{\partial S}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial x'_0}=D^{-1}(\,L^{-1}_{00}\,p_0-L^{-1}_{0\beta}\,p_\beta\,)\,, \tag{60}$$

$$p'_\alpha=\frac{\partial S}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial x'_\alpha}=D^{-1}(\,-L^{-1}_{\alpha 0}\,p_0+L^{-1}_{\alpha\beta}\,p_\beta\,)\,. \tag{61}$$

Принимая во внимание определение (22) матрицы L^{-1}_{ik}, мы можем оба соотношения (60) и (61) записать в виде одной формулы

$$p'_i=D^{-1}\,\mathcal{L}_{ik}\,p_k\,, \tag{62}$$

где, в силу (19) и (22),

$$D^{-1} = e^{(\,r_1\,\alpha_1 + r_2\,\alpha_2 + r_3\,\alpha_3\,)}, \tag{63}$$

$$\mathcal{L}_{ik} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathcal{A}} & \tilde{\mathcal{B}} & \tilde{\mathcal{C}} & \tilde{\mathcal{D}} \\ \tilde{\mathcal{B}} & \tilde{\mathcal{A}} & \tilde{\mathcal{D}} & \tilde{\mathcal{C}} \\ \tilde{\mathcal{C}} & \tilde{\mathcal{D}} & \tilde{\mathcal{A}} & \tilde{\mathcal{B}} \\ \tilde{\mathcal{D}} & \tilde{\mathcal{C}} & \tilde{\mathcal{B}} & \tilde{\mathcal{A}} \end{pmatrix}, \tag{64}$$

причем $\alpha_1\,,\ \alpha_2\,,\ \alpha_3$ — групповые параметры, а матричные элементы $\tilde{\mathcal{A}}\,, \tilde{\mathcal{B}}\,, \tilde{\mathcal{C}}\,, \tilde{\mathcal{D}}$ матрицы $\mathcal{L}_{ik}$ определяются формулами (23)–(26). Таким образом, мы в явном виде (62) построили линейные преобразования 4-импульсов и эти преобразования образуют 3-параметрическую абелеву группу релятивистской симметрии полностью анизотропного импульсного пространства.

Чтобы убедиться, что уравнение массовой поверхности (59) действительно не меняет своего вида, т. е. остается инвариантным при преобразованиях (62), целесообразно сначала выяснить как преобразуются четыре независимые 1-формы, входящие в уравнение (59). Прямое вычисление с помощью (62)–(64) и (23)–(26) приводит к следующему результату:

$$(p'_0 + p'_1 + p'_2 + p'_3) = e^{[\,(r_1-1)\,\alpha_1 + (r_2-1)\,\alpha_2 + (r_3-1)\,\alpha_3\,]}(p_0 + p_1 + p_2 + p_3)\,, \tag{65}$$

$$(p'_0 + p'_1 - p'_2 - p'_3) = e^{[\,(r_1-1)\,\alpha_1 + (r_2+1)\,\alpha_2 + (r_3+1)\,\alpha_3\,]}(p_0 + p_1 - p_2 - p_3)\,, \tag{66}$$

$$(p'_0 - p'_1 + p'_2 - p'_3) = e^{[\,(r_1+1)\,\alpha_1 + (r_2-1)\,\alpha_2 + (r_3+1)\,\alpha_3\,]}(p_0 - p_1 + p_2 - p_3)\,, \tag{67}$$

$$(p'_0 - p'_1 - p'_2 + p'_3) = e^{[\,(r_1+1)\,\alpha_1 + (r_2+1)\,\alpha_2 + (r_3-1)\,\alpha_3\,]}(p_0 - p_1 - p_2 + p_3)\,. \tag{68}$$

Таким образом, как и следовало ожидать, при переходе от 4-импульсов p_i к четырем независимым 1-формам преобразования релятивистской симметрии полностью анизотропного импульсного пространства существенно упрощаются и сводятся лишь к масштабным преобразованиям данных 1-форм. С помощью (65)–(68) уже не представляет труда проверить, что

$$\begin{aligned} & (p'_0 + p'_1 + p'_2 + p'_3)^{(1+r_1+r_2+r_3)}(p'_0 + p'_1 - p'_2 - p'_3)^{(1+r_1-r_2-r_3)} \\ \times\ & (p'_0 - p'_1 + p'_2 - p'_3)^{(1-r_1+r_2-r_3)}(p'_0 - p'_1 - p'_2 + p'_3)^{(1-r_1-r_2+r_3)} \\ =\ & (p_0 + p_1 + p_2 + p_3)^{(1+r_1+r_2+r_3)}(p_0 + p_1 - p_2 - p_3)^{(1+r_1-r_2-r_3)} \\ \times\ & (p_0 - p_1 + p_2 - p_3)^{(1-r_1+r_2-r_3)}(p_0 - p_1 - p_2 + p_3)^{(1-r_1-r_2+r_3)}\,. \end{aligned}$$

Это равенство и доказывает, что уравнение массовой поверхности (59) остается инвариантным при преобразованиях (62).

Заключение

Лишь вскользь коснувшись релятивистски симметричного финслерова пространства событий с частично нарушенной 3D изотропией, мы основное внимание в данной работе уделили исследованию релятивистски симметричного финслерова пространства с полностью нарушенной 3D изотропией.

Во избежание недоразумений отметим, что обычно под релятивистской симметрией понимается симметрия относительно лоренцевых бустов или, в более широком смысле, симметрия относительно 6-параметрической группы Лоренца. Хотя любой элемент группы Лоренца можно представить как произведение лоренцева буста и 3D поворота, нетривиальным моментом является то, что множество 3D поворотов составляет

3-параметрическую подгруппу группы Лоренца, а 3-параметрическое множество лоренцевых бустов никакой группы не составляет. Другими словами, в результате последовательного применения двух различных лоренцевых бустов мы переходим в инерциальную систему отсчета, пространственные оси которой оказываются не параллельными осям исходной системы, а довернутыми на некоторый угол. Именно этот эффект, приводящий, в частности, к томасовской прецессии, отражает тот факт, что произведение двух произвольных лоренцевых бустов уже не является чистым лоренцевым бустом. Вместе с тем, достаточно давно известно, что в группе Лоренца существует единственное (с точностью до изоморфизма) 3-параметрическое подмножество некомпактных преобразований, которое, подобно компактному подмножеству 3D вращений, тоже составляет группу. Поскольку в такую 3-параметрическую группу входят только преобразования, связывающие движущиеся инерциальные системы отсчета, то скорее ее, а не всю группу Лоренца, следует рассматривать в качестве группы релятивистской симметрии пространства Минковского. Это тем более оправдано, что при частичном нарушении 3D изотропии вместо пространства Минковского возникает финслерово пространство с группой релятивистской симметрии, которая локально изоморфна 3-параметрической группе релятивистской симметрии пространства Минковского. Что же касается полностью анизотропного финслерова пространства событий, то и для него группа преобразований, связывающих различные физически эквивалентные инерциальные системы отсчета, имеет смысл группы релятивистской симметрии. Однако, как было показано ранее, такая группа является абелевой 3-параметрической группой.

Литература

[1] Рунд Х., Дифференциальная геометрия финслеровых пространств, М.: Наука, 1981.

[2] Takano Y., Gravitational field in Finsler spaces, *Lett. Nuovo Cimento*, 1974, V. 10, N 17, 747–750.

[3] Takano Y., On the theory of fields in Finsler spaces, in Proc. Int. Symp. “Relativity and Unified Field Theory", Calcutta, Bose Insit. Phys. Sci, 1975—1976, 17–26.

[4] Ikeda S., On the theory of gravitational field in Finsler spaces, *Ann. d. Phys.*, 1987, V. 44, N 8, 558–562.

[5] Ikeda S., On the theory of the gravitational field nonlocalized by the internal variables, *Nuovo Cimento B*, 1987, V. 98, N 2, 158–164.

[6] Ikeda S., On the field equations in the theory of the gravitational fields in Finsler spaces, *Tensor N. S.*, 1987, V. 44, 157–163.

[7] Ikeda S., Theory of fields in Finsler spaces, *Seminarul de mecanica, Univ. din Timisoara, Romania*, 1988, N 8.

[8] Киржниц Д. А., Чечин В. А., Космические лучи и элементарная длина, *Письма в ЖЭТФ*, 1971, Т. 14, N 4, 261–262.

[9] Киржниц Д. А., Чечин В. А., Космические лучи сверхвысоких энергий и возможное обобщение релятивистской теории, *ЯФ*, 1972, Т. 15, N 5, 1051–1059.

[10] Greisen K., End to the cosmic-ray spectrum?, *Phys. Rev. Lett.*, 1966, V. 16, N 17, 748–750.

[11] Зацепин Г. Т., Кузьмин В. А., О верхней границе спектра космических лучей, *Письма в ЖЭТФ*, 1966, Т. 4, N 3, 114–117.

[12] Богословский Г. Ю., О специальной релятивистской теории анизотропного пространства-времени, *ДАН СССР*, 1973, Т. 213, N 5, 1055–1058.

[13] Bogoslovsky G. Yu., A special relativistic theory of the locally anisotropic space-time, *Nuovo Cimento B*, 1977, V. 40, N 1, 99–134.

[14] Богословский Г. Ю., Теория локально анизотропного пространства-времени, М.: Изд-во МГУ, 1992.

[15] Bogoslovsky G. Yu., From the Weyl theory to a theory of locally anisotropic space-time, *Class. Quantum Grav.*, 1992, V. 9, 569–575.

[16] Богословский Г. Ю. Финслерова модель пространства-времени, *ЭЧАЯ*, 1993, Т. 24, N 3, 813–877.

[17] Bogoslovsky G.Yu., A viable model of locally anisotropic space-time and the Finslerian generalization of the relativity theory, *Fortschr. Phys.*, 1994, V. 42, N 2, 143–193.

[18] Bogoslovsky G. Yu., Goenner H. F., On the generalization of the fundamental field equations for locally anisotropic space-time, in Proceedings of XXIV International Workshop "Fundamental Problems of High Energy Physics and Field Theory" (27–29 June, 2001, Protvino, Russia), Editor V. A. Petrov, Protvino, Insitute for High Energy Physics, 2001, 113–125.

[19] Bogoslovsky G. Yu., Goenner H. F., Concerning the generalized Lorentz symmetry and the generalization of the Dirac equation, *Phys. Lett. A*, 2004, V. 323, 40-47.

[20] Bogoslovsky G. Yu., Lorentz symmetry violation without violation of relativistic symmetry, hep-th/0511151.

[21] Bogoslovsky G. Yu., Subgroups of the group of generalized Lorentz transformations and their geometric invariants, *Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications (SIGMA)*, 2005, V. 1, PN 17, 1–9.

[22] Arbuzov B. A., Muon g-2 anomaly and extra interaction of composite Higgs in a dynamically broken electroweak theory, hep-ph/0110389.

[23] Арбузов Б. А., Спонтанное возникновение эффективного взаимодействия в ренормируемой модели квантовой теории поля, *ТМФ*, 2004, Т. 140, N 3, 367–387.

[24] Colladay D., Kostelecký A., CPT violation and the standard model, *Phys. Rev. D*, 1997, V. 55, N 11, 6760–6774.

[25] Colladay D., Kostelecký A., Lorentz-violating extension of the standard model, *Phys. Rev. D*, 1998, V. 58, 116002.

[26] CPT and Lorentz symmetry II, Editor A. Kostelecký, Singapore, World Scientific, 2002.

[27] CPT and Lorentz symmetry III, Editor A. Kostelecký, Singapore, World Scientific, 2005.

[28] Goenner H. F., Bogoslovsky G. Yu., A class of anisotropic (Finsler–) space-time geometries, *Gen. Relativ. Gravit.*, 1999, V. 31, N 9, 1383–1394.

[29] Kostelecký A., Gravity, Lorentz violation, and the standard model, *Phys. Rev. D*, 2004, V. 69, 105009.

[30] Tavakol R., van den Bergh N., Finsler spaces and the underlying geometry of space-time, *Phys. Lett. A*, 1985, V. 112, 23–25.

[31] Tavakol R., van den Bergh N., Viability criteria for the theories of gravity and Finsler spaces, *Gen. Relativ. Gravit.*, 1986, V. 18, 849–859.

[32] Roxburgh I. W., Tavakol R., van den Bergh N., The geometry of space-time and Berwald spaces,*Tensor*, 1992, V.51, 72–77.

[33] Bogoslovsky G. Yu., Goenner H. F., On the possibility of phase transitions in the geometric structure of space-time, *Phys. Lett. A*, 1998, V. 244, 222–228.

[34] Павлов Д. Г., Гарасько Г. И., Понятия расстояния и модуля скорости в линейных финслеровых пространствах, *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 2005, Т. 1, N 3, 3–15.

[35] Berwald L., Projective Krümmung allgemeiner affiner Räume und Finslersche Räume skalarer Krümmung, *Ann. Math. (2)*, 1947, V. 48, 755–781; und die Literaturhinweise darin.

[36] Moór A., Ergänzung, *Acta math.*, 1954, V. 91, 187–188.

[37] Weyl H., Gravitation und Elektrizität, *Sitzber. preuss Akad. Wiss., Physik–math. Kl.*, 1918, 465–480.

[38] Weyl H., Eine neue Erweiterung der Relativitätstheorie, *Ann. d. Phys.*, 1919, V. 59, N 10, 101–133.

[39] Bogoslovsky G. Yu., Goenner H. F., Finslerian spaces possessing local relativistic symmetry, *Gen. Relativ. Gravit.*, 1999, V. 31, N 10, 1565–1603.

Статья поступила в редакцию 18.08.2005 г.

The 4-momentum of a particle and the equation of the massive surface in the completely anisotropic Space-Time

G. Yu. Bogoslovsky

Research Institute of nuclei physics, MSU n. a. M. V. Lomonosov, Russia
bogoslov@theory.sinp.msu.ru

The present work is dedicated to the study of the model of the flat completely anisotropic Space-Time, whose metric is the generalization of the Berwald-Moor Finsler metric. The action on a massive particle in such an anisotropic space is defined emerging from the observation on the relativistic invariance and minimality on the straight line of Universe. Using the variational principle, we obtain formulas which connect the canonic 4-momentum of the particle with its 3-velocity It is shown that the corresponding massive surface is an invariant of the group of relativistic symmetry of the completely anisotropic space-time.

Key-words: Finsler space, Berwald-Moor metric, variational principle, mass surface, invariant, anisotropy.
MSC: 53B40, 74E10, 76M30, 14L24.

ОБОБЩЕНИЕ МЕТРИЧЕСКОГО ТЕНЗОРА ФИНСЛЕРОВА ПРОСТРАНСТВА

С. В. Лебедев

НИИ прикладной математики и механики МГТУ им. Н. Э. Баумана
serleb@rambler.ru

Для финслеровых пространств предлагается расширить определение метрического тензора: метрический тензор может иметь большее количество индексов, определяемое размерностью и свойствами пространства. Анализируется связь обобщенного таким образом метрического тензора с финслеровыми пространствами, связанными с коммутативно-ассоциативными алгебрами. Обсуждаются перспективы обобщения метрического тензора; выводится уравнение для геодезических с обобщенным метрическим тензором.

Ключевые слова: финслеровы пространства, обобщенный метрический тензор, уравнение геодезической.

Как для римановых пространств, так и для финслеровых (которые, как известно, являются обобщением римановых), понятие метрического тензора является центральным понятием, определяющим метрические свойства рассматриваемого пространства (многообразия). Метрический тензор – хорошо известное понятие, и без него невозможно представить тензорный анализ метрических пространств. Стало привычным рассматривать этот тензор как тензор второго ранга. Но нельзя ли расширить или обобщить это фундаментальное понятие на финслеровы пространства, не ограничиваясь a priori только тензорами второго ранга? Если бы такой подход на метрические многообразия оказался приемлемым с математической точки зрения, это позволило бы искать его применения и в современной релятивистской или квантовой физике. Если увеличить ранг метрического тензора, то увеличится и число его компонент, и, например, возможен поиск соответствия между этими компонентами и фундаментальными физическими взаимодействиями. В данной статье предпринимается первая попытка перевести рассмотрение обобщенных метрических тензоров из области спекуляций в научную плоскость.

Из истории развития финслеровой геометрии хорошо известно, что метрический тензор в финслеровых пространствах был введен Сингом, Тейлором и Бервальдом в 1925 году по аналогии с римановым пространством [1]. Хотя данная аналогия и позволила развить финслеров тензорный анализ, она не является полной. В римановой геометрии понятие метрического тензора фундаментально и неоспоримо; иная ситуация в финслеровой геометрии, поскольку двухранговый финслеров метрический тензор обладает некоторыми принципиальными отличиями от своего риманова предшественника. Нижеследующее рассмотрение этих отличий дает возможность усомниться в универсальной роли двухрангового финслерова метрического тензора и поэтому послужит некоторым обоснованием возможности его обобщений.

1. Отличия финслерова метрического тензора от риманова аналога

В римановых пространствах компоненты метрического тензора изначально появляются как коэффициенты квадратичного разложения квадрата расстояния между двумя близкими точками, т. е. квадрат расстояния есть:

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j \, . \tag{1}$$

Поэтому в фиксированной системе координат эти компоненты определяются однозначно и являются только функциями рассматриваемой точки риманового многообразия:

$$g_{ij} = g_{ij}(x).$$

В отличие от риманового многообразия, для которого выражение (1) является определяющим, финслерово многообразие определяется заданием в качестве аксиом ряда свойств финслеровой метрической функции, основным из которых является свойство однородности метрической функции. В силу однородности финслерова метрическая функция представляется в виде, аналогичном (1):

$$F^2 = g_{ij}(x,y)y^i y^j\,. \tag{2}$$

Сходство между (1) и (2) неполно, поскольку в (2) значения компонент метрического тензора зависят не только от рассматриваемой точки многообразия, но и от направления смещения из этой точки, характеризуемого вектором. Это обстоятельство кардинальным образом меняет дело: разложение вида (2) является принципиально неединственным, и из этого свойства неединственности следует, что это разложение не имеет универсального характера.

Во всех монографиях по финслеровой геометрии приводится классическая формула для компонент метрического тензора финслерова пространства [2–4]:

$$g_{ij} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F^2}{\partial y^j \partial y^i}\,. \tag{3}$$

Однако разложение квадрата метрической функции с помощью тензора из (3) не является единственным.

Для иллюстрации неединственности разложения (2) рассмотрим финслерово пространство, связанное с коммутативно-ассоциативной алгеброй H_3. Эта алгебра является прямым произведением трех алгебр действительных чисел: $H_3 = R \times R \times R$, а финслерова метрическая функция этого пространства есть [5]:

$$F^3 = y^1 y^2 y^3\,. \tag{4}$$

Нетрудно проверить, что квадрат данной метрической функции может быть разложен в виде (2) не только с помощью матрицы классического метрического тензора (5), но и с помощью другой матрицы (6):

$$F^2 = g_{ij}y^i y^j = \tilde{g}_{ij}y^i y^j\,,$$

$$g_{ij} = \begin{Vmatrix} -\frac{1}{9}\frac{(y^2y^3)^{2/3}}{(y^1)^{4/3}} & \frac{2}{9}\frac{(y^3)^{2/3}}{(y^1y^2)^{1/3}} & \frac{2}{9}\frac{(y^2)^{2/3}}{(y^1y^3)^{1/3}} \\ \frac{2}{9}\frac{(y^3)^{2/3}}{(y^1y^2)^{1/3}} & -\frac{1}{9}\frac{(y^1y^3)^{2/3}}{(y^2)^{4/3}} & \frac{2}{9}\frac{(y^1)^{2/3}}{(y^2y^3)^{1/3}} \\ \frac{2}{9}\frac{(y^2)^{2/3}}{(y^1y^3)^{1/3}} & \frac{2}{9}\frac{(y^1)^{2/3}}{(y^2y^3)^{1/3}} & -\frac{1}{9}\frac{(y^1y^2)^{2/3}}{(y^3)^{4/3}} \end{Vmatrix}, \tag{5}$$

$$\tilde{g}_{ij} = \begin{Vmatrix} 0 & \frac{3}{4}g_{12} & \frac{3}{4}g_{13} \\ \frac{3}{4}g_{12} & 0 & \frac{3}{4}g_{23} \\ \frac{3}{4}g_{13} & \frac{3}{4}g_{23} & 0 \end{Vmatrix}. \tag{6}$$

Во-вторых, в отличие от риманова пространства компоненты финслерова метрического тензора обладают тем свойством, что при приближении к точке основного многообразия ($y^i \to 0$) эти компоненты могут иметь особенность в этой точке при

$y = 0$. Убедиться в этом можно на примере компонент матрицы (5): если знаменатель компоненты при уменьшении компонент вектора стремится к нулю быстрее, чем числитель, то значение компоненты неограниченно возрастает.

Наличие таких особенностей может рассматриваться как еще один недостаток двухрангового тензора. Однако этого недостатка можно избежать, если использовать понятие обобщенного метрического тензора. Например, для исследования пространства, ассоциированного с алгеброй H_3, наиболее подходящим инструментом является обобщенный метрический тензор 3-го ранга, поскольку его компоненты оказываются константами и поэтому не имеют каких-либо особенностей.

2. Трехранговые обобщенные финслеровы метрические тензоры

При определении обобщенных тензоров будем основываться на ключевом для финслеровых пространств свойстве однородности метрической функции:

$$F(x, ky) = kF(x, y)\,.$$

В соответствии с теоремой Эйлера для однородных функций имеем следующие тождества:

$$F^2 = \underbrace{\frac{1}{2}\frac{\partial F^2}{\partial y^i}}_{y_i} y^i = \underbrace{\frac{1}{2}\frac{\partial^2 F^2}{\partial y^j \partial y^i}}_{g_{ij}} y^i y^j\,. \tag{7}$$

Это – обычный способ определения ковариантных компонент касательного вектора y_i и метрического тензора g_{ij}. Их связь с контравариантными компонентами y^i выражается формулой:

$$y_{ij} = g_{ij} y^i$$

Благодаря теореме Эйлера для однородных функций возможно по аналогии с (7) разложить в сумму произведений контравариантных компонент вектора не только вторую, но и большие степени финслеровой функции. Далее последовательно рассматривается разложение третьей и четвертой степени этой функции, в результате которого определяются обобщенные метрические тензоры.

Разложение третьей степени финслеровой функции дает следующую цепочку тождеств:

$$F^3 = \underbrace{\frac{1}{3}\frac{\partial F^3}{\partial y^i}}_{y_i^* = y_i F} y^i = \underbrace{\frac{1}{6}\frac{\partial^2 F^3}{\partial y^j \partial y^i}}_{y_{ij}^{(3)}} y^i y^j = \underbrace{\frac{1}{6}\frac{\partial^3 F^3}{\partial y^k \partial y^j \partial y^i}}_{G_{ijk}} y^i y^j y^k. \tag{8}$$

На первом этапе разложения (8) возникает ковариантный вектор с компонентами y_i^*, который, как нетрудно видеть, отличается лишь множителем F от ковариантного вектора y_i и поэтому не представляет интереса. На втором этапе этого разложения появляется дважды ковариантный метрический тензор $y_{ij}^{(3)}$; результат деления этого тензора на финслерову функцию F обозначим как $\tilde{y}_{ij}$:

$$\tilde{y}_{ij} = y_{ij}^{(3)} \Big/ F. \tag{9}$$

Тензор (9) – тот самый тензор, который участвует в альтернативном разложении квадрата расстояния финслеровой функции и поэтому может рассматриваться как частичный аналог классического метрического тензора g_{ij} (3). Связь этих двух тензоров выражается следующей формулой:

$$\tilde{y}_{ij} = \big(g_{ij} + y_i y_j / F^2\big)/2\,. \tag{10}$$

Заметим, что тензор (10) формой записи похож на угловой финслеров метрический тензор h_{ij} [4]:

$$h_{ij} = g_{ij} - y_i y_j / F^2.$$

Рассмотрим свойства тензора $\tilde{y}_{ij}$.

1. Как и метрический тензор g_{ij}, тензор $\tilde{y}_{ij}$ есть однородная функция степени 0, т. е.

$$(x, ky) = \tilde{y}^{ij}(x, y)\,.$$

2. Как и метрический тензор g_{ij}, тензор $\tilde{y}_{ij}$ может использоваться для подъема и опускания индексов у произвольных касательных векторов, т. е.

$$y^i = \tilde{y}^{ij} y_j, \quad y_i = \tilde{y}_{ij} y^j\,.$$

3. В отличие от метрического тензора g_{ij}, тензор $\tilde{y}_{ij}$ не позволяет поднимать и опускать индексы у тензоров второго и высшего рангов. Например, результат опускания индекса у произвольного тензора второго ранга T_{ij}, если этот индекс был поднят с помощью тензора g_{ij}, выглядит так:

$$(\tilde{y}_{ij} g^{jk}) T_{kl} = \frac{1}{2}\left[T_{il} + \frac{y_l}{F}\left(\frac{y^j}{F} \cdot T_{jl}\right)\right]\,.$$

4. Результат полной свертки тензора $\tilde{y}_{ij}$ с тензором g_{ij} есть 1:

$$\tilde{y}_{ij} g^{ij} = \tilde{y}^{ij} g_{ij} = 1\,.$$

5. Существуют производные от тензора $\tilde{y}_{ij}$ символы Кристоффеля вида

$$\tilde{\gamma}_{ijk} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial \tilde{y}_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial \tilde{y}_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial \tilde{y}_{ik}}{\partial x^j}\right],$$

и эти символы Кристоффеля подчиняются уравнению для финслеровых геодезических обычного вида:

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \tilde{\gamma}^i_{jk} \frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds} = 0, \qquad \tilde{\gamma}^i_{jk} = g^{il}\tilde{\gamma}_{ljk} = \tilde{y}^{il}\tilde{\gamma}_{ljk}\,. \tag{11}$$

Доказательство этого свойства аналогично доказательству утверждения (20) (см. ниже).

На последнем, третьем этапе разложения (8) определяем 3-ранговый метрический тензор G_{ijk}:

$$G_{ijk} = \frac{1}{6}\frac{\partial^3 F^3}{\partial y^k \partial y^j \partial y^i}\,. \tag{12}$$

Отметим, что обобщенные метрические тензоры (9) и (12) симметричны по всем своим индексам – это общее свойство всех метрических тензоров.

3. Четырехранговые обобщенные финслеровы метрические тензоры

Аналогичным (8) способом возможно разложение четвертой степени финслеровой функции, т. е. верны следующие тождества:

$$F^4 = \underbrace{\frac{1}{4}\frac{\partial F^4}{\partial y^i}}_{y^*_i = y_i F^2} y^i = \underbrace{\frac{1}{12}\frac{\partial^2 F^4}{\partial y^j \partial y^i}}_{y^{(4)}_{ij}} y^i y^j = \underbrace{\frac{1}{24}\frac{\partial^3 F^4}{\partial y^k \partial y^j \partial y^i}}_{y_{ijk}} y^i y^j y^k = \underbrace{\frac{1}{24}\frac{\partial^4 F^4}{\partial y^l \partial y^k \partial y^j \partial y^i}}_{G_{ijkl}} y^i y^j y^k y^l\,. \tag{13}$$

На первом этапе разложения (13) получается ковариантный вектор y^*, компоненты которого отличаются от ковариантных компонент y_i множителем F^2, на втором этапе – дважды ковариантный тензор $y_{ij}^{(4)}$, на третьем этапе – трижды ковариантный тензор y_{ijk} и на последнем, четвертом этапе – четырежды ковариантный тензор G_{ijkl}.

Рассмотрим свойства тензора G_{ijkl}.

Во-первых, при рассмотрении индикатрисы (обобщенной сферы единичного радиуса, центром которой является точка основного многообразия) с помощью тензора G_{ijkl} могут быть записаны следующие уравнения не только касательной к индикатрисе плоскости (14), но и касательных поверхностей второго и третьего порядков (15)–(16):

$$G_{ijkl}\left(x^m, y^m_{(0)}\right) \cdot y^i_{(0)} y^j_{(0)} y^k_{(0)} y^l = 1\,, \tag{14}$$

$$G_{ijkl}\left(x^m, y^m_{(0)}\right) \cdot y^i_{(0)} y^j_{(0)} y^k y^l = 1\,, \tag{15}$$

$$G_{ijkl}\left(x^m, y^m_{(0)}\right) \cdot y^i_{(0)} y^j y^k y^l = 1\,. \tag{16}$$

Тогда при помощи тензора G_{ijkl} известные классификации уравнений второго и третьего порядков делают возможным классификацию точек индикатрисы финслерового пространства.

Во-вторых, тензор G_{ijkl} допускает введение пятирангового геометрического объекта, компоненты которого могут быть названы обобщенными символами Кристоффеля 1 рода. Компоненты этого объекта определим так:

$$\gamma_{i_1 i_2 i_3 i_4 i_5} = \frac{1}{12}\left\{\frac{\partial G_{i_1 i_2 i_3 i_4}}{\partial x^{i_1}} - \frac{\partial G_{i_1 i_3 i_4 i_5}}{\partial x^{i_2}} + \frac{\partial G_{i_1 i_2 i_4 i_5}}{\partial x^{i_3}} - \frac{\partial G_{i_1 i_2 i_3 i_5}}{\partial x^{i_4}} + \frac{\partial G_{i_1 i_2 i_3 i_4}}{\partial x^{i_5}}\right\}. \tag{17}$$

Пятиранговые обобщенные символы Кристоффеля 1 рода обладают свойствами, аналогичными свойствам симметрии классических 3-ранговых символов Кристоффеля: а) свойство симметрии по 1, 3 и 5, а также по 2 и 4 индексам: а) свойство симметрии по 1, 3 и 5, а также по 2 и 4 индексам:

$$\gamma_{i_1 i_2 i_3 i_4 i_5} = \gamma_{i_5 i_2 i_3 i_4 i_1} = \gamma_{i_3 i_2 i_1 i_4 i_5} = \gamma_{i_1 i_4 i_3 i_2 i_5}\,; \tag{18}$$

б) свойство, связанное с перестановкой 1 и 2, 4 и 5 индексов:

$$\gamma_{i_1 i_2 i_3 i_4 i_5} + \gamma_{i_2 i_1 i_3 i_5 i_4} = \frac{1}{6}\partial G_{i_1 i_2 i_4 i_5}/\partial x^{i_3}\,;$$

в) свойство свертки при смещении $dx^i (x'^i = dx^i/ds)$ вдоль кривой с естественным параметром s:

$$\gamma_{i_1 i_2 i_3 i_4 i_5} x'^{i_1} x'^{i_2} x'^{i_4} x'^{i_5} = \frac{1}{12}\cdot\frac{\partial G_{i_1 i_2 i_4 i_5}}{\partial x^{i_3}} x'^{i_1} x'^{i_2} x'^{i_4} x'^{i_5}\,. \tag{19}$$

С помощью обобщенных символов Кристоффеля может быть сформулировано следующее утверждение.

Утверждение. *Справедлива следующая обобщенная форма уравнения для геодезических финслерова пространства:*

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + \gamma^i_{jklm}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds}\frac{dx^l}{ds}\frac{dx^m}{ds} = 0, \tag{20}$$

где

$$\gamma^i_{jklm} = \tilde{y}^{(4)in}\gamma_{jknlm}, \quad \tilde{y}^{(4)}_{in} = y_i y_n - y^{(4)}_{in}\,.$$

При доказательстве этого утверждения будем основываться на уравнении Эйлера-Лагранжа, в котором в качестве естественного параметра используется длина дуги s:

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial F}{\partial x'^i}\right)-\frac{\partial F}{\partial x^i}=0\,. \tag{21}$$

Преобразуем первое слагаемое в (21):

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{4F^3}\frac{\partial F^4}{\partial x'^i}\right)=\frac{1}{F^6}\left(\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{4}\frac{\partial F^4}{\partial x'^i}\right]F^3-\frac{3}{4}F^2\frac{\partial F}{\partial s}\cdot\frac{\partial F^4}{\partial x'^i}\right). \tag{22}$$

Теперь преобразуем входящие в (22) производные:

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{4}\frac{\partial F^4}{\partial x'^i}\right)=\frac{dy^*_i}{ds}=\frac{d}{ds}\left(y^{(4)}_{ij}x'^j\right)=\frac{dy^{(4)}_{ij}}{ds}x'^j+y^{(4)}_{ij}x''^j,$$

где $\frac{dy^{(4)}_{ij}}{ds}=\frac{\partial y^{(4)}_{ij}}{\partial x'^k}\cdot\frac{dx'^k}{ds}=2y_{ijk}ds\cdot x''^k$, в то время как $\frac{dF}{ds}=\frac{\partial F}{\partial x'^k}\cdot\frac{\partial x'^k}{\partial s}=\frac{\partial F}{\partial x'^k}x''^k$.

Подставляя в (22), получим следующее выражение:

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial F}{\partial x'^i}\right)=\frac{1}{F^6}\left\{F^3\left[2y_{ijk}ds\cdot x'^jx''^k+y^{(4)}_{ij}x''^j\right]-3F^5\frac{\partial F}{\partial x'^k}\frac{\partial F}{\partial x'^i}x''^k\right\}\,.$$

Заметим, что $F\left(x,x'\right)=1$ вследствие нашего выбора длины дуги в качестве параметра. Кроме того, из (13) следует, что $y_{ijk}x'^jds=y^{(4)}_{ik}$. В итоге первое слагаемое в уравнении Эйлера-Лагранжа приобретает следующий простой вид:

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial F}{\partial x'^i}\right)=3\left(y^{(4)}_{ij}-y_iy_j\right)\cdot x''^j.$$

Возможно преобразование и второго слагаемого уравнения Эйлера-Лагранжа:

$$\frac{\partial F}{\partial x^i}=\frac{1}{4F^{3/4}}\cdot\frac{\partial G_{jklm}}{\partial x^i}\cdot x'^jx'^kx'^lx'^l.$$

С учетом свойства в) обобщенных символов Кристоффеля (19) уравнение экстремалей приобретает вид:

$$\tilde{y}^{(4)}_{ij}x''^j+\gamma_{jkilm}x'^jx'^kx'^lx'^m=0,\qquad \text{где}\quad \tilde{y}^{(4)}_{ij}=y_iy_j-y^{(4)}_{ij}.$$

Введя матрицу $\tilde{y}^{(4)ij}$, обратную к матрице $\tilde{y}^{(4)}_{ij}$, и обозначая $\gamma^i_{jklm}=\tilde{y}^{(4)in}\gamma_{jknlm}$, получим требуемое уравнение (20).

4. Классификация обобщенных финслеровых метрических тензоров

В заключение с целью упорядочить имеющиеся представления об обобщенных финслеровых метрических тензорах проведем их классификацию.

Определение. *Будем говорить, что обобщенный метрический тензор принадлежит к классу (m,n), если его ранг равен m, а его компоненты есть коэффициенты в разложении n-ой степени финслеровой функции, т. е. верно равенство*

$$F^n=\sum_{i_1,..,i_m=1}^{n}G^{(n)}_{i_1\ldots i_m}\cdot y^{i_1}\cdot\ldots\cdot y^{i_m}. \tag{23}$$

В соответствие с этим определением компоненты метрического тензора класса (m, n) определяются формулой:

$$G^{(n)}_{i_1\ldots i_m}=\frac{m!}{n!}\frac{\partial^mF^n}{\partial y^{i_1}\ldots\partial y^{i_m}},\quad (n\geq m>2)\,. \tag{24}$$

Согласно предлагаемой классификации, фундаментальный метрический тензор принадлежит к классу (2,2).

Заключение

В данной работе определены обобщенные финслеровы метрические тензоры, проведена их классификация и исследованы некоторые их свойства. Кроме того, в результате обобщения символов Кристоффеля 1 рода предложена пятииндексная модификация этих символов, и с помощью этих обобщенных символов выведено обобщенное дифференциальное уравнение для финслеровых геодезических линий.

Благодарности

Необходимо отметить, что идея обобщения метрического тензора не раз высказывалась в ходе обсуждений к. т. н. Д. Г. Павловым, а данная статья есть некоторые шаги по реализации этой идеи. Автор также благодарен к. ф.-м. н., проф. Г. С. Асанову за ряд ценных замечаний при обсуждении работы.

Литература:

[1] Х. Рунд. Дифференциальная геометрия финслеровых пространств. М.: Наука. 1981.

[2] D. Bao, S.- S. Chern, Z. Shen. An introduction to Riemann-Finsler geometry. N.-Y.: Springer. 2000.

[3] M. Matsumoto. Foundations of Finsler geometry and special Finsler spaces. Japan: Kaiseisha Press. 1986.

[4] G. S. Asanov. Finsler geometry, relativity and gauge theories. Dordrecht: Reidel. 1985.

[5] Д. Г. Павлов. Хронометрия трехмерного времени. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. 2004. № 1. С. 17–30.

The generalization of the metric tensor in Finsler spaces

S. V. Lebedev

Baumann University's Institute of Applied Math@Mech
serleb@rambler.ru

For Finsler spaces, it is proposed to extend the definition of the metric tensor: the metric tensor may have a larger number of indices, determined by the dimension and the properties of the space. The connection between such a metric tensor and the Finsler space, related to commutative-associative algebras, is examined. The perspectives of the generalization of the metric tensor are discussed; the equations of geodesics associated to the generalized metric tensor are derived.

Key-words: generalized metric tensor, Finsler space, geodesic equations.
MSC: 53B40, 53C22, 15A69.

КАНОНИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ГАМИЛЬТОНА И МЕТРИКА БЕРВАЛЬДА-МООРА (О ФОРМАЛИЗМЕ ФИЗИЧЕСКИХ ТЕОРИЙ)

С. В. Сипаров

Государственный университет гражданской авиации, Санкт-Петербург, Россия
sergey@siparov.spb.su

Обсуждаются особенности применения финслеровой геометрии к построению теории пространства-времени. Подчеркивается роль алгебраического подхода, с помощью которого удается получить многие уравнения теоретической физики до введения геометрии. На основе формального использования функции, связанной с метрикой Бервальда-Моора выводятся канонические уравнения Гамильтона, которые можно использовать для дальнейшего построения физической теории в финслеровом пространстве.

Ключевые слова: финслеровы пространства, метрика Бервальда-Моора, уравнения Гамильтона.

1. Введение

Интерес к финслеровым пространствам может быть проявлен с трех направлений.

- Первое соответствует чисто математическому подходу, для которого характерно последовательное рассмотрение самосогласованных конструкций, возникающих на базе произвольно вводимых аксиом.
- Второе соответствует подходу теоретической физики. В его рамках требуется мотивации и имеется в виду сравнение новой теории с ранее известными, а также сопоставление используемых математических объектов и их свойств с результатами измерений, выполняемых в реальном мире.
- Третье направление характерно, скорее, для философии или, по крайней мере, для некоторой метатеории. Здесь обсуждается сама возможность использования данной математической конструкции для описания реального мира, а также смысл используемых понятий.

Второе и третье направления, естественно, перекликаются с возникновением, использованием и достижениями теории относительности Эйнштейна, построенной для изотропного пространства-времени Римана. Отличительной чертой финслеровой геометрии является зависимость метрического тензора не только от координаты, но и от направления некоторого вектора. Это означает, что во втором и третьем подходах речь может идти о возможных экспериментах, в которых проявляется анизотропия окружающего мира и ее следствия, а также о самой возможности такой анизотропии.

В монографии Р. И. Пименова [1] было проведено построение анизотропного финслерова обобщения теории относительности как структуры порядка. В [1] получены уравнения, аналогичные уравнению Эйнштейна в применении к финслеровым пространствам, причем рассмотрены примеры использования различных метрических функций. Работа [1] носит общематематический характер, а ее автор доказывает целый ряд утверждений, важных для всех трех направлений, упомянутых выше. Приведем некоторые из этих утверждений.

1. Финслерова геометрия доставляет модель пространства-времени, которая никакими наблюдениями за планетными орбитами не может быть отличима от Шварцшильдовского решения в пределах одинаковой точности наблюдений. В то же время ее особенностями является то, что она исключает возможность коллапса (образования черных дыр), а для Финслер-Фридмановского случая сценарий первых 6 секунд может быть совершенно иным, хотя красное смещение при этом остается.

2. В анизотропном мире энергия и импульс не обязательно сохраняются.

3. Анизотропия пространства-времени не изменяет структуру гамильтонова подхода при построении физической теории.

4. Для построения формальной базы теоретического рассмотрения финслерова многообразия существенно необходимо правило Лейбница (о дифференцировании произведения).

5. Если понимать одновременность в "радарном смысле" (как это делается в теории относительности Эйнштейна), то опыт типа опыта Майкельсона приведет к заключению об изотропности пространства, даже если оно таковым не является. Т. е. с помощью такого опыта обнаружить анизотропию невозможно. Поэтому принимать радарное определение как единственно верное нецелесообразно. Одновременно зависимость метрического тензора от направления приводит к неоднозначности в определении ортогональной (к мировой линии наблюдателя) гиперплоскости, что, в свою очередь, приводит к фундаментальной проблеме: считать ли "одновременность" понятием каузальной структуры, или считать ее понятием структуры лагранжиана.

6. В ходе построения финслеровой теории анизотропного пространства-времени выявляется неизбежность перехода от привычных гладких функций к функциям более широкого класса

Первые два вывода означают, что обнаружить анизотропию Вселенной как таковую наблюдательными средствами едва ли возможно. В то же время следствия такой анизотропии, проявляющиеся как нарушения законов сохранения, можно пытаться использовать как при интерпретации опытов с частицами (на такую возможность указывалось, в частности, в работе [2]), так и в космологических масштабах.

Выводы 3 и 4 означают, что при изучении финслеровых пространств применимы методы канонических уравнений и алгебр Ли.

Вывод 5 ставит серьезную проблему, решение которой, вероятно, выходит за рамки не только математики, но и физики.

Выводу, изложенному в пункте 6, посвящена отдельная работа [3], в которой автор указывает, что «детерминизм не был "обнаружен в природе", детерминизм не был "выведен логически" или "доказан математически". Мы всего лишь *верили в детерминизм*». В ней также подчеркивается следующее. Существенно недифференцируемые структуры важны в эмпирически-феноменологическом описании физической реальности – в науке о природе появились фрактальные объекты [4]. Общая теория относительности и базирующаяся на ней физическая космология совместимы только с очень хорошо дифференцируемыми структурами. Поэтому следует построить такой аналог общей теории относительности, который был бы свободен от гипотезы дифференцируемости используемых функций.

В связи с использованием конкретно метрики Бервальда-Моора

$$s(X) = \sqrt[4]{x^1 x^2 x^3 x^4} = (x^1 x^2 x^3 x^4)^{1/4} \tag{1}$$

можно упомянуть работу [5], в которой она была использована для описания гравитационного поля в финслеровом пространстве. Автор полагал, что им было использовано понятие объема, однако это скорее просто указывало на вид метрической функции, нежели на действительное использование понятия объема для метризации.

В работах [6–8], в которых авторы также стремились использовать метрику Бервальда-Моора, основой рассмотрения служит введенное в [6] понятие скалярного полипроизведения. Необходимо подчеркнуть, что, несмотря на вполне удовлетворительную аксиоматику, этот объект является новым и пока еще не использовался для непосредственной интерпретации физических экспериментов, поэтому следует внимательно подходить к его применению. Следует отметить также, что одновременность в этих работах понималась именно в радарном смысле, что тоже может создать проблемы при интерпретации.

2. Алгебраический подход Кауфмана

Обстоятельства, отмеченные в выводах 3, 4 и 6 работы [1], привлекают внимание к работе Л. Кауфмана [9]. Алгебры Ли объявляются в [9] возможной новой основой описания физической реальности, что подчеркивает роль формализма при построении физической теории, обсуждавшуюся в работе [10], где было уделено внимание в том числе и роли детерминизма в теории. В работе [9] строится алгебра Ли, в которой сначала вводится операция дискретного дифференцирования, что немедленно приводит к расширению класса используемых функций. Затем выполняется переход к коммутаторам и введение операторов сдвига – элементов алгебры, сопряженных к исходным элементам, что непосредственно связано со стремлением обеспечить выполнение правила Лейбница. На основе тождества Якоби выполняется построение формальных алгебраических структур, вид которых оказывается совпадающим с целым рядом уравнений теоретической физики, в том числе и с каноническими уравнениями Гамильтона. При этом фактически задействовано преобразование Лежандра, характерное для этого подхода.

Накладывая ограничения на коммутационные свойства переменных (и соответствующих им операторов сдвига) с целью получить «пространство с "разумной" кривизной», можно получить алгебраические структуры, в которых легко угадываются уравнения теоретической физики. В частности, если элементам алгебры $\{X_0, X_1, ...X_n\}$ соответствуют коммутационные операторы $\{H, P_1, ...P_n\}$, то, используя введенные определения, получают соотношения

$$\frac{dP_i}{dX_0} = -\frac{\partial H}{\partial X_i}; \qquad \frac{dX_i}{dX_0} = \frac{\partial H}{\partial P_i}; \qquad i = 1, 2, ...n \tag{2}$$

вид которых в точности соответствует каноническим уравнениям Гамильтона. Далее в тех же терминах может быть формально введен оператор кривизны, определяющий для двух данных элементов X и Y степень "некоммутативности" соответствующих им операторов ∇_X и ∇_Y по отношению к "некоммутативности" X и Y. Далее появляется коммутатор $g_{ij} = [X_i, \dot{X}_j]$, который может быть естественно соотнесен с метрическим тензором, и связность Леви-Чивиты $\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2}(\nabla_i g_{jk} + \nabla_j g_{ik} - \nabla_k g_{ij})$, которая возникает в [9] исключительно из исчисления коммутаторов и тождества Якоби и не имеет изначальной связи с геометрией. Схожим формальным образом получаются соотношения, совпадающие по виду с уравнениями диффузии, Шредингера, Максвелла, калибровочных теорий.

Таким образом, структура некоторых основополагающих уравнений теоретической физики, в частности, уравнений Гамильтона, не связана с предварительным выбором геометрии, используемой для моделирования пространства-времени. Это позволяет удобным образом формально использовать метрическую функцию при построении канонических уравнений.

3. Канонические переменные

Используем последнее обстоятельство для вовлечения в теорию метрики Бервальда-Моора. Рассмотрим векторное пространство с векторами $X = \{x^i\}$, $i = 1, 2, ...n$, и, выбирая координатную систему надлежащим образом и считая, что все $x^i > 0$, введем скалярную функцию вида

$$s^2(X) = \sqrt{x^1 x^2 x^3 x^4}. \tag{3}$$

Она, с одной стороны, очевидным образом связана с метрикой Бервальда-Моора (1), а с другой, – позволяет использовать преобразование Лежандра и определить вектор P, сопряженный вектору X, как градиент введенного скаляра

$$P \equiv \nabla \frac{1}{2} s^2(X) = s(X) \nabla s(X). \tag{4}$$

(Обычно в дальнейшем функцию $s^2(X)$ используют для построения метрического тензора Картана $h_{ik} = \frac{1}{2}\,\partial_i \partial_k s^2(X)$.)

Считая $X = \{x^i\}$ записью вектора X в контравариантных компонентах, получим выражение для ковариантных компонент вектора $P = \{p_i\}$ в n-мерном случае из аналога формулы (3) и формулы (4) в виде

$$p_i = \frac{s^2(X)}{nx^i} = \frac{(x^1 x^2 ... x^n)^{2/n}}{nx^i}\,. \tag{5}$$

Тогда в случае $n = 4$ эти компоненты имеют вид

$$p_1 = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{x^2 x^3 x^4}{x^1}}; \quad p_2 = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{x^1 x^3 x^4}{x^2}}; \quad p_3 = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{x^1 x^2 x^4}{x^3}}; \quad p_4 = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{x^1 x^2 x^3}{x^4}}\,. \tag{6}$$

Определим (псевдо)скалярное произведение (X, Y) следующим образом

$$(X, Y) = Y \frac{1}{2} \nabla s^2(X) = y^i x_i\,, \tag{7}$$

где по повторяющимся значкам ведется суммирование. Существенно, что скалярное произведение зависит от порядка сомножителей. С учетом (5, 7) скалярное произведение (X, Y) будет задаваться выражением

$$(X, Y) = y^i x_i = Y \frac{1}{2} \nabla s^2(X) = \frac{s^2(X)}{4} \sum_{k=1}^{4} \frac{y^k}{x^k}\,. \tag{8}$$

Нетрудно проверить, что

$$(X, X) = s^2(X)\,, \tag{9}$$

что соответствует обычному представлению о связи метрики и нормы, квадрат которой связан со скалярным произведением.

(При необходимости можно ввести и угол φ вектора Y относительно X. Это будет число, определяемое формулой $ch\,\varphi = \frac{(X,Y)}{s(X)s(Y)}$. Конечно, угол от X к Y не равен углу от Y к X, поскольку скалярное произведение некоммутативно. Сложение таких углов на 2-плоскости не аддитивно).

Если скалярное произведение $(X, Y) = 0$, то вектор Y можно назвать ортогональным к X (при этом, вообще говоря, X не ортогонален Y). Тогда гиперплоскость всех таких Y можно назвать гиперплоскостью, ортогональной прямой λX. В соответствии с (8) она задается выражением

$$\sum_{k=1}^{4} \frac{y^k}{x^k} = 0\,. \qquad (10)$$

Последнее соотношение может служить определением поверхности относительной одновременности для инерциального наблюдателя λX. Иными словами, это есть собственное пространство наблюдателя, в котором можно строить траектории движения точек. Его размерность на единицу меньше размерности исходного пространства.

Вводя понятие действия S, видим, что имеет место обычное соотношение для импульсов, т. е.

$$S = -\frac{1}{2}s^2(X) \;\Rightarrow\; p_i = \frac{\partial S}{\partial x^i}\,; \quad i = 2, 3, 4\,. \qquad (11)$$

Первую (в обычно используемых обозначениях – нулевую) компоненту из (6) можно считать "гамильтонианом", т. е. определим

$$p_1 \equiv H = -\frac{\partial S}{\partial x^1} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{x^2 x^3 x^4}{x^1}}\,. \qquad (12)$$

Тогда выполняется

$$\frac{\partial p_i}{\partial x^1} = -\frac{\partial H}{\partial x^i}\,; \quad i = 2, 3, 4\,, \qquad (13)$$

что совпадает с первым из уравнений (2).

Для того чтобы определить компоненты трехмерной скорости, выразим p_1 через p_i $(i = 2, 3, 4)$

$$p_1 = H = \frac{16 p_2 p_3 p_4}{(x^1)^2} \qquad (14)$$

Тогда для искомых компонент получим

$$\frac{dx^i}{dx^1} = \frac{\partial H}{\partial p_i}\,; \quad i = 2, 3, 4 \qquad (15)$$

– величины, равные отношениям v^i/c, если считать, что $x^1 = ct$. Выражение (16) совпадает со вторым уравнением (2).

Полученные канонические уравнения могут быть использованы для описания динамики в пространстве с метрикой Бервальда-Моора, если иметь в виду определения использованных "импульсов" и "гамильтониана" и внести в них физический смысл.

Для того чтобы сделать это, вспомним, что определение действия включает в себя константу:

$$S = -\alpha \int ds\,,$$

где в рассматриваемом случае ds является метрикой Бервальда-Моора (1).

В обычном случае псевдоевклидовой метрики СТО пространство-время было изотропным, а скорость света постоянной и не зависящей от направления. Константу было естественно определить из требования соответствия лагранжиана классическому выражению для лагранжиана свободной частицы $L = \frac{mv^2}{2}$ при $c \to \infty$, и поэтому константа оказывалась равной $\alpha = mc$. Но теперь так действовать нельзя. Пространство-время не является изотропным, поэтому лагранжиан свободной частицы не будет иметь указанного простого вида. Скорость света может зависеть от направления, поэтому предельный переход следует определить точнее. Эти обстоятельства будут подробнее рассмотрены в последующей работе.

Благодарности

Автор выражает свою признательность Д. Г. Павлову за стимулирующие обсуждения и поддержку.

Литература

[1] Пименов Р. И. Анизотропное финслерово обобщение теории относительности как структуры порядка. Сыктывкар, 1987.

[2] Богословский Г. Ю. О специальной релятивистской теории анизотропного пространства-времени. ДАН СССР, 213, с. 1055, 1973.

[3] Пименов Р. И. Дифференциальные уравнения – насколько они оправданы. $http://www.chronos.msu.ru/public/pimenov\_diffury.html$.

[4] Mandelbrot B. B. The Fractal Geometry of Nature. W.H.Freeman, New York, 1982.

[5] Асанов Г. С. Гравитационное поле в финслеровом пространстве, основанное на понятии объема. Вестник МГУ, 17, с. 288, 1976.

[6] Павлов Д. Г. Обобщение аксиом скалярного произведения. ГКЧГФ, 1, с. 5, 2004.

[7] Лебедев С. В. Свойства пространств, ассоциированных с коммутативно-ассоциативными алгебрами H_3 и H_4. ГКЧГФ, 1, с. 68, 2004.

[8] Гарасько Г. И., Павлов Д. Г. Понятия расстояния и модуля скорости в линейных финслеровых пространствах. ГКЧГФ, 3, с. 3, 2005.

[9] Kauffman L. The Non-Commutative Worlds. arXiv: quant-ph/0403012 v. 3.

[10] Siparov S. The Physical World as a Function of Observer's Consciousness. In SS&T, vol. 5, p. 193, 1997.

The Hamilton canonic equations and the Berwald-Moor metric

S. V. Siparov

State university of civil aviation, Saint-Petersburg, Russia
sergey@siparov.spb.su

The specific features of applying Finsler Geometry to the construction of Space-Time theories are analyzed. The role of algebraic approach is stressed - this allows to obtain many equations of theoretical physics, up to introducing geometry. Based of formal employment of functions, connected to the Berwald-Moor metric, there are obtained the canonic Hamilton equations, which can be further used to build physical theories in Finsler spaces.

Key-words: Finsler spaces, Berwald-Moor metric, Hamilton equations.
MSC: 53C40, 70S05.

ОБ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ УРАВНЕНИЯХ ДЛЯ ЭЛЕМЕНТОВ АССОЦИАТИВНО-КОММУТАТИВНЫХ КОНЕЧНОМЕРНЫХ АЛГЕБР И АССОЦИИРОВАННЫХ МЕТРИЧЕСКИХ ФОРМАХ

В. М. Чернов

Институт систем обработки изображений РАН

vche@smr.ru

В работе рассматриваются алгебраические уравнения, которым удовлетворяют элементы ассоциативно-коммутативных конечномерных алгебр. Исследована связь этих уравнений автоморфизмами алгебр. Вычислены однородные формы компонент элементов алгебр, являющиеся коэффициентами определяющих уравнений и которые могут быть ассоциированы, в частности, с известными метриками Минковского и Бервальда-Моора.

Ключевые слова: конечномерные алгебры, метрика Минковского, метрика Бервальда-Моора, финслеровы пространства.

1. Введение

1.1. Постановка задачи

Эффективность использования теории и аппарата конечномерных алгебр (см., например, [1], [2]) при решении задач геометрии, физики, информатики определяется, по мнению автора, следующим основным фактором.

Наиболее широкое распространение в приложениях получили *композиционные алгебры*, то есть алгебры с единицей, на векторных пространствах которых определены невырожденные квадратичные формы $N(x)$ (*нормы*) с условием $N(xy) = N(x)N(y)$. Рекурсивный метод их построения и классификация над различными полями связана с существованием в алгебрах, получаемых на каждом шаге рекурсии (анти)автоморфизма $x \mapsto \bar{x}$ второго порядка, продолжаемого рекурсивно для последующих шагов построения и порождающих указанные выше формы $N(x)$. За желание иметь алгебры, отличные от R и C, но с аналогами вещественной или комплексной нормы, приходится расплачиваться некоммутативностью и/или неассоциативностью таких алгебр. Кроме того, рекурсивный процесс Кэли-Диксона построения композиционных алгебр уже на третьем шаге приводит к неассоциативности и не может быть продолжен дальше [3]. Тем не менее, например, некоммутативная четырехмерная алгебра кватернионов успешно используется при решении задач механики, машинного зрения, в физике. Это связано как и с наличием нормы, так и, например, с элегантным представлением ортогональных преобразований трехмерного пространства не на "внешнем" матричном языке, а в терминах внутренних операций алгебры кватернионов, то есть "бескоординатно". Автор полностью согласен с мнением Э. Артина, что "...преподавание математики все еще страдает от энтузиазма, вызванного открытием этого изоморфизма (сопоставляющего линейному преобразованию векторного пространства некоторую матрицу – *В. Ч.*). Следствием было то, что геометрия фактически исключалась и заменялась вычислениями. Вместо наглядных отображений пространства, сохраняющих сложение векторов и умножение их на скаляры $<\ldots>$, в рассмотрение вводились матрицы. Мой опыт показывает, что доказательства, включающие в себя матрицы, могут быть сокращены на 50%, если выбросить матрицы"[1] [4]. Так, например, представление элемента четырехмерной алгебры, изоморфной алгебре (2×2)-матриц $M_2(R)$ в "клиффордовом" базисе с правилом умножения базисных элементов в форме

$$e_0^2 = e_0,\ e_1^2 = e_0,\ e_2^2 = e_0,\ e_3^2 = -e_0;$$
$$e_1 e_2 = -e_2 e_1,\ e_1 e_3 = -e_3 e_1,\ e_2 e_3 = -e_3 e_2;\ e_1 e_2 = e_3,$$

и инволютивным отображением (т. н. *симплектическая инволюция*)

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \bar{X} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix},$$

естественным вложением $R \to M_2(R)$ с $y \mapsto ye_0,\ y \in R$, позволяет записать определяющее квадратное уравнение для элемента X с коэффициентами, выраженными в бескоординатной форме в терминах нормы $N(X) = X \cdot \bar{X} = \det X$ и следа $Tr(X) = X + \bar{X} = a + d$:

$$X^2 - Tr(X)\, e_0 X + N(X)\, e_0 = 0, \tag{1.1}$$

то есть, фактически, в форме частного (двумерного) случая теоремы Гамильтона-Кэли. Отсюда при надлежащей интерпретации следует, что все результаты "линейной" *геометрии двумерной плоскости* могут быть получены как следствия *алгебраических свойств четырехмерной алгебры* $M_2(R)$. Наиболее наглядным примером такой интерпретации является "хестеновский" формализм для алгебр Клиффорда, в котором за счет переопределения операций строится изоморфная алгебра, элементы которой могут быть интерпретированы как скаляры, векторы, бивекторы и т. д. (т. н. *"геометрическая алгебра"*).

В такой алгебре указанные объекты ведут себя "равноправным" образом по отношению к введенным операциям, несмотря на то, что при канонических интерпретациях линейных геометрических объектов эти объекты принадлежат разным множествам с различными структурами [5]. Тем не менее, "клиффордов" подход к геометрии все же принципиальным образом связан с анализом симметрий, ассоциированных с автоморфизмами (или антиавтоморфизмами) *только второго порядка* (т. е., инволюциями).

В отличие от композиционных алгебр, ассоциативно-коммутативные конечномерные алгебры уже не являются все квадратичными алгебрами над полем R. Поэтому алгебраические уравнения для их элементов естественным образом ассоциированы с автоморфизмами более высоких порядков, что дает основание предполагать возможность анализа свойств геометрических интерпретаций этих алгебр, выражаемых в терминах группы "симметрий" более высокого порядка, чем второй.

Первым шагом к реализации отмеченного выше комплекса идей и пониманию роли автоморфизмов высокого порядка при создании геометро-физических моделей пространства-времени является, по мнению автора, определение инвариантных характеристик уравнений, которым удовлетворяют элементы ассоциативно-коммутативных алгебр. То есть, определение аналогов форм $N(X) = X \cdot \bar{X} = \det X$ и $Tr(X) = X + \bar{X} = a + d$ соотношения (1.1). Настоящая работа и представляет собой указанный первый шаг.

Как ни парадоксально, но идея использования дополнительных (или переопределенных) операций на той или иной конечномерной алгебре, ассоциированных с автоморфизмами порядка выше второго, с целью алгебраической поддержки решения

[1]Далее, правда, Э. Артин не без юмора замечает: "Иногда это невозможно; бывает, например, что нужно вычислить определитель".

геометрических задач имеет почтенную историю. Существует достаточно экзотическая и малоизвестная алгебраическая структура, известная как "конечные почти-поля Цассенхауза" [6]. Именно, в поле $F_q, q = p^m$, (p – простое) вводится операция $x * y = y \ (x, y \in F_q)$, выражающаяся через операцию умножения в поле F_q по закону $x * y \ = y \cdot \eta\,(x)$, где η – автоморфизм Фробениуса специального вида. Эта операция некоммутативна и неассоциативна (последнее -– в силу теоремы Веддербёрна). Тем не менее, некоторая $(*)$-степень $((((x * x) * x\ ) * ...) * x)$ элемента x есть элемент простого поля F_p и может рассматриваться как специфическая "норма" элемента алгебры F_q над полем F_p, порождаемая некоторым "полилинейным скалярным произведением". В соответствующей интерпретации, авторские результаты, цитированные в [6] и касающиеся конечных геометрий, могут быть переформулированы и передоказаны в терминах "полилинейного скалярного произведения". Естественно, что конечность полей F_q, следовательно, и почти-полей Цассенхауза, ограничивает круг задач, решаемых с применением такой техники, исключительно конфигурационными задачами конечной геометрии. Идея рассмотрения "полилинейных", в отличие от классических "билинейных", скалярных произведений в ассоциативно-коммутативных алгебрах с целью создания адекватных геометро-физических моделей принадлежит, по всей видимости, Д. Г. Павлову [7].

Отметим несколько результатов работы, которые, по мнению автора, не лишены некоторой методологической значимости.

1. Следствие 2.1. Инвариантность коэффициентов определяющего многочлена $\Phi\,(\xi; w)$ для w относительно действия 24-элементной группы автоморфизмов S_4. То есть, многочлен четвертой_степени $\Phi\,(\xi; w)$ наряду с корнем w имеет своими корнями все его автоморфные образы этого корня относительно автоморфизмов $\sigma \in S_4$.

2. Следствие 2.2. Четыре автоморфизма, использованные в доказательстве Теоремы 2.1 для построения определяющего многочлена, образуют подгруппу группы S_4, изоморфную циклической группе C_4 четвертого порядка. Однако, тот же самый многочлен порождают другие четыре автоморфизма образующие подгруппу четвертого порядка группы S_4, но изоморфную другой группе – прямому произведению $C_2 \times C_2$ двух циклических групп второго порядка.

3. Следствие 2.3. Более того, тот же самый определяющий многочлен могут порождать четыре автоморфизма, не образующие группу относительно операции композиции отображений. Это позволяет сделать осторожное предположение, что требование групповой структуры порождающих автоморфизмов не является обязательным.

О терминологии. Автор сознательно дистанцируется от возможности какой-либо геометрической или физической интерпретации полученных результатов, оставляя эту работу профильным специалистам. Именно поэтому в работе используется "нейтральная" по отношению к интерпретации терминология: "определяющее уравнение", "определяющие формы", хотя, например, в таких "определяющих" формах, полученных в результате анализа *алгебраических* структурных свойств соответствующих алгебр, легко узнаются *метрические* формы типа Минковского или Бервальда-Моора (см., например, равенства (2.6)).

Обозначения. Без специальных оговорок в работе используются обозначения R, C для обозначения полей вещественных и комплексных чисел, соответственно. Для обозначения прямой суммы алгебр используется символ $\dot{+}$, а символ $\oplus$ используется обозначения для поразрядного сложения $(mod\,2)$ битового представления целых чисел. Символом $H(k)$ обозначается прямая сумма k экземпляров поля R иногда с некоторыми контекстными оговорками

1.2. Теорема Вейерштрасса

Исчерпывающая классификация ассоциативно-коммутативных алгебр без нильпотентных элементов содержится в *теореме Вейерштрасса* [8]:

Теорема 1.1. Любая ассоциативно-коммутативная конечномерная алгебра без нильпотентных элементов над R изоморфна прямой сумме алгебр R и C.

Из этой теоремы легко следует, что существует не более трех неизоморфных четырехмерных алгебр этого класса, а именно:

$$R\dot{+}R\dot{+}R\dot{+}R \cong \left(R\dot{+}R\right) \dot{+} \left(R\dot{+}R\right) \cong H\left(2\right) \dot{+} H\left(2\right) \cong H\left(4\right), \tag{1.2}$$

$$R\dot{+}R\dot{+}C \cong H\left(2\right) \dot{+} C, \tag{1.3}$$

$$C\dot{+}C. \tag{1.4}$$

Докажем неизоморфность этих трех алгебр. Выберем в каждой из алгебр базис, согласованный с ее представлением в виде прямой суммы:

- для алгебры $R\dot{+}R\dot{+}R\dot{+}R$ – базис $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ с правилом умножения базисных элементов, задаваемым таблицей Кэли:

Таблица 1.1.

	E_1	E_2	E_3	E_4
E_1	E_1	0	0	0
E_2	0	E_2	0	0
E_3	0	0	E_3	0
E_4	0	0	0	E_4

- для алгебры $R\dot{+}R\dot{+}C$ – базис $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ с правилом умножения базисных элементов, задаваемым таблицей Кэли:

Таблица 1.2.

	E_1	E_2	E_3	E_4
E_1	E_1	0	0	0
E_2	0	E_2	0	0
E_3	0	0	E_3	E_4
E_4	0	0	E_4	$-E_3$

- для алгебры $C\dot{+}C$ – базис $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ с правилом умножения базисных элементов, задаваемым таблицей Кэли:

Таблица 1.3.

	E_1	E_2	E_3	E_4
E_1	E_1	E_2	0	0
E_2	E_2	$-E_1$	0	0
E_3	0	0	E_3	E_4
E_4	0	0	E_4	$-E_3$

С учетом приведенных таблиц Кэли легко заметить, что умножение "постоянного" элемента $(aE_1 + bE_2 + cE_3 + dE_4)$ на "переменный" элемент $(tE_1 + xE_2 + yE_3 + zE_4)$

равносильно действию линейных операторов на векторы компонент элементов $(tE_1 + xE_2 + yE_3 + zE_4)$, то есть вычислению матричных произведений

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & -d \\ 0 & 0 & d & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} a & -b & 0 & 0 \\ b & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & -d \\ 0 & 0 & d & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{1.5}$$

для алгебр $R\dot{+}R\dot{+}R\dot{+}R$, $R\dot{+}R\dot{+}C$ или $C\dot{+}C$, соответственно. Ни одна из (4×4)-матриц в (1.5) не может быть представлена как матрица, соответствующая умножению в другой алгебре с базисом, полученным линейным преобразованием. Действительно, характеристические уравнения для матриц (1.5), являясь инвариантами относительно линейных преобразований базисов, соответствуют различным случаям корней многочленов четвертой степени: четырем вещественным, двум вещественным и паре комплексно сопряженных и двум парам комплексно сопряженных корней, соответственно.

2. Алгебра $R\dot{+}R\dot{+}R\dot{+}R \cong H\,(4)$, ее автоморфизмы и метрические формы

2.1. Случай "изотропного" базиса

Рассмотрим алгебру $R\dot{+}R\dot{+}R\dot{+}R \cong H\,(2)\,\dot{+}H\,(2) \cong H\,(4)$ с введенным выше базисом $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ и с правилом умножения базисных элементов, задаваемым таблицей 1.1. (Такой базис мы далее будем называть *изотропным*).

Мультипликативно нейтральным элементом (единицей алгебры) в этом базисе является элемент $I = E_1 + E_2 + E_3 + E_4$, а поле R канонически вкладывается в алгебру $R\dot{+}R\dot{+}R\dot{+}R$:

$$R \to R\dot{+}R\dot{+}R\dot{+}R \cong H\,(4)\,, \quad x \mapsto xI, \quad x \in R.$$

Теорема 2.1. Алгебра $R\dot{+}R\dot{+}R\dot{+}R$ является алгеброй четвертой степени над R, то есть, любой элемент $w \in R\dot{+}R\dot{+}R\dot{+}R$ удовлетворяет алгебраическому уравнению степени не выше четвертой с вещественными коэффициентами.

Доказательство. Пусть $w = aE_1 + bE_2 + cE_3 + dE_4 \leftrightarrow (a, b, c, d)$. Рассмотрим четыре отображения алгебры $R\dot{+}R\dot{+}R\dot{+}R$ в себя, являющихся, очевидно, автоморфизмами:

$$\begin{aligned} \tau_0 &: \ w = aE_1 + bE_2 + cE_3 + dE_4 \mapsto \ aE_1 + bE_2 + cE_3 + dE_4, \\ \tau_1 &: \ w = aE_1 + bE_2 + cE_3 + dE_4 \mapsto \ bE_1 + cE_2 + dE_3 + aE_4, \\ \tau_2 &: \ w = aE_1 + bE_2 + cE_3 + dE_4 \mapsto \ cE_1 + dE_2 + aE_3 + bE_4, \\ \tau_3 &: \ w = aE_1 + bE_2 + cE_3 + dE_4 \mapsto \ dE_1 + aE_2 + bE_3 + cE_4. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Другими словами, отображения переставляют циклическим образом компоненты (a, b, c, d) элемента w алгебры. Нетрудно показать, что элемент w является корнем многочлена

$$\Phi\,(\xi; w) = (\xi - \tau_0\,(w))\,(\xi - \tau_1\,(w))\,(\xi - \tau_2\,(w))\,(\xi - \tau_3\,(w))\,, \tag{2.2}$$

а также то, что коэффициенты полинома $\Phi\,(\xi; w)$ вещественные. Действительно, непосредственным вычислением получаем:

$$\Phi\,(\xi; w) = \xi^4 - s_1\,(w)\,I\xi^3 + s_2\,(w)\,I\xi^2 - s_3\,(w)\,I\xi^1 + s_4\,(w)\,I, \tag{2.3}$$

где вещественные коэффициенты $s_\nu(w)$ являются однородными симметричными формами компонент (a,b,c,d) элемента w алгебры:

$$\begin{aligned} s_1(w) &= a+b+c+d, \\ s_2(w) &= ab+ac+ad+bc+bd+cd, \\ s_3(w) &= bcd+acd+abd+abc, \\ s_4(w) &= abcd. \qquad \square \end{aligned} \tag{2.4}$$

Определение 2.1. Многочлен $\Phi(\xi;w)$ минимальной степени с вещественными коэффициентами и с коэффициентом при старшей степени ξ, равным единице, такой что $\Phi(\xi;w)|_{\xi=w}=0$ будем называть *определяющим многочленом элемента* w, а его коэффициенты – *определяющими формами.*

Ясно, что один и тот же элемент w, представленный в разных базисах алгебры может иметь определяющие формы, различающиеся как функции этих компонент. В частности, формы (2.4) записаны как функции компонент элемента w, представленного в базисе $\{E_1,E_2,E_3,E_4\}$ с правилом умножения базисных элементов, задаваемым таблицей 1.1 и т. д.

Несмотря на тривиальность результата Теоремы 2.1, она имеет важные следствия, нехарактерные для "классической" теории многочленов над полем.

Следствие 2.1. Формы (2.4) инвариантны относительно любой перестановки $\sigma\in S_4$ четырех компонент (a,b,c,d) элемента w алгебры. Следовательно, так как $\sigma\in S_4$ является автоморфизмом алгебры $R\dot{+}R\dot{+}R\dot{+}R$ над R , то из равенства $\Phi(\xi;w)=0$ следует

$$\begin{aligned} &0=\sigma\left(\Phi(\xi;w)|_{\xi=w}\right)= \\ &=\sigma(w)^4-\sigma(s_1(w))\,I\sigma(w)^3+\sigma(s_2(w))\,I\sigma(w)^2-\sigma(s_3(w))\,I\sigma(w)^1+\sigma(s_4(w))\,I= \\ &=\sigma(w)^4-s_1(\sigma(w))\,I\sigma(w)^3+s_2(\sigma(w))\,I\sigma(w)^2-s_3(\sigma(w))\,I\sigma(w)^1+s_4(\sigma(w))\,I= \\ &=\Phi\left(\xi;\sigma(w)|_{\xi=\sigma(w)}\right)=0 \end{aligned}$$

То есть, многочлен *четвертой* степени $\Phi(\xi;w)$ наряду с корнем w имеет своими корнями еще, по крайней мере, 23 корня $\sigma(w)$, $\sigma\in S_4$, то есть, *все* его автоморфные образы относительно автоморфизмов $\sigma\in S_4$. Заметим, что применение автоморфизма σ к обеим частям равенства нулю определяющего многочлена $0=\sigma\big(\Phi(\xi;w)|_{\xi=w}\big)$ в форме (2.2) с целью получения соотношения $\Phi\big(\xi;\sigma(w)|_{\xi=\sigma(w)}\big)=0$ посредством цепочки равенств

$$\begin{aligned} &0=\sigma(\Phi(w;w))= \\ &=(\sigma(w)-(\sigma\circ\tau_0)(w))\,(\sigma(w)-(\sigma\circ\tau_1)(w))\,(\sigma(w)-(\sigma\circ\tau_2)(w))\,(\sigma(w)-(\sigma\circ\tau_3)(w))= \\ &=(\sigma(w)-\tau_0(\sigma(w)))\,(\sigma(w)-\tau_1(\sigma(w)))\,(\sigma(w)-\tau_2(\sigma(w)))\,(\sigma(w)-\tau_3(\sigma(w)))= \\ &=\Phi(\sigma(w);\sigma(w)) \end{aligned}$$

не является корректным в силу некоммутативности группы автоморфизмов S_4. Существенным является факт вещественности форм $s_1(w), s_2(w), s_3(w), s_4(w)$, обеспеченный специальным выбором автоморфизмов $\{\tau_0,\tau_1,\tau_2,\tau_3\}$.

Следствие 2.2. Четыре автоморфизма $\{\tau_0,\tau_1,\tau_2,\tau_3\}$, использованные в доказательстве Теоремы 2.1, образуют подгруппу группы S_4, изоморфную циклической группе C_4 четвертого порядка. Однако, как легко убедиться непосредственно, *тот же* *самый* многочлен (2.3) порождают *другие* четыре автоморфизма $\{\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$:

$$\begin{aligned}
\lambda_0 &: \ w = aE_1 + bE_2 + cE_3 + dE_4 \mapsto \ aE_1 + bE_2 + cE_3 + dE_4,\\
\lambda_1 &: \ w = aE_1 + bE_2 + cE_3 + dE_4 \mapsto \ cE_1 + dE_2 + aE_3 + bE_4,\\
\lambda_2 &: \ w = aE_1 + bE_2 + cE_3 + dE_4 \mapsto \ bE_1 + aE_2 + dE_3 + cE_4,\\
\lambda_3 &: \ w = aE_1 + bE_2 + cE_3 + dE_4 \mapsto \ dE_1 + cE_2 + bE_3 + aE_4,
\end{aligned}$$

образующие подгруппу четвертого порядка группы S_4, но изоморфную *другой группе* – прямому произведению $C_2 \times C_2$ двух циклических групп второго порядка.

Следствие 2.3. Более того, *тот же самый* многочлен (2.3) порождают другие четыре автоморфизма $\{\nu_0, \nu_1, \nu_2, \nu_3\}$:

$$\begin{aligned}
\nu_0 &: \ w = aE_1 + bE_2 + cE_3 + dE_4 \mapsto \ dE_1 + aE_2 + bE_3 + cE_4,\\
\nu_1 &: \ w = aE_1 + bE_2 + cE_3 + dE_4 \mapsto \ bE_1 + cE_2 + dE_3 + aE_4,\\
\nu_2 &: \ w = aE_1 + bE_2 + cE_3 + dE_4 \mapsto \ cE_1 + bE_2 + aE_3 + dE_4,\\
\nu_3 &: \ w = aE_1 + bE_2 + cE_3 + dE_4 \mapsto \ aE_1 + dE_2 + cE_3 + bE_4,
\end{aligned}$$

не образующие группу относительно операции композиции отображений.

2.2. Случай "гиперболического" базиса

Под *базисом из гиперболических единиц* (или, для краткости, под *гиперболическим базисом*) мы далее будем понимать базис $\{E, I, J, K\}$ алгебры $H\,(4) \cong R\dot{+}R\dot{+}R\dot{+}R$ с законом умножения базисных единиц, задаваемых следующей таблицей Кэли.

Таблица 2.1.

	E	I	J	K
E	E	I	J	K
I	I	E	K	J
J	J	K	E	I
K	K	J	I	E

Элемент $w \in H\,(4)$ представляется в форме $w = tE + xI + yJ + zK$ $(t, x, y, z \in R)$, E – мультипликативно нейтральный элемент (единица) алгебры. Связь между изотропным базисом $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ и гиперболическим базисом $\{E, I, J, K\}$ осуществляется посредством линейного преобразования с ортогональной матрицей Адамара

$$had_4 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1\\ 1 & -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 1\\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

где $\otimes$ – знак кронекеровского произведения. Получение точных формул, связывающих компоненты элемента $w \in H\,(4)$ при представлении в этих двух базисах, является хрестоматийным упражнением по линейной алгебре. Автор счел возможным опустить рутинные выкладки.

Совершенно очевидно, что каждому автоморфизму, определяемому действием элемента группы S_4, то есть, переставляющему компоненты элемента $w \in H\,(4)$, представленного в базисе $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$, соответствует линейное преобразование компонент

t, x, y, z элемента $w = tE + xI + yJ + zK$, и также реализующее некоторый автоморфизм алгебры $H(4)$. В частности, такими автоморфизмами являются:

$$\begin{aligned} \mu_0: &\quad w \mapsto \mu_0(w) = tE + xI + yJ + zK, \\ \mu_1: &\quad w \mapsto \mu_1(w) = tE + xI - yJ - zK, \\ \mu_2: &\quad w \mapsto \mu_2(w) = tE - xI + yJ - zK, \\ \mu_3: &\quad w \mapsto \mu_3(w) = tE - xI - yJ + zK. \end{aligned} \tag{2.5}$$

При представлении элемента $w \in H(4)$ в базисе $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ этой четверке преобразований соответствует действие на компоненты элемента некоторой подгруппы четвертого порядка (изоморфной прямому произведению $C_2 \times C_2$ двух циклических групп второго порядка) группы S_4.

Записывая в этом случае определяющий многочлен, непосредственным вычислением получаем:

$$\begin{aligned} &\Phi(\xi; w) = (\xi - \mu_0(w))(\xi - \mu_1(w))(\xi - \mu_2(w))(\xi - \mu_3(w)) = \\ &= (\xi^4 - S_1(w)\xi^3 + S_2(w)\xi^2 - S_3(w)\xi^1 + S_4(w))E, \end{aligned}$$

где

$$\begin{gathered} S_1(\omega) = 4t \\ S_2(\omega) = 6t^2 - 2x^2 - 2y^2 - 2z^2 \\ S_3(\omega) = -4tx^2 - 4y^2t - 4z^2t + 4t^3 + 8yzx = 4t(t^2 - x^2 - y^2 - z^2) + 8yzx \\ S_4(\omega) = x^4 + y^4 + z^4 - 2t^2x^2 - 2t^2y^2 - 2t^2z^2 + t^4 + 8txyz - 2x^2y^2 - 2x^2z^2 - 2y^2z^2 \end{gathered} \tag{2.6}$$

Замечание 2.1. Необходимо отметить, что факты, приведенные в Следствиях 2.1.−2.3. остаются, разумеется, справедливыми и в базисе $\{E, I, J, K\}$, но с соответствующей интерпретацией представлений автоморфизмов.

2.3. Случай "смешанного " базиса

Под *смешанным базисом* мы далее будем понимать базис $\{B, AB, D, CD\}$ алгебры $H(4) \cong R\dot{+}R\dot{+}R\dot{+}R$, согласованный с ее изоморфным представлением в форме прямой суммы $H(2)\dot{+}H(2) \cong H(4)$ двух двумерных алгебр двойных чисел с законом умножения базисных единиц, задаваемых следующей таблицей Кэли.

Таблица 2.2.

	B	AB	D	CD
B	B	AB	0	0
AB	AB	B	0	0
D	0	0	D	CD
CD	0	0	CD	D

При выборе такого базиса элемент $w \in H(2)\dot{+}H(2) \cong H(4)$ можно считать представленным в форме $w = (t + xA)B + (y + zC)D$, а мультипликативно нейтральным элементом алгебры $H(2)\dot{+}H(2)$ является $I = B + D$.

Выбирая четверку автоморфизмов

$$\begin{aligned}
\zeta_0 &: w \to \zeta_0(w) = (t + xA)\, B + (y + zC)\, D, \\
\zeta_1 &: w \to \zeta_1(w) = (y + zA)\, B + (t + xC)\, D, \\
\zeta_2 &: w \to \zeta_2(w) = (y - zC)\, B + (t - xC)\, D, \\
\zeta_3 &: w \to \zeta_3(w) = (t - xC)\, B + (y - zC)\, D,
\end{aligned} \tag{2.7}$$

получаем определяющий многочлен $\Phi(\xi; w)$ в форме

$$\Phi(\xi; w) = \xi^4 - \Sigma_1(w)\, I\xi^3 + \Sigma_2(w)\, I\xi^2 - \Sigma_3(w)\, I\xi^1 + \Sigma_4(w)\, I,$$

где

$$\begin{gathered}
\Sigma_1(w) = 2(t + y) \\
\Sigma_2(w) = 4ty + t^2 + y^2 - x^2 - z^2 = (t + 2y)^2 - 3y^2 - x^2 - z^2, \\
\Sigma_3(w) = 2ty^2 + 2t^2y - 2tz^2 - 2x^2y, \\
\Sigma_4(w) = t^2\, y^2 - t^2z^2 - x^2\, y^2 + x^2z^2.
\end{gathered} \tag{2.8}$$

Подробное рассмотрение в работе различных представлений определяющих многочленов и форм, ассоциированных с разными базисами, именно для алгебры $H(4)$ обуславливается разнообразием изоморфных представлений этой алгебры

$$R \dot{+} R \dot{+} R \dot{+} R \cong H(2) \dot{+} H(2) \cong H(4)$$

и наличием 24-элементной группы ее автоморфизмов над R, изоморфной S_4. Для алгебры $C \dot{+} C$ и, в особенности, алгебры $H_2 \dot{+} C$ эти группы автоморфизмов над R более бедные, что требует более существенных ограничений произвола выбора четверки автоморфизмов и базисов в этих алгебрах для получения определяющего многочлена с действительными коэффициентами.

3. Алгебра $C \dot{+} C$

Под *базисом из эллиптическо-гиперболических единиц* (или, для краткости, под *ЭГ-базисом*) мы далее будем понимать базис $\{E, I, J, K\}$ алгебры $C \dot{+} C$ с законом умножения базисных единиц, задаваемых следующей таблицей Кэли.

Таблица 3.1.

	E	I	J	K
E	E	I	J	K
I	I	$-E$	K	J
J	J	K	$-E$	I
K	K	J	I	E

Элемент $w \in C \dot{+} C$ представляется в форме $w = tE + xI + yJ + zK$ $(t, x, y, z \in R)$, E – мультипликативно нейтральный элемент (единица) алгебры.

Под *смешанным базисом* в алгебре $C \dot{+} C$ мы далее будем понимать базис $\{B, AB, D, CD\}$, согласованный с ее изоморфным представлением в форме прямой суммы двух двумерных алгебр комплексных чисел с законом умножения базисных единиц, задаваемых следующей таблицей Кэли.

Таблица 3.2.

	B	AB	D	CD
B	B	AB	0	0
AB	AB	$-B$	0	0
D	0	0	D	CD
CD	0	0	CD	$-D$

Элемент $w \in C\dot{+}C$ представляется в форме $w = (t + xA)\,B + (y + zC)\,D$, мультипликативно нейтральным элементом алгебры $C\dot{+}C$ является $I = B + D$.

Выбирая, в случае ЭГ-базиса четверку автоморфизмов в виде

$$\begin{aligned}
\mu_0 : &\quad w \mapsto \mu_0\,(w) = tE + xI + yJ + zK,\\
\mu_1 : &\quad w \mapsto \mu_1\,(w) = tE + xI - yJ - zK,\\
\mu_2 : &\quad w \mapsto \mu_2\,(w) = tE - xI + yJ - zK,\\
\mu_3 : &\quad w \mapsto \mu_3\,(w) = tE - xI - yJ + zK.
\end{aligned} \tag{3.1}$$

а в случае смешанного базиса в виде

$$\begin{aligned}
\zeta_0 : w \to \zeta_0\,(w) = (t + xA)\,B + (y + zC)\,D,\\
\zeta_1 : w \to \zeta_1\,(w) = (y + zA)\,B + (t + xC)\,D,\\
\zeta_2 : w \to \zeta_2\,(w) = (y - zC)\,B + (t - xC)\,D,\\
\zeta_3 : w \to \zeta_3\,(w) = (t - xC)\,B + (y - zC)\,D,
\end{aligned}$$

получаем определяющие формы

$$\begin{gathered}
S_1\,(\omega) = 4t,\\
S_2\,(\omega) = 6t^2 + 2x^2 - 2y^2 + 2z^2,\\
S_3\,(\omega) = +4tx^2 - 4y^2t + 4z^2t + 4t^3 + 8yzx = 4t(t^2 + x^2 - y^2 + z^2) + 8yzx,\\
S_4\,(\omega) = x^4 + y^4 + z^4 + 2t^2x^2 - 2t^2y^2 + 2t^2z^2 + t^4 - 8txyz + 2x^2y^2 - 2x^2z^2 + 2y^2z^2
\end{gathered} \tag{3.2}$$

и

$$\begin{gathered}
\Sigma_1\,(w) = 2\,(t + y)\,,\\
\Sigma_2\,(w) = 4ty + t^2 + y^2 + x^2 + z^2 = (t + 2y)^2 - 3y^2 + x^2 + z^2,\\
\Sigma_3\,(w) = 2ty^2 + 2t^2y + 2tz^2 + 2x^2y,\\
\Sigma_4\,(w) = t^2\,y^2 + t^2z^2 + x^2\,y^2 + x^2z^2,
\end{gathered} \tag{3.3}$$

соответственно. Заметим, что формы (3.3) получаются из форм (2.8), а формы (3.2) из форм (2.6) формальной заменой $x \mapsto ix,\ z \mapsto iz$.

4. Алгебра $H_2\dot{+}C$

Под *смешанным базисом* в алгебре $H_2\dot{+}C$ мы далее будем понимать базис $\{B, AB, D, CD\}$, согласованный с ее изоморфным представлением в форме прямой суммы двух двумерных алгебр (алгебры двойных и алгебры комплексных чисел) с законом умножения базисных единиц, задаваемых следующей таблицей Кэли.

Таблица 4.1.

	B	AB	D	CD
B	B	AB	0	0
AB	AB	B	0	0
D	0	0	D	CD
CD	0	0	CD	$-D$

Как и в предыдущих разделах, элемент $w \in H_2 \dot{+} C$ представляется в форме $w = (t + xA)\,B + (y + zC)\,D$, мультипликативно нейтральным элементом алгебры $H_2 \dot{+} C$ является $I = B + D$. Однако, в отличие от алгебр $C \dot{+} C$ и $H\,(2) \dot{+} H\,(2) \cong H\,(4)$, прямые слагаемые алгебры $H_2 \dot{+} C$ уже не обладают явно выраженной симметрией над полем R. Не останавливаясь на подробном обосновании правомочности "комплексной" замены переменной, заметим, что в этом случае характеристические формы получаются из форм (2.8) формальной заменой $x \mapsto ix$ и могут быть представлены в виде:

$$\begin{gathered} \Sigma_1\,(w) = 2\,(t + z)\,, \\ \Sigma_2\,(w) = 4ty + t^2 + y^2 + x^2 - z^2 = (t + 2y)^2 - 3y^2 - x^2 + z^2, \\ \Sigma_3\,(w) = 2ty^2 + 2t^2y + 2tz^2 - 2x^2y, \\ \Sigma_4\,(w) = t^2\,y^2 + t^2z^2 - x^2\,y^2 - x^2z^2 = (t^2\, - x^2)\,(\,y^2 + z^2)\,. \end{gathered} \tag{4.1}$$

5. Некоторые обобщения на случай алгебр высших размерностей

Рассмотренный в работе подход к метрическим структурам на конечномерных ассоциативно коммутативных алгебрах был бы недостаточно общим, если бы автор не попытался перенести его на алгебры размерностей выше четвертой.

Разумеется, теорема Вейерштрасса остается справедливой в любых размерностях, однако количество неизоморфных алгебр растет с увеличением размерности, что затрудняет подробный анализ всевозможных метрических структур, порожденных коэффициентами определяющих уравнений для элементов этих алгебр. Тем не менее, мы остановимся на относительно подробном анализе структуры группы автоморфизмов, порождающих определяющие многочлены, для одного класса алгебр, получаемых рекурсивным применением процедуры удвоения размерности Грассмана-Клиффорда [9]–[11].

5.1. Процедура удвоения размерности Грассмана-Клиффорда

Рассмотрим алгебру A_1 над полем R. Пусть:

$$z_1 = z_0 + z_0'\varepsilon_1 \in A_1, \tag{5.1}$$

где

$$\varepsilon_1^2 = \beta_1, \quad z_0, z_0', \beta_1 \in R.$$

Процедура удвоения Грассмана-Клиффорда состоит в последовательном выполнении следующих шагов.

Шаг 1. Умножение элементов $z_1 = a_0 + b_0\varepsilon_1$, $z_1' = a_0' + b_0'\varepsilon_1 \in A_1$ определим следующим образом:

$$z_1 z_1' = (a_0 a_0' + \beta_1 b_0 b_0') + (a_0' b_0 + a_0 b_0')\,\varepsilon_1. \tag{5.2}$$

В зависимости от значения параметра β_1 получаются двумерные алгебры комплексных, двойных или дуальных чисел.

Шаг 2. На втором шаге рассмотрим алгебру A_2:

$$z = z_1 + z_1' \varepsilon_2 \in A_2,$$

где

$$\varepsilon_2^2 = \beta_2, \quad \beta_2 \in R, \; z_1, z_1' \in A_1,$$

с законом умножения базисных элементов в форме:

$$\varepsilon_1 \varepsilon_2 = \alpha_{12} \varepsilon_2 \varepsilon_1, \quad \alpha_{12} \in R.$$

Произведение $\varepsilon_1 \varepsilon_2$ понимается как базисный элемент алгебры большей размерности.

Шаг 3. Продолжая индуктивно описанную процедуру, на n-м шаге получим алгебру A_n с элементами вида

$$z_n = z_{n-1} + z_{n-1}' \varepsilon_n \in A_n,$$

где z_{n-1} , z_{n-1}' – элементы алгебры, построенной на $(n-1)$-м шаге, а ε_n – новый образующий элемент. Очевидно, что типичный элемент z_n новой алгебры A_n имеет вид

$$z_n = \sum_{\substack{(\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \\ \alpha_j \in \{0,1\}}} C_{\alpha_1 \ldots \alpha_d} \varepsilon_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot \varepsilon_d^{\alpha_d}, \tag{5.3}$$

где $C_{\alpha_1 \ldots \alpha_d} \in R$.

Приведенный процесс построения охватывает значительное число алгебр, используемых в прикладных задачах и в физике для построения математических моделей. Отметим некоторые из них в качестве примеров [9]:

- алгебра Клиффорда размерности 2^n при $\varepsilon_s^2 = \pm 1, \quad \varepsilon_s \varepsilon_l = -\varepsilon_l \varepsilon_s, \; 1 \leq s, l \leq n$;
- алгебра Грассмана размерности 2^n при $\varepsilon_s^2 = 0, \quad \varepsilon_s \varepsilon_l = -\varepsilon_l \varepsilon_s, \; 1 \leq s, l \leq n$;
- алгебра Паули $n = 3$ при $\beta_s = 1$, $\alpha_{ls} = -1$;
- алгебра Дирака $n = 4$ при $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = -1$, $\alpha_{ls} = -1$;
- алгебра Калуцы $n = 4$ при $\beta_1 = \beta_2 = 1$, $\beta_3 = \beta_4 = -1$, $\alpha_{ls} = -1$.

5.2. Классификация алгебр размерности 2^d, полученных методом Грассмана-Клиффорда

Рассмотренные выше алгебры $R \dot{+} R \dot{+} R \dot{+} R \cong H_R(4)$ и $C \dot{+} C \cong H_C(2)$ получались на втором шаге процедуры удвоения Грассмана-Клиффорда. Заметим, что алгебра $R \dot{+} R \dot{+} C \cong H_R(2) \dot{+} C$ не получается с помощью этой процедуры. Оказывается, такое положение дел имеет место для любой размерности 2^d алгебр, полученных методом Грассмана-Клиффорда: существует ровно две "грассмано-клиффордовых" R-алгебры, хотя согласно теореме Вейерштрасса коммутативно-ассоциативных алгебр данной размерности существенно больше. Докажем классификационную теорему для "грассмано-клиффордовых" R-алгебр.

Пусть V есть d-мерное пространство над R с базисом ε_1, ε_2, $\ldots \varepsilon_d$.

Определение 5.1. Коммутативно-ассоциативной гиперкомплексной алгеброй B_d будем называть 2^d-мерную R-алгебру с базисом:

$$\Lambda = \left\{ \prod_{i\in I} \varepsilon_i^{\alpha_i}, \quad \alpha_i \in \{0,1\}\ ;\ I = \{1,\dots,d\} \right\}, \tag{5.4}$$

где $\varepsilon_i^0 = 1$, $\varepsilon_i^1 = \varepsilon_i$, и законом умножения базисных элементов алгебры, индуцированным следующим правилом преобразования произведений базисных элементов пространства V:

$$\varepsilon_i\varepsilon_j = \varepsilon_j\varepsilon_i, \quad \varepsilon_i^2 = \beta_i,\ i,j \in I. \tag{5.5}$$

Алгебры B_d могут быть получены применением процедуры удвоения Грассмана-Клиффорда. Действительно, связывая с двоичными наборами индексов $(\alpha_1,\dots,\alpha_d)$ соответствующие целые числа

$$t = \alpha_1 + \alpha_2 2 + \ldots + \alpha_d 2^{d-1}, \quad \alpha_j \in \{0,1\}, \tag{5.6}$$

где $t \in T = \left\{0,\, 1,\dots,2^d - 1\right\}$, можем занумеровать элементы множества Λ:

$$E_t = \varepsilon_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot \varepsilon_d^{\alpha_d}. \tag{5.7}$$

Тогда произвольный элемент $g \in B_d$ может быть представлен в форме

$$g = \xi_0 E_0 + \ldots + \xi_{2^d-1} E_{2^d-1} = \sum_{t\in T} \xi_t E_t. \tag{5.8}$$

Операция сложения в алгебре B_d реализуется покомпонентно. Пусть

$$g = \sum_{t\in T} \xi_t E_t, \quad h = \sum_{t\in T} \eta_t E_t, \quad g,h \in B_d, \tag{5.9}$$

тогда

$$(g+h) = \sum_{t\in T} (\xi_t + \eta_t)\, E_t. \tag{5.10}$$

Операция умножения элементов B_d, представленных в виде (5.8), определяется правилами (5.5) для умножения базисных элементов пространства V, как элементов алгебры.

Следующая лемма позволяет указать явную связь между нумерацией (5.6) сомножителей и нумерацией произведений (5.4).

Лемма 5.1. Пусть $\oplus$ – поразрядное сложение по модулю 2:

$$\oplus : T \times T \to T, \quad t \oplus \tau = \sum_{i\in I} \left(\left(\alpha_i + \alpha_i' \right) mod\, 2 \right) 2^{i-1}, \tag{5.11}$$

где

$$t = (\alpha_1,\dots,\alpha_d), \quad \tau = (\alpha_1',\dots,\alpha_d'); \quad t,\tau \in T; \quad \alpha_i, \alpha_i' = 0,1; \quad i \in I. \tag{5.12}$$

Пусть функция $h_i : T \times T \to \{0,1\}$ определена равенством

$$h_i(t,\tau) = \alpha_i \alpha_i', \quad i \in I, \tag{5.13}$$

а функция $\Psi : T \times T \to \{-1,1\}$ равенством

$$\Psi(t,\tau) = \prod_{i\in I} \beta_i^{h_i(t,\tau)}, \quad \beta_i = \{-1,1\}. \tag{5.14}$$

Тогда правила умножения базисных элементов Λ можно записать в форме:

$$E_t E_\tau = \Psi\left(t,\tau\right) E_{t\oplus\tau}, \quad \forall\, t,\tau \in T. \tag{5.15}$$

Доказательство. Пусть, согласно (5.7)

$$E_t = \prod_{i\in I} \varepsilon_i^{\alpha_i}, \quad E_\tau = \prod_{i\in I} \varepsilon_i^{\alpha'_i},$$

тогда

$$E_t \cdot E_\tau = \prod_{i\in I} \varepsilon_i^{\alpha_i+\alpha'_i \pm 2h_i\left(\alpha_i,\alpha'_i\right)}.$$

Учитывая, что $\alpha_i + a'_i - 2h_i\left(\alpha_i,\alpha'\right)_i \equiv \alpha_i + a'_i\ (mod\,2)$, получаем

$$\prod_{i\in I} \varepsilon_i^{2\cdot h_i\left(\alpha_i,\alpha'_i\right)} E_{t\oplus\tau} = \Psi\left(t,\tau\right) E_{t\oplus\tau}. \qquad \square$$

Из Определения 5.1. непосредственно не следует единственность алгебры B_d с базисом Λ и умножением, определенным соотношением (5.5). Классификация алгебр, введенных этим определением, приводится в Теореме 5.1. Доказательству теоремы предпошлем лемму.

Лемма 5.2. Если для некоторого индекса $l \in I$ в (5.5) справедливо равенство $\beta_l = -1$, то

$$\sum_{t\in T} E_t^2 = 0. \tag{5.16}$$

Доказательство. Разобьем сумму в левой части доказываемого равенства (5.16) на две суммы таким образом, что в одну сумму будут входить базисные элементы, содержащие ε_l^2, а в другую – не содержащие ε_l^2. Тогда получим:

$$\sum_{t\in T} E_t^2 = \sum_{\substack{t\,\in\,T\\ h_l\left(t,t\right)\neq 0}} E_t^2 + \sum_{\substack{t\,\in\,T\\ h_l\left(t,t\right)=0}} E_t^2.$$

Количество слагаемых в обеих суммах одинаково:

$$\sum_{\substack{t\,\in\,T\\ h_l\left(t,t\right)\neq 0}} 1 = \sum_{\substack{t\,\in\,T\\ h_l\left(t,t\right)=0}} 1 = 2^{d-1}$$

Поэтому, так как $\beta_l = -1$, получаем

$$\left(1+\beta_l\right) \sum_{\substack{t\,\in\,T\\ h_l\left(t,t\right)\neq 0}} E_t^2 = 0. \qquad \square$$

Следствие 5.1. Если существует $t \in T$ такое, что $E_t^2 = -1$, тогда среди базисных элементов алгебры B_d содержится ровно 2^{d-1} элементов, квадрат которых равен (-1). Ясно, что если $\beta_i = 1$, для всех $i \in I$, то для всех квадратов базисных элементов алгебры B_d также справедливо равенство $E_t^2 = +1$. Для единообразия обозначений в этом разделе алгебру B_d, в которой $\beta_i = 1$ для каждого $i \in I$, будем обозначать B_d^+. Нетрудно показать, что

$$B_d^+ \cong \underbrace{R\dot{+}R\dot{+}\ldots\dot{+}R}_{2^d} \cong H_R\left(2^d\right)$$

Основным результатом раздела является теорема, утверждающая, что структура коммутативно-ассоциативной алгебры с базисом (5.4) (то есть, алгебры, построенной методом Грассмана-Клиффорда) зависит от существования *хотя бы одного* базисного элемента $\varepsilon_j \in V$ "порождающего" векторного пространства V, квадрат которого равен (-1).

Теорема 5.1. Для любого $d \geq 1$ существует только две неизоморфных 2^d-мерных алгебры с операциями, определенными соотношениями (5.10), (5.15), а именно:

$$B_d^+ \cong \underbrace{R\dot{+}R\dot{+}\ldots\dot{+}R}_{2^d} \cong H_R\left(2^d\right) \cong \underbrace{H_R\left(2\right)\dot{+}H_R\left(2\right)\dot{+}\ldots\dot{+}H_R\left(2\right)}_{2^{d-1}}, \tag{5.17}$$

$$B_d^- \cong \underbrace{C\dot{+}C\dot{+}\ldots\dot{+}C}_{2^{d-1}} \cong H_C\left(2^{d-1}\right). \tag{5.18}$$

Доказательство. Согласно следствию 5.1, если $\beta_i = 1$, для всех $i \in I$ то соответствующая алгебра есть

$$B_d^+ \cong \underbrace{R\dot{+}R\dot{+}\ldots\dot{+}R}_{2^d} \cong H_R\left(2^d\right).$$

Поэтому предположим, что существует, по крайней мере, один базисный элемент ε_l пространства V, для которого $\varepsilon_l^2 = -1$, $l \in I$. Без ограничения общности будем считать $l = 1$. В базисе Λ этому элементу соответствует элемент E_1. Выберем E_t такой, что $E_t^2 = 1$. Такой элемент существует, так как, либо существует $\beta_k = 1$, либо можно взять комбинацию $\varepsilon_1\varepsilon_k = E_{1\oplus k}$, где $\beta_k = -1$, $k \neq 1$. Тогда любой элемент $h \in B_d^-$ можно представить в виде

$$h = \sum_{i\in T}\eta_i E_i = \sum_{\substack{i\in T\\ h_k(i,i)=0}} \eta_i E_i + \sum_{\substack{i\in T\\ h_i(i,i)=1}} \eta_i E_i.$$

Из леммы 5.1 следует, что

$$E_i = \frac{1}{\Psi\left(t,t\right)} E_i E_t E_t$$

или, в данном случае, $E_i = E_i E_t E_t$. Отсюда легко получаем равенство

$$h = \sum_{\substack{i\in T\\ h_k(i,i)=0}} \eta_i E_i + \Bigg(\sum_{\substack{i\in T\\ h_k(i,i)=1}} \eta_i E_i E_t\Bigg) E_t.$$

Заметим, что все возможные произведения $E_i E_t$ не содержат образующего элемента ε_k, поэтому $h = a + bE_t$, где a, $b \in B_{d-1}$.

Непосредственно проверяется, что отображение $\Theta:\ B_d \to B_{d-1}\dot{+}B_{d-1}$, задаваемое соотношением $h = \alpha + \gamma E_t \mapsto \left(\alpha+\gamma, \alpha + \Psi\left(k,k\right)\gamma\right) \in B_{d-1}\dot{+}B_{d-1}$, является изоморфизмом. Применяя последовательно Θ к B_{d-1}^-, по индукции получаем

$$B_d \cong \Big(\underbrace{R\dot{+}R\dot{+}\ldots\dot{+}R}_{2^{(d-1)}}\Big) + \varepsilon_1 \cdot \Big(\underbrace{R\dot{+}R\dot{+}\ldots\dot{+}R}_{2^{(d-1)}}\Big). \quad (5.19)$$

Так как $\varepsilon_1^2 = -1$, то

$$B_d \cong \underbrace{C\dot{+}C\dot{+}\ldots\dot{+}C}_{2^{d-1}} = B_d^-.$$

Таким образом, доказано, что любая алгебра, в которой существует базисный элемент векторного пространства V, квадрат которого равен -1, изоморфна алгебре B_d^-. □

Учитывая доказанную выше классификационную теорему, далее везде под алгеброй B_d^- будем понимать алгебру со следующим правилом умножения базисных элементов пространства V:

$$\varepsilon_i\varepsilon_j = \varepsilon_j\varepsilon_i, \quad \varepsilon_i^2 = -1,\, i \in I, \quad (5.20)$$

а под алгеброй B_d^+ будем понимать алгебру со следующим правилом умножения базисных элементов пространства V:

$$\varepsilon_i\varepsilon_j = \varepsilon_j\varepsilon_i,\ \ \varepsilon_i^2 = +1,\, i \in I, \quad (5.21)$$

Легко проверить, что для произвольного номера $l,\ l \in T$ верны равенства

$$0 = 0 \oplus 0 = l \oplus l,\ \ l = l \oplus 0 = 0 \oplus l. \quad (5.22)$$

Для функции Ψ и произвольного номера $l \in T$ справедливы равенства

$$\Psi\left(0,0\right) = \Psi\left(0,l\right) = \Psi\left(l,0\right) = \tfrac{1}{\beta_l}\Psi\left(l,l\right) \quad (5.23)$$

и, согласно (5.20), равенства

$$\Psi\left(0,0\oplus 0\right) = \tfrac{1}{\beta_l}\Psi\left(l,l\oplus 0\right) = \Psi\left(0,l\oplus 0\right) = \Psi\left(l,0\oplus 0\right). \quad (5.24)$$

5.3. Автоморфизмы алгебр размерности 2^d, полученных методом Грассмана-Клиффорда

Нижеследующая теорема обобщает утверждение, касающееся автоморфности отображений (2.5) и (3.1) на случай произвольной размерности 2^d.

Теорема 5.2. Пусть $\psi:\ T \times T \to \{-1, 1\}$:

$$\psi\left(j,t\right) = \prod_{i\in I}\left(-1\right)^{h_i(j,t)}. \quad (5.25)$$

Тогда множество из 2^d отображений $\sigma_j:\, B_d \to B_d$, таких, что

$$\sigma_j\left(\chi\right) = \sum_{i\in T} c_i\psi\left(j,i\right)E_i, \quad (5.26)$$

где $\chi = (c_0,\ldots,c_{2^d-1}) \in B_d$, $c_i \in R$, $j \in T$, является множеством автоморфизмов алгебры B_d, независимо от того, какая именно алгебра рассматривается: алгебра B_d^+ или алгебра B_d^-.

Доказательство. Проверим, что отображения системы (5.25) биективны и сохраняют операции сложения и умножения. Действительно, базисные элементы Λ не являются делителями нуля и отображения σ_j линейны. Таким образом, отображения

σ_j являются биекциями. Покажем, что отображения σ_j сохраняют операции сложения и умножения. Пусть элементы $g, h \in B_d$ представлены в форме (5.8), тогда должны выполняться равенства:

$$\sigma_j\left(g+h\right) = \sigma_j\left(g\right) + \sigma_j\left(h\right), \tag{5.27}$$

$$\sigma_j\left(gh\right) = \sigma_j\left(g\right) \cdot \sigma_j\left(h\right). \tag{5.28}$$

Справедливость (5.27) легко следует из равенств:

$$\sigma_j\left(g+h\right) = \sum_{i\in T}\left(\xi_i+\eta_i\right)\psi\left(j,i\right)E_i = \sum_{i\in T}\xi_i\psi\left(j,i\right)E_i + \sum_{i\in T}\eta_i\psi\left(j,i\right)E_i = \sigma_j\left(g\right)+\sigma_j\left(h\right).$$

Докажем (5.28). Справедливо равенство

$$\begin{aligned}\sigma_j\left(gh\right) &= \sum_{i\in T}\sum_{t\in T}\Psi\left(t,t\oplus i\right)\xi_{i\oplus t}\eta_t\psi\left(j,i\right)E_i = \\ &= \sum_{t\in T}\eta_t\sum_{i\in T}\Psi\left(t,t\oplus i\right)\xi_{i\oplus t}\psi\left(j,i\right)E_i.\end{aligned} \tag{5.29}$$

Далее, используя (5.15), (5.22) и учитывая, что $i = t\oplus i\oplus t$, преобразуем (5.29) к виду:

$$\sigma_j\left(gh\right) = \sum_{t\in T}\eta_t\psi\left(j,t\right)\Psi\left(t,t\right)E_t\sum_{i\in T}\xi_{i\oplus t}\psi\left(j,i\oplus t\right)\Psi\left(t,t\oplus i\right)E_{i\oplus t}. \tag{5.30}$$

Так как индекс i принимает все значения множества T, то и индекс $i\oplus t$ принимает все значения множества T. Поэтому, полагая в (5.29) $\tau = t\oplus i$, получаем:

$$\sigma_j\left(gh\right) = \sum_{t\in T}\eta_t\psi\left(j,t\right)E_t\sum_{\tau\in T}\xi_\tau\psi\left(j,\tau\right)E_\tau = \sigma_j\left(g\right)\cdot\sigma_j\left(h\right).$$

Предположим, что существуют отображения $\sigma_j\left(\chi\right) = \sigma_p\left(\chi\right)$, где $j \neq p$. Тогда последовательно получаем цепочку равенств:

$$\sigma_j\left(\chi\right) = \sigma_p\left(\chi\right),$$

$$\prod_{i\in T}\left(-1\right)^{h_i(j,l)} = \prod_{i\in T}\left(-1\right)^{h_i(p,l)}, \quad l = \overline{0, 2^d-1},$$

$$\sum_{i\in T}h_i\left(j,l\right) = \sum_{i\in T}h_i\left(p,l\right), \quad l = \overline{0, 2^d-1},$$

откуда следует равенство $j = p$, что является противоречием. Тогда, если $j \neq p$, то и $\sigma_j\left(\chi\right) \neq \sigma_p\left(\chi\right)$. Поэтому все автоморфизмы σ_j, индексированные числами множества T с $card\, T = 2^d$ различны. □

Рассмотрим множество из 2^d отображений $\sigma_j : B_d \to B_d$, определенных в теореме 5.2.

Следующее утверждение гарантирует вещественность коэффициентов определяющего уравнения элемента алгебры B_d в случае использования для получения этого уравнения автоморфизмов, рассмотренных в Теореме 5.2. Мы опускаем достаточно громоздкое, но совершенно прозрачное индуктивное доказательство этого утверждения.

Теорема 5.3. Пусть для элемента $w \in B_d$ многочлен $\Phi\left(\xi,w\right)$ определен равенством

$$\Phi\left(\xi,w\right) = \prod_{\sigma_j}\left(\xi-\sigma_j\left(w\right)\right) = \sum_{k=0}^{2^d}\xi^k\left(-1\right)^{2^d-k}S_{2^d-k}\left(w\right).$$

Тогда:

a) элемент w и его автоморфные образы $\sigma_j(w)$ являются корнями многочлена $\Phi(\xi, w)$;

b) значения функций $S_{2^d-k}(w)$ суть вещественные числа;

c) функции $S_{2^d-k}(w)$ являются однородными функциями степени $\left(2^d-k\right)$ вещественных компонент $(c_0, c_1, ..., c_{2^d-1})$ элемента w. □

Работа выполнена при поддержке некоммерческого фонда развития исследований по финслеровой геометрии.

Литература

1. E. Bayro-Corrochano, G. Sobczyk (Eds). *Advanches in Geometric Algebra with Applications in Science and Engineering.*-Birkhauser, Boston, 2001

2. G. Sommer (Eds) *Geometric Computing with Clifford Algebras.* Springer Verlag, 2000

3. *Общая алгебра.* (Под ред. Л. А. Скорнякова). М.: Наука, 1990

4. Э. Артин. *Геометрическая алгебра*, М.: Наука, 1969.

5. Lasenby, A. N., Doran, C. J. L. and Gull, S. F. (1996). *Lectures in Geometric Algebra,* In: W. E. Baylis, Ed., *Clifford (Geometric) Algebras with Applications to Physics, Mathematics and Engineering*, Birkhauser, Boston, 1996.

6. М. Холл. *Теория групп.* ИЛ, 1962.

7. Д. Г. Павлов. Обобщение аксиом скалярного произведения. *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике.* № 1, 2004, с. 5–19.

8. Allenby, R. B. J. T., *Rings, Fields and Groups: An Introduction to Abstract Algebra*, 2nd edition, 1991.

9. Березин Ф. А. *Введение в алгебру и анализ с антикоммутирующими переменными.* М., Изд-во МГУ, 1983.

10. Бурлаков М. П. Клиффордовы структуры на многообразиях. *Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения.* М.: ВИНИТИ, 1995. Т. 30: Геометрия 3, с. 205–257.

11. Кантор И. Л., Солодовников А. С. *Гиперкомплексные числа.* М.: Наука, 1973.

On the determining equations for the elements of the associative-commutative algebras and their associated metric forms

V. M. Chernov

Image Processing Systems Institute, Samara, Russia
vche@smr.ru

This work studies the algebraic equations satisfied by the elements of the associative-commutative finite-dimensional algebras. The link between these equations by means of algebra automorphisms, is investigated. The homogeneous forms of the components of the algebra elements, which are coefficients of the determining equations, are computed. These can be associated, in particular, with the well known Minkowski and Berwald-Moor metrics.

Key-words: finite-dimensional algebras, Minkowski metric, Berwald-Moor metric, Finsler space.
MSC: 81R05, 53B40, 51B20.

ФИНСЛЕРОВЫ 4-СПИНОРЫ КАК ОБОБЩЕНИЕ ТВИСТОРОВ

А. В. Соловьев

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
anton@spin.phys.msu.ru

Изложены основные положения геометрии финслеровых 4-спиноров. Показано, что твисторы являются частным случаем финслеровых 4-спиноров. Установлена тесная связь между финслеровыми 4-спинорами и геометрией 16-мерного линейного финслерова пространства. Дано описание группы изометрий этого пространства. Изложена процедура размерной редукции к 4-мерным величинам.

Ключевые слова: финслеровы спиноры, финслеровы пространства, твисторы.

Введение

В работах [1, 2] были введены *гиперспиноры* и рассмотрены их основные свойства. Эти же математические объекты под названием N-компонентных спиноров совершенно независимо изучались в работах [3, 4]. Наконец, в статье [5] была построена общая алгебраическая теория *финслеровых N-спиноров*. Последний термин представляется наиболее удачным, поскольку отражает тесную связь, существующую между гиперспинорами и финслеровой геометрией.

Настоящая работа посвящена изложению основных положений геометрии финслеровых 4-спиноров. Отмечается, что *твисторы* Р. Пенроуза [6] представляют собой частный случай финслеровых 4-спиноров и могут быть ассоциированы не только с псевдоевклидовой, но и с финслеровой геометрией. После вывода явного выражения для длины вектора в 16-мерном линейном финслеровом пространстве, дается описание соответствующей группы изометрий. Статья завершается изложением процедуры размерной редукции, которая позволяет переписать выражение для финслеровой длины 16-вектора в гораздо более обозримом виде, используя только 4-мерные геометрические объекты.

Геометрия финслеровых 4-спиноров

Пусть $\mathbb{C}^4$ — линейное пространство 4-компонентных столбцов комплексных чисел относительно стандартных матричных операций сложения и умножения на элементы поля $\mathbb{C}$. Рассмотрим антисимметричную 4-линейную форму

$$[\xi, \eta, \lambda, \mu] = \varepsilon_{abcd}\, \xi^a \eta^b \lambda^c \mu^d, \tag{1}$$

где ξ, η, λ, $\mu \in \mathbb{C}^4$, ε_{abcd} — символ Леви-Чивиты, нормированный условием $\varepsilon_{1234} = 1$, индексы a, b, c, d независимо пробегают значения от 1 до 4, а ξ^a, η^b, λ^c, $\mu^d \in \mathbb{C}$. Здесь и во всех последующих формулах подразумевается суммирование по повторяющимся индексам.

Пространство $\mathbb{C}^4$ с заданной на нем формой (1) назовем *пространством финслеровых 4-спиноров*. Само же комплексное число $[\xi, \eta, \lambda, \mu]$ будем называть *симплектическим скалярным 4-произведением* финслеровых 4-спиноров ξ, η, λ и μ.

Поскольку (1) представляет собой не что иное как определитель

$$[\xi,\eta,\lambda,\mu]=\begin{vmatrix}\xi^1 & \eta^1 & \lambda^1 & \mu^1\\ \xi^2 & \eta^2 & \lambda^2 & \mu^2\\ \xi^3 & \eta^3 & \lambda^3 & \mu^3\\ \xi^4 & \eta^4 & \lambda^4 & \mu^4\end{vmatrix} \tag{2}$$

со столбцами ξ, η, λ и μ, то, по известной теореме алгебры [7], симплектическое скалярное 4-произведение $[\xi,\eta,\lambda,\mu]$ обращается в нуль тогда и только тогда, когда финслеровы 4-спиноры ξ, η, λ и μ линейно зависимы. В частности, $[\xi,\xi,\xi,\xi]=0$ для любого $\xi\in\mathbb{C}^4$.

Найдем изометрии пространства финслеровых 4-спиноров, т. е. линейные преобразования

$$\xi'=D\xi \quad\Longleftrightarrow\quad \xi'^a=d^a_b\xi^b \quad (D=\|d^a_b\|;\, d^a_b\in\mathbb{C};\, a,b=\overline{1,4}), \tag{3}$$

сохраняющие симплектическое скалярное 4-произведение:

$$[\xi',\eta',\lambda',\mu']=[\xi,\eta,\lambda,\mu] \quad \text{для любых} \quad \xi,\eta,\lambda,\mu\in\mathbb{C}^4. \tag{4}$$

Подставляя (3) и аналогичные выражения для η', λ', μ' в условие (4), с учетом (2) получаем:

$$[\xi,\eta,\lambda,\mu]\det D=[\xi,\eta,\lambda,\mu]. \tag{5}$$

Ввиду произвольности ξ, η, λ, $\mu\in\mathbb{C}^4$, из (5) следует унимодулярность матрицы преобразования (3): $\det D=1$. Таким образом, изометрии пространства финслеровых 4-спиноров образуют группу $\mathrm{SL}(4,\mathbb{C})$.

Пространство финслеровых 4-спиноров можно легко превратить в пространство твисторов, если наделить $\mathbb{C}^4$ дополнительной геометрической структурой. А именно, рассмотрим полуторалинейную эрмитову форму

$$\langle\xi,\eta\rangle=\xi^1\overline{\eta^1}+\xi^2\overline{\eta^2}-\xi^3\overline{\eta^3}-\xi^4\overline{\eta^4}, \tag{6}$$

где ξ, $\eta\in\mathbb{C}^4$, а черта обозначает комплексное сопряжение. Комплексное число $\langle\xi,\eta\rangle$ обычно называется (псевдоунитарным) скалярным произведением ξ и η. По отношению к скалярному произведению (6) пространство $\mathbb{C}^4$ является пространством твисторов [6]. Очевидно, преобразования (3), сохраняющие одновременно формы (1) и (6), образуют так называемую твисторную группу $\mathrm{SU}(2,2)\subset\mathrm{SL}(4,\mathbb{C})$. В этом смысле твисторы представляют собой частный случай финслеровых 4-спиноров.

Вернемся, однако, к финслеровым 4-спинорам и рассмотрим подпространство линейного пространства $\mathbb{C}^4\otimes\overline{\mathbb{C}^4}$, состоящее из эрмитовых тензоров. Это подпространство изоморфно 16-мерному *действительному* линейному пространству $\mathrm{Herm}(4)=\{X\mid X=X^+\}$, образованному всеми эрмитовыми 4×4-матрицами с комплексными элементами. Здесь и далее крест обозначает эрмитово сопряжение.

В качестве базиса пространства $\mathrm{Herm}(4)$ выберем следующие линейно независимые матрицы:

$$\tau_0=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}, \qquad \tau_1=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}, \qquad \tau_2=\begin{pmatrix}0&-i&0&0\\i&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\tau_3=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\qquad \tau_4=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\qquad \tau_5=\begin{pmatrix}0&0&-i&0\\0&0&0&0\\i&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\tau_6=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\qquad \tau_7=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&-i&0\\0&i&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\qquad \tau_8=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\tau_9=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},\qquad \tau_{10}=\begin{pmatrix}0&0&0&-i\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\i&0&0&0\end{pmatrix},\qquad \tau_{11}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},$$

$$\tau_{12}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&-i\\0&0&0&0\\0&i&0&0\end{pmatrix},\qquad \tau_{13}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix},\qquad \tau_{14}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&-i\\0&0&i&0\end{pmatrix},$$

$$\tau_{15}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}. \tag{7}$$

Тогда для любого $X\in\mathrm{Herm}(4)$ имеет место разложение

$$X=X^A\tau_A\quad (A=\overline{0,15}), \tag{8}$$

где $X^A\in\mathbb{R}$ — компоненты 16-вектора X относительно базиса (7). Наряду с матрицами (7) введем еще один набор эрмитовых 4×4-матриц с верхними индексами: $\tau^B=\tau_B$ $(B\neq 8,15)$, $\tau^8=2\tau_8$, $\tau^{15}=2\tau_{15}$. При таком выборе матриц выполняются замечательные соотношения

$$\mathrm{Tr}(\tau^A\tau_B)=2\delta^A_B\quad (A,B=\overline{0,15}), \tag{9}$$

где Tr обозначает операцию вычисления следа матрицы, а δ^A_B — символ Кронекера. На основании (8) и (9) немедленно заключаем, что

$$X^A=\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\tau^A X). \tag{10}$$

Наделим Herm(4) структурой финслерова пространства. Для этого определим *длину* $|X|$ 16-вектора $X\in\mathrm{Herm}(4)$ следующим образом: $|X|\equiv\sqrt[4]{\det X}$. Вычисляя определитель от левой и правой частей разложения (8), получаем выражение для $|X|^4$ в базисе (7)

$$\begin{aligned}|X|^4 &= G_{ABCD}X^AX^BX^CX^D=\\ &= X^{15}\big\{[(X^0)^2-(X^1)^2-(X^2)^2-(X^3)^2]X^8-\\ &-[(X^4)^2+(X^5)^2+(X^6)^2+(X^7)^2]X^0+2[X^4X^6+X^5X^7]X^1+\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+2[X^5X^6-X^4X^7]X^2+[(X^4)^2+(X^5)^2-(X^6)^2-(X^7)^2]X^3\big\}-\\
&-[(X^0)^2-(X^1)^2-(X^2)^2-(X^3)^2][(X^{13})^2+(X^{14})^2]+\\
&+[(X^4)^2+(X^5)^2][(X^{11})^2+(X^{12})^2]+[(X^6)^2+(X^7)^2]\times\\
&\times[(X^9)^2+(X^{10})^2]-X^0X^8[(X^9)^2+(X^{10})^2+(X^{11})^2+(X^{12})^2]+\\
&+X^3X^8[(X^9)^2+(X^{10})^2-(X^{11})^2-(X^{12})^2]+2\big\{[X^0-X^3]\times\\
&\times[X^4X^9X^{13}+X^4X^{10}X^{14}-X^5X^9X^{14}+X^5X^{10}X^{13}]+\\
&+[X^0+X^3][X^6X^{11}X^{13}+X^6X^{12}X^{14}-X^7X^{11}X^{14}+\\
&+X^7X^{12}X^{13}]-X^1[X^4X^{11}X^{13}+X^4X^{12}X^{14}-X^5X^{11}X^{14}+\\
&+X^5X^{12}X^{13}+X^6X^9X^{13}+X^6X^{10}X^{14}-X^7X^9X^{14}+\\
&+X^7X^{10}X^{13}-X^8X^9X^{11}-X^8X^{10}X^{12}]-X^2[X^4X^{11}X^{14}-\\
&-X^4X^{12}X^{13}+X^5X^{11}X^{13}+X^5X^{12}X^{14}-X^6X^9X^{14}+\\
&+X^6X^{10}X^{13}-X^7X^9X^{13}-X^7X^{10}X^{14}+X^8X^9X^{12}-\\
&-X^8X^{10}X^{11}]-X^4[X^6X^9X^{11}+X^6X^{10}X^{12}+X^7X^9X^{12}-\\
&-X^7X^{10}X^{11}]+X^5[X^6X^9X^{12}-X^6X^{10}X^{11}-X^7X^9X^{11}-\\
&-X^7X^{10}X^{12}]\big\},
\end{aligned}
\tag{11}
$$

где G_{ABCD} — компоненты симметричного ковариантного тензора 4-го ранга на $\mathrm{Herm}(4)$. Таким образом, финслерова длина 16-вектора $X \in \mathrm{Herm}(4)$ задается в базисе (7) формой 4-й степени относительно переменных (10). Особо отметим обстоятельство, что форма (11) является знаконеопределенной, т. е. возможны три случая: $|X|^4 > 0$, $|X|^4 < 0$ или $|X|^4 = 0$. Поскольку $|X|^4 = \det X$, последний случай реализуется тогда и только тогда, когда $\det X = 0$.

Всякое линейное преобразование (3) пространства финслеровых 4-спиноров индуцирует в $\mathrm{Herm}(4)$ преобразование вида

$$
X' = DXD^+ \quad \Longleftrightarrow \quad X'^{a\dot b} = d^a_c \overline{d^{\dot b}_{\dot e}} X^{c\dot e} \quad (X' = \|X'^{a\dot b}\|; X = \|X^{c\dot e}\|), \tag{12}
$$

где как пунктирные, так и непунктирные индексы пробегают значения от 1 до 4 (точка над индексом означает, что он относится к элементу матрицы, комплексно сопряженной матрице $D = \|d^a_b\|$), а $X \in \mathrm{Herm}(4)$. Очевидно, преобразование (12) обладает следующими свойствами.

1. Если $X = X^+$, то $X' = X'^+$, т. е. преобразование (12) не выводит за пределы пространства $\mathrm{Herm}(4)$.
2. Преобразование (12) является линейным относительно X.
3. Если $\det D = 1$, то $\det X' = \det X$ для любого $X \in \mathrm{Herm}(4)$.

Поскольку $|X| = \sqrt[4]{\det X}$, последнее свойство означает, что при $D \in \mathrm{SL}(4,\mathbb{C})$ линейное преобразование (12) пространства $\mathrm{Herm}(4)$ является финслеровой изометрией: $|X'| = |X|$. Понятно, что все такие изометрии образуют некоторую группу. Дадим явное матричное описание этой группы в базисе (7).

Подставим в (12) вместо $X', X \in \mathrm{Herm}(4)$ их разложения: $X' = X'^A\tau_A$, $X = X^B\tau_B$. Умножим получившееся равенство слева на τ^A, вычислим след от его обеих сторон и воспользуемся соотношениями (9). В результате будем иметь

$$
X'^A = L(D)^A_B X^B \quad (A, B = \overline{0,15}), \tag{13}
$$

где

$$
L(D)^A_B = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\tau^A D\tau_B D^+) \tag{14}
$$

— элементы матрицы линейного преобразования (12) в базисе (7) (подчеркнем, что $L(D)^A_B \in \mathbb{R}$). Таким образом, при любой унимодулярной комплексной 4×4-матрице D из группы $\mathrm{SL}(4,\mathbb{C})$ преобразование (13) – (14) сохраняет форму (11): $G_{ABCD}X'^AX'^BX'^CX'^D = G_{ABCD}X^AX^BX^CX^D$.

Поскольку группа $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \subset \mathrm{SL}(4,\mathbb{C})$ локально изоморфна собственной ортохронной подгруппе $\mathrm{O}^{\uparrow}_{+}(1,3)$ группы Лоренца [8], имеет смысл рассмотреть преобразования (13) – (14) при $D \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$, т. е. с позиций "4-мерного наблюдателя". Помимо всего прочего, это позволит представить выражение (11) для финслеровой длины 16-вектора в полностью 4-мерном виде.

Пусть

$$D_2 = \begin{pmatrix} d^1_1 & d^1_2 & 0 & 0 \\ d^2_1 & d^2_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det D_2 = 1 \quad (d^{\hat a}_{\hat b} \in \mathbb{C}; \hat a, \hat b = 1, 2). \tag{15}$$

Совокупность матриц (15) образует в $\mathrm{SL}(4,\mathbb{C})$ подгруппу, изоморфную группе $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$. Подставим в (14) вместо D матрицу D_2 из (15). Непосредственные вычисления показывают, что

$$\begin{aligned}
L(D_2)^0_0 &= \frac{1}{2}(d^1_1\overline{d^1_1} + d^1_2\overline{d^1_2} + d^2_1\overline{d^2_1} + d^2_2\overline{d^2_2}), & L(D_2)^0_1 &= \frac{1}{2}(d^1_1\overline{d^1_2} + d^2_1\overline{d^2_2} + d^1_2\overline{d^1_1} + d^2_2\overline{d^2_1}),\\
L(D_2)^0_2 &= \frac{i}{2}(d^1_2\overline{d^1_1} + d^2_2\overline{d^2_1} - d^1_1\overline{d^1_2} - d^2_1\overline{d^2_2}), & L(D_2)^0_3 &= \frac{1}{2}(d^1_1\overline{d^1_1} + d^2_1\overline{d^2_1} - d^1_2\overline{d^1_2} - d^2_2\overline{d^2_2}),\\
L(D_2)^1_0 &= \frac{1}{2}(d^1_1\overline{d^2_1} + d^2_1\overline{d^1_1} + d^1_2\overline{d^2_2} + d^2_2\overline{d^1_2}), & L(D_2)^1_1 &= \frac{1}{2}(d^1_1\overline{d^2_2} + d^2_1\overline{d^1_2} + d^1_2\overline{d^2_1} + d^2_2\overline{d^1_1}),\\
L(D_2)^1_2 &= \frac{i}{2}(d^1_2\overline{d^2_1} + d^2_2\overline{d^1_1} - d^1_1\overline{d^2_2} - d^2_1\overline{d^1_2}), & L(D_2)^1_3 &= \frac{1}{2}(d^1_1\overline{d^2_1} + d^2_1\overline{d^1_1} - d^1_2\overline{d^2_2} - d^2_2\overline{d^1_2}),\\
L(D_2)^2_0 &= \frac{i}{2}(d^1_1\overline{d^2_1} - d^2_1\overline{d^1_1} + d^1_2\overline{d^2_2} - d^2_2\overline{d^1_2}), & L(D_2)^2_1 &= \frac{i}{2}(d^1_1\overline{d^2_2} - d^2_1\overline{d^1_2} + d^1_2\overline{d^2_1} - d^2_2\overline{d^1_1}),\\
L(D_2)^2_2 &= \frac{1}{2}(d^1_1\overline{d^2_2} + d^2_2\overline{d^1_1} - d^1_2\overline{d^2_1} - d^2_1\overline{d^1_2}), & L(D_2)^2_3 &= \frac{i}{2}(d^1_1\overline{d^2_1} - d^2_1\overline{d^1_1} - d^1_2\overline{d^2_2} + d^2_2\overline{d^1_2}),\\
L(D_2)^3_0 &= \frac{1}{2}(d^1_1\overline{d^1_1} - d^2_1\overline{d^2_1} + d^1_2\overline{d^1_2} - d^2_2\overline{d^2_2}), & L(D_2)^3_1 &= \frac{1}{2}(d^1_1\overline{d^1_2} - d^2_1\overline{d^2_2} + d^1_2\overline{d^1_1} - d^2_2\overline{d^2_1}),\\
L(D_2)^3_2 &= \frac{i}{2}(d^1_2\overline{d^1_1} - d^2_2\overline{d^2_1} - d^1_1\overline{d^1_2} + d^2_1\overline{d^2_2}), & L(D_2)^3_3 &= \frac{1}{2}(d^1_1\overline{d^1_1} - d^1_2\overline{d^1_2} - d^2_1\overline{d^2_1} + d^2_2\overline{d^2_2}),
\end{aligned} \tag{16}$$

$L(D_2)^{3+i}_{3+j} = L(D_2)^{8+i}_{8+j} = M(D_2)^i_j$ $(i,j = \overline{1,4})$, где

$$\begin{aligned}
M(D_2)^1_1 &= \frac{1}{2}(\overline{d^1_1} + d^1_1), & M(D_2)^3_1 &= \frac{1}{2}(\overline{d^2_1} + d^2_1),\\
M(D_2)^1_2 &= \frac{i}{2}(\overline{d^1_1} - d^1_1), & M(D_2)^3_2 &= \frac{i}{2}(\overline{d^2_1} - d^2_1),\\
M(D_2)^1_3 &= \frac{1}{2}(\overline{d^1_2} + d^1_2), & M(D_2)^3_3 &= \frac{1}{2}(\overline{d^2_2} + d^2_2),\\
M(D_2)^1_4 &= \frac{i}{2}(\overline{d^1_2} - d^1_2), & M(D_2)^3_4 &= \frac{i}{2}(\overline{d^2_2} - d^2_2),\\
M(D_2)^2_1 &= \frac{i}{2}(d^1_1 - \overline{d^1_1}), & M(D_2)^4_1 &= \frac{i}{2}(d^2_1 - \overline{d^2_1}),\\
M(D_2)^2_2 &= \frac{1}{2}(d^1_1 + \overline{d^1_1}), & M(D_2)^4_2 &= \frac{1}{2}(d^2_1 + \overline{d^2_1}),
\end{aligned}$$

$$M(D_2)^2_3 = \frac{i}{2}(d^1_2 - \overline{d^1_2}), \quad M(D_2)^4_3 = \frac{i}{2}(d^2_2 - \overline{d^2_2}),$$
$$M(D_2)^2_4 = \frac{1}{2}(d^1_2 + \overline{d^1_2}), \quad M(D_2)^4_4 = \frac{1}{2}(d^2_2 + \overline{d^2_2}), \tag{17}$$

$L(D_2)^8_8 = L(D_2)^{13}_{13} = L(D_2)^{14}_{14} = L(D_2)^{15}_{15} = 1$, а все оставшиеся элементы матрицы преобразования $X'^A = L(D_2)^A_B X^B$ обращаются в нуль. Таким образом, при $D = D_2$ финслерова изометрия (13) принимает вид

$$\begin{aligned}
X'^\alpha &= L(D_2)^\alpha_\beta X^\beta \quad (\alpha, \beta = \overline{0,3}),\\
\theta'^i &= M(D_2)^i_j \theta^j \quad (i, j = \overline{1,4}),\\
X'^8 &= X^8,\\
\vartheta'^i &= M(D_2)^i_j \vartheta^j \quad (i, j = \overline{1,4}),\\
X'^{13} &= X^{13},\\
X'^{14} &= X^{14},\\
X'^{15} &= X^{15},
\end{aligned} \tag{18}$$

где $L(D_2)^\alpha_\beta$, $M(D_2)^i_j$ даются формулами (16) – (17) и использованы обозначения: $\theta^i = X^{3+i}$, $\vartheta^j = X^{8+j}$.

В работе [5] было показано, что (16) и (17) являются элементами матриц преобразований лоренцева 4-вектора и майорановского 4-спинора соответственно. Поэтому результат (18) сводится к утверждению, что при $D = D_2$ 16-вектор X^A расщепляется на лоренцев 4-вектор X^α, майорановские 4-спиноры θ^i, ϑ^j и лоренцевы 4-скаляры X^8, X^{13}, X^{14}, X^{15}.

Сказанное составляет суть процедуры размерной редукции, позволяющей выявлять "4-мерный состав" встречающихся 16-мерных выражений. Применим эту процедуру к весьма громоздкой формуле (11) для финслеровой длины 16-вектора X^A. Принимая во внимание (18), получаем

$$\begin{aligned}
|X|^4 = {} & X^{15}[X^8 g_{\mu\nu} X^\mu X^\nu - g_{\mu\nu} X^\mu \overline{\theta} \gamma^\nu \theta] -\\
& - [(X^{13})^2 + (X^{14})^2] g_{\mu\nu} X^\mu X^\nu - X^8 g_{\mu\nu} X^\mu \overline{\vartheta} \gamma^\nu \vartheta +\\
& + 2X^{13} g_{\mu\nu} X^\mu \overline{\theta} \gamma^\nu \vartheta + 2X^{14} g_{\mu\nu} X^\mu \overline{\theta} \gamma^5 \gamma^\nu \vartheta +\\
& + \tfrac{1}{2} g_{\mu\nu} \overline{\theta} \gamma^\mu \theta \, \overline{\vartheta} \gamma^\nu \vartheta,
\end{aligned} \tag{19}$$

где $\mu, \nu = \overline{0,3}$, $\|g_{\mu\nu}\| = \operatorname{diag}(1, -1, -1, -1)$ — матрица компонент метрического тензора пространства Минковского в псевдоортонормированном базисе,

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \gamma^1 = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix}, \ \gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix},$$

$$\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \gamma^5 = \gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

— матрицы Дирака в майорановском представлении [5], $\theta, \vartheta \in \mathbb{R}^4$ — 4-компонентные столбцы действительных чисел, а черта обозначает дираковское сопряжение: $\overline{\theta} = \theta^\top \gamma^0$, $\overline{\vartheta} = \vartheta^\top \gamma^0$ (здесь $\top$ — значок транспонирования матрицы). Таким образом, выражение (11) записано в гораздо более компактной 4-мерной форме (19).

Заключение

Подводя итоги, сделаем ряд замечаний по поводу полученных результатов.

Прежде всего, следует отметить двойственную природу твисторов: с одной стороны они являются спинорами 6-мерного псевдоевклидова пространства с двумя времениподобными измерениями [6], а с другой, как показано в данной статье, — частным случаем финслеровых 4-спиноров 16-мерного линейного пространства с метрической функцией, определяемой алгебраической формой 4-й степени (11).

Кроме того, в статье дано явное описание изометрий этого 16-мерного финслерова пространства и процедуры размерной редукции, позволившей представить форму (11) в 4-мерном виде (19). Последнее весьма существенно, ибо свидетельствует о выполнимости принципа соответствия со стандартной релятивистской теорией на уровне геометрии.

Автор благодарен Ю. С. Владимирову, С. В. Болохову и А. В. Пилипенко за заинтересованное обсуждение проблем, затронутых в статье.

Литература

[1] D. Finkelstein. *Hyperspin and hyperspace.* Physical Review Letters **56**, 1532–1533 (1986).

[2] D. Finkelstein, S. R. Finkelstein, and C. Holm. *Hyperspin manifolds.* International Journal of Theoretical Physics **25**, 441–463 (1986).

[3] Ю. С. Владимиров, А. В. Соловьев. *Физическая структура ранга* $(4,4;б)$ *и трехкомпонентные спиноры.* "Системология и методологические проблемы информационно-логических систем". — Новосибирск: Институт математики СО АН СССР, 1990. — Вычислительные системы, вып. 135. — С. 44–66.

[4] А. В. Соловьев. *К теории бинарных физических структур ранга* $(5,5;б)$ *и выше.* "Системология и методологические проблемы информационно-логических систем". — Новосибирск: Институт математики СО АН СССР, 1990. — Вычислительные системы, вып. 135. — С. 67–77.

[5] A. V. Solov'yov and Yu. S. Vladimirov. *Finslerian N-spinors: Algebra.* International Journal of Theoretical Physics **40**, 1511–1523 (2001).

[6] Р. Пенроуз, В. Риндлер. Спиноры и пространство-время. Спинорные и твисторные методы в геометрии пространства-времени. — М.: Мир, 1988. — 572 с.

[7] А. И. Кострикин. Введение в алгебру. Основы алгебры. — М.: Физматлит, 1994. — 320 с.

[8] М. М. Постников. Лекции по геометрии. Семестр II. Линейная алгебра. — М.: Наука, 1986. — 400 с.

Finslerian spinors and generalization of spinors

A. V. Soloviev

MSU n. a. M. V. Lomonosov, Russia
anton@spin.phys.msu.ru

We present the fundaments of the geometry of Finslerian 4-spinors. It is shown that the twistors represent a particular case of Finslerian 4-spinors. A strong link is established between Finslerian 4-spinors and the geometry of the 16-dimensional linear Finsler space. We describe the isometry group of this space, and develop the procedure of dimensional reduction to 4-dimensional objects.

Key-words: Finslerian spinors, Finsler space, twistors.
MSC: 53B40, 15A66, 14D21, 81R25.

THE PROLONGATIONS OF A FINSLER METRIC TO THE TANGENT BUNDLE $T^k(M)$ $(k > 1)$ OF THE HIGHER ORDER ACCELERATIONS

Gheorghe Atanasiu

Department of Algebra and Geometry, Transilvania University, Brasov, Romania
gh_ atanasiu@yahoo.com, g.atanasiu@unitbv.ro

An old problem in differential geometry is that of prolongation of a Riemannian structure $g(x)$ on a real $n-$dimensional C^∞-manifold $M, x \in M$, to the bundle of $k-$jets $\left(J_0^k M, \pi^k, M\right)$ or, equivalently the tangent bundle $\left(T^k M, \pi^k, M\right)$ of the higher order accelerations. The problem belongs to so-called geometry of higher order. It was solved in [18] for $k=1$ and partially in [19] for $k=2$. The same problem of prolongation can be considered for a Finslerian structure $F\left(x, y^{(1)}\right)$. In the paper [15] are given these solutions in the general cases, using the Sasaki-Matsumoto $N-$lift (for $k=2$, see [3] and [6]).

But, the terms of Sasaki-Matsumoto prolongation of a Riemannian metric (or Finslerian metric) to $T^k M$ have not the same physical dimensions because these prolongations is not homogeneous on the fibres of the tangent bundle of order k. This is a disavantage in the study of the geometry of $T^k M$ using the Riemannian metrics determined by these prolongations.

In this paper, only for a Finsler space $F^n = \left(M, F\left(x, y^{(1)}\right)\right)$, we correct this disavantage introducing a new kind of prolongation $\overset{\circ}{\mathbf{G}}$ of the Finsler metric $g_{ab}\left(x, y^{(1)}\right) = \partial^2 F / \partial y^{(1)a} \partial y^{(1)b}$ given by (2.1), which is $0-$homogeneous. Some properties of the Riemannian space $\left(\widetilde{T^k M}, \overset{\circ}{G}\right)$ are studied. The almost $(k-1)\,n-$contact structure $\overset{\circ}{\mathbf{F}}$ from (2.13) is introduced. It has the property of homogeneity and $\left(\overset{\circ}{\mathbf{G}}, \overset{\circ}{\mathbf{F}}\right)$ is a metrical almost $(k-1)\,n-$contact structure on $T^k M$. It depend only on the fundamental function $F\left(x, y^{(1)}\right)$ of the Finsler space F^n. The space $\left(\widetilde{T^k M}, \overset{\circ}{\mathbf{G}}, \overset{\circ}{\mathbf{F}}\right)$ is **the geometrical model** of the Finsler space $F^n = \left(M, F\left(x, y^{(1)}\right)\right)$.

MSC2000: 53B05, 53B15, 53B40.

The Sasaki-Matsumoto N-lift of a Finsler metric

Let M be a real n-dimensional C^∞-manifold and $\left(T^k M, \pi^k, M\right)$ its tangent bundle of order k (or $k-$jet bundle, or tangent bundle of the higher order accelerations).

Let us consider the Finsler space $F^n = (M, F)$ with the fundamental function $F\left(x, y^{(1)}\right), F : T^1 M \to R$, and the fundamental tensor $g_{ab}\left(x, y^{(1)}\right)$ on $T^1 M$ given by

$$g_{ab}\left(x, y^{(1)}\right) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial y^{(1)a} \partial y^{(1)b}}, \tag{1.1}$$

where $g_{ab}\left(x, y^{(1)}\right)$ is positively defined on $T^1 M$.

The indices $a, b, ...$ run over set $\{1, 2, ..., n\}$ and Einstein convention of summaring is adopted all over this work.

Let $\gamma^a_{bc}\left(x, y^{(1)}\right)$ be the formal Christoffel symbols of the $g_{ab}\left(x, y^{(1)}\right)$, *i.e.* :

$$\gamma^a_{bc}\left(x, y^{(1)}\right) = \frac{1}{2} g^{ad} \left(\frac{\partial g_{bd}}{\partial x^c} + \frac{\partial g_{dc}}{\partial x^b} - \frac{\partial g_{bc}}{\partial x^d}\right). \tag{1.2}$$

Then, the canonical semispray of F^n is given by

$$\frac{d^2x^a}{dt^2}+2\underset{(1)}{G^a}\left(x,\frac{dx}{dt}\right)=0, \tag{1.3}$$

where

$$\underset{(1)}{G^a}=\frac{1}{2}\gamma^a_{bc}\left(x,y^{(1)}\right)y^{(1)b}y^{(1)c}. \tag{1.3'}$$

The canonical nonlinear connection (determined only by the function F of the Finsler space F^n) is the Cartan nonlinear connection with the coefficients

$$G^a_b\left(x,y^{(1)}\right)=\frac{\partial \underset{(1)}{G^a}}{\partial y^{(1)b}}. \tag{1.4}$$

Then, on the domain of chart $\left(\pi^k\right)^{-1}(U)\subset T^kM, U\subset M$, we can consider the functions

$$\begin{aligned} F^*\left(x,y^{(1)},...,y^{(k)}\right) &= \left(F\circ\pi^k_1\right)\left(x,y^{(1)},...,y^{(k)}\right), \\ g^*_{ab}\left(x,y^{(1)},...,y^{(k)}\right) &= \left(g_{ab}\circ\pi^k_1\right)\left(x,y^{(1)},...,y^{(k)}\right), \\ &\forall\left(x,y^{(1)},...,y^{(k)}\right)(U), \end{aligned}$$

where $\pi^k_1 : T^kM \to TM, \pi^k_1\left(x,y^{(1)},...,y^{(k)}\right) = \left(x,y^{(1)}\right)$ is the natural projection. For simplicity, F^* and g^*_{ab} will be denote by the same letters F and g_{ab}.

We have

1^0. The canonical nonlinear connection N on $\widetilde{T^kM}=T^kM\setminus\{0\}$ has the dual coefficients

$$\begin{aligned} &\underset{1}{M}{}^a_b=G^a_b, \\ &\underset{2}{M}{}^a_b=\tfrac{1}{2}\left(C\underset{1}{M}{}^a_b+\underset{1}{M}{}^a_c\underset{1}{M}{}^c_b\right), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\underset{k}{M}{}^a_b=\tfrac{1}{k}\left(C\underset{k-1}{M}{}^a_b+\underset{1}{M}{}^a_c\underset{k-1}{M}{}^c_b\right), \end{aligned} \tag{1.5}$$

where C is the operator

$$C=y^{(1)a}\frac{\partial}{\partial x^a}+2y^{(2)a}\frac{\partial}{\partial y^{(1)a}}+...+ky^{(k)a}\frac{\partial}{\partial y^{(k-1)a}} \tag{1.6}$$

2^0. The Liouville d-vector field $z^{(k)}$ corresponding to the canonical nonlinear connection N is given by

$$kz^{(k)a}=ky^{(k)a}+(k-1)\,y^{(k-1)b}\underset{1}{M}{}^a_b+...+y^{(1)b}\underset{k-1}{M}{}^a_b. \tag{1.7}$$

3^0. The following Lagrangian

$$L\left(x,y^{(1)},...,y^{(k)}\right)=g_{ab}\left(x,y^{(1)}\right)z^{(k)a}z^{(k)b}, \tag{1.8}$$

is a regular Lagrangian on $\widetilde{T^kM}$, determined only by $F\left(x,y^{(1)}\right)$ because g_{ab} and $z^{(k)}$ have this property.

4^0. Its fundamental tensor field coincide with the fundamental tensor field on Finsler space F^n, namely on $\widetilde{T^kM}$ we have

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 L}{\partial z^{(k)a}\partial z^{(k)b}} = g_{ab}\left(x, y^{(1)}\right). \tag{1.9}$$

5^0. N determines the direct decomposition

$$T_u T^k M = N_0(u) \oplus N_1(u) \oplus ... \oplus N_{k-1}(u) \oplus V_k(u), \quad \forall u \in T^k M. \tag{1.10}$$

6^0. The adapted cobasis $\left\{dx^a, \delta y^{(1)a}, ..., \delta y^{(k)a}\right\}$ and the adapted basis $\left\{\frac{\delta}{\delta x^a}, \frac{\delta}{\delta y^{(1)a}}, ..., \frac{\delta}{\delta y^{(k-1)a}}, \frac{\delta}{\delta y^{(k)a}}\right\}$ to N are depending only on fundamental function $F\left(x, y^{(1)}\right)$ of Finsler space F^n, where

$$\begin{aligned}
\delta y^{(1)a} &= dy^{(1)a} + \underset{1}{M}{}^a{}_c dx^c,\\
\delta y^{(2)a} &= dy^{(2)a} + \underset{1}{M}{}^a{}_c dy^{(1)c} + \underset{2}{M}{}^a{}_c dx^c,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\delta y^{(k)a} &= dy^{(k)a} + \underset{1}{M}{}^a{}_c dy^{(k-1)c} + ... + \underset{k-1}{M}{}^a{}_c dy^{(1)c} + \underset{k}{M}{}^a{}_c dx^c,
\end{aligned} \tag{1.11}$$

and

$$\begin{aligned}
\frac{\delta}{\delta x^a} &= \frac{\partial}{\partial x^a} - \underset{1}{N}{}^c{}_a \frac{\partial}{\partial y^{(1)c}} - \underset{2}{N}{}^c{}_a \frac{\partial}{\partial y^{(2)c}} - ... - \underset{k}{N}{}^c{}_a \frac{\partial}{\partial y^{(k)c}},\\
\frac{\delta}{\delta y^{(1)a}} &= \frac{\partial}{\partial y^{(1)a}} - \underset{1}{N}{}^c{}_a \frac{\partial}{\partial y^{(2)c}} - ... - \underset{k-1}{N}{}^c{}_a \frac{\partial}{\partial y^{(k)c}},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\frac{\delta}{\delta y^{(k-1)a}} &= \frac{\partial}{\partial y^{(k-1)c}} - \underset{1}{N}{}^c{}_a \frac{\partial}{\partial y^{(k)c}}.
\end{aligned} \tag{1.11'}$$

We know that

$$\begin{aligned}
&\underset{1}{N}{}^a{}_b = \underset{1}{M}{}^a{}_b, \underset{2}{N}{}^a{}_b = \underset{2}{M}{}^a{}_b - \underset{1}{M}{}^c{}_b \underset{1}{M}{}^a{}_c, ...,\\
&\underset{k}{N}{}^a{}_b = \underset{k}{M}{}^a{}_b - \underset{1}{M}{}^c{}_b \underset{k-1}{N}{}^a{}_c - ... - \underset{k-2}{M}{}^c{}_b \underset{2}{N}{}^a{}_c - \underset{k-1}{M}{}^c{}_b \underset{1}{N}{}^a{}_c,
\end{aligned} \tag{1.12}$$

and conversely

$$\begin{aligned}
&\underset{1}{M}{}^a{}_b = \underset{1}{N}{}^a{}_b, \underset{2}{M}{}^a{}_b = \underset{2}{N}{}^a{}_b + \underset{1}{N}{}^a{}_c \underset{1}{M}{}^c{}_b, ...,\\
&\underset{k}{M}{}^a{}_b = \underset{k}{N}{}^a{}_b + \underset{k-1}{N}{}^a{}_c \underset{1}{M}{}^c{}_b + ... + \underset{2}{N}{}^a{}_c \underset{k-2}{M}{}^c{}_b + \underset{1}{N}{}^a{}_c \underset{k-1}{M}{}^c{}_b.
\end{aligned} \tag{1.12'}$$

Then, the Sasaki-Matsumoto $N-$lift of $g_{ab}\left(x, y^{(1)}\right)$ to T^kM is defined by

$$\mathbf{G}(u) = g_{ab}\left(x, y^{(1)}\right) dx^a \otimes dx^b + \sum_{\beta=1}^{k} g_{ab}\left(x, y^{(1)}\right) \delta y^{(\beta)a} \otimes \delta y^{(\beta)b}, \forall u \in \widetilde{T^kM}. \tag{1.13}$$

The following properties hold:

7^0. $\mathbf{G}$ is globally defined on T^kM.
8^0. $\mathbf{G}$ is a Riemannian structure on T^kM determined only by the Finsler space F^n.
9^0. $\mathbf{G}$ is not homogeneous on the fibres of T^kM.

Namely, for the homothety $h_t : \left(x, y^{(1)}, ..., y^{(k)}\right) \to \left(x, ty^{(1)}, ..., t^k y^{(k)}\right), \forall t \in R_*^+$, we get

$$(G \circ h_t)(u) = g_{ab}\left(x, y^{(1)}\right) dx^a \otimes dx^b + \sum_{\beta=1}^{k} t^{2\beta} g_{ab}\left(x, y^{(1)}\right) \delta y^{(\beta)a} \otimes \delta y^{(\beta)b} \neq G(u).$$

Let us consider the $\mathcal{F}\left(T^k M\right) -$ linear mapping $\mathbf{F} : \chi\left(T^k M\right) \to \chi\left(T^k M\right)$ given in the adapted basis (1.11') by

$$\mathbf{F}\left(\frac{\delta}{\delta x^a}\right) = -\frac{\partial}{\partial y^{(k)a}}, \tag{1.14}$$
$$\mathbf{F}\left(\frac{\delta}{\delta y^{(1)a}}\right) = ... = \mathbf{F}\left(\frac{\delta}{\delta y^{(k-1)a}}\right) = 0,$$
$$\mathbf{F}\frac{\partial}{\partial y^{(k)a}} = \frac{\delta}{\delta x^a}.$$

It follows that:

10^0. $\mathbf{F}$ is globally defined on $T^k M$ and it is a $d-$ tensor field of type $(1,1)$.
11^0. $\mathbf{F}$ is an $(k-1)\,n-$contact structure : $\mathbf{F}^3 + \mathbf{F} = 0$.
12^0. $\mathbf{F}$ depend only on the fundamental function $F\left(x, y^{(1)}\right)$ of Finsler space F^n.
13^0. The pair $(\mathbf{G}, \mathbf{F})$ is a Riemannian almost $(k-1)\,n-$contact structure on $T^k M$:

$$\mathbf{G}(\mathbf{F}X, Y) = -\mathbf{G}(X, \mathbf{F}Y), \forall X, Y \in \chi\left(T^k M\right).$$

Consequently, we get

Theorem 1.1 *The space* $\left(T^k M, \mathbf{G}, \mathbf{F}\right)$ *is a Riemannian almost* $(k-1)\,n-$*contact space depending only on the fundamental function* $F\left(x, y^{(1)}\right)$ *of the Finsler space* $F^n = (M, F)$.

The previous space, called **"the geometrical model on $T^k M$ of the Finsler space"** (M, F) is important in the study of the geometry of the initial Finsler space $F^n = (M, F)$.

The homogeneous prolongation to $T^k M$ of a Finsler metric

We define a new prolongation $\overset{\circ}{G}$ on $T^k M$ of the fundamental tensor field $g_{ab}\left(x, y^{(1)}\right)$ of a Finsler space $F^n = (M, F)$, which satisfies the following conditions:

1^0. $\overset{\circ}{G}$ is $0-$ homogeneous with respect to $y^{(1)a}, y^{(2)a}, ...,$and $y^{(k)a}$.
2^0. It depends only on the fundamental function $F\left(x, y^{(1)}\right)$.
3^0. In the mechanical meaning the terms of $\overset{\circ}{G}$ have the same physical dimensions.

Definition 2.1. *We call the homogeneous prolongation to* $T^k M$ *of the fundamental tensor field* $g_{ab}\left(x, y^{(1)}\right)$ *of a Finsler space* $F^n = (M, F)$*,the following tensor field on* $T^k M$:

$$\overset{\circ}{G}(u) = g_{ab}\left(x, y^{(1)}\right) dx^a \otimes dy^b + \sum_{\beta=1}^{k} \frac{\mathbf{a}^{2\beta}}{\left\|y^{(1)}\right\|^{2\beta}} g_{ab}\left(x, y^{(1)}\right) \delta y^{(\beta)a} \otimes \delta y^{(\beta)b}, \forall u \in \widetilde{T^k M}, \tag{2.1}$$

where $\mathbf{a} > \mathbf{0}$ *is a constant imposed by application in order to preserve the physical dimension of the components of* $\overset{\circ}{G}$, *and* $\left\|y^{(1)}\right\|^2$ *is the square of the norm of the first Liouvill vector field*

$$\left\|y^{(1)}\right\|^2 = g_{ab}\left(x, y^{(1)}\right) y^{(1)a} y^{(1)b}. \tag{2.2}$$

We get, without difficulties:

Theorem 2.1. 1.*The pair* $\left(\widetilde{T^kM}, \overset{\circ}{G}\right)$ *is a Riemann space.*

2. $\overset{\circ}{G}$ *is a* $0-$ *homogeneous tensor field with respect to* $y^{(\beta)a}, (\beta = 1, ..., k)$.

3. $\overset{\circ}{G}$ *depends only on the fundamental function* $F\left(x, y^{(1)}\right)$ *of the Finsler space* F^n.

4. *The distributions* $N_0, N_1, ..., N_{k-1}$ *and* V_k *are orthogonal, in pairs, with respect to* $\overset{\circ}{G}$.

We can write $\overset{\circ}{G}$ in the form

$$\overset{\circ}{\mathbf{G}} = \overset{\circ}{\mathbf{G}}{}^H + \overset{\circ}{\mathbf{G}}{}^{V_1} + ... + \overset{\circ}{\mathbf{G}}{}^{V_k}, \tag{2.3}$$

where

$$\overset{\circ}{\mathbf{G}}{}^H = g_{ab}\left(x, y^{(1)}\right) dx^a \otimes dx^b, \overset{\circ}{\mathbf{G}}{}^{V_\beta} = g_{ab}\left(x, y^{(1)}\right) dy^{(\beta)a} \otimes dy^{(\beta)b} \tag{2.4}$$

and

$$\underset{(\beta)}{g}{}_{ab}\left(x, y^{(1)}\right) = \frac{\mathbf{a}^{2\beta}}{\|y^{(1)}\|^{2\beta}} g_{ab}\left(x, y^{(1)}\right), \quad (\beta = 1, ..., k). \tag{2.5}$$

As usually, let us denote

$$\partial_a = \frac{\partial}{\partial x^a}, \dot{\partial}_{1a} = \frac{\partial}{\partial y^{(1)a}}, ..., \dot{\partial}_{ka} = \frac{\partial}{\partial y^{(k)a}},$$

and from now on we denote the adapted basis (1.11') by

$$\left\{\delta_a, \delta_{1a}, ..., \delta_{(k-1)a}, \delta_{ka}\right\}.$$

In order to study the geometry of Riemann space $\left(\widetilde{T^kM}, \overset{\circ}{G}\right)$, we can apply the theory of the $(h, v_1, ..., v_k)-$ Riemannian metric given by author in [5] (for $k = 2$, see [2], [4]).

A linear connection D on T^kM is called a metrical $N-$linear connection with respect to $\overset{\circ}{\mathbf{G}}$ if $D_X\overset{\circ}{\mathbf{G}} = 0, \forall X \in \chi\left(T^kM\right)$ and it preserves by paralelism the horizontal and vertical distributions $N_0, N_1, ..., N_{k-1},\ V_k$.

We can easily prove the existence of the metrical $N-$linear connections in the adapted basis. To this aim we represent a linear connection D in the adapted basis in the following form:

$$\begin{gathered}
D_{\delta_c}\delta_b = \underset{(00)}{\overset{0}{L}}{}^a{}_{bc}\delta_a + \sum_{\beta=1}^{k}\underset{(00)}{\overset{\beta}{L}}{}^a{}_{bc}\delta_{\beta a},\\
D_{\delta_c}\delta_{\gamma b} = \underset{(\gamma 0)}{\overset{0}{L}}{}^a{}_{bc}\delta_a + \sum_{\beta=1}^{k}\underset{(\gamma 0)}{\overset{\beta}{L}}{}^a{}_{bc}\delta_{\beta a}, \quad \left(\gamma = 1, ..., k; \delta_{ka} = \dot{\partial}_{ka}\right),\\
D_{\delta_{1c}}\delta_b = \underset{(01)}{\overset{0}{C}}{}^a{}_{bc}\delta_a + \sum_{\beta=1}^{k}\underset{(01)}{\overset{\beta}{C}}{}^a{}_{bc}\delta_{\beta a},\\
D_{\delta_{1c}}\delta_{\gamma b} = \underset{(\gamma 1)}{\overset{0}{C}}{}^a{}_{bc}\delta_a + \sum_{\beta=1}^{k}\underset{(\gamma 1)}{\overset{\beta}{C}}{}^a{}_{bc}\delta_{\beta a}, \quad \left(\gamma = 1, ..., k; \delta_{ka} = \dot{\partial}_{ka}\right),\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
D_{\delta_{kc}}\delta_b = \underset{(0k)}{\overset{0}{C}}{}^a{}_{bc}\delta_a + \sum_{\beta=1}^{k}\underset{(0k)}{\overset{\beta}{C}}{}^a{}_{bc}\delta_{\beta a},\\
D_{\delta_{kc}}\delta_{\gamma b} = \underset{(\gamma k)}{\overset{0}{C}}{}^a{}_{bc}\delta_a + \sum_{\beta=1}^{k}\underset{(\gamma k)}{\overset{\beta}{C}}{}^a{}_{bc}\delta_{\beta a}, \quad \left(\gamma = 1, ..., k; \delta_{ka} = \dot{\partial}_{ka}\right).
\end{gathered} \tag{2.6}$$

The system of functions

$$\left(\underset{(00)}{\overset{\alpha}{L}}{}^a{}_{bc}, \underset{(\beta 0)}{\overset{\alpha}{L}}{}^a{}_{bc}, \underset{(01)}{\overset{\alpha}{C}}{}^a{}_{bc}, \underset{(\beta 1)}{\overset{\alpha}{C}}{}^a{}_{bc}, ..., \underset{(0k)}{\overset{\alpha}{C}}{}^a{}_{bc}, \underset{(\beta k)}{\overset{\alpha}{C}}{}^a{}_{bc}\right), \quad (\alpha = 0, 1, ..., k; \quad \beta = 1, ..., k),$$

are the coefficients of D and

$$\left(\overset{0}{\underset{(00)}{L}}{}^{a}{}_{bc},\overset{\beta}{\underset{(\beta 0)}{L}}{}^{a}{}_{bc},\overset{0}{\underset{(01)}{C}}{}^{a}{}_{bc},\overset{\beta}{\underset{(\beta 1)}{C}}{}^{a}{}_{bc},...,\overset{0}{\underset{(0k)}{C}}{}^{a}{}_{bc},\overset{\beta}{\underset{(\beta k)}{C}}{}^{a}{}_{bc}\right),\quad (\beta=1,...,k)\,,$$

are the coefficients of an $N-$linear connection $D\Gamma(N)$ on T^kM.

Also, we will denote the coefficients of $D\Gamma(N)$ with

$$\left(\overset{H}{\underset{(00)}{L}}{}^{a}{}_{bc},\overset{V_\beta}{\underset{(\beta 0)}{L}}{}^{a}{}_{bc},\overset{H}{\underset{(01)}{C}}{}^{a}{}_{bc},\overset{V_\beta}{\underset{(\beta 1)}{C}}{}^{a}{}_{bc},...,\overset{H}{\underset{(0k)}{C}}{}^{a}{}_{bc},\overset{V_\beta}{\underset{(\beta k)}{C}}{}^{a}{}_{bc}\right),\quad (\beta=1,...,k)\,.$$

It is not difficult to prove

Theorem 2.2. *There exist metrical $N-$linear connection $D\Gamma(N)$ on T^kM with respect to the homogeneous prolongation $\overset{\circ}{\mathbf{G}}$, which depend only of the fundamental function $F\left(x,y^{(1)}\right)$ of the Finsler space F^n. One of them has the* **"horizontal"** *coefficients:*

$$\begin{aligned}\overset{H}{\underset{(00)}{L}}{}^{a}{}_{bc}&=\frac{1}{2}g^{ad}\left(\delta_b g_{dc}+\delta_c g_{bd}-\delta_d g_{bc}\right),\\ \overset{V_\beta}{\underset{(\beta 0)}{L}}{}^{a}{}_{bc}&=\frac{1}{2}\underset{(\beta)}{g}{}^{ad}\left(\delta_b\underset{(\beta)}{g}{}_{dc}+\delta_c\underset{(\beta)}{g}{}_{bd}-\delta_d\underset{(\beta)}{g}{}_{bc}\right),\quad(\beta=1,...,k)\,,\end{aligned}\tag{2.7}$$

the **"$\mathbf{v}_1-$vertical"** *coefficients:*

$$\begin{aligned}\overset{V_\beta}{\underset{(\beta 1)}{C}}{}^{a}{}_{bc}&=\frac{1}{2}g^{ad}\left(\delta_{1b}g_{dc}+\delta_{1c}g_{bd}-\delta_{1d}g_{bc}\right),\\ \overset{V_\beta}{\underset{(\beta 1)}{C}}{}^{a}{}_{bc}&=\frac{1}{2}\underset{(\beta)}{g}{}^{ad}\left(\delta_{1b}\underset{(\beta)}{g}{}_{dc}+\delta_{1c}\underset{(\beta)}{g}{}_{bd}-\delta_{1d}\underset{(\beta)}{g}{}_{bc}\right),\quad(\beta=1,...,k)\,,\end{aligned}\tag{20}$$

and the **"$\mathbf{v}_\gamma-$vertical"** *coefficients vanish:*

$$\overset{H}{\underset{(0\gamma)}{C}}{}^{a}{}_{bc}=\overset{V_1}{\underset{(1\gamma)}{C}}{}^{a}{}_{bc}=...=\overset{V_k}{\underset{(k\gamma)}{C}}{}^{a}{}_{bc}=0,\quad(\gamma=2,...,k)\,.\tag{2.9}$$

Let us remark the particular form of the metrical $N-$linear connection $D\Gamma(N)$ in (2.7), (2.8) and (2.9). Because it depends only on the fundamental function $F\left(x,y^{(1)}\right)$ *of the Finsler space* F^n, $D\Gamma(N)$ from the Theorem 2.2 will be called the **canonical** metrical $N-$linear connection of the space $\left(\widetilde{T^kM},\overset{\circ}{\mathbf{G}}\right)$.

Let us denote

$$\sigma_c=-\frac{1}{2}\frac{1}{F^2}\delta_c F^2,\ \tau_c=-\frac{1}{2}\frac{1}{F^2}\delta_{1c}F^2.\tag{2.10}$$

We obtain

Theorem 2.3. *The coeffients of the metrical $N-$linear connection $D\Gamma(N)$ with respect to $\overset{\circ}{\mathbf{G}}$ given by* (2.1), *satisfy the following equations:*

$$\begin{aligned}\overset{V_\beta}{\underset{(\beta 0)}{C}}{}^{a}{}_{bc}&=\overset{H}{\underset{(00)}{L}}{}^{a}{}_{bc}+\beta\left(\delta^a_b\sigma_c+\delta^a_c\sigma_b-g_{bc}g^{ad}\sigma_\alpha\right),\\ \overset{V_\beta}{\underset{(\beta 1)}{C}}{}^{a}{}_{bc}&=\overset{V_\beta}{\underset{(01)}{C}}{}^{a}{}_{bc}+\beta\left(\delta^a_b\sigma_c+\delta^a_c\sigma_b-g_{bc}g^{ad}\sigma_\alpha\right),\quad(\beta=1,...,k)\,.\end{aligned}\tag{2.11}$$

Indeed, substituting the tensors $\underset{(1)}{g}_{ab}, \underset{(2)}{g}_{ab}, ..., \underset{(k)}{g}_{ab}$ given by (2.5) in (2.7) and (2.8) and using (2.10), one obtains (2.11).

It is not difficult to prove

Theorem 2.4. *The coefficients of the canonical metrical $N-$linear connection* $D\Gamma\left(N\right)=\left(\overset{H}{\underset{(00)}{L}}{}^{a}{}_{bc}, \overset{V_\beta}{\underset{(\beta 0)}{L}}{}^{a}{}_{bc}, \overset{H}{\underset{(01)}{C}}{}^{a}{}_{bc}, \overset{V_\beta}{\underset{(\beta 1)}{C}}{}^{a}{}_{bc}, ..., \overset{H}{\underset{(0k)}{C}}{}^{a}{}_{bc}, \overset{V_\beta}{\underset{(\beta k)}{C}}{}^{a}{}_{bc}\right)$, $(\beta=1,...,k)$ *satisfy the equations*

$$
\begin{aligned}
&\overset{V_1}{\underset{(10)}{L}}{}^{a}{}_{bc}=\overset{H}{\underset{(00)}{L}}{}^{a}{}_{bc}+\delta^a_b\sigma_c+\delta^a_c\sigma_b-g_{bc}g^{ad}\sigma_\alpha,\\
&\overset{V_2}{\underset{(20)}{L}}{}^{a}{}_{bc}=\overset{V_2}{\underset{(10)}{L}}{}^{a}{}_{bc}+\delta^a_b\sigma_c+\delta^a_c\sigma_b-g_{bc}g^{ad}\sigma_\alpha,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\overset{V_k}{\underset{(k0)}{L}}{}^{a}{}_{bc}=\overset{V_{k-1}}{\underset{(k-10)}{L}}{}^{a}{}_{bc}+\delta^a_b\sigma_c+\delta^a_c\sigma_b-g_{bc}g^{ad}\sigma_\alpha,\\
&\overset{V_1}{\underset{(11)}{C}}{}^{a}{}_{bc}=\overset{H}{\underset{(01)}{C}}{}^{a}{}_{bc}+\delta^a_b\sigma_c+\delta^a_c\sigma_b-g_{bc}g^{ad}\sigma_\alpha,\\
&\overset{V_2}{\underset{(21)}{C}}{}^{a}{}_{bc}=\overset{V_1}{\underset{(11)}{C}}{}^{a}{}_{bc}+\delta^a_b\sigma_c+\delta^a_c\sigma_b-g_{bc}g^{ad}\sigma_\alpha,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\overset{V_k}{\underset{(k1)}{C}}{}^{a}{}_{bc}=\overset{V_{k-1}}{\underset{(k-11)}{C}}{}^{a}{}_{bc}+\delta^a_b\sigma_c+\delta^a_c\sigma_b-g_{bc}g^{ad}\sigma_\alpha,\\
&\overset{H}{\underset{(0\gamma)}{C}}{}^{a}{}_{bc}=\overset{V_1}{\underset{(1\gamma)}{C}}{}^{a}{}_{bc}=...=\overset{V_k}{\underset{(k\gamma)}{C}}{}^{a}{}_{bc}=0,\quad(\gamma=2,...,k).
\end{aligned}
\tag{2.12}
$$

The particular form (2.12) of the canonical metrical $N-$linear connection shows that the curvature of the v_k-connection $\left(\overset{V_k}{\underset{(k0)}{L}}{}^{a}{}_{bc}, \overset{V_k}{\underset{(k1)}{C}}{}^{a}{}_{bc}, ..., \overset{V_k}{\underset{(kk)}{C}}{}^{a}{}_{bc}\right)$ lead to the Weyl's conformal curvature tensor with respect to the curvature of the $v_{k-1}-$connection $\left(\overset{V_{k-1}}{\underset{(k-10)}{L}}{}^{a}{}_{bc}, \overset{Vk-1}{\underset{(k-11)}{C}}{}^{a}{}_{bc}, ..., \overset{Vk-1}{\underset{(k-1k)}{C}}{}^{a}{}_{bc}\right)$, ...,and the curvature of the v_1-connection $\left(\overset{V_1}{\underset{(10)}{L}}{}^{a}{}_{bc}, \overset{V_1}{\underset{(11)}{C}}{}^{a}{}_{bc}, ..., \overset{V_2}{\underset{(1k)}{C}}{}^{a}{}_{bc}\right)$ lead to the Weyl's conformal curvature of the $h-$connection $\left(\overset{H}{\underset{(00)}{L}}{}^{a}{}_{bc}, \overset{H}{\underset{(01)}{C}}{}^{a}{}_{bc}, ..., \overset{H}{\underset{(0k)}{C}}{}^{a}{}_{bc}\right)$.

This property shows the necessity to construct a gauge theory in the Asanov sense, [1], for the Riemannian metric given on $\widetilde{T^kM}$ by the prolongation $\overset{\circ}{\mathbf{G}}$, from (4.1).

Now, we remark that the almost $(k-1)\,n-$contact structure $\mathbf{F}$ defined in (1.14) has not the property of homogeneity. The $\mathcal{F}\left(\widetilde{T^kM}\right)-$linear mapping $\mathbf{F}:\chi\left(\widetilde{T^kM}\right)\to\chi\left(\widetilde{T^kM}\right)$, applies the $1-$homogeneous vector field δ_a into the $(1-k)-$homogeneous vector field $\delta_{ka}=\dot{\partial}_{ka},(a=1,...,n)$.

Therefore, we consider the $\mathcal{F}\left(\widetilde{T^kM}\right)-$linear mapping $\overset{\circ}{\mathbf{F}}:\chi\left(\widetilde{T^kM}\right)\to\chi\left(\widetilde{T^kM}\right)$, given in the adapted basis by

$$
\overset{\circ}{\mathbf{F}}\left(\delta_a\right)=-\frac{\left\|y^{(1)}\right\|^k}{\mathbf{a}^k}\dot{\partial}_{ka},
\tag{2.13}
$$
$$
\overset{\circ}{\mathbf{F}}\left(\delta_{1a}\right)=...=\overset{\circ}{\mathbf{F}}\left(\delta_{k-1a}\right)=0,
$$

$$\overset{\circ}{\mathbf{F}}\left(\dot{\partial}_{ka}\right) = \frac{\mathbf{a}^k}{\left\|y^{(1)}\right\|^k}\delta_a.$$

By direct calculus, we can prove:

Theorem 2.5. $\overset{\circ}{\mathbf{F}}$ *has the following properties:*

1. $\overset{\circ}{\mathbf{F}}$ *is a tensor field of type* (1.1) *on* $\left(\widetilde{T^kM}\right)$.

2. $\overset{\circ}{\mathbf{F}}$ *is an almost* $(k-1)\,n-$*contact structure on* $\widetilde{T^kM} : \mathbf{F}^3 + \mathbf{F} = 0$.

3. $\overset{\circ}{\mathbf{F}}$ *depends only the fundamental function* $F\left(x, y^{(1)}\right)$ *of the Finsler space* F^n.

4. $\overset{\circ}{\mathbf{F}}$ *is homogeneous on the fibres on* $\widetilde{T^kM}$.

5. *The pair* $\left(\overset{\circ}{\mathbf{G}}, \overset{\circ}{\mathbf{F}}\right)$ *is a metrical* $(k-1)\,n-$*contact structure on* $\widetilde{T^kM}$:

$$\overset{\circ}{\mathbf{G}}\left(\overset{\circ}{\mathbf{F}}X, Y\right) = -\overset{\circ}{\mathbf{G}}\left(X, \overset{\circ}{\mathbf{F}}Y\right), \quad \forall X, Y \in \chi\left(\widetilde{T^kM}\right).$$

The space $\left(\widetilde{T^kM}, \overset{\circ}{\mathbf{G}}, \overset{\circ}{\mathbf{F}}\right)$ is **the geometrical model** of the Finsler space $F^n = (M, F)$, with respect to the homogeneous lift $\overset{\circ}{\mathbf{G}}$ given by (2.1). It can be used for studying the Finslerian higher order gauge theory and, in general, the geometry of the Finsler space $F^n = (M, F)$.

References

[1] Asanov, G.S., Finsler Geometry, Relativity and Gauge Theory, D. Reidel Publ. Co., Dordrecht, 1985.

[2] Atanasiu, Gh., New aspects in the Differential Geometry of the second order, Sem. de Mecanica, Univ. de Vest din Timisoara, Nr. 82, 2001, 1-81.

[3] Atanasiu, Gh., The Homogeneous Prolongation to the Second Order Tangent Bundle T^2M of a Riemannian Metric, Libertas Mathematica, Texas, Vol.XXI4, 2004, 11-20.

[4] Atanasiu, Gh., Linear Connections in the Differential Geometry of Order two, in vol. Lagrange and Hamilton Geometries and Their Applications (R. Miron-Ed.) Handbooks. Treatises. Monographs. Fair Partners Publ., Bucureşti, 49, 2004, 11-30.

[5] Atanasiu, Gh., Linear Connections in the Higher-Order Differential Geometry, Proc. of Int. Conf. "Physical Interpretations of Relativity Theory", 04-07. July 2005, Dep of Physics, Bauman Moscow State Tech. Univ. (to appear).

[6] Atanasiu, Gh., The Homogeneous Prolongation to the Second Order Tangent Bundle T^2M of a Finsler Metric, The 7th Int. Workshop on Diff. Geom. and Top. and its Appl., Inst. de Mat. Acad. Română, 4-11 sept., 2005 (to appear)

[7] Čomić, I., The Curvature Theory of Generalized Connection in $\mathrm{Osc}^2\mathrm{M}$, Balkan J. Geom. and Its Appl., Vol. 1, No. 1, 1996, 21-29.

[8] Čomić, I., Atanasiu, Gh., and Stoica, E., The Generalized Connection in $\mathrm{Osc}^3\mathrm{M}$, Annales Univ. Sci. Budapest, 41, 1998, 39-54.

[9] Čomić, I., Kawaguchi, H., Different structures in the geometries of Osc^3M introduced by R. Miron and Gh. Atanasiu, The 37-th Symposium on Finsler Geometry at Tsukuba; The 6-th Int. Conf. of Tensor Society on Diff. Geom & its Appl., 5-9 Aug., 2002, 73-81.

[10] Miron, R., The Geometry of Higher Order Lagrange Spaces. Applicatios to Mechanics and Physics, Kluwer Acad. Publ., FTPH, No. 82, 1997.

[11] Miron, R. and Atanasiu, Gh., Compendium on the Higher-Order Lagrange Spaces: The Geometry of k-osculator Bundles. Prolongation of the Riemannian, Finslerian and Lagrangian Structures. Lagrange Spaces, Tensor N.S. 53, 1993, 39-57.

[12] Miron, R. et Atanasiu, Gh., Compendium sur les espaces Lagrange d'ordre supérieur: La géométrie du fibré k-osculateur; Le prolongement des structures Riemanniennes, Finsleriennes et Lagrangiennes; Les espaces Lagrange $\mathrm{L}^{(k)n}$, Univ. Timisoara, Seminarul de Mecanica, no. 40, 1994.

[13] Miron, R. and Atanasiu, Gh., Lagrange Geometry of Second Order, Math. Comput. Modelling vol. 20, no. 4, 1994, 41-56.

[14] Miron, R. and Atanasiu, Gh., Differential Geometry of the k-osculator Bundle, Rev. Roumaine Math. Pures et Appl., T. 41, No. 3-4, 1996, 205-236.

[15] Miron, R. and Atanasiu, Gh., Prolongation of the Riemannian, Finslerian and Lagrangian Structures, Rev. Roumaine Math. Pures et Appl., T. 41, No. 3-4, 1996, 237-249.

[16] Miron, R. and Atanasiu, Gh., Higher-order Lagrange Spaces, Rev. Roumaine Math. Pures et Appl., T. 41, No. 3-4, 1996, 251-263.

[17] Miron, R. and Atanasiu, Gh., Geometrical Theory of Gravitational and Electromagnetic Fields in the Higher-order Lagrange Spaces, Tsukuba J. Math., Vol. 20, No. 1, 1996, 137-149.

[18] Morimoto, A., Prolongations of Geometric Stuctures, Nagoya Math.Jour., 32,1968,67-108.

[19] Yano, K. and Ishihara, S., Tangent and Cotangent Bundles. Differential Geometry, M.Dekker, Inc., New-York, 1973.

THE 2-COTANGENT BUNDLE WITH BERWALD-MOOR METRIC

Gheorghe Atanasiu & Vladimir Balan

Department of Algebra and Geometry, Transilvania University, Brasov, Romania
gh_ atanasiu@yahoo.com, g.atanasiu@unitbv.ro

University Politehnica of Bucharest, Department Mathematics I, Bucharest, Romania
vbalan@mathem.pub.ro

On the total space of the dual bundle $(T^{*2}M, \pi^{*2}, M)$ of the 2-tangent bundle (T^2M, π^2, M), the paper develops results related to the notions: of nonlinear connection, distinguished tensor fields, almost contact structure, Riemannian structures, $N-$linear connections and associated convariant derivations. The Ricci identities are derived and the local expressions of the corresponding $d-$tensors of torsion and curvature are provided. Further, the metric structures and the metric $N-$linear connections are studied, and the obtained results are specialized to the case when the metric tensor field is of Berwald-Moor type.

Mathematics Subject Classification: 53B40, 53C60, 53C07, 53B21.

1 The dual bundle $(T^{*2}M, \pi^{*2}, M)$ of the 2-tangent bundle (T^2M, π^2, M)

Let M be a real differentiable manifold of dimension n. A point of M will be denoted by x and its local coordinates in a chart (U, φ), as $\varphi(x) = (x^a)$. The indices $a, b, ...$ will further run over the set $\{1, ..., n\}$ and the Einstein convention of transvection will be adapted all over this work. Let (TM, π, M) be the tangent bundle of the manifold M and let (T^*M, π^*, M) be its cotangent bundle ([7], [9]).

Definition 1.1. We call *the dual bundle* of the $2-$tangent bundle (T^2M, π^2, M), the differentiable bundle $(T^{*2}M, \pi^{*2}, M)$ whose total space is

$$T^{*2}M = TM \ \times_M \ T^*M \tag{1.1}$$

Sometimes we shall denote $(T^{*2}M, \pi^{*2}, M)$ briefly by $T^{*2}M$. A point $u \in T^{*2}M$ will be denoted by $u = (x, y, p)$, having the local coordinates (x^a, y^a, p_a). The projection is given by $\pi^{*2}(u) = \pi^{*2}(x, y, p) = x$. Evidently, we take the projections on the factors of the fibered product of (1.1): $\pi^{*2}_1 : T^{*2}M \to TM$, $\pi : TM \to M$ as being $\pi^{*2}_1(x, y, p) = (x, y)$ and $\pi^*(x, y) = x$; also, $\overline{\pi}^* : T^{*2}M \longrightarrow T^*M$ is given by $\overline{\pi}^*(u) = \overline{\pi}^*(x, y, p) = (x, p)$.

The change of local coordinates on the manifold $T^{*2}M$ is:

$$\begin{cases} \tilde{x}^a = \tilde{x}^a(x^1, ..., x^n), \quad \det\left(\dfrac{\partial \tilde{x}^a}{\partial x^b}\right) \neq 0, \\ \tilde{y}^a = \dfrac{\partial \tilde{x}^a}{\partial x^b} y^b, \\ \widetilde{p}_a = \dfrac{\partial x^b}{\partial \tilde{x}^a} p_b. \end{cases} \tag{1.2}$$

The dimension of the manifold $T^{*2}M$ is $3n$.

The null section $O : M \to T^{*2}M$ of the projection π^{*2} is defined by $O : (x) \in M \to (x, 0, 0) \in T^{*2}M$, where we denote $\widetilde{T^{*2}M} = T^{*2}M \setminus \{0\}$.

Let us consider the tangent bundle of the differentiable manifold $T^{*2}M$, $(TT^{*2}M, \tau^{*2}, T^{*2}M)$, where τ^{*2} is the canonical projection and the vertical distribution $V : u \in T^{*2}M \longrightarrow V(u) \subset T_uT^{*2}M$ generated by the vector fields $\left\{\frac{\partial}{\partial y^a}|_u, \frac{\partial}{\partial p_a}|_u\right\}$, $\forall u \in T^{*2}M$. We shall denote the natural basis as

$$\partial_a = \frac{\partial}{\partial x^a}, \quad \dot{\partial}_a = \frac{\partial}{\partial y^a}, \quad \dot{\partial}^a = \frac{\partial}{\partial p_a}.$$

By means of (1.2), we can consider the following subdistributions of V :

$$V_1 : u \in T^{*2}M \longrightarrow V_1(u) \subset T_uT^{*2}M,$$

and

$$W_2 : u \in T^{*2}M \longrightarrow W_2(u) \subset T_uT^{*2}M,$$

locally generated by the vector fields $\left\{\dot{\partial}_a \mid_u, \ u \in T^{*2}M\right\}$ and $\left\{\dot{\partial}^a \mid_u, u \in T^{*2}M\right\}$ respectively. Clearly,we have

$$V(u) = V_1(u) \oplus W_2(u), \quad \forall u \in T^{*2}M. \tag{1.3}$$

Let us consider the following forms

$$\omega = p_a dx^a \text{ (Liouville 1-form), and} \quad \theta = d\omega = dp_a \wedge dx^a.$$

Theorem 1.1 1°. *The differential forms ω and θ are globally defined on the manifold $T^{*2}M$.*
2°. *The 2-form θ is closed and the rank of the form θ is $2n$.*
3°. *The form θ provides a is a presymplectic structure on $T^{*2}M$.*

We note that the following $\mathcal{F}(T^{*2}M)-$linear mapping

$$J : \mathcal{X}(T^{*2}M) \to \mathcal{X}(T^{*2}M),$$

defined by

$$J(\partial_a) = \dot{\partial}_a, \quad J(\dot{\partial}_a) = 0, \quad J(\dot{\partial}^a) = 0, \quad \forall u \in \widetilde{T^{*2}M},$$

has geometrical meaning. It is not difficult to prove the following result:

Theorem 1.2 1°. *J is a tensor field of type $(1,1)$ on the manifold $T^{*2}M$.*
2°. *J is a tangent structure on $T^{*2}M$, i.e., $J_0J = 0$.*
3°. *J is an integrable structure.*
4°. $J_0J = J^2 = 0$.
5°. *Ker* $J = V_1 \oplus W_2$, $\operatorname{Im} J = V_1$.

With these object fields we can construct the geometry of the manifold $T^{*2}M$.

2 Nonlinear connections on $T^{*2}M$

We extend the classical definition of the nonlinear connection ([11]) to the total space of the dual bundle $(T^{*2}M, \pi^{*2}, M)$.

Definition 2.1 A nonlinear connection of the manifold $T^{*2}M$ is a regular distribution N on $T^{*2}M$, supplimentary to the vertical distribution V, i.e.,

$$T_uT^{*2}M = N(u) \oplus V(u), \forall u \in T^{*2}M. \tag{2.1}$$

Taking into account (1.3), it follows that the distribution N has the property

$$T_uT^{*2}M = N(u) \oplus V_1(u) \oplus W_2(u), \forall u \in T^{*2}M. \tag{2.2}$$

Therefore, the main geometrical objects on $T^{*2}M$ will be reported to the direct sum (2.2) of vector spaces.

We denote by

$$\left\{ \frac{\delta}{\delta x^a}, \frac{\partial}{\partial y^a}, \frac{\partial}{\partial p_a} \right\}, \quad (a = 1, ..., n), \tag{2.3}$$

a local basis adapted to N, V_1, W_2. Clearly, we have

$$\frac{\delta}{\delta x^a} = \frac{\partial}{\partial x^a} - N^b_{\ a}\frac{\partial}{\partial y^b} + N_{ab}\frac{\partial}{\partial p_b}. \tag{2.4}$$

The system of functions $(N^b_{\ a}(x,y,p), N_{ab}(x,y,p))$ form the *coefficients* of the nonlinear connection N.

With respect to the coordinate transformations (1.2), we have the rule of change:

$$\frac{\delta}{\delta x^a} = \frac{\partial \tilde{x}^b}{\partial x^a}\frac{\delta}{\delta \tilde{x}^b}, \quad \frac{\partial}{\partial y^a} = \frac{\partial \tilde{x}^b}{\partial x^a}\frac{\partial}{\partial \tilde{y}^b}, \quad \frac{\partial}{\partial p_a} = \frac{\partial x^a}{\partial \tilde{x}^b}\frac{\partial}{\partial \widetilde{p}_b} \tag{2.5}$$

Theorem 2.1 *With respect to (1.2), the coefficients (N^a_b, N_{ab}) of a nonlinear connection N on $T^{*2}M$ obey the rule*

$$\begin{aligned} \widetilde{N}^a_{\ c}\frac{\partial \tilde{x}^c}{\partial x^b} &= N^c_{\ b}\frac{\partial \tilde{x}^a}{\partial x^c} - \frac{\partial \tilde{y}^a}{\partial x^b}, \\ \widetilde{N}_{ab} &= \frac{\partial x^c}{\partial \tilde{x}^a}\frac{\partial x^d}{\partial \tilde{x}^b}N_{cd} + p_c\frac{\partial^2 x^c}{\partial \tilde{x}^a \partial \tilde{x}^b}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Conversely, if the system of functions (N^a_b, N_{ab}) are given on the every domain of local chart of the manifold $T^{*2}M$, such that the equations (2.6 hold, then (N^a_b, N_{ab}) are the coefficients of a nonlinear connection on $T^{*2}M$.

Assuming that the manifold M is paracompact it follows that the manifold $T^{*2}M$ is paracompact, too. Let $\gamma_{ab}(x),\ x \in M$ be a Riemannian metric on M and $\gamma^a_{bc}(x)$ be its Christoffel symbols. Setting

$$f_b = \gamma^a_{bc}(x)p_a y^c.$$

Then, the system of functions

$$N^a_b = \dot{\partial}^a f_b, \quad N_{ab} = \dot{\partial}_b f_a, \tag{2.7}$$

are geometrical object fields on $T^{*2}M$, having the rules of transformations (2.6), with respect to the change of local coordinates (1.2). Hence we get the following

Theorem 2.2 *If the base manifold M is paracompact, then there exists a nonlinear connection on the manifold $T^{*2}M$.*

We shall further denote the basis (2.3) by:

$$\left\{ \delta_a, \dot{\partial}_a, \dot{\partial}^a \right\}.$$

The dual basis of the adapted basis (2.3) is given by

$$\{dx^a, \delta y^a, \delta p_a\}, \tag{2.8}$$

where

$$\delta y^a = dy^a + N^a_b dx^b,\ \delta p_a = dp_a - N_{ba}dx^b.$$

With respect to (1.2), the covector fields (2.8) are transformed by the rules:

$$d\tilde{x}^a = \frac{\partial \tilde{x}^a}{\partial x^b}dx^b,\ \delta\tilde{y}^a = \frac{\partial \tilde{x}^a}{\partial x^b}\delta y^b,\ \delta\widetilde{p}_a = \frac{\partial x^b}{\partial \tilde{x}^a}\delta p_b.$$

3 Distinguished vector and covector fields. The Algebra of distinguished tensor fields.

Let N be a nonlinear connection on $T^{*2}M$. Let h, v_1, w_2 be the projectors defined by the distributions N, V_1, W_2 of the direct decomposition (2.2). We have

$$\begin{gathered} h + v_1 + w_2 = I,\ h^2 = h,\ v_1^2 = v_1,\ w_2^2 = w_2, \\ h \circ v_1 = v_1 \circ h = 0,\ h \circ w_2 = w_2 \circ h = 0,\ v_1 \circ w_2 = w_2 \circ v_1 = 0. \end{gathered} \tag{3.1}$$

If $X \in \chi(\widetilde{T^{*2}M})$, then we denote

$$X^H = hX,\ X^{V_1} = v_1 X,\ X^{W_2} = w_2 X.$$

Therefore we have the unique decomposition

$$X = X^H + X^{V_1} + X^{W_2}. \tag{3.2}$$

Each of the components X^H, X^{V_1}, X^{W_2} are called $d-$*vector fields* on $\widetilde{T^{*2}M}$.

In the adapted basis (2.3) we get

$$X^H = X^{(0)a}\delta_a, \quad X^{V_1} = X^{(1)a}\dot{\partial}_a, \quad X^{W_2} = \underset{(2)}{X}_a \dot{\partial}^a.$$

By means of (2.5) we have

$$\widetilde{X}^{(0)a} = \frac{\partial \tilde{x}^a}{\partial x^b} X^{(0)b}, \quad \widetilde{X}^{(1)a} = \frac{\partial \tilde{x}^a}{\partial x^b} X^{(1)b}, \quad \underset{(2)}{\widetilde{X}}_a = \frac{\partial x^b}{\partial \tilde{x}^a} \underset{(2)}{X}_b,$$

i.e., the classical rules of the transformations of the local coordinates of vector and covector fields on M. Therefore, $X^{(0)a}, X^{(1)a}$ are called $d-$*vector fields* and $\underset{(2)}{X}_a$ is called a $d-$*covector field* on the manifold $T^{*2}M$.

A similar theory can be done for distinguished $1-$forms.

With respect to the direct decomposition (2.2) a $1-$form $\omega \in \chi^*(T^{*2}M)$ can be uniquely written in the form:

$$\omega = \omega^H + \omega^{V_1} + \omega^{W_2},$$

where

$$\omega^H = \omega \circ h, \quad \omega^{V_1} = \omega \circ v_1, \quad \omega^{W_2} = \omega \circ w_2.$$

In the adapted cobasis (2.8), we have

$$\omega = \underset{(0)}{\omega}_a dx^a + \underset{(1)}{\omega}_a \delta y^a + \omega^{(2)a}\delta p_a.$$

The quantities $\omega^H, \omega^{V_1}, \omega^{W_2}$ are called $d-1-$*forms*. The coefficients $\underset{(0)}{\omega}_a, \underset{(1)}{\omega}_a, \omega^{(2)a}$ are transformed by (1.2) as follows:

$$\underset{(0)}{\omega}_a = \frac{\partial \tilde{x}^b}{\partial x^a} \underset{(0)}{\widetilde{\omega}}_a, \quad \underset{(1)}{\omega}_a = \frac{\partial \tilde{x}^b}{\partial x^a} \underset{(1)}{\widetilde{\omega}}_b, \quad \widetilde{\omega}^{(2)a} = \frac{\partial \tilde{x}^a}{\partial x^b} \omega^{(2)b}.$$

Hence $\underset{(0)}{\omega}_a$ and $\underset{(1)}{\omega}_a$ are called $d-$*covector fields* and $\omega^{(2)a}$ is called a $d-$*vector field.*

Definition 3.1 A distinguished tensor (briefly, *$d-$tensor field*) on the manifold $T^{*2}M$ is a $d-$tensor field T of type (r,s) on $T^{*2}M$, with the property

$$T(\overset{1}{\omega},...,\overset{r}{\omega},\ \underset{1}{X},...,\underset{s}{X}) \quad = T(\overset{1}{\omega}^{H},...,\overset{r}{\omega}^{W_2},\ \underset{1}{X}^{H},...,\underset{s}{X}^{W_2}),$$
$$\forall \overset{1}{\omega},...,\overset{r}{\omega} \in \chi^*(T^{*2}M),\ \forall \underset{1}{X},...,\underset{s}{X} \in \chi(T^{*2}M).$$

For instance, every set of components X^H, X^{V_1}, X^{W_2} of a vector field X forms a $d-$tensor field of type $(1,0)$, and every set of components $\omega^H, \omega^{V_1}, \omega^{W_2}$ of a $1-$form ω is a $d-$tensor field of type $(0,1)$.

In the adapted basis $(\delta_a, \dot{\partial}_a, \dot{\partial}^a)$ and its dual basis $(dx^a, \delta y^a, \delta p_a)$, a $d-$tensor field T of type (r,s) can written in the form:

$$T = T^{\ a_1...a_r}_{\ b_1...b_s}(x,y,p)\delta_{a_1} \otimes ... \otimes \dot{\partial}^{b_s} \otimes dx^{b_1} \otimes ... \otimes \delta p_{a_r},$$

where

$$T^{\ a_1...a_r}_{\ b_1...b_s}(x,y,p) = T(dx^{b_1},...,\delta p_{a_r}, \delta_{a_1},...,\dot{\partial}^{b_s}).$$

It follows that the set $\left\{1, \delta_a, \dot{\partial}_a, \dot{\partial}^a\right\}$ generates *the algebra* of the $d-$tensor fields over the ring of functions $\mathcal{F}(T^{*2}M)$.

With respect to the transformation of the coordinates on $T^{*2}M$, the local coefficients $T^{\ a_1...a_r}_{\ b_1...b_s}$ of T are transformed by the classical rule

$$\tilde{T}^{\ c_1...c_r}_{\ d_1...d_s} = \frac{\partial \tilde{x}^{c_1}}{\partial x^{a_1}} ... \frac{\partial \tilde{x}^{c_r}}{\partial x^{a_r}} \frac{\partial x^{b_1}}{\partial \tilde{x}^{d_1}} ... \frac{\partial x^{b_s}}{\partial \tilde{x}^{d_s}} T^{\ a_1...a_r}_{\ b_1...b_s}.$$

4 Lie brackets

In applications, the Lie brackets of the vector fields $(\delta_a, \dot{\partial}_a, \dot{\partial}^a)$ of the basis adapted to the direct decomposition (2.2), are important. By a direct calculus, we have:

Proposition 4.1 *The Lie brackets of the vector fields of the adapted basis are given by*

$$\begin{aligned}
[\delta_b, \delta_c] &= \underset{(01)}{R}{}^{a}{}_{bc}\dot{\partial}_a + \underset{(02)}{R}{}_{abc}\dot{\partial}^a,\\
\left[\delta_b, \dot{\partial}_c\right] &= \underset{(11)}{B}{}^{a}{}_{bc}\dot{\partial}_a + \underset{(12)}{B}{}_{abc}\dot{\partial}^a,\\
\left[\delta_b, \dot{\partial}^c\right] &= \underset{(21)}{B}{}^{a}{}_{b}{}^{c}\dot{\partial}_a + \underset{(22)}{B}{}_{ab}{}^{c}\dot{\partial}^a,\\
\left[\dot{\partial}_b, \dot{\partial}_c\right] &= 0,\ \left[\dot{\partial}_b, \dot{\partial}^c\right] = 0,\ \left[\dot{\partial}^b, \dot{\partial}^c\right] = 0,
\end{aligned} \tag{4.1}$$

where

$$\begin{aligned}
&\underset{(01)}{R}{}^{a}{}_{bc} = \delta_c N^a_b - \delta_b N^a_c, && \underset{(02)}{R}{}_{abc} = \delta_b N_{ca} - \delta_c N_{ba},\\
&\underset{(11)}{B}{}^{a}{}_{bc} = \dot{\partial}_c N^a_b, && \underset{(12)}{B}{}_{abc} = -\dot{\partial}_c N_{ba},\\
&\underset{(21)}{B}{}^{a}{}_{b}{}^{c} = \dot{\partial}^c N^a_b, && \underset{(22)}{B}{}_{ab}{}^{c} = -\dot{\partial}^c N_{ba}.
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Let us consider the followings coefficients from (4.1):

$$\underset{(11)}{B}{}^{a}{}_{bc} = \dot{\partial}_c N^a_b, \; -\underset{(22)}{B}{}_{ab}{}^{c} = \dot{\partial}^c N_{ba} \left(= -\underset{(22)}{B}{}^{c}{}_{ab}\right).$$

By means of (2.6) it follows

Proposition 4.2 *The coefficients* $\underset{(11)}{B}{}^{a}{}_{cb} = \underset{(11)}{U}{}^{a}{}_{bc}$, $-\underset{(22)}{B}{}^{a}{}_{bc} = \underset{(22)}{U}{}^{a}{}_{bc}$ *have the same rule of transformation with respect to the local change of coordinates (1.2) on* $T^{*2}M$*. This is*

$$\underset{(\beta\beta)}{\widetilde{U}}{}^{a}{}_{df} \frac{\partial x^d}{\partial x^b} \frac{\partial x^f}{\partial x^c} = \frac{\partial \tilde{x}^a}{\partial x^d} \underset{(\beta\beta)}{U}{}^{d}{}_{bc} - \frac{\partial^2 \tilde{x}^a}{\partial x^b \partial x^c}, \quad (\beta = 1, 2). \tag{4.3}$$

We will see that these coefficients are the horizontal coefficients of an $N-$linear connection on $T^{*2}M$. By straightforward direct computation, we obtain

Proposition 4.3 *The coefficients* $\underset{(01)}{R}{}^{a}{}_{bc}$, $\underset{(02)}{R}{}_{abc}$ *and*

$$\underset{(21)}{B}{}^{a}{}_{b}{}^{c} = \dot{\partial}^c N^a_b, \; \underset{(12)}{B}{}_{abc} = -\dot{\partial}_c N_{ba},$$

are $d-$*tensor fields on* $T^{*2}M$, *of type* $(1,2), (0,3), (2,1)$ *and, respectively,* $(0,3)$, *i.e.,*

$$\underset{(01)}{\widetilde{R}}{}^{d}{}_{cf} = \frac{\partial \tilde{x}^d}{\partial x^a} \frac{\partial x^b}{\partial \tilde{x}^c} \frac{\partial x^c}{\partial \tilde{x}^f} \underset{(01)}{R}{}^{a}{}_{bc}, \; etc.$$

We will see that (4.4) can be the vertical coefficients of $N-$linear connection on $T^{*2}M$.
Also, we have

Proposition 4.4 *For the nonliner connection* $N(N^a{}_b, N_{ab})$ given by (2.7):

$$N^a{}_b = \gamma^a_{bc}(x) y^b, \quad N_{ab} = \gamma^c_{ab}(x) p_c, \tag{4.4}$$

the coefficients (4.2) of Lie brackets have the following expressions:

$$\begin{array}{ll} \underset{(01)}{R}{}^{a}{}_{bc} = r_b{}^a{}_{cd}(x) y^d, & \underset{(02)}{R}{}_{abc} = r_a{}^d{}_{bc}(x) p_d, \\ \underset{(11)}{B}{}^{a}{}_{bc} = \gamma^a_{bc}(x), & \underset{(12)}{B}{}_{abc} = 0, \\ \underset{(21)}{B}{}^{a}{}_{b}{}^{c} = 0, & \underset{(22)}{B}{}_{ab}{}^{c} = -\gamma^c_{ab}(x). \end{array} \tag{4.5}$$

5 The almost contact structure $\mathbb{F}$.

The nonlinear connection N being fixed, we have the direct decomposition (2.1), (2.2) and the corresponding adapted basis (2.3).

Let us consider the $\mathcal{F}(T^{*2}M)-$linear mapping:

$$\mathbb{F} : \chi(T^{*2}M) \longrightarrow \chi(T^{*2}M),$$

determined by

$$\mathbb{F}(\delta_a) = -\dot{\partial}_a, \quad \mathbb{F}(\dot{\partial}_a) = \delta_a, \quad \mathbb{F}(\dot{\partial}^a) = 0. \tag{5.1}$$

Then, we obtain

Theorem 5.1 *The mapping* $\mathbb{F}$ *has the following properties:*
1°. *It is globally defined on* $\widetilde{T^{*2}M}$.
2°. $\mathbb{F}$ *is a tensor field of type* $(1,1)$.
3°. $Ker\, \mathbb{F} = W_2$, $\mathrm{Im}\, \mathbb{F} = N \oplus V_1$.
4°. $rank\, \mathbb{F} = 2n$.
5°. $\mathbb{F}^3 + \mathbb{F} = 0$.

Proof. For $1^\circ - 5^\circ$ see [7, p. 259].

We say that $\mathbb{F}$ is a *natural almost contact structure* determined by the nonlinear connection N.

6 The Riemann structures on $\widetilde{T^{*2}M}$.

Let us consider a Riemannian structure $\mathbb{G}$ on the manifold $\widetilde{T^{*2}M}$.

In the natural basis, $\mathbb{G}$ is given locally by

$$\mathbb{G} = \underset{(00)}{\bar{g}}{}_{ab} dx^a \otimes dx^b + \underset{(01)}{\bar{g}}{}_{ab} dx^a \otimes dy^b + \underset{(02)}{\bar{g}}{}_a{}^b dx^a \otimes dp_b + ... + \underset{(22)}{\bar{g}}{}^{ab} dp_a \otimes dp_b,$$

where the matrix $\| \underset{(\alpha\beta)}{\bar{g}} \|$ is positively defined.

Let $\{\delta_a\}$, $(a = 1, ..., n)$, be the basis adapted to N:

$$\delta_a = \partial_a - N^b{}_a \dot{\partial}_b + N_{ab} \dot{\partial}^b.$$

and let $\{dx^a, \delta y^a, \delta p_a\}$ be the cobasis adapted to N

$$\delta y^a = dy^a + N^a{}_b dx^b, \ \delta p_a = dp_a - N_{ba} dx^b.$$

Then, after a direct calculation, the Riemann structure $\mathbb{G}$ can be written in the adapted cobasis, in the form

$$\mathbb{G} = \underset{(00)}{g}{}_{ab} dx^a \otimes dx^b + \underset{(01)}{g}{}_{ab} dx^a \otimes \delta y^b + \underset{(02)}{g}{}_a{}^b dx^a \otimes \delta p_b + ... + \underset{(22)}{g}{}^{ab} dp_a \otimes \delta p_b, \tag{6.1}$$

where $\underset{(00)}{g}{}_{ab}$, $\underset{(01)}{g}{}_{ab}$, $\underset{(02)}{g}{}_a{}^b$, *etc.*, are expressed by $\underset{(00)}{\bar{g}}{}_{ab}$, $\underset{(01)}{\bar{g}}{}_{ab}$, $\underset{(02)}{\bar{g}}{}_a{}^b$, *etc.* and with the coefficients $N^a{}_b$ and N_{ab} of N given by (4.4).

Let $\mathbb{F}$ be the natural contact structure determined by the nonlinear connection N given by (4.4).

The following problem arises: when is the pair $(\mathbb{G}, \mathbb{F})$ a Riemannian almost contact structure?

For this, it is obviously necessary to have:

$$\mathbb{G}(\mathbb{F}X, Y) = -\mathbb{G}(X, \mathbb{F}Y), \quad \forall X, Y \in \chi(\widetilde{T^{*2}M}).$$

Consequently, we get

Theorem 6.1 *The pair* $(\mathbb{G}, \mathbb{F})$ *is a Riemannian almost contact structure if and only if in the adapted basis determined by* N *and* V *the tensor* $\mathbb{G}$ *has the form*

$$\mathbb{G} = g_{ab} dx^a \otimes dx^b + g_{ab} \delta y^a \otimes \delta y^b + h^{ab} \delta p_a \otimes \delta p_b. \tag{6.2}$$

Corollary 6.1 *With respect to the Riemannian structure (2.3), the distributions* N, V_1, W_2 *are orthogonal in pairs respectively.*

7 $N-$linear connections on $T^{*2}M$

A linear connection on $T^{*2}M$ is an mapping

$$D : \chi(T^{*2}M) \times \chi(T^{*2}M) \to \chi(T^{*2}M), \quad (X, Y) \longmapsto D_X Y,$$

with the properties:

1. $D_{X_1+X_2}Y = D_{X_1}Y + D_{X_2}Y$,
$D_{fX}Y = fD_XY, \quad \forall f \in \mathcal{F}(T^{*2}M), \quad \forall X, X_1, X_2, Y \in \chi(T^{*2}M).$
2. $D_X(Y_1 + Y_2) = D_XY_1 + D_XY_2, \quad \forall X, Y_1, Y_2 \in \chi(T^{*2}M).$
3. $D_X(fY) = (Xf)Y + fD_XY, \quad \forall X, Y \in \chi(T^{*2}M), \quad \forall f \in \mathcal{F}(T^{*2}M).$

We consider $X, Y \in \chi(T^{*2}M)$. With respect to the decomposition of type (3.2), we have

$$D_XY = \sum_{\alpha=0}^{2}(D_{X^H}Y^{V_\alpha} + D_{X^{V_1}}Y^{V_\alpha} + D_{X^{W_2}}Y^{V_\alpha}),$$

where $V_0 = H$ and $V_2 = W_2$.

The components $D_{X^H}Y^{V_\alpha}$, $D_{X^{V_1}}Y^{V_\alpha}$, $D_{X^{W_2}}Y^{V_\alpha}$, $(V_0 = H,\ V_2 = W_2)$, are (not necessarily distinguished) vector fields.

The linear connection D on $T^{*2}M$ is uniquely determined by its 27 sets of coefficients, written in the adapted basis. To work with these 27 sets of coefficients is not imposible, but is laborious. We shall further use $N-$linear connections whose coefficients are much easier to determine and operate with.

Let N be a nonlinear connection on $T^{*2}M$.

Definition 7.1 A linear connection D on $T^{*2}M$ is called an $N-$*linear connection* if it preserves by parallelism the horizontal and the vertical distributions N, V_1 and W_2 on $T^{*2}M$.

By the general theory of connections on manifolds, the horizontal and vertical distributions are preserved by parallelilsm if for any $X \in \chi(T^{*2}M)$, D_X carries the horizontal vector fields to horizontal vector fields and the vertical vector fields to vertical vector fields. Thus D_XY^H is always an horizontal vector field, and $D_XY^{V_\beta}$ are vertical ones, $(\beta = 1, 2;\ V_2 = W_2)$.

Obviously, the local description of an $N-$linear connection $D\Gamma(N)$ on $T^{*2}M$ is given by *nine* unique sets of adapted coefficients:

$$D\Gamma(N) := (\underset{(00)}{H}{}^a{}_{bc}, \underset{(10)}{H}{}^a{}_{bc}, \underset{(20)}{H}{}_a{}^b{}_c, \underset{(01)}{C}{}^a{}_{bc}, \underset{(11)}{C}{}^a{}_{bc}, \underset{(21)}{C}{}_a{}^b{}_c, \underset{(02)}{C}{}^a{}_b{}^c, \underset{(12)}{C}{}^a{}_b{}^c, \underset{(22)}{C}{}_a{}^{bc}),$$

We have

Theorem 7.1 1°. *An $N-$ linear connection D on $T^{*2}M$ can be uniquely represented in the adapted basis $(\delta_a, \dot{\partial}_a, \dot{\partial}^a)$ in the form*

$$\begin{cases} D_{\delta_c}\delta_b = \underset{(00)}{H}{}^a{}_{bc}\delta_a, & D_{\delta_c}\dot{\partial}_b = \underset{(10)}{H}{}^a{}_{bc}\dot{\partial}_a, \quad D_{\delta_c}\dot{\partial}^b = -\underset{(00)}{H}{}_a{}^b{}_c\dot{\partial}^a, \\ D_{\dot{\partial}_c}\delta_b = \underset{(01)}{C}{}^a{}_{bc}\delta_a, & D_{\dot{\partial}_c}\dot{\partial}_b = \underset{(11)}{C}{}^a{}_{bc}\dot{\partial}_a, \quad D_{\dot{\partial}_c}\dot{\partial}^b = -\underset{(21)}{C}{}_a{}^b{}_c\dot{\partial}^a, \\ D_{\dot{\partial}^c}\delta_b = \underset{(02)}{C}{}^a{}_b{}^c\delta_a, & D_{\dot{\partial}^c}\dot{\partial}_b = \underset{(12)}{C}{}^a{}_b{}^c\dot{\partial}_a, \quad D_{\dot{\partial}^c}\dot{\partial}^b = -\underset{(22)}{C}{}_a{}^{bc}\dot{\partial}^a. \end{cases} \tag{7.1}$$

2°. *With respect to the coordinate transformation (1.2), the coefficients* $\underset{(\alpha 0)}{H}{}^{a}{}_{bc}$, $(\alpha=0,1,2;\ \underset{(20)}{H}{}^{a}{}_{bc}:=\underset{(20)}{H}{}_{b}{}^{a}{}_{c})$ *obey the rule of transformation:*

$$\underset{(\alpha 0)}{\widetilde{H}}{}^{a}{}_{de}\frac{\partial\tilde{x}^{d}}{\partial x^{b}}\frac{\partial\tilde{x}^{e}}{\partial x^{c}}=\frac{\partial\tilde{x}^{a}}{\partial x^{e}}\underset{(\alpha 0)}{H}{}^{e}{}_{bc}-\frac{\partial^{2}\tilde{x}^{a}}{\partial x^{b}\partial x^{c}}.$$

3°. *The system of functions* $\underset{(\alpha 1)}{C}{}^{a}{}_{bc},\ \underset{(\alpha 2)}{C}{}^{a}{}_{b}{}^{c},\ \ (\alpha=0,1,2;\ \underset{(21)}{C}{}^{a}{}_{bc}:=\underset{(21)}{C}{}_{b}{}^{a}{}_{c};\ \underset{(22)}{C}{}^{a}{}_{b}{}^{c}:=\underset{(22)}{C}{}_{b}{}^{ac}$ *are* $d-$*tensor fields of type* $(1,2)$ *and* $(2,1)$, *respectively.*

We have the following theorem of existence of $N-$linear connections on $T^{*2}M$.

Theorem 7.2 *If the manifold* M *is paracompact and* N *is a nonlinear connection on* $T^{*2}M$ *with coefficients* N^{a}_{b}, N_{ab}, *then there exists an* $N-$*linear connection on* $T^{*2}M$.

Proof. Since M is paracompact, then there exists a linear connection on M of local coefficients, say $\Gamma^{a}_{bc}(x)$. Let $N^{a}_{b}(x,y,p)$ and $N_{ab}(x,y,p)$ be the local coefficients of the nonlinear connection N. We set $\underset{(00)}{H}{}^{a}{}_{bc}=\Gamma^{a}_{bc}(x),\ \underset{(10)}{H}{}^{a}{}_{bc}=\dot{\partial}_{b}N^{a}_{c},\ \underset{(20)}{H}{}^{a}{}_{bc}=\dot{\partial}^{a}N_{bc}$. Thus, taking into account the previous results, we obtain three sets of functions which transform, with respect to (1.2), by (7.1). It results that $D\Gamma(N)$ given by

$$D\Gamma(N)=(\Gamma^{a}_{bc}(x),\underset{(11)}{B}{}^{a}{}_{cb},-\underset{(22)}{B}{}^{a}{}_{bc},0,0,0,0,0,0),$$

defines an $N-$linear connection on $T^{*2}M$.

In applications, we use the $N-$linear connection of the form

$$B\Gamma(N)=(\underset{(00)}{L}{}^{a}{}_{bc},\underset{(11)}{B}{}^{a}{}_{cb},-\underset{(22)}{B}{}^{a}{}_{bc},0,\underset{(11)}{C}{}^{a}{}_{bc},0,0,0,\underset{(22)}{C}{}_{b}{}^{ac})$$

called $N-$*linear connection of Berwald type on* $T^{*2}M$.

8 The $h_{\alpha}-, v_{1\alpha}-$ and $w_{2\alpha}-$covariant derivatives in the local adapted basis, $(\alpha=0,1,2)$

The $N-$linear connection $D\Gamma(N)$ induces a linear connection on the $d-$tensors set of the 2−cotangent bundle $(T^{*2}M,\pi^{*2},M)$, in a natural way. Thus, starting with a $d-$vector field X and a $d-$tensor field T, locally expressed by

$$X=X^{(0)a}\delta_{a}+X^{(1)a}\dot{\partial}_{a}+\underset{(2)}{X}_{a}\dot{\partial}^{a},$$

$$T=T^{\ a_1\dots a_r}_{\ b_1\dots b_s}(x,y,p)\delta_{a_1}\otimes\dots\otimes\dot{\partial}^{b_s}\otimes dx^{b_1}\otimes\dots\otimes\delta p_{a_r},$$

we can define the covariant derivative

$$\begin{aligned}D_X T=\Big\{&X^{(0)d}T^{\ a_1\dots a_r}_{\ b_1\dots b_s\,\shortmid\alpha d}+\\&+X^{(1)d}T^{\ a_1\dots a_r}_{\ b_1\dots b_s}\,|_{\alpha d}+\underset{(2)}{X}_{d}T^{\ a_1\dots a_r}_{\ b_1\dots b_s}\,|^{\alpha d}\Big\}\,\delta_{a_1}\otimes\dots\otimes\delta p_{a_r},\end{aligned}$$

where

$$T^{\ a_1\dots a_r}_{\ b_1\dots b_s\,\shortmid\alpha d}=\delta_{d}T^{\ a_1\dots a_r}_{\ b_1\dots b_s}+\underset{(\alpha 0)}{H}{}^{a_1}{}_{cd}T^{\ ca_2\dots a_r}_{\ b_1\dots b_s}+\dots+\underset{(\alpha 0)}{H}{}^{a_r}{}_{cd}T^{\ a_1\dots c}_{\ b_1\dots b_s}-$$

$$-\underset{(\alpha 0)}{H}{}^{c}{}_{b_1 d} T^{\ a_1 \dots a_r}_{\ c b_2 \dots b_s} - \dots - \underset{(\alpha 0)}{H}{}^{c}{}_{b_s d} T^{\ a_1 \dots a_r}_{\ b_1 \dots c},$$

$$T^{\ a_1 \dots a_r}_{\ b_1 \dots b_s} |_{\alpha d} = \dot{\partial}_d T^{\ a_1 \dots a_r}_{\ b_1 \dots b_s} + \underset{(\alpha 1)}{C}{}^{a_1}{}_{cd} T^{\ c a_2 \dots a_r}_{\ b_1 \dots b_s} + \dots + \underset{(\alpha 1)}{C}{}^{a_r}{}_{cd} T^{\ a_1 \dots c}_{\ b_1 \dots b_s} -$$
$$- \underset{(\alpha 1)}{C}{}^{c}{}_{b_1 d} T^{\ a_1 \dots a_r}_{\ c b_2 \dots b_s} - \dots - \underset{(\alpha 1)}{C}{}^{c}{}_{b_s d} T^{\ a_1 \dots a_r}_{\ b_1 \dots c},$$

$$T^{\ a_1 \dots a_r}_{\ b_1 \dots b_s} |^{\alpha d} = \dot{\partial}^d T^{\ a_1 \dots a_r}_{\ b_1 \dots b_r} + \underset{(\alpha 2)}{C}{}_{c}{}^{a_1 d} T^{\ c a_2 \dots a_r}_{\ b_1 \dots b_s} + \dots + \underset{(\alpha 2)}{C}{}_{c}{}^{a_r d} T^{\ a_1 \dots c}_{\ b_1 \dots b_s} -$$
$$- \underset{(\alpha 2)}{C}{}_{b_1}{}^{cd} T^{\ a_1 \dots a_r}_{\ c b_2 \dots b_s} - \dots - \underset{(\alpha 2)}{C}{}_{b_s}{}^{cd} T^{\ a_1 \dots a_r}_{\ b_1 \dots c}.$$

Definition 8.1 The local derivative operators "$_{\shortmid \alpha d}$", " $|_{\alpha d}$ " *and* " $|^{\alpha d}$ " are called the $\mathbf{h}_\alpha-, \mathbf{v}_{\mathbf{1}\alpha}-$ ***and*** $\mathbf{w}_{\mathbf{2}\alpha}-$covariant derivatives of $D\Gamma(N), (\alpha = 0, 1, 2)$.

Remark 8.1 (i) In the particular case when T is a function $f(x, y, p)$ on $T^{*2}M$, the preceding covariant derivatives reduce to

$$f_{\shortmid \alpha d} = \delta_d f = \partial_d f - N^c{}_d \dot{\partial}_c,$$
$$f\ |_{\alpha d} = \dot{\partial}_d f, \quad f\ |^{\alpha d} = \dot{\partial}^d f, \quad \forall f \in \mathcal{F}(T^{*2}M).$$

(ii) Considering the $d-$tensor $T = Y$ as a $d-$tensor on $T^{*2}M$, locally expressed by

$$Y = Y^{(0)a}\delta_a + Y^{(1)a}\dot{\partial}_a + \underset{(2)}{Y}{}_a \dot{\partial}^a,$$

the following expressions of local covariant derivatives of $D\Gamma(N)$ hold good:

$$Y^{(0)a}{}_{\shortmid \alpha c} = \delta_c Y^{(0)a} + Y^{(0)b} \underset{(\alpha 0)}{H}{}^{a}{}_{bc}, Y^{(1)a}{}_{\shortmid \alpha c} = \delta_c Y^{(1)a} + Y^{(1)b} \underset{(\alpha 0)}{H}{}^{a}{}_{bc},$$
$$\underset{(2)}{Y}{}_{b \shortmid \alpha c} = \delta_c \underset{(2)}{Y}{}_b - \underset{(2)}{Y}{}_a \underset{(\alpha 0)}{H}{}^{a}{}_{bc},$$
$$Y^{(0)a}\ |_{\alpha c} = \dot{\partial}_c\ Y^{(0)a} + Y^{(0)b} \underset{(\alpha 1)}{C}{}^{a}{}_{bc}, Y^{(1)a}\ |_{\alpha c} = \dot{\partial}_c\ Y^{(1)a} + Y^{(1)b} \underset{(\alpha 1)}{C}{}^{a}{}_{bc},$$
$$\underset{(2)}{Y}{}_b\ |_{\alpha c} = \dot{\partial}_c \underset{(2)}{Y}{}_b - \underset{(2)}{Y}{}_a \underset{(\alpha 1)}{C}{}^{a}{}_{bc},$$
$$Y^{(0)a}\ |^{\alpha b} = \dot{\partial}^b\ Y^{(0)a} + Y^{(0)c} \underset{(\alpha 2)}{C}{}_{c}{}^{ab}, Y^{(1)a}\ |^{\alpha b} = \dot{\partial}^b\ Y^{(1)a} + Y^{(1)c} \underset{(\alpha 2)}{C}{}_{c}{}^{ab},$$
$$\underset{(2)}{Y}{}_b\ |^{\alpha b} = \dot{\partial}^b \underset{(2)}{Y}{}_c - \underset{(2)}{Y}{}_a \underset{(\alpha 2)}{C}{}_{c}{}^{ab}.$$

Proposition 8.1 *The quantities* $T^{\ a_1 \dots a_r}_{\ b_1 \dots b_s \shortmid \alpha d}$, $T^{\ a_1 \dots a_r}_{\ b_1 \dots b_s}\ |_{\alpha d}$, $T^{\ a_1 \dots a_r}_{\ b_1 \dots b_s}\ |^{\alpha d}$, $(\alpha = 0, 1, 2)$ *are* $d-$*tensor fields on* $T^{*2}M$. *The first six are of type* $(r, s + 1)$, *the last three are of type* $(r + 1, s)$.

9 Ricci identities. Local expressions of $d-$tensors of torsion and curvature

Let $D\Gamma(N)$ be an $N-$linear connection with the coefficients

$$D\Gamma(N) = (\underset{(00)}{H}{}^{a}{}_{bc}, \underset{(10)}{H}{}^{a}{}_{bc}, \underset{(20)}{H}{}^{a}{}_{bc}, \underset{(01)}{C}{}^{a}{}_{bc}, \underset{(11)}{C}{}^{a}{}_{bc}, \underset{(21)}{C}{}^{a}{}_{bc}, \underset{(02)}{C}{}_{a}{}^{bc}, \underset{(12)}{C}{}_{a}{}^{bc}, \underset{(22)}{C}{}_{a}{}^{bc}), \tag{9.1}$$

By a straightforward calculation we obtain:

Theorem 9.1 *For any $N-$linear connection D and any $d-$vector field $X \in \chi(T^{*2}M)$, the following Ricci formulae hold:*

$$
\begin{aligned}
&X^a{}_{|\alpha b|\alpha c} - X^a{}_{|\alpha c|\alpha b} = X^f \underset{(\alpha 00)}{R}{}_f{}^a{}_{bc} - \overset{0}{\underset{(\alpha 0)}{T}}{}^f{}_{bc} X^a{}_{|\alpha f} - \underset{(01)}{R}{}^f{}_{bc} X^a\,|_{\alpha f} - \underset{(02)}{R}{}_{fbc} X^a\,|^{\alpha f},\\
&X^a{}_{|\alpha b}\,|_{\alpha c} - X^a\,|_{\alpha c|\alpha b} = X^f \underset{(\alpha 01)}{R}{}_f{}^a{}_{bc} - \underset{(\alpha 1)}{C}{}^f{}_{bc} X^a{}_{|\alpha f} - \underset{(\alpha 1)}{P}{}^f{}_{bc} X^a\,|_{\alpha f} - \underset{(12)}{B}{}_{fbc} X^a\,|^{\alpha f},\\
&X^a{}_{|\alpha b}\,|^{\alpha c} - X^a\,|^{\alpha c}{}_{|\alpha b} = X^f \underset{(\alpha 02)}{R}{}_f{}^a{}_b{}^c - \underset{(\alpha 2)}{C}{}_b{}^{fc} X^a{}_{|\alpha f} - \underset{(21)}{B}{}^f{}_b{}^c X^a\,|_{\alpha f} - \underset{(\alpha 2)}{P}{}_{fb}{}^c X^a\,|^{\alpha f},\\
&X^a\,|_{\alpha b}|_{\alpha c} - X^a\,|_{\alpha c}|_{\alpha b} = X^f \underset{(\alpha 11)}{R}{}_f{}^a{}_{bc} - \underset{(\alpha 1)}{S}{}^f{}_{bc} X^a\,|_{\alpha f},\\
&X^a\,|_{\alpha b}|^{\alpha c} - X^a\,|^{\alpha c}|_{\alpha b} = X^f \underset{(\alpha 12)}{R}{}_f{}^a{}_b{}^c - \underset{(\alpha 2)}{C}{}_b{}^{fc} X^a\,|_{\alpha f} - \underset{(\alpha 1)}{C}{}^c{}_{fb} X^a\,|^{\alpha f},\\
&X^a\,|^{\alpha b}|^{\alpha c} - X^a\,|^{\alpha c}|^{\alpha b} = X^f \underset{(\alpha 22)}{R}{}_f{}^{abc} - \underset{(\alpha 2)}{S}{}_f{}^{bc} X^a\,|^{\alpha f}, \quad (\alpha = 0,1,2).
\end{aligned}
$$

where all the terms in $\underset{(01)}{R}{}^a{}_{bc}$, $\underset{(02)}{R}{}_{abc}$, $\underset{(12)}{B}{}_{abc}$, $\underset{(21)}{B}{}^a{}_b{}^c$ are known from the Lie brackets (4.1), and the coefficients $D\Gamma(N)$ are given in (9.1).

We further denote

$$
\overset{0}{\underset{(\alpha 0)}{T}}{}^a{}_{bc} = \underset{(\alpha 0)}{H}{}^a{}_{bc} - \underset{(\alpha 0)}{H}{}^a{}_{cb},\ \underset{(\alpha 1)}{P}{}^a{}_{bc} = \underset{(11)}{B}{}^a{}_{bc} - \underset{(\alpha 0)}{H}{}^a{}_{cb},\ \underset{(\alpha 2)}{P}{}_{ab}{}^c = \underset{(22)}{B}{}_{ab}{}^c + \underset{(\alpha 0)}{H}{}^c{}_{ab},
$$

$$
\underset{(\alpha 1)}{S}{}^a{}_{bc} = \underset{(\alpha 1)}{C}{}^a{}_{bc} - \underset{(\alpha 1)}{C}{}^a{}_{cb},\ \underset{(\alpha 2)}{S}{}_a{}^{bc} = -(\underset{(\alpha 2)}{S}{}_a{}^{bc} - \underset{(\alpha 2)}{C}{}_a{}^{cb}),
$$

and $\overset{0}{\underset{(00)}{T}}{}^a{}_{bc}$, $\overset{1}{\underset{(00)}{T}}{}^a{}_{bc}$, $\overset{2}{\underset{(00)}{T}}{}^a{}_{bc}$, $\overset{0}{\underset{(01)}{P}}{}^a{}_{bc}$, $\overset{1}{\underset{(01)}{P}}{}^a{}_{bc}$, $\overset{2}{\underset{(01)}{P}}{}^a{}_{bc}$, $\overset{0}{\underset{(02)}{P}}{}^a{}_{bc}$, $\overset{1}{\underset{(02)}{P}}{}^a{}_{bc}$, $\overset{2}{\underset{(02)}{P}}{}^a{}_{bc}$, $\overset{1}{\underset{(11)}{S}}{}^a{}_{bc}$, $\overset{1}{\underset{(12)}{Q}}{}^a{}_{bc}$, $\overset{2}{\underset{(12)}{Q}}{}_{ab}{}^c$, $\overset{2}{\underset{(22)}{S}}{}_a{}^{bc}$ are called $d-$*tensors of torsion* of D. These are given by:

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\overset{0}{\underset{(00)}{T}}{}^a{}_{bc} = \underset{(00)}{H}{}^a{}_{bc} - \underset{(00)}{H}{}^a{}_{cb},\ \overset{1}{\underset{(00)}{T}}{}^a{}_{bc} = \underset{(01)}{R}{}^a{}_{bc},\ \overset{2}{\underset{(00)}{T}}{}_{abc} = \underset{(02)}{R}{}_{abc},\\
&\overset{0}{\underset{(01)}{P}}{}^a{}_{bc} = \underset{(01)}{C}{}^a{}_{bc},\ \overset{1}{\underset{(01)}{P}}{}^a{}_{bc} = \underset{(11)}{B}{}^a{}_{bc} - \underset{(10)}{H}{}^a{}_{cb},\ \overset{2}{\underset{(01)}{P}}{}_{abc} = \underset{(12)}{B}{}_{abc},\\
&\overset{0}{\underset{(02)}{P}}{}^a{}_b{}^c = \underset{(02)}{C}{}^a{}_b{}^c,\ \overset{1}{\underset{(02)}{P}}{}^a{}_b{}^c = \underset{(21)}{B}{}^a{}_b{}^c,\ \overset{2}{\underset{(02)}{P}}{}_{ab}{}^c = \underset{(22)}{B}{}_{ab}{}^c + \underset{(20)}{H}{}^c{}_{ab},
\end{aligned}
\right.
$$

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\overset{1}{\underset{(11)}{S}}{}^a{}_{bc} = \underset{(11)}{C}{}^a{}_{bc} - \underset{(11)}{C}{}^a{}_{cb}, \qquad \overset{2}{\underset{(22)}{S}}{}_a{}^{bc} = -(\underset{(22)}{C}{}_a{}^{bc} - \underset{(22)}{C}{}_a{}^{cb})\\
&\overset{1}{\underset{(12)}{Q}}{}^a{}_b{}^c = \underset{(12)}{C}{}^a{}_b{}^c =: \underset{(12)}{C}{}^{ac}{}_b,\ \overset{2}{\underset{(12)}{Q}}{}_{ab}{}^c = \underset{(21)}{C}{}_a{}^c{}_b =: \underset{(21)}{C}{}^c{}_{ab}.
\end{aligned}
\right.
$$

We remark that $\underset{(11)}{P}{}^a{}_{bc} = \overset{1}{\underset{(01)}{P}}{}^a{}_{bc}$, $\underset{(22)}{P}{}_{ab}{}^c = \overset{2}{\underset{(02)}{P}}{}_{ab}{}^c$, *etc.* Also, $\underset{(\alpha 00)}{R}$, ..., are called $d-$*tensors of curvature* of D, and they are given by:

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\underset{(\alpha 00)}{R}{}_b{}^a{}_{cd} = \delta_d \underset{(\alpha 0)}{H}{}^a{}_{bc} - \delta_c \underset{(\alpha 0)}{H}{}^a{}_{bd} + \underset{(\alpha 0)}{H}{}^f{}_{bc} \underset{(\alpha 0)}{H}{}^a{}_{fd} - \underset{(\alpha 0)}{H}{}^f{}_{bd} \underset{(\alpha 0)}{H}{}^a{}_{fc} +\\
&\qquad\qquad + C^a{}_{bf} \underset{(\alpha 1)}{} \underset{(01)}{R}{}^f{}_{cd} + \underset{(\alpha 2)}{C}{}_b{}^{af} \underset{(02)}{R}{}_{fcd},\\
&\underset{(\alpha 01)}{R}{}_b{}^a{}_{cd} = \dot{\partial}_d \underset{(\alpha 0)}{H}{}^a{}_{bc} - \underset{(\alpha 1)}{C}{}^a{}_{bd|\alpha c} + \underset{(\alpha 1)}{C}{}^a{}_{bf} \underset{(\alpha 1)}{P}{}^f{}_{bc} + \underset{(\alpha 2)}{C}{}_b{}^{af} \underset{(12)}{B}{}_{fcd},\\
&\underset{(\alpha 02)}{R}{}_b{}^a{}_c{}^d = \dot{\partial}^d \underset{(\alpha 0)}{H}{}^a{}_{bc} - \underset{(\alpha 2)}{C}{}_b{}^{ad}{}_{|\alpha c} + \underset{(\alpha 1)}{C}{}^a{}_{bf} \underset{(21)}{B}{}^f{}_c{}^d + \underset{(\alpha 2)}{C}{}_b{}^{af} \underset{(\alpha 2)}{P}{}_{fc}{}^d, \quad (\alpha = 0,1,2),
\end{aligned}
\right.
$$

$$\begin{cases} \underset{(\alpha 11)}{R}{}_b{}^a{}_{cd} = \dot{\partial}_d \underset{(\alpha 1)}{C}{}^a{}_{bc} - \dot{\partial}_c \underset{(\alpha 1)}{C}{}^a{}_{bd} + \underset{(\alpha 1)}{C}{}^f{}_{bc} \underset{(\alpha 1)}{C}{}^a{}_{fd} - \underset{(\alpha 1)}{C}{}^f{}_{bd} \underset{(\alpha 1)}{C}{}^a{}_{fc}, \\ \underset{(\alpha 12)}{R}{}_b{}^a{}_c{}^d = \dot{\partial}^d \underset{(\alpha 1)}{C}{}^a{}_{bc} - \dot{\partial}_c \underset{(\alpha 2)}{C}{}_b{}^{ad} + \underset{(\alpha 1)}{C}{}^f{}_{bc} \underset{(\alpha 2)}{C}{}_f{}^{ad} - \underset{(\alpha 2)}{C}{}_b{}^{fd} \underset{(\alpha 1)}{C}{}^a{}_{fc}, \\ \underset{(\alpha 22)}{R}{}_b{}^{acd} = \dot{\partial}^d \underset{(\alpha 2)}{C}{}_b{}^{ac} - \dot{\partial}^c \underset{(\alpha 2)}{C}{}_b{}^{ad} + \underset{(\alpha 2)}{C}{}_b{}^{fc} \underset{(\alpha 2)}{C}{}_f{}^{ad} - \underset{(\alpha 2)}{C}{}_b{}^{fd} \underset{(\alpha 2)}{C}{}_f{}^{ac}, \quad (\alpha = 0, 1, 2). \end{cases}$$

10 Metric structures on the manifold $T^{*2}M$. Metric $N-$linear connections

Definition 10.1 A *metric structure* on the manifold $T^{*2}M$ is a symmetric covariant tensor field $\mathbb{G}$ of type (0,2) which is non-degenerate at each point $u \in T^{*2}M$ and of constant signature on $T^{*2}M$. If $\mathbb{G}$ is positive definite we say that it defines a Riemann structure on $T^{*2}M$.

Let us consider a metric structure $\mathbb{G}$ on $T^{*2}M$ for which the distributions N, V_1, W_2 are more general then (6.2), namely we have the decomposition:

$$\mathbb{G}(X, Y) = \mathbb{G}(X^H, Y^H) + \mathbb{G}(X^{V_1}, Y^{V_1}) + \mathbb{G}(X^{W_2}, Y^{W_2}), \quad \forall X, Y \in T^{*2}M. \tag{10.1}$$

In other words, $\mathbb{G}$ decomposes as a sum of three $d-$tensor fields,

(0) $\mathbb{G}^H$ of type $(0,2)$ defined by $\mathbb{G}^H(X, Y) = \mathbb{G}(X^H, Y^H)$,
(1) $\mathbb{G}^{V_1}$ of type $(0,2)$ defined by $\mathbb{G}^{V_1}(X, Y) = \mathbb{G}(X^{V_1}, Y^{V_1})$,
(2) $\mathbb{G}^{W_2}$ of type $(0,2)$ defined by $\mathbb{G}^{W_2}(X, Y) = \mathbb{G}(X^{W_2}, Y^{W_2})$.

Locally, these $d-$tensor fields can be written as

$$\mathbb{G}^H = \underset{(0)}{g}{}_{ab} dx^a \otimes dx^b, \quad \mathbb{G}^{V_1} = \underset{(1)}{g}{}_{ab} \delta y^a \otimes \delta y^b, \quad \mathbb{G}^{W_2} = \underset{(2)}{g}{}^{ab} \delta p_a \otimes \delta p_b,$$

where $\underset{(0)}{g}{}_{ab} = \mathbb{G}(\delta_a, \delta_b)$, $\underset{(1)}{g}{}_{ab} = \mathbb{G}(\dot{\partial}_a, \dot{\partial}_b)$, $\underset{(2)}{g}{}^{ab} = \mathbb{G}(\dot{\partial}^a, \dot{\partial}^b)$, and

$$rank \parallel \underset{(\alpha)}{g}{}_{ab} \parallel = n, \quad (\alpha = 0, 1, 2), \quad \parallel \underset{(2)}{g}{}_{ab} \parallel = \parallel \underset{(2)}{g}{}^{ab} \parallel^{-1}.$$

Thus the decomposition (10.1) looks locally as

$$\mathbb{G} = \underset{(0)}{g}{}_{ab} dx^a \otimes dx^b + \underset{(1)}{g}{}_{ab} \delta y^a \otimes \delta y^b + \underset{(2)}{g}{}^{ab} \delta p_a \otimes \delta p_b. \tag{10.2}$$

Definition 10.2 An $N-$linear connection D on $T^{*2}M$ endowed with a metric structure $\mathbb{G}$ is said to be a *metric $N-$linear connection* if $D_X \mathbb{G} = 0$ for every $X \in T^{*2}M$.

Let $\mathbb{G}$ be a metric structure on $T^{*2}M$ given by (10.2). We have

Proposition 10.2 *An $N-$linear connection on $T^{*2}M$ is a metric $N-$linear connection with respect to $\mathbb{G}$ given by (10.2) if and only if*

$$\underset{(\alpha)}{g}{}_{ab|\alpha c} = 0, \quad \underset{(\alpha)}{g}{}_{ab} |_{\alpha c} = 0, \quad \underset{(\alpha)}{g}{}^{ab} |^{\alpha c} = 0, \tag{10.3}$$

where $\parallel \underset{(\alpha)}{g}{}^{ab} \parallel = \parallel \underset{(\alpha)}{g}{}_{ab} \parallel^{-1}$, $(\alpha = 0, 1, 2)$.

Remark 10.1 The conditions (10.3) are equivalent with the conditions

$$\underset{(\alpha)}{g}{}^{ab}{}_{|\alpha c} = 0, \quad \underset{(\alpha)}{g}{}^{ab} |_{\alpha c} = 0, \quad \underset{(\alpha)}{g}{}_{ab} |^{\alpha c} = 0, \quad (\alpha = 0, 1, 2).$$

We shall now discuss the existence of metric $N-$linear connection on $T^{*2}M$. By straightforward calculation we get

Theorem 10.1 *If the manifold T^*M is endowed with the metric structure $\mathbb{G}$ given by (10.2), then there exists on $T^{*2}M$ a metric $N-$linear connection, depending only on $\mathbb{G}$, whose $h(hh)-$, $v_1(v_1v_1)-$and $w_2(w_2w_2)-$tensors of torsion, $\underset{(00)}{\overset{0}{T}}{}^a{}_{bc}$, $\underset{(11)}{\overset{1}{S}}{}^a{}_{bc}$, $\underset{(22)}{\overset{2}{S}}{}_a{}^{bc}$ vanish. Its local coefficients defined by*

$$D\Gamma(N) := (\underset{(00)}{H}{}^a{}_{bc}, \underset{(10)}{H}{}^a{}_{bc}, \underset{(20)}{H}{}_a{}^b{}_c, \underset{(01)}{C}{}^a{}_{bc}, \underset{(11)}{C}{}^a{}_{bc}, \underset{(21)}{C}{}_a{}^b{}_c, \underset{(02)}{C}{}^a{}_b{}^c, \underset{(12)}{C}{}^a{}_b{}^c, \underset{(22)}{C}{}_a{}^{bc}),$$

are as follows

$$\begin{aligned}
&\underset{(00)}{\overset{c}{H}}{}^a{}_{bc} = \frac{1}{2}\underset{(0)}{g}{}^{ad}(\delta_c \underset{(0)}{g}{}_{bd} + \delta_b \underset{(0)}{g}{}_{dc} - \delta_d \underset{(0)}{g}{}_{bc}),\\
&\underset{(10)}{\overset{c}{H}}{}^a{}_{bc} = \underset{(11)}{B}{}^a{}_{cb} + \frac{1}{2}\underset{(1)}{g}{}^{ad}(\delta_c \underset{(1)}{g}{}_{bd} - \underset{(11)}{B}{}^f{}_{cb}\underset{(1)}{g}{}_{fd} - \underset{(11)}{B}{}^f{}_{cd}\underset{(1)}{g}{}_{bf}),\\
&\underset{(20)}{\overset{c}{H}}{}^a{}_{bc} = -\underset{(22)}{B}{}^a{}_{bc} + \frac{1}{2}\underset{(2)}{g}{}^{ad}(\delta_c \underset{(2)}{g}{}_{bd} + \underset{(22)}{B}{}^f{}_{bc}\underset{(2)}{g}{}_{fd} + \underset{(22)}{B}{}^f{}_{dc}\underset{(2)}{g}{}_{bf}),\\
&\underset{(01)}{\overset{c}{C}}{}^a{}_{bc} = \frac{1}{2}\underset{(0)}{g}{}^{ad}\dot{\partial}_c \underset{(0)}{g}{}_{bd}, \quad \underset{(02)}{\overset{c}{C}}{}_a{}^{bc} = -\frac{1}{2}\underset{(0)}{g}{}_{ad}\dot{\partial}_c \underset{(0)}{g}{}^{bd},\\
&\underset{(11)}{\overset{c}{C}}{}^a{}_{bc} = \frac{1}{2}\underset{(1)}{g}{}^{ad}(\dot{\partial}_c \underset{(1)}{g}{}_{bd} + \dot{\partial}_b \underset{(1)}{g}{}_{dc} - \dot{\partial}_d \underset{(1)}{g}{}_{bc}),\\
&\underset{(21)}{\overset{c}{C}}{}^a{}_{bc} = \frac{1}{2}\underset{(2)}{g}{}^{ad}\dot{\partial}_c \underset{(2)}{g}{}_{bd}, \quad \underset{(12)}{\overset{c}{C}}{}_a{}^{bc} = -\frac{1}{2}\underset{(1)}{g}{}_{ad}\dot{\partial}^c \underset{(1)}{g}{}^{bd},\\
&\underset{(22)}{\overset{c}{C}}{}_a{}^{bc} = -\frac{1}{2}\underset{(2)}{g}{}_{ad}(\dot{\partial}^c \underset{(2)}{g}{}^{bd} + \dot{\partial}^b \underset{(2)}{g}{}^{dc} - \dot{\partial}^d \underset{(2)}{g}{}^{bc}).
\end{aligned} \tag{10.4}$$

Definition 10.3 The metric $N-$linear connection given by (10.4) will be called the *canonical $N-$linear connection associated with $\mathbb{G}$.*

11 Berwald-Moor metrics on the manifold $T^{*2}M$

We further specialize the obtained results to the case when the base manifold is a Space-Time. Then $\dim M = 4$, $\dim T^*M = 8$ and $\dim T^{*2}M = 12$. The nonlinear connection $N = (N^a{}_b, N_{ab})$ given by (4.4), has the coefficients of the Lie brackets of the adapted basis satisfying the relations (4.5). We consider the Riemannian metric on $T^{*2}M$:

$$\mathbb{G} = g_{ab}(x)dx^a \otimes dx^b + g_{ab}(x)\delta y^a \otimes \delta y^b + h^{ab}(y)\delta p_a \otimes \delta p_b$$

where g_{ab} is a Riemannian metric on M and h^{ab} is the dual of the Berwald-Moor type metric

$$h_{ab} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F^2}{\partial y^a \partial y^b}, \quad a, b = \overline{1,4}, \tag{11.1}$$

where $F(y) = \sqrt[4]{|y^1y^2y^3y^4|}$. Then the structure $\mathbb{F}$ given in (5.1) satisfies the relation

$$\mathbb{G}(\mathbb{F}X, Y) = -\mathbb{G}(X, \mathbb{F}Y). \tag{11.2}$$

As well, the following results regarding the canonic $d-$linear connection hold true:

Theorem 11.1 1° *The canonic metrical linear d−connection* $D\overset{c}{\Gamma}(N)$ *has the components*

$$\begin{cases} \underset{(00)}{\overset{c}{H}}{}^a{}_{bc} = \gamma^a_{bc}(x), \ \underset{(10)}{\overset{c}{H}}{}^a{}_{bc} = \gamma^a_{bc}(x), \\ \underset{(20)}{\overset{c}{H}}{}^a{}_{bc} = \dfrac{1}{2}\left\{\gamma^a_{bc}(x) - \gamma^f_{cd}(x)h^{am}\left[y^d(\dot{\partial}_f h_{bm}) + \delta^d_m h_{bf}\right]\right\}, \end{cases}$$

and

$$\underset{(01)}{\overset{c}{C}}{}^a{}_{bc} = 0, \ \underset{(11)}{\overset{c}{C}}{}^a{}_{bc} = 0, \ \underset{(21)}{\overset{c}{C}}{}^a{}_{bc} = \frac{1}{2}h^{ad}\dot{\partial}_c h_{bd}, \ \underset{(02)}{\overset{c}{C}}{}_a{}^{bc} = 0, \ \underset{(12)}{\overset{c}{C}}{}_a{}^{bc} = 0, \ \underset{(22)}{\overset{c}{C}}{}_a{}^{bc} = 0.$$

2°. *The d−tensors of torsion are given by*

$$\begin{array}{l} \underset{(00)}{\overset{0}{T}}{}^a{}_{bc} = 0, \ \underset{(01)}{R}{}^a{}_{bc} = r_b{}^a{}_{cd}(x)y^d, \ \underset{(02)}{R}{}_{abc} = r_a{}^d{}_{bc}(x)p_d, \\ \underset{(01)}{\overset{0}{P}}{}^a{}_{bc} = 0, \ \underset{(01)}{\overset{1}{P}}{}^a{}_{bc} = 0, \ \underset{(01)}{\overset{2}{P}}{}_{abc} = 0, \\ \underset{(02)}{\overset{0}{P}}{}^a{}_b{}^c = 0, \ \underset{(02)}{\overset{1}{P}}{}^a{}_b{}^c = 0, \ \underset{(02)}{\overset{2}{P}}{}_{bc}{}^a = -\gamma^a_{bc}(x) + \underset{(20)}{\overset{c}{H}}{}^a{}_{bc}, \end{array}$$

and $\underset{(11)}{\overset{1}{S}}{}^a{}_{bc} = 0, \ \underset{(22)}{\overset{2}{S}}{}_a{}^{bc} = 0 \ \underset{(12)}{\overset{1}{Q}}{}^a{}_b{}^c = 0, \ \underset{(12)}{\overset{2}{Q}}{}_{bc}{}^a = \dfrac{1}{2}h^{ad}\dot{\partial}_c h_{bd}.$

3° *The d−tensors of curvature are given in the adapted basis by*

$$\begin{cases} \underset{(000)}{R}{}_b{}^a{}_{cd} = r_b{}^a{}_{cd}(x), \ \underset{(100)}{R}{}_b{}^a{}_{cd} = r_b{}^a{}_{cd}(x) \\ \underset{(200)}{R}{}_b{}^a{}_{cd} = \bar{\delta}_d \underset{(20)}{\overset{c}{H}}{}^a{}_{bc} - \bar{\delta}_c \underset{(20)}{\overset{c}{H}}{}^a{}_{bd} + \underset{(20)}{\overset{c}{H}}{}^f{}_{bc} \underset{(20)}{\overset{c}{H}}{}^a{}_{fd} - \underset{(20)}{\overset{c}{H}}{}^f{}_{bd} \underset{(20)}{\overset{c}{H}}{}^a{}_{fc} + \\ \qquad + \dfrac{1}{2}h^{am}(\dot{\partial}_f h_{bm})r_c{}^f{}_{dm}y^m, \end{cases}$$

where $\bar{\delta}_d = \partial_d - N^m{}_d\dot{\partial}_m$ *and*

$$\begin{cases} \underset{(001)}{R}{}_b{}^a{}_{cd} = 0, \ \underset{(101)}{R}{}_b{}^a{}_{cd} = 0 \\ \underset{(201)}{R}{}_b{}^a{}_{cd} = \dot{\partial}_d \underset{(20)}{\overset{c}{H}}{}^a{}_{bc} - \underset{(21)}{\overset{c}{C}}{}^a{}_{bd|2c} + \underset{(21)}{C}{}^a{}_{bf}(\gamma^f_{cd}(x) - \underset{(20)}{\overset{c}{H}}{}^f{}_{dc}), \end{cases}$$

$$\underset{(002)}{R}{}_b{}^a{}_c{}^d = 0, \ \underset{(102)}{R}{}_b{}^a{}_c{}^d = 0, \ \underset{(202)}{R}{}_b{}^a{}_c{}^d = 0,$$

$$\begin{cases} \underset{(011)}{R}{}_b{}^a{}_{cd} = 0, \ \underset{(111)}{R}{}_b{}^a{}_{cd} = 0, \\ \underset{(211)}{R}{}_b{}^a{}_{cd} = \dot{\partial}_d \underset{(21)}{\overset{c}{C}}{}^a{}_{bc} - \dot{\partial}_c \underset{(21)}{\overset{c}{C}}{}^a{}_{bc} + \underset{(21)}{\overset{c}{C}}{}^f{}_{bc} \underset{(21)}{\overset{c}{C}}{}^a{}_{fd} - \underset{(21)}{C}{}^f{}_{bc} \underset{(21)}{C}{}^a{}_{fc} = c_b{}^a{}_{cd}(y), \end{cases}$$

$$\underset{(012)}{R}{}_b{}^a{}_c{}^d = 0, \ \underset{(112)}{R}{}_b{}^a{}_c{}^d = 0, \ \underset{(212)}{R}{}_b{}^a{}_c{}^d = 0,$$
$$\underset{(022)}{R}{}_b{}^{acd} = 0, \ \underset{(122)}{R}{}_b{}^{acd} = 0, \ \underset{(222)}{R}{}_b{}^{acd} = 0$$

If we endow the space T^*M with the metric

$$\mathbb{G} = g_{ab}(x)dx^a \otimes dx^b + g_{ab}(x)\delta y^a \otimes \delta y^b + h^{ab}(p)\delta p_a \otimes \delta p_b,$$

where g_{ab} is a Riemannian metric on M and h^{ab} is the Berwald-Moor type metric

$$h^{ab} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F^2}{\partial p_a \partial p_b}, \quad a,b = \overline{1,4}, \tag{11.3}$$

where $F(y) = \sqrt[4]{|p_1 p_2 p_3 p_4|}$, then the structure $\mathbb{F}$ given in (5.1) satisfies the relation (11.2). As well, we can state the following

Theorem 11.2 *1° The canonic metrical d−connection $D\overset{c}{\Gamma}(N)$ has the components:*

$$\begin{cases} \underset{(00)}{\overset{c}{H}}{}^a{}_{bc} = \gamma^a_{bc}(x), \quad \underset{(10)}{\overset{c}{H}}{}^a{}_{bc} = \gamma^a_{bc}(x) \\ \underset{(20)}{\overset{c}{H}}{}^a{}_{bc} = \gamma^a_{bc}(x) + \dfrac{1}{2}h^{ad}(N_{cf}\dot{\partial}^f h_{bd} - \gamma^f_{bc}h_{fd} - \gamma^f_{dc}h_{bf}), \end{cases}$$

$$\underset{(01)}{\overset{c}{C}}{}^a{}_{bc} = 0, \quad \underset{(11)}{\overset{c}{C}}{}^a{}_{bc} = 0, \quad \underset{(21)}{\overset{c}{C}}{}^a{}_{bc} = 0, \quad \underset{(02)}{\overset{c}{C}}{}_a{}^{bc} = 0, \quad \underset{(12)}{\overset{c}{C}}{}_a{}^{bc} = 0,$$

$$\underset{(22)}{C}{}_a{}^{bc} = -\frac{1}{2}h_{ad}(\dot{\partial}^c h^{bd} + \dot{\partial}^b h^{dc} - \dot{\partial}^d h^{bc}) = \Gamma^{bc}_a(p).$$

2° *The following sets of components of the d−tensors of torsion are nontrivial:*

$$\underset{(01)}{R}{}^a{}_{bc} = r_b{}^a{}_{cd}(x)y^d, \quad \underset{(02)}{R}{}_{abc} = r_a{}^d{}_{bc}(x)p_d, \quad \underset{(02)}{\overset{2}{P}}{}_{ab}{}^c = -\gamma^c_{ab} + \underset{(20)}{\overset{c}{H}}{}^c{}_{ab}.$$

3° *The following sets of components of the d−tensors of curvature are nontrivial:*

$$\underset{(000)}{R}{}_b{}^a{}_{cd} = r_b{}^a{}_{cd}(x), \quad \underset{(100)}{R}{}_b{}^a{}_{cd} = r_b{}^a{}_{cd}(x)$$

$$\underset{(200)}{R}{}_b{}^a{}_{cd} = \tilde{\delta}_d \underset{(20)}{\overset{c}{H}}{}^a{}_{bc} - \tilde{\delta}_c \underset{(20)}{\overset{c}{H}}{}^a{}_{bd} + \underset{(20)}{\overset{c}{H}}{}^f{}_{bc} \underset{(20)}{\overset{c}{H}}{}^a{}_{fd} - \underset{(20)}{H}{}^f{}_{bd} \underset{(20)}{H}{}^a{}_{fc} + \underset{(22)}{C}{}_b{}^{af} \underset{(02)}{R}{}_{fcd},$$

where $\tilde{\delta}_d = \partial_d - N_{df}\dot{\partial}^f$ *and* $\underset{(222)}{R}{}_b{}^{acd} = s_b{}^{acd}(p)$,

$$\underset{(202)}{R}{}_b{}^a{}_c{}^d = \dot{\partial}^d \underset{(20)}{H}{}^a{}_{bc} - \underset{(22)}{C}{}_b{}^{ad}{}_{|2c} + \underset{(22)}{C}{}_b{}^{af}(-\gamma^d_{fc} + \underset{(20)}{H}{}^d{}_{fc}).$$

Acknowledgement. The present work was partially supported by the Grant CNCSIS MEN A1478.

References

[1] G.S. Asanov, *Full anisotropic Finsler metric function. Relativistic aspects*, lecture at The Workshop "Geometry of Finsler spaces with the Berwald-Moor metric", 15-22 October 2005, Cairo, Egipt.

[2] Gh. Atanasiu, V. Balan, M. Neagu, *The 4-poliforms of momenta $K(p) = \sqrt[4]{p_1 p_2 p_3 p_4}$ and its applications in the Hamilton Geometry*, lecture at The Workshop "Geometry of Finsler spaces with the Berwald-Moor metric", 15-22 October 2005, Cairo, Egipt.

[3] Gh. Atanasiu, M. Târnoveanu, *New aspects in the Differential Geometry of the second order Cotangent Bundle*, Sem. de Mecanică, West Univ. of Timisoara, 2005, to appear.

[4] V. Balan, N. Brinzei, *Einstein equations for the Berwald-Moor type Euclidean-locally Minkowski relativistic model*, lecture at The 5-th Conference of Balkan Society of Geometers, Aug. 29-sept.2., 2005, Mangalia, Romania, to appear.

[5] I. Comic, Gh. Atanasiu, E. Stoica, *The Generalized connection in* Osc^3M, Annales Univ. Sci. Budapest (1998), 39-54.

[6] R. Miron, *The Geometry of Higher Order Hamilton Spaces. Applications to Hamilton Mechanics and Physics*, Kluwer Acad. Publ., 2003.

[7] R. Miron, H. Shimada, D. Hrimiuc, V.S. Sabau, *The Geometry of Hamilton and Lagrange Spaces*, Kluwer Acad. Publ., FTPH 118, 2001.

[8] D.G. Pavlov, *Chronometry of the three-dimensional time*, Hypercomplex Numbers in Geometry and Physics, Ed. "Mozet", Russia, 1, 1 (2004), 19-30.

[9] D.G. Pavlov, *Four-dimensional time*, Hypercomplex Numbers in Geometry and Physics, Ed. "Mozet", Russia, 1, 1 (2004), 31-39.

[10] D.G. Pavlov, *Generalization of scalar product axioms*, Hypercomplex Numbers in Geometry and Physics, Ed. "Mozet", Russia, 1, 1 (2004), 5-18.

[11] D.J. Saunders, *The Geometry of Jet Bundles*, Cambridge Univ. Press, 1989.

[12] K. Yano, S. Ishihara, *Tangent and Cotangent Bundles. Differential Geometry*, M. Dekker, Inc., New-York, 1973.

THE BERWALD-MOOR METRIC IN THE TANGENT BUNDLE OF THE SECOND ORDER

Gheorghe Atanasiu & Nicoleta Brinzei

Department of Algebra and Geometry, Transilvania University, Brasov, Romania
gh_ atanasiu@yahoo.com, nico.brinzei@rdslink.ro

As an application of the results of the first author obtained in the papers [1] and [2], the geometry of the second order tangent bundle T^2M (or second order jet bundle J_0^2M) endowed with two special types of metrics compatible with the 2-contact structures is studied. The particularity of these two models is that the horizontal and the $v^{(1)}$- part of the metric are both given by the same Riemannian metric (respectively, its horizontal part is Riemannian), while its $v^{(2)}$-part is given by the flag-Finsler Berwald-Moor metric (respectively, the $v^{(1)}$ and $v^{(2)}$- parts are given by the flag-Finsler Berwald-Moor metric [5]).

MSC2000: 53C60, 58B20, 70G45.

1 The 2-Tangent Bundle T^2M

Let M be a real 4-dimensional manifold of class $\mathcal{C}^\infty$, (T^2M, π^2, M) its second order tangent bundle, [1], and let $\widetilde{T^2M}$ be the space T^2M without its null section. For a point $u \in T^2M$, let $(x^i, y^{(1)i}, y^{(2)i})$ be its coordinates in a local chart.

Let N be a nonlinear connection, [3], [8]- [13], and denote its coefficients by $\left(\underset{1}{N}{}^i_j, \underset{2}{N}{}^i_j\right)$, i, $j = 1, ..., 4$. Then, N determines the direct decomposition

$$T_uT^2M = N_0(u) \oplus N_1(u) \oplus V_2(u),\ \forall u \in T^2M. \tag{1}$$

The adapted basis to (1) is $(\delta_i, \delta_{1i}, \delta_{2i})$ and its dual basis is $(dx^i, \delta y^{(1)i}, \delta y^{(2)i})$, where

$$\begin{cases} \delta_i = \dfrac{\delta}{\delta x^i} = \dfrac{\partial}{\partial x^i} - \underset{1}{N}{}^k_i \dfrac{\partial}{\partial y^{(1)k}} - \underset{2}{N}{}^k_i \dfrac{\partial}{\partial y^{(2)k}} \\ \delta_{1i} = \dfrac{\delta}{\delta y^{(1)i}} = \dfrac{\partial}{\partial y^{(1)i}} - \underset{1}{N}{}^k_i \dfrac{\partial}{\partial y^{(2)k}} \\ \delta_{2i} = \dfrac{\partial}{\partial y^{(2)i}} = \dot{\partial}_{2i}, \end{cases} \tag{2}$$

respectively,

$$\begin{cases} \delta y^{(1)i} = dy^{(1)i} + \underset{1}{M}{}^i_k dx^k \\ \delta y^{(2)i} = dy^{(2)i} + \underset{1}{M}{}^i_k dy^{(1)k} + \underset{2}{M}{}^i_k dx^k, \end{cases} \tag{3}$$

where $\underset{1}{M}{}^i_k, \underset{2}{M}{}^i_k$ are the dual coefficients of the nonlinear connection N.

Then, a vector field $X \in \mathcal{X}\,(T^2M)$ is represented in the local adapted basis as

$$X = X^{(0)i}\delta_i + X^{(1)i}\delta_{1i} + X^{(2)i}\delta_{2i}, \tag{4}$$

with the three right terms (called *d-vector fields*) belonging to the distributions N, N_1 and V_2 respectively.

A 1-form $\omega \in \mathcal{X}^* \left(T^2M\right)$ will be decomposed as

$$\omega = \omega_i^{(0)} dx^i + \omega_i^{(1)} \delta y^{(1)i} + \omega_i^{(2)} \delta y^{(2)i}.$$

Similarly, a tensor field $T \in \mathcal{T}_s^r \left(T^2M\right)$ can be split with respect to (1) into components, which will be called *d-tensor fields*.

2 N-linear connections. d-tensors of curvature

An *N-linear connection* D, [1], [2], is a linear connection on T^2M, which preserves by parallelism the distributions N, N_1 and V_2.

An N-linear connection is locally given by its coefficients

$$D\Gamma\left(N\right) = \left(\underset{(00)}{L}{}^i{}_{jk}, \underset{(10)}{L}{}^i{}_{jk}, \underset{(20)}{L}{}^i{}_{jk}, \underset{(01)}{C}{}^i{}_{jk}, \underset{(11)}{C}{}^i{}_{jk}, \underset{(21)}{C}{}^i{}_{jk}, \underset{(02)}{C}{}^i{}_{jk}, \underset{(12)}{C}{}^i{}_{jk}, \underset{(22)}{C}{}^i{}_{jk}\right), \tag{5}$$

where

$$\begin{cases} D_{\delta_k}\delta_j = \underset{(00)}{L}{}^i{}_{jk}\delta_i,\ D_{\delta_k}\delta_{1j} = \underset{(10)}{L}{}^i{}_{jk}\delta_{1i},\ D_{\delta_k}\delta_{2j} = \underset{(20)}{L}{}^i{}_{jk}\delta_{2i} \\ D_{\delta_{1k}}\delta_j = \underset{(01)}{C}{}^i{}_{jk}\delta_i,\ D_{\delta_{1k}}\delta_{1j} = \underset{(11)}{C}{}^i{}_{jk}\delta_{1i},\ D_{\delta_{1k}}\delta_{2j} = \underset{(21)}{C}{}^i{}_{jk}\delta_{2i} \\ D_{\delta_{2k}}\delta_j = \underset{(02)}{C}{}^i{}_{jk}\delta_i,\ D_{\delta_{2k}}\delta_{1j} = \underset{(12)}{C}{}^i{}_{jk}\delta_{1i},\ D_{\delta_{2k}}\delta_{2j} = \underset{(22)}{C}{}^i{}_{jk}\delta_{2i} \end{cases}. \tag{6}$$

The curvature of the N-linear connection D,

$$R\left(X,Y\right)Z = D_X D_Y Z - D_Y D_X Z - D_{[X,Y]}Z,$$

is completely determined by its components (which are d-tensors) $R\left(\delta_{\gamma l}, \delta_{\beta k}\right)\delta_{\alpha j}$. Namely, the 2-forms of curvature of an N- linear connection are, [1], [2],

$$\begin{aligned} \underset{(\alpha)}{\Omega}{}^i{}_j = & \frac{1}{2}\underset{(0\alpha)}{R}{}_j{}^i{}_{kl} dx^k \wedge dx^l + \underset{(1\alpha)}{P}{}_j{}^i{}_{kl} dx^k \wedge \delta y^{(1)l} + \\ & + \underset{(2\alpha)}{P}{}_j{}^i{}_{kl} dx^k \wedge \delta y^{(2)l} + \frac{1}{2}\underset{(1\alpha)}{S}{}_j{}^i{}_{kl} \delta y^{(1)k} \wedge \delta y^{(1)l} + \\ & + \underset{(2\alpha)}{Q}{}_j{}^i{}_{kl} \delta y^{(1)k} \wedge \delta y^{(2)l} + \frac{1}{2}\underset{(2\alpha)}{S}{}_j{}^i{}_{kl} \delta y^{(2)k} \wedge \delta y^{(2)l}, \end{aligned} \tag{7}$$

$\alpha = 0,1,2$, where the coefficients $\underset{(0\alpha)}{R}{}_j{}^i{}_{kl}, \underset{(\beta\alpha)}{P}{}_j{}^i{}_{kl}, \underset{(2\alpha)}{Q}{}_j{}^i{}_{kl}, \underset{(\beta\alpha)}{S}{}_j{}^i{}_{kl}$ are d-tensors, named the *d-tensors of curvature* of the N-linear connection D.

3 Metric structures on T^2M

A *Riemannian metric* on T^2M is a tensor field G of type $(0,2)$, which is nondegenerate in each $u \in T^2M$ and positively defined on T^2M.

In this paper, we shall consider only metrics in the form

$$G = \underset{(0)}{g}{}_{ij} dx^i \otimes dx^j + \underset{(1)}{g}{}_{ij} \delta y^{(1)i} \otimes \delta y^{(1)j} + \underset{(2)}{g}{}_{ij} \delta y^{(2)i} \otimes \delta y^{(2)j}, \tag{8}$$

where $\underset{(\alpha)}{g}_{ij} = \underset{(\alpha)}{g}_{ij}(x, y^{(1)}, y^{(2)})$; this is, such that the distributions N, N_1 and V_2 generated by the nonlinear connection N be orthogonal in pairs with respect to G.

Let also

$$F = \sqrt[4]{y^{(1)1}y^{(1)2}y^{(1)3}y^{(1)4}}$$

be the Berwald-Moor Finsler function, [14]- [16], and the generalized Lagrange metrics on M, given by

$$h_{ij} = \frac{1}{12F^4}\frac{\partial^2 F^4}{\partial y^i \partial y^j}, \quad \widetilde{h}_{ij} = \frac{1}{12F^6}\frac{\partial^2 F^4}{\partial y^i \partial y^j}. \tag{9}$$

(h defined above is the same as the one in [5], with the only difference that here we have divided by F^4 or F^6 instead of F^2, in order that the obtained tensors be homogeneous of degree -2, respectively, -4).

In the following, we shall use two particular kinds of metrics on $\widetilde{T^2M}$, namely:

1. $\underset{(0)}{g}_{ij} = \underset{(1)}{g}_{ij} = g_{ij}(x), \quad \underset{(2)}{g}_{ij} = \widetilde{h}_{ij}(y^{(1)}),$

2. $\underset{(0)}{g}_{ij} = g_{ij}(x), \quad \underset{(1)}{g}_{ij} = \underset{(2)}{g}_{ij} = h_{ij}(y^{(1)}),$

$g_{ij}(x)$ being a Riemannian metric on M, and h_{ij}, $\widetilde{h}_{ij}$ as above.

These two examples have an important property, namely, they are compatible to the almost contact structures $\mathbb{F}$ introduced in [1].

An N-linear connection D is called *metrical* if $D_X G = 0$, $\forall X \in \mathcal{X}(T^2M)$. The local expression of this equality is given in [1].

4 The Ricci tensor $Ric\,(D)$

If we consider the Ricci tensor $Ric\,(D)$, as the trace of the linear operator

$$V \mapsto R\,(V, X)\,Y,\ \forall V = V^{(0)i}\delta_i + V^{(1)i}\delta_{1i} + V^{(2)i}\delta_{2i} \in \mathcal{X}\left(T^2M\right), \tag{10}$$

then, [3], the Ricci tensor $Ric\,(D)$ has the following components:

$$\begin{aligned}
Ric\,(D)\left(\frac{\delta}{\delta x^j}, \frac{\delta}{\delta x^i}\right) &= \underset{(00)}{R}{}_{i\ jl}^{\ l} =: R_{ij};\\
Ric\,(D)\left(\frac{\delta}{\delta y^{(1)j}}, \frac{\delta}{\delta x^i}\right) &= -\underset{(10)}{P}{}_{i\ lj}^{\ l} =: -\underset{(10)}{\overset{2}{P}}{}_{ij};\\
Ric\,(D)\left(\frac{\delta}{\delta y^{(2)j}}, \frac{\delta}{\delta x^i}\right) &= -\underset{(20)}{P}{}_{i\ lj}^{\ l} =: -\underset{(20)}{\overset{2}{P}}{}_{ij};\\
Ric\,(D)\left(\frac{\delta}{\delta x^j}, \frac{\delta}{\delta y^{(1)i}}\right) &= \underset{(11)}{P}{}_{i\ jl}^{\ l} =: \underset{(11)}{\overset{1}{P}}{}_{ij};\\
Ric\,(D)\left(\frac{\delta}{\delta y^{(1)j}}, \frac{\delta}{\delta y^{(1)i}}\right) &= \underset{(11)}{S}{}_{i\ jl}^{\ l} =: \underset{(1)}{S}{}_{ij};\\
Ric\,(D)\left(\frac{\delta}{\delta y^{(2)j}}, \frac{\delta}{\delta y^{(1)i}}\right) &= -\underset{(21)}{Q}{}_{i\ lj}^{\ l} =: -\underset{(21)}{\overset{2}{Q}}{}_{ij};\\
Ric\,(D)\left(\frac{\delta}{\delta x^j}, \frac{\delta}{\delta y^{(2)i}}\right) &= \underset{(22)}{P}{}_{i\ jl}^{\ l} =: \underset{(22)}{\overset{1}{P}}{}_{ij};
\end{aligned}$$

$$Ric\,(D)\left(\frac{\delta}{\delta y^{(1)j}}, \frac{\delta}{\delta y^{(2)i}}\right) = \underset{(22)}{Q}{}_{i\ jl}^{\ l} =: \overset{1}{\underset{(22)}{Q}}{}_{ij};$$
$$Ric\,(D)\left(\frac{\delta}{\delta y^{(2)j}}, \frac{\delta}{\delta y^{(2)i}}\right) = \underset{(22)}{S}{}_{i\ jl}^{\ l} =: \underset{(2)}{S}{}_{ij}.$$

5 Canonical structures

Let $(M,\ g)$ be a Riemannian manifold and T^2M, its second order tangent bundle. **The canonical nonlinear connection** N is defined (cf. with R. Miron and Gh. Atanasiu, [13]) by its dual coefficients

$$\underset{(1)}{M}{}^i_{\ j} = \gamma^i_{jk} y^{(1)k}, \quad \underset{(2)}{M}{}^i_{\ j} = \frac{1}{2}\left\{\mathbb{C}\left(\gamma^i_{jk} y^{(1)k}\right) + \underset{(1)}{M}{}^i_{\ k}\underset{(1)}{M}{}^k_{\ j}\right\}, \tag{11}$$

$\gamma^i_{jk} = \gamma^i_{jk}(x)$ being the Christoffel symbols of g and $\mathbb{C} = y^{(1)i}\dfrac{\partial}{\partial x^i} + 2y^{(2)i}\dfrac{\partial}{\partial y^{(1)i}}$.

Let

$$\underset{(1)}{N}{}^i_{\ j} = \underset{(1)}{M}{}^i_{\ j},\ \underset{(2)}{N}{}^i_{\ j} = \underset{(2)}{M}{}^i_{\ j} + \underset{(1)}{M}{}^i_{\ k}\underset{(1)}{M}{}^k_{\ j}$$

be its (direct) coefficients. Then, the coefficients of the Lie brackets, [1],

$$\begin{gathered}
[\delta_{0j}, \delta_{0k}] = \underset{(01)}{R}{}^{\ i}_{jk}\delta_{1i} + \underset{(02)}{R}{}^{\ i}_{jk}\delta_{2i}, \quad [\delta_{0j}, \delta_{1k}] = \underset{(11)}{B}{}^{\ i}_{jk}\delta_{1i} + \underset{(12)}{B}{}^{\ i}_{jk}\delta_{2i} \\
[\delta_{0j}, \delta_{2k}] = \underset{(21)}{B}{}^{\ i}_{jk}\delta_{1i} + \underset{(22)}{B}{}^{\ i}_{jk}\delta_{2i}, \quad [\delta_{1j}, \delta_{1k}] = \underset{(12)}{R}{}^{\ i}_{jk}\delta_{2i} \\
[\delta_{1j}, \delta_{2k}] = \underset{(21)}{B}{}^{\ i}_{jk}\delta_{2i}, \quad [\delta_{2j}, \delta_{2k}] = 0
\end{gathered} \tag{12}$$

have the property that

$$\underset{(11)}{B}{}^{\ i}_{\ jk} = \underset{(22)}{B}{}^{\ i}_{\ jk} = \gamma^i_{jk},\ \underset{(21)}{B}{}^{\ i}_{\ jk} = \underset{(12)}{R}{}^{\ i}_{\ jk} = \underset{(22)}{R}{}^{\ i}_{\ jk} = 0. \tag{13}$$

In this paper, we shall use the metrical N-linear connection introduced by the first author, [1], given by the coefficients:

$$\begin{aligned}
\underset{(00)}{L}{}^{\ i}_{\ jk} &= \frac{1}{2}\underset{(0)}{g}{}^{il}(\delta_k \underset{(0)}{g}{}_{jl} + \delta_j \underset{(0)}{g}{}_{lk} - \delta_l \underset{(0)}{g}{}_{jk}) \\
\underset{(\beta 0)}{L}{}^{\ i}_{\ jk} &= \underset{(\beta\beta)}{B}{}^{\ i}_{\ kj} + \frac{1}{2}\underset{(\beta)}{g}{}^{il}(\delta_k \underset{(\beta)}{g}{}_{jl} - \underset{(\beta\beta)}{B}{}^{\ m}_{\ kj} \underset{(\beta)}{g}{}_{ml} - \underset{(\beta\beta)}{B}{}^{\ m}_{\ kl} \underset{(\beta)}{g}{}_{jm}) \\
\underset{(\delta 1)}{C}{}^{\ i}_{\ jk} &= \frac{1}{2}\underset{(\delta)}{g}{}^{il}\delta_{1k} \underset{(\delta)}{g}{}_{jl},\ (\delta = 0, 2), \\
\underset{(\varepsilon 2)}{C}{}^{\ i}_{\ jk} &= \frac{1}{2}\underset{(\varepsilon)}{g}{}^{il}\dot{\partial}_{2k} \underset{(\varepsilon)}{g}{}_{jl},\ (\varepsilon = 0, 1), \\
\underset{(\beta\beta)}{C}{}^{\ i}_{\ jk} &= \frac{1}{2}\underset{(\beta)}{g}{}^{il}(\delta_{\beta k} \underset{(\beta)}{g}{}_{jl} + \delta_{\beta j} \underset{(\beta)}{g}{}_{lk} - \delta_{\beta l} \underset{(\beta)}{g}{}_{jk}),\ \delta_{2i} = \dot{\partial}_{2i},
\end{aligned} \tag{14}$$

where $\beta = 1, 2$.

Then, we have to remark that, taking into account the relations (13), two of the coefficients of the torsion tensor vanish, namely

$$\underset{(21)}{P}{}^{\ i}_{jk} = \underset{(12)}{S}{}^{\ i}_{jk} = 0, \tag{15}$$

where $\underset{(21)}{P}{}^{\ i}_{jk}\delta_{1i} = v_1 T(\delta_{2k}, \delta_j),\ \underset{(12)}{S}{}^{\ i}_{jk}\dot{\partial}_{2i} = v_2 T(\delta_{1k}, \delta_{1j})$.

6 The case of the $g-h-h$-metric

Let the metric structure of $\widetilde{T^2M}$ be given by

$$G = g_{ij}(x)dx^i \otimes dx^j + h_{ij}(y^{(1)})\, \delta y^{(1)i} \otimes \delta y^{(1)j} + h_{ij}(y^{(1)})\delta y^{(2)i} \otimes \delta y^{(2)j},$$

where g is a Riemannian metric on M and h is as in (9). Then, G is h-Riemannian and v_1-, v_2-locally Minkovski. In this case, the detailed expressions of the coefficients $D\Gamma(N)$ of the canonical N-linear connection and of its curvatures and torsions are given in [1].

By applying the results in the cited paper and the relation (15), we obtain by a direct computation the following result:

Proposition 1. *The only nonvanishing components of the Ricci tensor $Ric(D)$ of the canonical -linear conenction are*

$$\begin{aligned}
Ric\,(D)\left(\frac{\delta}{\delta x^j},\frac{\delta}{\delta x^i}\right) &= \underset{(00)}{R}{}_{i\ jk}^{\ k} =: r_{ij};\\
Ric\,(D)\left(\frac{\delta}{\delta x^j},\frac{\delta}{\delta y^{(1)i}}\right) &= \underset{(11)}{P}{}_{i\ jk}^{\ k} =: \underset{(11)}{\overset{1}{P}}{}_{ij};\\
Ric\,(D)\left(\frac{\delta}{\delta y^{(1)j}},\frac{\delta}{\delta y^{(1)i}}\right) &= \underset{(11)}{S}{}_{i\ jk}^{\ k} =: \underset{(1)}{S}{}_{ij},
\end{aligned}$$

where $r_{ij} = r_{i\ jk}^{\ k}$ denotes the Ricci tensor of the Levi-Civita connection attached to g.

By applying the results in [3], we can state:

Proposition 2. *The Einstein equations associated to the metrical N- linear connection D are*

$$\begin{aligned}
&R_{ij} - \tfrac{1}{2}(r + \underset{(1)}{S})g_{ij} = \kappa \underset{(00)}{\mathcal{T}}{}_{ij};\\
&\underset{(11)}{\overset{1}{P}}{}_{ij} = \kappa \underset{(10)}{\mathcal{T}}{}_{ij};\\
&\underset{(1)}{S}{}_{ij} - \tfrac{1}{2}(r + \underset{(1)}{S})h_{ij} = \kappa \underset{(11)}{\mathcal{T}}{}_{ij},\ \alpha = 1,2;\\
&\underset{(20)}{\mathcal{T}}{}_{ij} = \underset{(01)}{\mathcal{T}}{}_{ij} = \underset{(21)}{\mathcal{T}}{}_{ij} = \underset{(02)}{\mathcal{T}}{}_{ij} = \underset{(12)}{\mathcal{T}}{}_{ij} = \underset{(22)}{\mathcal{T}}{}_{ij} = 0.
\end{aligned}$$

7 The case of the $g-g-\widetilde{h}$-metric

Proposition 3. *Now, let the metric structure of $\widetilde{T^2M}$ be given by*

$$G = g_{ij}(x)dx^i \otimes dx^j + g_{ij}(x)\, \delta y^{(1)i} \otimes \delta y^{(1)j} + \widetilde{h}_{ij}(y^{(1)})\delta y^{(2)i} \otimes \delta y^{(2)j},$$

where g is a Riemannian metric on M and $\widetilde{h}$ is as in (9). Then, G is h-, v_1- Riemannian and v_2-locally Minkovski.

In order to determine the components of the Ricci tensor, we first have to compute the coefficients of the canonical N-linear connection in our case. We have:

$$\begin{aligned}
\underset{(00)}{L}{}^{\,i}_{\ jk} &= \gamma^i_{\ jk},\ \underset{(10)}{L}{}^{\,i}_{\ jk} = \underset{(10)}{L}{}^{\,i}_{\ jk}(x),\ \underset{(20)}{L}{}^{\,i}_{\ jk} = \underset{(20)}{L}{}^{\,i}_{\ jk}(x,y^{(1)})\\
\underset{(01)}{C}{}^{\,i}_{\ jk} &= \underset{(11)}{C}{}^{\,i}_{\ jk} = 0,\ \underset{(21)}{C}{}^{\,i}_{\ jk} = \frac{1}{2}\tilde{h}^{il}\delta_{1k}\tilde{h}_{jl}\\
\underset{(02)}{C}{}^{\,i}_{\ jk} &= \underset{(12)}{C}{}^{\,i}_{\ jk} = \underset{(22)}{C}{}^{\,i}_{\ jk} = 0.
\end{aligned}$$

Using the expressions above, we obtain

Proposition 4. *All the components of the Ricci tensor of the N-linear connection D vanish, except*

$$Ric\,(D)\left(\frac{\delta}{\delta x^j},\frac{\delta}{\delta x^i}\right) = \underset{(00)}{R}{}_{i\ jl}^{\ l} =: r_{ij},$$

where r_{ij} denotes the Ricci tensor of the Levi-Civita connection of the metric g on M.

As a consequence, the Einstein equations can be written in this case as:

$$r_{ij} - \frac{1}{2} r g_{ij} = \kappa \underset{(00)}{\mathcal{T}}{}_{ij},$$

the other components of the energy-momentum tensor being identically 0. The equations above are exactly the Einstein equations of the Levi-Civita connection ∇ of $g = g(x)$. Obviously, the energy conservation law is satisfied.

References

[1] Gh. Atanasiu, *New Aspects in the Differential Geometry of Second Order*, Sem. de Mecanică, Univ de Vest, Timişoara, no. 82, 2001, 1-81.

[2] Gh. Atanasiu, *Linear connections in the higher-order geometry*, Proc. of the Int. Meeting "Physical Interpretations of Relativity Theory", 4-7 July 2005, Bauman Moscow State Tech. University, Moskow, to appear.

[3] Gh. Atanasiu, N. Brinzei-Voicu, *Einstein equations in the geometry of second order*, Studia Mathematica, Cluj-Napoca, 3 (2005), 21-29.

[4] Gh. Atanasiu, N. Brinzei, *Einstein equations in the higher order differential geometry*, Proc. of the Int. Meeting "Physical Interpretations of Relativity Theory", 4-7 July 2005, Bauman Moscow State Tech. University, Moskow, to appear.

[5] V. Balan, N., Brinzei, *Einstein equations for the Berwald-Moor type Euclidean-locally Minkowski relativistic model*, to appear.

[6] R. Miron, *The Geometry of Higher Order Lagrange Spaces. Applications to Mechanics and Physics*, Kluwer Acad. Publ. FTPM no. 82, 1997.

[7] R. Miron, Gh Atanasiu, *Geometrical theory of gravitational and electromagnetic fields in Higher Order Lagrange Spaces*, Tsukuba J. of Math. 20, 1 (1996), 137-149.

[8] R. Miron, Gh. Atanasiu, *Compendium on the higher-order Lagrange spaces: The geometry of $k-$osculator bundles. Prolongation of the Riemannian, Finslerian and Lagrangian structures. Lagrange spaces*, Tensor N.S. 53 (1993), 39-57.

[9] R. Miron, Gh. Atanasiu, *Compendium sur les espaces Lagrange d'ordre superieur: La geometrie du fibre k-osculateur. Le prolongement des structures Riemanniennes, Finsleriennes et Lagrangiennes. Les espaces $L^{(k)n}$*, Univ. Timişoara, Seminarul de Mecanică, 40 (1994), 1-27.

[10] R. Miron, Gh. Atanasiu, *Lagrange geometry of second order*, Math. Comput Modelling, 20, 4 (1994), 41-56.

[11] R. Miron, Gh. Atanasiu, *Differential geometry of the k-osculator bundle*, Rev. Roumaine Math. Pures et Appl. 41, 3/4 (1996), 205-236.

[12] R. Miron, Gh. Atanasiu, *Higher-order Lagrange spaces*, Rev. Roumaine Math. Pures et Appl., 41, 3/4 (1996), 251-262.

[13] R. Miron, Gh. Atanasiu, *Prolongations of the Riemannian, Finslerian and Lagrangian structures*, Rev. Roumaine Math. Pures et Appl., 41, 3/4 (1996), 237-249.

[14] D.G. Pavlov, *Chronometry of the three-dimensional time*, Hypercomplex Numbers in Geometry and Physics, Ed. "Mozet", Russia, 1, 1 (2004), 19-30.

[15] D.G. Pavlov, *Four-dimensional time*, Hypercomplex Numbers in Geometry and Physics, Ed. "Mozet", Russia, 1, 1 (2004), 31-39.

[16] D.G. Pavlov, *Generalization of scalar product axioms*, Hypercomplex Numbers in Geometry and Physics, Ed. "Mozet", Russia, 1, 1 (2004), 5-18.

[17] N. Voicu (Brînzei), *Deviations of geodesics in the geometry of second order*, Ph. D. Thesis (in Romanian), "Babes-Bolyai" Univ., Cluj-Napoca, 2003.

BERWALD-MOOR-TYPE (h,v)-METRIC PHYSICAL MODELS

Vladimir Balan & Nicoleta Brinzei

University Politehnica of Bucharest, Department Mathematics I, Bucharest, Romania
vbalan@mathem.pub.ro

Department of Mathematics, "Transilvania" University, Brasov, Romania
n.voicu@home.ro

In the framework of vector bundles endowed with $(h, v)-$metrics several physical models for relativity are presented. A characteristic of these models is that the vertical part is provided by the flag-Finsler Berwald-Moor (fFBM) metric, while the horizontal part is specialized to the conformal and to Synge-relativistic optics metrics. As well, the particular case of $h-$Riemannian $v-$fFBM metric of Riemann-Minkowski type is examined, considering as nonlinear connection both the trivial canonical connection, and the one induced by the Lagrangian of electrodynamics. For all these models, basic properties are described and the extended Einstein and Maxwell equations are determined.

MSC: 53B40, 53C60, 53C07.

1 Introduction

The recent attempts of modeling relativity based on metrical structures include two notable trends: one originates in the theory of bundles endowed with Ehresmann connection (e.g. via osculating structures and their duals, R. Miron [7–10]) and one based on a palette of physical models relying on the Berwald-Moor metric (D.G. Pavlov, G.S. Asanov [1,12,13]). The present work proposes several relativistic models of Miron type which emerge naturally from this metric. The basic geometric structure is an $(h, v)-$metric on a vector bundle (in particular the tangent bundle of a Space-Time), where the horizontal part is of Generalized Lagrange type ([8]) and the vertical one is of Finslerian Berwald-Moor type. For these models ($h-$conformal, h-relativistic optic, $h-$electromagnetic and $h-$classical Riemannian) the GR formalism is developed, and the Einstein and relativistic Maxwell equations are described.

2 The flag-Finsler Berwald-Moor metric

Let M be a 4-dimensional differential manifold of class $\mathcal{C}^\infty$, TM its tangent bundle and (x^i, y^a) the coordinates in a local chart on TM. If $F : TM \to \mathbf{R}$, $F = F(y)$ is a Finsler function, we denote by

$$h^*_{ab} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F^2}{\partial y^a \partial y^b}, \quad a, b = \overline{1,4},$$

the associated metric tensor. For $F(y) = \sqrt[4]{|y^1y^2y^3y^4|}$, Pavlov has studied the "4-pseudoscalar product" related to the Berwald-Moor metric ([13])

$$(X, Y, Z, T) = G_{abcd}X^aY^bZ^cT^d, \tag{2.1}$$

where

$$G_{abcd} = \frac{1}{4!}\frac{\partial^4 \mathcal{L}}{\partial y^a \partial y^b \partial y^c \partial y^d}, \tag{2.2}$$

and $\mathcal{L} = F^4$. We denote

$$\langle X, Y\rangle = \frac{1}{F^2}(X, Y, y, y,), \quad X, Y \in \mathcal{X}(M), \tag{2.3}$$

where $y = y^a \dfrac{\partial}{\partial y^a}$ is the Liouville vector field ([9]), the vector fields X, Y being considered at some $x \in M$. Then $\langle \ , \ \rangle$ is a pseudo-scalar product; locally we have

$$\langle X, Y\rangle = \frac{1}{F^2} G_{abcd} X^a Y^b y^c y^d = \frac{G_{ab00}}{F^2} X^a Y^b, \tag{2.4}$$

where the null index represents transvection with y. The coefficients of the scalar product (2.4) are hence

$$h_{ab} = \frac{G_{ab00}}{F^2} = \frac{1}{12F^2}\frac{\partial^2 F^4}{\partial y^a \partial y^b}, \tag{2.5}$$

providing a tensor which coincides with the one $\widetilde{y}^{(4)}_{ij}$ proposed by Lebedev ([6]). Then, h_{ab} is a 2-covariant tensor field, and (M, h) thus becomes a generalized Lagrange space. Its absolute energy, $\mathcal{E} = h_{ab} y^a y^b$, is

$$\mathcal{E} = \frac{G_{ab00}}{F^2} y^a y^b = \frac{1}{4F^2}\frac{\partial F^4}{\partial y^b} y^b = \frac{F^4}{F^2} = F^2,$$

this is, $\mathcal{E} = F^2$. The Lagrange metric associated to h is exactly

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial y^a \partial y^b} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F^2}{\partial y^a \partial y^b} = h^*_{ab},$$

and taking into account that F is a Finsler function, h^* is nondegenerate and of constant signature, which shows that $(M, \mathcal{E} = F^2)$ is a Lagrange space. From the homogeneity of F it also follows that

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial y^a} = h_{ab} y^b. \tag{2.6}$$

Consequently, we can state

Theorem 1. *The space (M, h) with h given by (2.5) is a generalized Lagrange space with regular metric. The associated Lagrange metric h^*_{ab} coincides with the Finsler metric generated by F and the two metrics provide the same energy,*

$$\mathcal{E} = F^2 = h_{ab} y^a y^b = h^*_{ab} y^a y^b.$$

Remark. The considerations above hold true for an arbitrary Finsler space whose fundamental function is of locally Minkowski type.

3 A Riemann-locally Minkovski model

Let TM be endowed with a nonlinear connection N with coefficients $N^a_{\ i} = N^a_{\ i}(x, y)$ and let

$$\left\{ \delta_i = \frac{\delta}{\delta x^i}, \dot{\partial}_a = \frac{\partial}{\partial y^a} \;\middle|\; i, a = \overline{1,4} \right\}$$

denote the corresponding adapted basis, where

$$\frac{\delta}{\delta x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i} - N^b_{\ i}\frac{\partial}{\partial y^b}, \ i = \overline{1,4}.$$

We also denote the dual basis by $\{dx^i, \delta y^a \mid i, a = \overline{1,4}\}$, with $\delta y^a = dy^a + N^a{}_j dx^j$. If D is a linear d-connection on TM ([9]), then it is described by its adapted coefficients $D\Gamma(N) = \{L^i{}_{jk}, L^a{}_{bk}, C^i{}_{jc}, C^a{}_{bc}\}$, where:

$$D_{\delta_k}\delta_j = L^i{}_{jk}\delta_i,\ D_{\delta_k}\dot{\partial}_b = L^a{}_{bk}\dot{\partial}_a,$$

$$D_{\dot{\partial}_c}\delta_j = C^i{}_{jc}\delta_i,\ D_{\dot{\partial}_c}\dot{\partial}_b = C^a{}_{bc}\dot{\partial}_a.$$

We shall further denote by $_|$ and $|$ the $h-$ and $v-$ covariant derivatives induced by D respectively.

As well, the torsion T of the linear connection D has the adapted components

$$\begin{array}{ll} hT(\delta_k,\delta_j) = T^i{}_{jk}\delta_i, & vT(\delta_k,\delta_j) = R^a{}_{jk}\dot{\partial}_a, \\ hT(\dot{\partial}_c,\delta_j) = C^i{}_{jc}\delta_i, & vT(\dot{\partial}_c,\delta_j) = P^a{}_{jc}\dot{\partial}_a, \\ hT(\dot{\partial}_c,\dot{\partial}_b) = 0, & vT(\dot{\partial}_c,\dot{\partial}_b) = S^a{}_{bc}\dot{\partial}_a, \end{array}$$

while the adapted components of the curvature R are

$$\begin{array}{ll} R(\delta_l,\delta_k)\delta_j = R^i_{jkl}\delta_i, & R(\delta_l,\delta_k)\dot{\partial}_b = R^a_{bkl}\dot{\partial}_a, \\ R(\dot{\partial}_c,\delta_k)\delta_j = P^i_{jkc}\delta_i, & R(\dot{\partial}_c,\delta_k)\dot{\partial}_b = P^a_{bkc}\dot{\partial}_a, \\ R(\dot{\partial}_c,\dot{\partial}_b)\delta_j = S^i_{jbc}\delta_i, & R(\dot{\partial}_d,\dot{\partial}_c)\dot{\partial}_b = S^a_{bcd}\dot{\partial}_a. \end{array}$$

Now, let us consider on TM the following Riemann-locally Minkovski $(h,v)-$metric:

$$\mathcal{G} = g_{ij}(x)dx^i \otimes dx^j + h_{ab}(y)\delta y^a \otimes \delta y^b, \tag{3.1}$$

which we shall use in our further considerations. Together with N, this metric produces the *canonical* metrical $d-$connection $C\Gamma(N)$ ([9]),

$$\begin{cases} L^i{}_{jk} = \dfrac{1}{2}g^{ih}\left(\dfrac{\delta g_{hj}}{\delta x^k} + \dfrac{\delta g_{hk}}{\delta x^j} - \dfrac{\delta g_{jk}}{\delta x^h}\right), \\ L^a{}_{bk} = \dfrac{\partial N^a_k}{\partial y^b} + \dfrac{1}{2}h^{ac}\left(\dfrac{\delta h_{bc}}{\delta x^k} - \dfrac{\partial N^d_k}{\partial y^b}h_{dc} - \dfrac{\partial N^d_k}{\partial y^c}h_{bd}\right), \\ C^i{}_{jc} = \dfrac{1}{2}g^{ih}\dfrac{\partial g_{jh}}{\partial y^c}, \\ C^a{}_{bc} = \dfrac{1}{2}h^{ad}\left(\dfrac{\partial h_{db}}{\partial y^c} + \dfrac{\partial h_{dc}}{\partial y^b} - \dfrac{\partial h_{bc}}{\partial y^d}\right). \end{cases} \tag{3.2}$$

For h given in (2.5), the $(h,v)-$metric $\mathcal{G}$ given in (3.1) is v-regular, which implies that the coefficients of the canonical (Kern [4,9]) nonlinear connection $\tilde{N}$ vanish,

$$N^i_a(x,y) = 0, \qquad i, a = \overline{1,4}. \tag{3.3}$$

The canonical metrical linear d-connection $C\Gamma(\tilde{N})$ associated to $\mathcal{G}$, is given by ([9])

$$L^i{}_{jk} = \gamma^i{}_{jk},\ L^a{}_{bk} = 0,\ C^i{}_{jc} = 0,\ C^a{}_{bc} = \frac{1}{2}h^{ad}\left(\frac{\partial h_{db}}{\partial y^c} + \frac{\partial h_{dc}}{\partial y^b} - \frac{\partial h_{bc}}{\partial y^d}\right),$$

where $\gamma^i{}_{jk}$ denote the Christoffel symbols of g. It is worth mentioning that, for the canonic d-linear connection in the Kern case (3.3), the torsion vanishes,

$$T^i{}_{jk} = 0,\ R^a{}_{jk} = 0,\ C^i{}_{jc} = 0,\ P^a{}_{jb} = 0,\ S^a{}_{bc} = 0.$$

4 Locally v-Minkovskian metrics

In general, an $(h, v)-$metric

$$\mathcal{G} = g_{ij}(x,y)dx^i \otimes dx^j + h_{ab}(x,y)\delta y^a \otimes \delta y^b \tag{4.1}$$

which has the property that in the neghborhood of any point $(x, y) \in TM$ there exists a local map in which $h(x, y) = h(y)$, is called *v-locally Minkovski.* A known result provides consequences specific to this case, as follows

Theorem 2. (**[9]**) *If $\mathcal{G}$ is a v-locally Minkovski metric and $h = h(y)$ is weakly regular, then the Kern nonlinear connection $\tilde{N}$ and the canonic linear d-connection D (3.2) given by $C\Gamma(\tilde{N}) = \{L^i{}_{jk}, L^a{}_{bk}, C^i{}_{jc}, C^a{}_{bc}\}$ obey the properties*

1. $N^a_j = 0,\quad L^i{}_{jk} = \{^{\,i}_{jk}\},\quad L^a{}_{bk} = 0;$
2. $T^i{}_{jk} = 0,\quad S^a{}_{bc} = 0,\quad R^a{}_{jk} = 0,\quad P^a{}_{jb} = 0.$
3. $R^a_{b\ jk} = 0,\quad P^a_{b\ kc} = 0,$

where $\{^i{}_{jk}\}$ are the Christoffel symbols corresponding to $g = g(x, y)$.

Remark 1. In our case, the following consequences hold true:

1. The equality $N^a_j = 0$ yields $\dfrac{\delta}{\delta x^i} = \dfrac{\partial}{\partial x^i}$.
2. The torsion of the canonic linear d-connection has a single non-vanishing component, namely the coefficient $P^i{}_{jc} = C^i{}_{jc}$ of $hT(\dot{\partial}_c, \delta_j)$.
3. $C^a{}_{bc}$ are the Christoffel symbols of second kind associated to $h_{ab} = h_{ab}(y)$ and they depend on y only.

We shall assume further that $h = h(y)$ is the metric (2.5) from [3]; this satisfies

$$h_{ab} = \frac{1}{12\mathcal{E}} \frac{\partial^2 \mathcal{E}^2}{\partial y^a \partial y^b}.$$

In this case, the *deflection tensor fields* attached to the nonlinear connection above are

$$D^a{}_j = y^a{}_{|j} = \frac{\partial y^a}{\partial x^j} + y^b L^a{}_{bj} = 0, \quad d^a{}_b = y^a|_b = \delta^a_b + y^c C^a{}_{cb}.$$

From the definition of C^a_{cb}, (since h is $0-$homogeneous in y), it follows that

$$y^c C^a{}_{cb} = \frac{1}{2} h^{ad} \left(\frac{\partial h_{bd}}{\partial y^c} + \frac{\partial h_{dc}}{\partial y^b} - \frac{\partial h_{bc}}{\partial y^d} \right) y^c = \frac{1}{2} h^{ad} \left(\frac{\partial h_{dc}}{\partial y^b} - \frac{\partial h_{bc}}{\partial y^d} \right) y^c.$$

Taking into account the particular form (2.5) of h, and taking into account the homogeneity of $\mathcal{E}$, we get by deriving the product w.r.t. y^b that

$$\frac{\partial h_{dc}}{\partial y^b} y^c = \frac{1}{12} y^c \frac{\partial}{\partial y^b} \left(\frac{1}{\mathcal{E}} \frac{\partial^2 \mathcal{E}^2}{\partial y^c \partial y^d} \right) = -\frac{1}{2\mathcal{E}} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial y^b} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial y^d} + 2h_{bd},$$

is a geometric object symmetrical in the indices b and d, whence

$$y^c C^a{}_{cb} = 0 \Rightarrow d^a{}_b = \delta^a{}_b.$$

Hence, the canonic linear d-connection is *of Cartan type* ([9]) and the deflection tensors are

$$D_{ij}=0, \quad d_{ab}=h_{ab},$$

where the indices were raised/lowered using the corresponding parts of the $(h,v)-$metric. We obtain subsequently that the *electromagnetic tensors identically vanish*,

$$\begin{cases} F_{ij}=\frac{1}{2}(D_{ij}-D_{ji})=0, \\ f_{ab}=\frac{1}{2}(d_{ab}-d_{ba})=0. \end{cases}$$

and, since D is of Cartan type, we have ([9])

$$S^a_{d\ bc}y^d=S^a_{\ bc}=0, y^dR^a_{d\ jk}=R^a_{\ jk}=0,\ y^dP^a_{d\ kc}=P^a_{\ kc}=0.$$

5 Einstein equations for the Riemann-locally Minkovski model

The curvatures of the canonical metrical linear d-connection associated to $\mathcal{G}$ in (3.1) with (2.5) are, according to [9],

$$\begin{cases} R_{j\ kh}^{\ i}=r_{j\ kh}^{\ i}, R_{b\ kh}^{\ a}=0, \quad P_{j\ kc}^{\ i}=0, P_{b\ kc}^{\ a}=0,\ S_{j\ bc}^{\ i}=0, \\ S^a_{b\ cd}=\dfrac{\partial C^a_{\ bc}}{\partial y^d}-\dfrac{\partial C^a_{\ bd}}{\partial y^c}+C^f_{\ bc}C^a_{\ fd}-C^f_{\ bd}C^a_{\ fc}, \end{cases} \tag{5.1}$$

where $r^i_{j\ kh}$ are the components of the curvature tensor of the horizontal metric. Taking into account the relations (5.1), it follows, as in [9], that the Einstein equations of the canonical metrical linear d-connection $C\Gamma(\tilde{N})$ (3.2)-(3.3) can be written as

$$\begin{cases} r_{ij}-\frac{1}{2}(r+S)g_{ij}=T^H_{ij}, \\ T^{M_1}_{bj}=0, \quad T^{M_2}_{jb}=0, \\ S_{ab}-\frac{1}{2}(r+S)h_{ab}=T^V_{ab}, \end{cases} \tag{5.2}$$

where r_{ij} denotes the Ricci tensor $r_{ij}=r_{i\ jh}^{\ h}$ attached to the Riemannian metric g, S_{ab} is the Ricci tensor attached to the vertical metric h_{ab}, r is the scalar curvature of r^i_{jkl} and $T_{\alpha\beta}$ are the components of the energy-momentum tensor field. If it is to compare (5.2) with the (classical) Einstein equations of the Riemannian manifold (M,g), we have to notice in the h-part of the above equations the "perturbation"introduced by the term $-\frac{1}{2}Sg_{ij}$. According to [9], the energy conservation law is identically satisfied by $C\Gamma(\tilde{N})$.

6 The electrodynamic case

If we consider the Lagrangian of electrodynamics ([10]),

$$L_0(x,y)=mc\gamma_{ij}(x)y^iy^j+\frac{2e}{m}A_i(x)y^i, \tag{6.1}$$

where γ_{ij} is a Lorentz metric tensor, $A_i(x)$ is a covector field and m,c,e are physical constants, then, the attached Lagrange metric tensor is

$$g_{ij}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 L}{\partial y^i\partial y^j}=mc\gamma_{ij}.$$

On the other hand, from the variational problem associated to 6.1, there arises a nonlinear connection $\hat{N}$, whose coefficients are given by ([10])

$$N^a_j = \gamma^a{}_{jb}(x)y^b - \overset{\circ}{F}{}^a{}_j, \tag{6.2}$$

where F is the electromagnetic field

$$\overset{\circ}{F}{}^i{}_j = \frac{e}{2m} g^{ik}(A_{j;k} - A_{k;j}),$$

the symbol ";" denotes the covariant derivative defined by means of the Christoffel symbols $\gamma^i{}_{jk}(x)$ of the Lorentz metric tensor γ_{ij}, and we denoted for simplicity, $\gamma^a{}_{jb} = \delta^a_i \delta^k_b \gamma^i{}_{jk}$.

If we consider now TM endowed with the (h, v)-metric

$$\mathcal{G} = g_{ij}(x)dx^i \otimes dx^j + h_{ab}(y)\delta y^a \otimes \delta y^b,$$

then the canonical metrical linear $d-$connection $C\Gamma(\hat{N})$ associated to $\mathcal{G}$ is given by

$$\begin{cases} \hat{L}^i{}_{jk} = \gamma^i{}_{jk}, \\ \hat{L}^a{}_{bk} = \gamma^a{}_{bk} - \dfrac{1}{2} h^{ac}(N^d_k \dfrac{\partial h_{bc}}{\partial y^d} + \gamma^d{}_{kb} h_{dc} + \gamma^d{}_{kc} h_{bd}), \\ \hat{C}^i{}_{jc} = 0, \quad C^a{}_{bc} = \dfrac{1}{2} h^{ad} \left(\dfrac{\partial h_{db}}{\partial y^c} + \dfrac{\partial h_{dc}}{\partial y^b} - \dfrac{\partial h_{bc}}{\partial y^d} \right). \end{cases}$$

By direct computation, one obtains that this time, the torsions of $C\Gamma(\hat{N})$ are

$$T^i{}_{jk} = 0, \ C^i{}_{jc} = 0, \ S^a{}_{bc} = 0,$$

while $P^a{}_{jb}$ and $R^a{}_{jk}$ do not vanish. Its curvatures are

$$R_j{}^i{}_{kh} = r_j{}^i{}_{kh}, \ R_b{}^a{}_{kh}, \quad P_j{}^i{}_{kc} = 0, \ P_b{}^a{}_{kc}, \quad S_j{}^i{}_{bc} = 0, \ S^a_b{}_{cd},$$

where the expression of $S^a_b{}_{cd}$ is similar to that one in the previous section. The Ricci tensor has the properties

$$R_{ij} = r_{ij}, \overset{2}{P}_{jb} = P^h_j{}_{hb} = 0.$$

The Einstein equations take the particular form

$$\begin{cases} r_{ij} - \dfrac{1}{2}(r + S)g_{ij} = \overset{h}{T}_{ij}, \\ \overset{1}{T}_{bj} = \overset{1}{P}_{bj}, \ \overset{2}{T}_{jb} = 0, \\ S_{ab} - \dfrac{1}{2}(r + S)h_{ab} = \overset{v}{T}_{ab}, \end{cases}$$

while the energy conservation law writes as:

$$\begin{cases} \left(r^i{}_j - \dfrac{1}{2} r\delta^i{}_j \right)_{|i} + \overset{1}{P}{}^a{}_j|_a = 0, \\ \left(S^a{}_b - \dfrac{1}{2} S\delta^a{}_b \right) |_a = 0, \end{cases}$$

where $r^i_j = g^{ih} r_{hj}$, $S^a_b = h^{ac} S_{cb}$, $\overset{1}{P}{}^a_j = h^{ac} \overset{2}{P}_{cj}$.

We shall study further two particular cases of v-locally Minkowski metrics, by preserving $h = h(y)$ from (2.5) and particularizing $g = g(x, y)$. In these cases the results in Section 4 still hold true, and the nonlinear connection used throughover is according to Theorem 2, the trivial one.

7 The relativistic Miron-Kawaguchi optic $h-$metric case

Let $\gamma_{ij} = \gamma_{ij}(x)$ be a Riemannian metric on M. We denote

$$y_i = \gamma_{ij} y^j, \ \|y\|^2 = \gamma_{ij} y^i y^j.$$

We consider now the metric $\mathcal{G}$ from (4.1), in which the $h-$metric is given by

$$g_{ij} = \gamma_{ij} + c^{-2} y_i y_j,$$

where c is a nonzero real constant. The coefficients $C^i{}_{jd}$ of the linear $d-$connection are

$$C^i{}_{jd} = \frac{1}{2} g^{ih} \frac{\partial g_{jh}}{\partial y^d} = \frac{g^{ih}}{2c^2}(\gamma_{jd} y_h + \gamma_{hd} y_j),$$

and $C^a{}_{bc} = C^a{}_{bc}(y)$ are determined in [3].

From the theorem above, it results that the Ricci tensor field has the components

$$\begin{aligned} R_{ij} &= R^h_{i\ jh}, \ \overset{1}{P}_{bj} = P^a_{b\ ka} = 0, \\ \overset{2}{P}_{jb} &= P^h_{j\ hb}, \ S_{bc} = S^a_{b\ ca}. \end{aligned}$$

The Einstein equations write then

$$\begin{cases} R_{ij} - \dfrac{1}{2}(R+S) g_{ij} = \overset{h}{T}_{ij}, \\ \overset{1}{T}_{bj} = 0, \ \overset{2}{T}_{jb} = -\overset{2}{P}_{jb}, \\ S_{ab} - \dfrac{1}{2}(R+S) h_{ab} = \overset{v}{T}_{ab}, \end{cases}$$

and the energy conservation law is described by the system of PDEs

$$\begin{cases} \left(R^i{}_j - \dfrac{1}{2} R \delta^i{}_j \right)_{|i} = 0, \\ \left(S^a{}_b - \dfrac{1}{2}(R+S)\delta^a{}_b \right)|_a - \overset{2}{P}{}^i_{b|i} = 0, \end{cases}$$

where $R^i{}_j = g^{ih} R_{hj}$, $S^a{}_b = h^{ac} S_{cb}$, $\overset{2}{P}{}^i{}_b = g^{ij} \overset{2}{P}_{jb}$.

The first equality from above is identically satisfied (see [8]), since it coincides with the horizontal part of the energy conservation law for the canonical linear $d-$connection of the generalized Lagrange space (M, g) (which is infered straightforward by the Bianchi identity).

8 The $h-$conformal metric case

In the $h-$conformal metric case, i.e. for the horizontal metric given by

$$g_{ij}(x,y) = e^{2\sigma(x,y)} \gamma_{ij}(x),$$

the coefficients $L^i{}_{jk}$ are given by ([2])

$$L^i{}_{jk} = \gamma^i{}_{jk} + \delta^i_j \sigma_k + \delta^i_k \sigma_j - \gamma_{jk} \sigma^i,$$

where $\sigma^i = \gamma^{il}\sigma_l$, $\gamma^i{}_{jk}$ are the Christoffel symbols of $\gamma_{ij}(x)$ and for h given by (2.5) we have $\sigma_k = \dfrac{\delta\sigma}{\delta x^k} = \dfrac{\partial\sigma}{\partial x^k}$. Obviously, $L^a{}_{bk}$ and $C^a{}_{bc}$ are as in Theorem 2 and Remark 1. By direct computation, we get

$$C^i{}_{jc} = \frac{1}{2}g^{ih}\frac{\partial g_{jh}}{\partial y^c} = \delta^i_j\dot{\sigma}_c,$$

where $\dot{\sigma}_c$ denotes the derivative of σ w.r.t. y : $\dot{\sigma}_c = \dfrac{\partial\sigma}{\partial y^c}$. As well, the torsion components vanish, except $P^i{}_{jc} = C^i{}_{jc}$ and the curvature components are

$$\begin{cases} R^i_{j\ kl},\ R^a_{b\ jk} = 0, P^i_{j\ kc},\ P^a_{b\ kc} = 0,\ S^a_{b\ cd}. \\ S^i_{j\ bc} = \dfrac{\partial C^i{}_{jb}}{\partial y^c} - \dfrac{\partial C^i{}_{jc}}{\partial y^b} + C^h{}_{jb}C^i{}_{hc} - C^h{}_{jc}C^i{}_{hb} = 0 \\ P^i_{j\ kb} = \delta^i_k\sigma_{jb} - \gamma_{jk}\gamma^{il}\sigma_{lb}, \end{cases}$$

where $\sigma_{jb} = \dfrac{\partial^2\sigma}{\partial x^j\partial y^b}$, $\sigma_{lb} = \dfrac{\partial^2\sigma}{\partial x^l\partial y^b}$. The Ricci tensor has the properties: $\overset{1}{P}_{bj} = P^a_{b\ ka} = 0$ and

$$\overset{2}{P}_{jb} = P^h_{j\ hb} = \delta^h_h\sigma_{jb} - \gamma_{jh}\gamma^{hl}\sigma_{lb} = 4\sigma_{jb} - \delta^l_j\sigma_{lb} = 3\sigma_{jb}.$$

Then the Einstein equations are

$$\begin{cases} R_{ij} - \dfrac{1}{2}(R+S)g_{ij} = \overset{h}{T}_{ij}, \\ \overset{1}{T}_{bj} = 0,\ \overset{2}{T}_{jb} = -3\sigma_{jb}, \\ S_{ab} - \dfrac{1}{2}(R+S)h_{ab} = \overset{v}{T}_{ab}. \end{cases}$$

Taking into account that $S = S(y)$, the conservation law is described by

$$\begin{cases} \left(R^i{}_j - \dfrac{1}{2}R\delta^i{}_j\right)_{|i} = 0, \\ \left(S^a{}_b - \dfrac{1}{2}(R+S)\delta^a{}_b\right)|_a - 3\sigma^j{}_{b|j} = 0, \end{cases}$$

where the first equality is identically satisfied.

Acknowledgement. The present work was partially supported by the Grant CNCSIS MEN A1478.

References

[1] G.S. Asanov, *Finsleroid space supplemented by angle and scalar product*, Hypercomplex Numbers in Geometry and Physics, Ed. "Mozet", Russia, 1, 1 (2004), 40-62.

[2] V.Balan, *Generalized Einstein-Yang Mills Equations for the Space* $GL^n = (M, g_{ij}(x,y) = e^{2\sigma(x,y)}\gamma_{ij}(x))$, Tensor N.S., 52 (1993), 199-203.

[3] V. Balan, N. Brinzei, *Einstein equations for the Berwald-Moor type Euclidean-locally Minkowski relativistic model*, preprint.

[4] J. Kern, *Lagrange geometry*, Arch. Math. 25 (1974), 483-443.

[5] S. Kobayashi, K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry I, II*, Interscience Publishers, New York, (1963), (1969).

[6] S.V. Lebedev, *Properties of spaces associated with commutative-associative H_3 and H_4 algebras*, Hypercomplex Numbers in Geometry and Physics, Ed. "Mozet", Russia, 1, 1 (2004), 63-69.

[7] R. Miron, *The Geometry of Higher Order Finsler Spaces*, Hadronic Press, 1998.

[8] R. Miron, *The Geometry of Lagrange Spaces: Theory and Applications*, Kluwer Acad. Publishers, 1994.

[9] R. Miron, M.Anastasiei, *Vector Bundles. Lagrange Spaces. Applications to Relativity*, Geometry Balkan Press, 1996.

[10] R. Miron, D. Hrimiuc, H. Shimada, S.V. Sabău, *The Geometry of Hamilton and Lagrange Spaces*, Kluwer, FTPh. 198, 2001.

[11] Gh. Munteanu, V. Balan, *Lectures of Relativity Theory* (Romanian), Bren Eds., Bucharest, 2000.

[12] D.G. Pavlov, *Chronometry of the three-dimensional time*, Hypercomplex Numbers in Geometry and Physics, Ed. "Mozet", Russia, 1, 1 (2004), 19-30.

[13] D.G. Pavlov, *Four-dimensional time*, Hypercomplex Numbers in Geometry and Physics, Ed. "Mozet", Russia, 1, 1 (2004), 31-39.

[14] D.G. Pavlov, *Generalization of scalar product axioms*, Hypercomplex Numbers in Geometry and Physics, Ed. "Mozet", Russia, 1, 1 (2004), 5-18.

INVARIANT FRAMES FOR A GENERALIZED LAGRANGE SPACE WITH BERWALD-MOÓR METRIC

Marius Păun

Faculty of Mathematics and Informatics, Transilvania University, Braşov, România
m.paun@unitbv.ro

The notion of generalized Lagrange space should be geometrically considered as a generalized metric space $M^n = (M, g_{ij}(x, y))$. A theory of invariant Finsler spaces was given by M. Matsumoto and R. Miron with important applications. The notion of non-holonomic space was introduced by Gh. Vranceanu in [VR]. The Vranceanu type invariant frames and the invariant geometry of second order Lagrange spaces was studied by the author in [P3]. The purpose of the present paper is to study the invariant geometry for a generalized Lagrange space endowed with a Berwald-Moór metric. We introduce distinct non-holonomic frames on the two components of the Whitney's decomposition. This will determine a non-holonomic coordinates system on the total space TM and thus its geometry can be studied with methods analogous to the mobile frame. We obtain, in this manner, invariant connections, curvatures and torsions, and the fundamental equations in this theory. Also we can construct the invariant frames so that, with respect to them, the metric of the total space can be written in canonical form and in this case we deduce invariant Einstein equations. We mention that the frames introduced here depend on the metric and all the computations are for this metric.

MSC: 53B40, 53C07

1 General invariant frames

Let M be a 4-dimensional C^∞ class manifold, (TM, π, M) its tangent bundle, (x^i, y^i) local coordinates on TM, $F : TM \to R$, $F = F(y)$ a locally Minkowsky Finsler function and the induced fundamental metric tensor

$$g^*_{ij} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F^2}{\partial y^i \partial y^j}, \qquad i, j = 1, 2, 3, 4.$$

For $F(y) = \sqrt[4]{y^1 y^2 y^3 y^4}$ Pavlov has studied the "4-pseudo scalar product"

$$< X, Y, Z, T >= G_{ijkl} X^i Y^j Z^k T^l \tag{1.1}$$

related to the Berwald-Moór metric, where

$$G_{ijkl} = \frac{1}{4!}\frac{\partial^4 \mathcal{L}}{\partial y^i \partial y^j \partial y^k \partial y^l}, \quad \text{and} \quad \mathcal{L} = F^4.$$

Based on the tensor field (1.1) Balan and Brinzei have constructed an energy-dependent metric space which is a generalized Lagrange space (which is a Euclidean-locally Minkowsky relativistic model).

The canonical nonlinear connection N on TM, in this case, has the coefficients $N^i_j = 0$ so the adapted basis to the direct decomposition

$$T_u(TM) = N(u) \oplus V(u) \ \ \forall u \in TM, \tag{1.2}$$

is, in fact, the canonical one:

$$\left\{\frac{\delta}{\delta x^i}, \frac{\delta}{\delta y^i}\right\} = \left\{\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial y^i}\right\} \qquad (i = 1, 2, 3, 4) \tag{1.3}$$

The invariant frames adapted to the direct decomposition (1.2)

$$\mathcal{R} = (e^{(0)i}_{\alpha},\ e^{(1)i}_{\alpha}),$$

where i is a component index and α counter index, are defined as follows:

$$e^{(0)}_{\alpha} : u \in TM \to e^{(0)}_{\alpha}(u) \subset N(u) \tag{1.4}$$

$$e^{(1)}_{\alpha} : u \in TM \to e^{(1)}_{\alpha}(u) \subset V(u) \quad (\alpha = 1, 2, 3, 4)$$

For this frames we have $e^{(A)}_{\alpha}(u) = e^{(A)i}_{\alpha}\dfrac{\delta}{\delta y^{(A)i}}\ |_u$ where, for simplicity, we put $y^{(0)i} = x^i,\ \ y^{(1)i} = y^i$. Denote by $\mathcal{R}^* = (f^{(0)\alpha}_i,\ f^{(1)\alpha}_i)$ the dual frames of $\mathcal{R}$. For $\mathcal{R}^*,\ i$ is the counter index and α is a component index.

The duality conditions are:

$$\langle\, e^{(A)i}_{\ \ \alpha}\,,\, f^{(B)\alpha}_{\ \ j}\,\rangle \ = \ \delta^i_j\,\delta^A_B \quad (\,A, B = 0, 1\,) \tag{1.5}$$

The frames $\mathcal{R}$ and $\mathcal{R}^*$ are non-holonomic and thru them we can introduce a non-holonomic coordinate system ($s^{(0)\alpha}$,$s^{(1)\alpha}$) in Vrânceanu sense. In this frames the basis and the cobasis have the representations:

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta x^i} &= f^{(0)\alpha}_{\ \ i}\frac{\delta}{\delta s^{(0)\alpha}} \quad ; \frac{\delta}{\delta y^i} = f^{(1)\alpha}_{\ \ i}\frac{\delta}{\delta s^{(1)\alpha}}, \\ \delta x^i &= e^{(0)i}_{\ \ \alpha}\delta s^{(0)\alpha} \quad ; \delta y^i = e^{(1)i}_{\ \ \alpha}\delta s^{(1)\alpha}; \end{aligned} \tag{1.6}$$

These relations hold:

$$\left\langle \frac{\delta}{\delta s^{(A)\alpha}}\,,\, \delta s^{(B)\beta} \right\rangle \ = \ \delta^{\beta}_{\alpha}\,\delta^{B}_{A}, \qquad (A, B \ = \ 0, 1\,) \tag{1.7}$$

The Lie brackets introduce us the non-holonomy coefficients of Vranceanu:

$$\left[\frac{\delta}{\delta s^{(A)\alpha}}\,,\, \frac{\delta}{\delta s^{(B)\beta}}\right] \ = \ \underset{(AB)}{\overset{C}{W}}{}^{\gamma}_{\alpha\beta}\,\frac{\delta}{\delta s^{(C)\gamma}} \tag{1.8}$$

$(A, B, C = 0, 1;\quad A \leq B;\quad sum\ on\ C)$ where:

$$\underset{(00)}{\overset{0}{W}}{}^{\gamma}_{\beta\alpha} = f^{(0)\gamma}_{\ \ l}\left(\frac{\delta e^{(0)l}_{\ \ \beta}}{\delta s^{(0)\alpha}} - \frac{\delta e^{(0)l}_{\ \ \alpha}}{\delta s^{(0)\beta}}\right); \quad \underset{(00)}{\overset{1}{W}}{}^{\gamma}_{\beta\alpha} = 0 \tag{1.9}$$

$$\underset{(01)}{\overset{0}{W}}{}^{\gamma}_{\beta\alpha} = f^{(0)\gamma}_{\ \ l}\frac{\delta e^{(0)l}_{\ \ \alpha}}{\delta s^{(1)\beta}}; \qquad \underset{(01)}{\overset{1}{W}}{}^{\gamma}_{\beta\alpha} = -f^{(1)\gamma}_{\ \ l}\frac{\delta e^{(1)l}_{\ \ \beta}}{\delta s^{(0)\alpha}}; \tag{1.10}$$

$$\underset{(11)}{\overset{0}{W}}{}^{\gamma}_{\beta\alpha} = 0; \qquad \underset{(11)}{\overset{1}{W}}{}^{\gamma}_{\beta\alpha} = f^{(1)\gamma}_{\ \ l}\left(\frac{\delta e^{(1)l}_{\ \ \beta}}{\delta s^{(1)\alpha}} - \frac{\delta e^{(1)l}_{\ \ \alpha}}{\delta s^{(1)\beta}}\right); \tag{1.11}$$

We observe that $\underset{(AA)}{\overset{A}{W}}{}^{\gamma}_{\beta\alpha}$ are tensors and $\underset{(01)}{\overset{0}{W}}{}^{\gamma}_{\beta\alpha}$, $\underset{(01)}{\overset{1}{W}}{}^{\gamma}_{\beta\alpha}$ are non-holonomic objects.

The objects $\underset{(BC)}{\overset{A}{W}}{}^{\gamma}_{\beta\alpha}$ are called Vranceanu's non-holonomy coefficients.

Theorem 1.1 *If $\mathcal{R}$ are normal frames ($e^{(0)i}_{\ \ \alpha} = e^{(1)i}_{\ \ \alpha} = e^{i}_{\alpha}$) then $\mathcal{R}$ is holonomic if and only if the entries of the matrix e^{i}_{α} are the gradients of n functions on M.*

The frame $\mathcal{R}$ is holonomic if and only if there exists a set of n functions φ defined on M for which we have

$$f^{\alpha}_{i} = \frac{\partial \varphi^{\alpha}}{\partial x^{i}}$$

if and only if the 1-form $ds^{(0)\alpha} = f^{\alpha}_{i} dx^{i}$ is exact.

Observation 1.1 *$\mathcal{R}$ are holonomic if and only if the Lie brackets are vertical i.e. N is integrable, condition which is independent of the frames$\mathcal{R}$.*

Generally we have:

Theorem 1.2 *The frames $\mathcal{R}$ are holonomic if and only if :*

$$\underset{(00)}{\overset{0}{W}}{}^{\gamma}_{\beta\alpha} = \underset{(01)}{\overset{0}{W}}{}^{\gamma}_{\beta\alpha} = \underset{(11)}{\overset{0}{W}}{}^{\gamma}_{\beta\alpha} = 0$$

2 The representation of geometric objects in the frames $\mathcal{R}$

Let $X \in \chi(E)$ be a vector field. Then for X we have the local representation:

$$X = X^{(0)i}\frac{\delta}{\delta x^{i}} + X^{(1)i}\frac{\delta}{\delta y^{i}} \tag{2.1}$$

and the representation:

$$X = X^{(0)\alpha}\frac{\delta}{\delta s^{(0)\alpha}} + X^{(1)\alpha}\frac{\delta}{\delta s^{(1)\alpha}} \tag{2.2}$$

in invariant frames. The relations between the components in the local basis and the non-holonomic components of the vector field X are:

$$X^{(A)i} = e^{(A)i}_{\alpha} X^{(A)\alpha} \ \ \textit{or} \ \ X^{(A)\alpha} = f^{(A)\alpha}_{i} X^{(A)i} \quad (A = 0, 1). \tag{2.3}$$

Proposition 2.1 *The non-holonomic components of the h_{-}, v_{-} projections of the vector field X are invariant at local changes of coordinates.*

We can easy see that from:

$$\bar{X}^{(A)\alpha} = \bar{f}^{(A)\alpha}_{\ \ i}\bar{X}^{(A)i} = f^{(A)\alpha}_{\ \ k}\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^i}X^{(A)l}\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^l} = f^{(A)\alpha}_{\ \ k}\delta^k_l X^{(A)l} = X^{(A)\alpha} \quad \blacksquare$$

Let $\omega \in \chi^*$ be a field of 1-forms. Then:

$$\omega = \omega^{(0)}_{\ \ i}\delta x^i + \omega^{(1)}_{\ \ i}\delta y^i = \omega^{(0)}_{\ \ \alpha}\delta s^{(0)\alpha} + \omega^{(1)}_{\ \ \alpha}\delta s^{(1)\alpha} \tag{2.4}$$

Proposition 2.2 *The non-holonomic components* $\omega^{(A)}_{\ \ \alpha}$ *of the projections of* $\omega^{(A)}$ *are invariant at local changes of coordinates.*

We can use the same way to define the non-holonomic components of a tensor field and to prove that there are invariant at local changes of coordinates. Due to the fact that the geometric objects studied above have, in the frames $\mathcal{R}$, invariant components at local changes of coordinates we call this frames invariant frames.

3 d-linear connections in invariant frames

Since F is locally Minkowsky the coefficients of the canonical linear d-connection $C\Gamma(N)$ are:

$$L^i_{jk} = 0; \qquad C^i_{jk} = \frac{1}{2}g^{ih}\left(\frac{\partial g_{jh}}{\partial y^k} + \frac{\partial g_{kh}}{\partial y^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial y^h}\right) \tag{3.1}$$

Proposition 3.1 *In the invariant frames* $\mathcal{R}$ *the essential components of the canonical d-linear connection* $\mathcal{C}\Gamma(N)$ *are four and are given by:*

$$\overset{A}{L}{}^{\gamma}_{\beta\alpha} = f^{(A)\gamma}_{\ \ m}\frac{\delta e^{(A)m}_{\ \ \beta}}{\delta s^{(0)\alpha}} \qquad (A = 0,1) \tag{3.2}$$

$$\overset{A}{C}{}^{\gamma}_{\beta\alpha} = f^{(A)\gamma}_{\ \ m}\left(\frac{\delta e^{(A)m}_{\ \ \beta}}{\delta s^{(1)\alpha}} + e^{(1)i}_{\ \ \alpha}e^{(A)j}_{\ \ \beta}C^m_{ij}\right) \qquad (A = 0,1)$$

i.e.

$$\mathcal{C}\Gamma(N) = \left(\frac{1}{2}\underset{(00)}{\overset{0}{W}}{}^{\gamma}_{\beta\alpha}\ ,\ -\frac{1}{2}\underset{(01)}{\overset{1}{W}}{}^{\gamma}_{\beta\alpha}\ ,\ \overset{0}{C}{}^{\gamma}_{\beta\alpha}\ ,\ \overset{1}{C}{}^{\gamma}_{\beta\alpha}\right) \tag{3.3}$$

In the case of the normal invariant frames the canonical linear d-connection has only two distinct coefficients:

$$\mathcal{C}^*\Gamma(N) = \left(L^{\gamma}_{\beta\alpha},\ C^{\gamma}_{\beta\alpha}\right) = \left(\frac{1}{2}\underset{(00)}{\overset{0}{W}}{}^{\gamma}_{\beta\alpha}\ ,\ \frac{1}{2}\underset{(11)}{\overset{1}{W}}{}^{\gamma}_{\beta\alpha} + f^{\gamma}_{m}e^i_{\beta}e^j_{\alpha}C^m_{ij}\right) \tag{3.4}$$

Denoting by " $_|$"and "|"the covariant derivatives with respect to $C\Gamma(N)$ we have:

Proposition 3.2 *The movement equations of the frames* $\mathcal{R}$ *and* $\mathcal{R}^*$ *are:*

$$e^{(A)i}_{\ \ \alpha|m} = \overset{A}{L}{}^{\gamma}_{\beta\alpha}\, e^{(A)i}_{\ \ \gamma}f^{(0)\beta}_{\ \ m} \ ; \quad e^{(A)i}_{\ \ \alpha}\,|_m = \overset{A}{C}{}^{\gamma}_{\beta\alpha}\, e^{(A)i}_{\ \ \gamma}f^{(1)\beta}_{\ \ m} \tag{3.5}$$

$$f^{(A)\gamma}_{\ \ i|m} = -\,\overset{A}{L}{}^{\gamma}_{\beta\alpha}\, f^{(A)\alpha}_{\ \ i}f^{(0)\beta}_{\ \ m} \ ; \quad f^{(A)\alpha}_{\ \ i}\,| = -\,\overset{A}{C}{}^{\gamma}_{\beta\alpha}\, f^{(A)\alpha}_{\ \ i}f^{(1)\beta}_{\ \ m} \qquad (A = 0,1) \tag{3.6}$$

Proposition 3.3 *If we have the canonical d-linear connection $C\Gamma(N)$ and the invariant frames $\mathcal{R}$ then the coefficients of $\mathcal{C}\Gamma(N)$ can be expressed in the shape:*

$$\overset{A}{L}{}^{\gamma}_{\beta\alpha} = \frac{\delta e^{(A)m}_{\ \ \beta}}{\delta x^{i}} e^{(0)i}_{\ \ \alpha} f^{(A)\gamma}_{\ \ m}; \tag{3.7}$$

or

$$\overset{A}{L}{}^{\gamma}_{\beta\alpha} = -e^{(0)i}_{\ \ \alpha} \frac{\delta f^{(A)\gamma}_{\ \ i}}{\delta x^{j}} e^{(A)j}_{\ \ \beta};$$

or:

$$\overset{A}{L}{}^{\gamma}_{\beta\alpha} = e^{(A)k}_{\ \ \beta|i} e^{(0)i}_{\ \ \alpha} f^{(A)\gamma}_{\ \ k} = -f^{(A)\gamma}_{\ \ k|i} e^{(A)k}_{\ \ \beta} e^{(0)i}_{\ \ \alpha}$$

$$\overset{A}{C}{}^{\gamma}_{\beta\alpha} = \left(\frac{\delta e^{(A)m}_{\ \ \beta}}{\delta y^{i}} + e^{(A)j}_{\ \ \beta}\, C^{m}_{ij} \right) e^{(1)i}_{\ \ \alpha} f^{(A)\gamma}_{\ \ m}; \tag{3.8}$$

or:

$$\overset{A}{C}{}^{\gamma}_{\beta\alpha} = e^{(0)i}_{\ \ \alpha} \left(-\frac{\delta f^{(A)\gamma}_{\ \ i}}{\delta y^{j}} + C^{m}_{ij}\, f^{(A)\gamma}_{\ \ m} \right) e^{(A)j}_{\ \ \beta};$$

or:

$$\overset{A}{C}{}^{\gamma}_{\beta\alpha} = e^{(A)k}_{\ \ \beta}|_{i} e^{(0)i}_{\ \ \alpha} f^{(A)\gamma}_{\ \ k} = -f^{(A)\gamma}_{\ \ k}|_{i} e^{(a)k}_{\ \ \beta} e^{(0)i}_{\ \ \alpha}$$

4 Covariant invariant derivatives

Consider the d-linear connection whose coefficients in the frames $\mathcal{R}$ are

$$\mathcal{C}\Gamma(N) = \left(\overset{(A)}{L}{}^{\gamma}_{\ \beta\alpha},\ \overset{(A)}{C}{}^{\gamma}_{\ \beta\alpha} \right) \quad (A = 0, 1)$$

Let $X \in \chi(E)$ and $X^{(0)\alpha}$, $X^{(1)\alpha}$ its invariant components. We denote by " $)$", and " $)$ ",

the operators of h_{-} and v_{-} covariant invariant derivative acting in this manner:

Definition 4.1 *The h_- and v_- invariant covariant derivatives of the components $X^{(0)}$, $X^{(1)}$ are*

$$X^{(A)\alpha}{}_{)\beta} = \frac{\delta X^{(A)\alpha}}{\delta s^{(0)\beta}} + \overset{A}{L}{}^{\alpha}{}_{\varphi\beta}\, X^{(A)\varphi} \tag{4.9}$$

$$X^{(A)\alpha}\,)_{\beta} = \frac{\delta X^{(A)\alpha}}{\delta s^{(1)\beta}} + \overset{A}{C}{}^{\alpha}{}_{\varphi\beta}\, X^{(A)\varphi} \quad ; \quad (A = 0, 1) \tag{4.10}$$

If ω is an 1-form field and $\omega^{(A)}{}_{\alpha}$, $(A = 0, 1)$ are its invariant components then:

Definition 4.2 *The h_-, v_- covariant invariant derivatives of the components $\omega^{(0)}{}_{\alpha}$, $\omega^{(1)}{}_{\alpha}$ are*

$$\omega^{(A)}{}_{\alpha)\beta} = \frac{\delta \omega^{(A)}{}_{\alpha}}{\delta s^{(0)\beta}} - \overset{A}{L}{}^{\varphi}{}_{\alpha\beta}\, \omega^{(A)}{}_{\varphi} \tag{4.11}$$

$$\omega^{(A)}{}_{\alpha}\,)_{\beta} = \frac{\delta \omega^{(A)}{}_{\alpha}}{\delta s^{(1)\beta}} - \overset{A}{C}{}^{\varphi}{}_{\alpha\beta}\, \omega^{(A)}{}_{\varphi} \quad ; \quad (A = 0, 1) \tag{4.12}$$

Theorem 4.1 *The h_-, v_- covariant invariant derivatives of $X^{(A)\alpha}$ and $\omega^{(A)}_{\alpha}$ are the invariant components of the h_-, v_- covariant derivatives of the components in the canonical basis of X and ω i.e.*

$$X^{(A)\alpha}{}_{)\beta} = X^{(A)i}{}_{|m} f^{(A)\alpha}_{i} e^{(0)m}_{\beta} \tag{4.13}$$

$$X^{(A)\alpha}\,)_{\beta} = X^{(A)i}\,|_{m}\, f^{(A)\alpha}_{i} e^{(1)m}_{\beta} \tag{4.14}$$

$$\omega^{(A)}{}_{\alpha)\beta} = \omega^{(A)}{}_{i|m} e^{(A)i}_{\alpha} e^{(0)m}_{\beta} \tag{4.15}$$

$$\omega^{(A)}{}_{\alpha}\,)_{\beta} = \omega^{(A)}{}_{i}\,|_{m}\, e^{(A)i}_{\alpha} e^{(1)m}_{\beta} \tag{4.16}$$

or equivalent:

$$X^{(A)i}{}_{|m} = X^{(A)\alpha}{}_{)\beta} e^{(A)i}_{\alpha} f^{(0)\beta}_{m} \tag{4.17}$$

$$X^{(A)i}\mid_{\ m} = X^{(A)\alpha}\ )_{\ \beta}\, e^{(A)i}_{\ \alpha} f^{(1)\beta}_{\ m} \tag{4.18}$$

$$\omega^{(A)}{}_{i|m} = \omega^{(A)}{}_{\alpha)\beta} f^{(A)\alpha}_{\ i} f^{(0)\beta}_{\ m} \tag{4.19}$$

$$\omega^{(A)}{}_{i}\mid_{\ m} = \omega^{(A)}{}_{\alpha}\ )_{\ \beta}\, f^{(A)\alpha}_{\ i} f^{(1)\beta}_{\ m}. \tag{4.20}$$

Now we can formulate the laws of transformation of the d-linear connection at invariant frames changes.

Proposition 4.1 *At invariant frames changes* $\overset{A}{\bar{L}}{}^{\gamma}_{\alpha\beta}$ *and* $\overset{A}{\bar{C}}{}^{\gamma}_{\alpha\beta}$ *transform like:*

$$\overset{A}{\bar{L}}{}^{\gamma}_{\alpha\beta} = \overset{A}{\bar{C}}{}^{\gamma}_{\psi}\ \overset{A}{C}{}^{\psi}_{\beta)\eta}\ \overset{0}{C}{}^{\eta}_{\alpha} \tag{4.21}$$

$$\overset{A}{\bar{C}}{}^{\gamma}_{\alpha\beta} = \overset{A}{\bar{C}}{}^{\gamma}_{\psi}\ \overset{A}{C}{}^{\psi}_{\beta}\,)_{\eta}\ \overset{1}{C}{}^{\eta}_{\alpha} \tag{4.22}$$

where we have:

$$\frac{\delta}{\delta\bar{s}^{(A)\alpha}} = \overset{A}{C}{}^{\beta}_{\alpha}\,\frac{\delta}{\delta s^{(A)\beta}} \qquad \delta s^{(A)\alpha} = \overset{A}{\bar{C}}{}^{\alpha}_{\beta}\,\delta\bar{s}^{(A)\beta} \qquad \overset{A}{\bar{C}}{}^{\alpha}_{\beta}\ \overset{B}{C}{}^{\beta}_{\gamma} = \delta^{\alpha}_{\gamma}\delta^{AB}$$

and δ^{α}_{γ}, δ^{AB} *are Kronecker symbols.*

5 Torsion and curvature tensor fields in invariant frames

The torsion tensor field of the considered d-linear connection is given by:

$$\mathcal{T}(X,Y) = D_X Y - D_Y X - [X,Y], \quad \forall X,Y \in \chi(E). \tag{5.1}$$

In the frames $\mathcal{R}$, for the canonical d-linear connection, this tensor fields have some horizontal and vertical components which all vanish except:

$$h\mathcal{T}\left(\frac{\delta}{\delta s^{(0)\alpha}}, \frac{\delta}{\delta s^{(1)\beta}}\right) = \underset{(1)}{\bar{K}}{}^{\gamma}{}_{\beta\alpha}\,\frac{\delta}{\delta s^{(0)\gamma}} = \overset{0}{C}{}^{\gamma}_{\beta\alpha} + \underset{(01)}{\overset{0}{W}}{}^{\gamma}_{\beta\alpha} \tag{5.2}$$

Theorem 5.1 *The d-tensors defined by 5.2 represent the invariant components of the d-tensor of torsion of the d-linear connection C.*

The curvature tensor fields of the d-linear connection C on TM are given by

$$\Re(X,Y) \;=\; [\; D_X \;,\; D_Y \;]\; Z \;-\; D_{[X,Y]}Z, \quad \forall X,Y,Z \in \chi(TM). \tag{5.3}$$

In the frames $\mathcal{R}$, for the canonical d-linear connection, the curvature tensor fields vanish all except:

$$\Re\left(\frac{\delta}{\delta s^{(1)\alpha}}, \frac{\delta}{\delta s^{(1)\beta}}\right)\frac{\delta}{\delta s^{(0)\gamma}} = S_{\gamma\ \beta\alpha}^{\ \varphi}\frac{\delta}{\delta s^{(0)\varphi}} \tag{5.4}$$

whose local expressions are:

$$S_{\gamma\ \beta\alpha}^{\ \varphi} = \frac{\delta \overset{0}{C}{}^{\varphi}_{\gamma\beta}}{\delta s^{(1)\alpha}} - \frac{\delta \overset{0}{C}{}^{\varphi}_{\gamma\alpha}}{\delta s^{(1)\beta}} + \overset{0}{C}{}^{\eta}_{\gamma\beta}\ \overset{0}{C}{}^{\varphi}_{\eta\alpha} - \overset{0}{C}{}^{\eta}_{\gamma\alpha}\ \overset{0}{C}{}^{\varphi}_{\eta\beta} + \underset{(11)}{\overset{1}{W}}{}^{\psi}_{\beta\alpha}\ \overset{(0)}{C}{}^{\varphi}_{\gamma\psi} \tag{5.5}$$

Theorem 5.2 *The formula 5.5 represents the invariant components at local changes of coordinates of the curvature tensor fields of the d-linear connection C.*

6 Structure equations in invariant frames

We introduce the invariant covariant differential of the vector field X in the shape:

$$DX = \left\{ dX^{(A)\alpha} + X^{(A)\gamma}\ \overset{(A)}{\omega}{}^{\alpha}_{\ \gamma} \right\}\frac{\delta}{\delta s^{(A)\alpha}} \qquad (A=0,1;\ \text{sum on } A) \tag{6.1}$$

In order to obtain the structure equations of the given d-linear connection in invariant frames, it is necessary to compute the exterior differentials of the 1-forms of connection and of the 1-forms $\delta s^{(A)\alpha}$.

Theorem 6.1 *The exterior differentials of the 1-forms $\delta s^{(A)\alpha}$ (A=0,1) depend only on the non-holonomy coefficients of Vranceanu and are given by:*

$$d(\delta s^{(0)\gamma}) = \frac{1}{2}\ \underset{(00)}{\overset{0}{W}}{}^{\gamma}_{\beta\alpha}\ \delta s^{(0)\alpha}\wedge\delta s^{(0)\beta} + \underset{(01)}{\overset{0}{W}}{}^{\gamma}_{\beta\alpha}\ \delta s^{(0)\alpha}\wedge\delta s^{(1)\beta} \tag{6.2}$$

$$d(\delta s^{(1)\gamma}) = \underset{(01)}{\overset{1}{W}}{}^{\gamma}_{\beta\alpha}\ \delta s^{(0)\alpha}\wedge\delta s^{(1)\beta} + \frac{1}{2}\ \underset{(11)}{\overset{1}{W}}{}^{\gamma}_{\beta\alpha}\ \delta s^{(1)\alpha}\wedge\delta s^{(1)\beta} \tag{6.3}$$

Using the invariant 1-form of connection

$$\overset{A}{\omega}{}^{\alpha}_{\beta} = \overset{A}{L}{}^{\alpha}_{\beta\gamma}\,\delta s^{(0)\gamma} + \overset{A}{C}{}^{\alpha}_{\beta\gamma}\,\delta s^{(1)\gamma}$$

we prove:

Theorem 6.2 *In the invariant frames $\mathcal{R}$ the structure equations of the canonical d-linear connection are given by the relations:*

$$d(\delta s^{(A)\alpha}) - \delta s^{(A)\beta} \wedge \overset{(A)}{\omega}{}^{\alpha}{}_{\beta} = - \overset{(A)}{\Omega}{}^{\alpha} \tag{6.4}$$

$$d(\overset{(A)}{\omega}{}^{\alpha}{}_{\beta}) - \overset{(A)}{\omega}{}^{\gamma}{}_{\beta} \wedge \overset{(A)}{\omega}{}^{\alpha}{}_{\gamma} = - \overset{(A)}{\Omega}{}^{\alpha}{}_{\beta} \qquad (A = 0, 1), \tag{6.5}$$

where the 2-forms of torsion $\overset{(A)}{\Omega}{}^{\alpha}$ are given by:

$$\overset{(0)}{\Omega}{}^{\alpha} = \underset{(1)}{K}{}^{\alpha}{}_{\beta\gamma}\,\delta s^{(0)\beta} \wedge \delta s^{(1)\gamma}; \qquad \overset{(1)}{\Omega}{}^{\alpha} = 0 \tag{6.6}$$

and the 2-forms of curvature $\overset{(A)}{\Omega}{}^{\alpha}{}_{\beta}$, are given by:

$$\overset{(A)}{\Omega}{}^{\alpha}{}_{\beta} = \frac{1}{2} S_{\beta}{}^{\alpha}{}_{\varphi\psi}\,\delta s^{(1)\varphi} \wedge \delta s^{(1)\psi} \tag{6.7}$$

7 Einstein equations in invariant frames

The locally Minkowsky model of the $GL^{(4)}$ space permits us to consider the normal invariant frames $\bar{\mathcal{R}}$ i.e.

$$e^{(0)i}_{\alpha} = e^{(1)i}_{\alpha} = e^{i}_{\alpha}$$

so that the quadratic form

$$\omega = g_{ij}\delta y^i \delta y^j$$

has the canonical form

$$\omega = (\omega^1)^2 - (\omega^2)^2 - (\omega^3)^2 - (\omega^4)^2 \tag{7.1}$$

We introduce the tensors of Vranceanu

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 & \alpha = \beta = 1 \\ -1 & \alpha = \beta = 2, 3, 4 \\ 0 & \textit{in rest} \end{cases} \tag{7.2}$$

and let $\epsilon^{\gamma\beta}$ so that

$$\epsilon_{\alpha\beta}\epsilon^{\gamma\beta} = \delta^{\gamma}_{\alpha} \tag{7.3}$$

where δ^{γ}_{α} is the Kronecker symbol.

Theorem 7.1 *The frames $\bar{\mathcal{R}}$ are pseudo orthogonal and the Vrânceanu tensors represent the invariant components of g_{ij}.*

Theorem 7.2 *Invariant frames transformations which preserve the canonical form of the metric G together with the composition of transformations is a group isomorphic with the multiplicative group of the pseudo orthogonal matrix*

$$\begin{pmatrix} C^{\alpha}_{\beta} & 0 \\ 0 & C^{\alpha}_{\beta} \end{pmatrix}.$$

If we consider the canonical invariant metrical connection

$$\bar{\mathcal{C}}\Gamma(N) = \left\{ L^{\gamma}_{\alpha\beta},\ C^{\gamma}_{\alpha\beta} \right\}$$

in the frames $\bar{\mathcal{R}}$ it is obvious that $\epsilon_{\alpha\beta}$ satisfy the Matsumoto axioms and the following relations hold good:

$$\epsilon_{\varphi\beta} L^{\varphi}_{\alpha\gamma} + \epsilon_{\alpha\varphi} L^{\varphi}_{\beta\gamma} = 0 \tag{7.4}$$

$$\epsilon_{\varphi\beta} C^{\varphi}_{\alpha\gamma} + \epsilon_{\alpha\varphi} C^{\varphi}_{\beta\gamma} = 0$$

The computation of the invariant components of Ricci tensor and scalar curvature lead us to:

Theorem 7.3 *In the frames $\bar{\mathcal{R}}$, Einstein equations are:*

$$\begin{array}{ccc} 0 = \kappa T^{H}_{\beta\gamma} & 0 = \kappa T^{M_1}_{\beta\gamma} & 0 = \kappa T^{M_2}_{\beta\gamma} \\ S_{\beta\gamma} - \frac{1}{2}\epsilon_{\beta\gamma} S & = & \kappa T^{V}_{\beta\gamma} \end{array} \tag{7.5}$$

where in the right hand of the equations we have the invariant components of the energy-momentum tensor.

Theorem 7.4 *The conservation laws with respect to $\bar{\mathcal{C}}\Gamma(N)$ are:*

$$\left(S^{\alpha}{}_{\beta} - \frac{1}{2} S \delta^{\alpha}_{\beta} \right))_{\alpha} = 0 \tag{7.6}$$

On TM we consider the invariant normal frames $\mathcal{R} = \{X^i_\alpha,\ X^i_\alpha\ \}$, the duals $\mathcal{R}^* = \{Y^\alpha_i,\ Y^\alpha_i\}$, $y = y^i \dfrac{\delta}{\delta y^i}$ and the restriction of the energy $\mathcal{E}$ on $TM \setminus \{y = 0\}$. Let

$$l^i = \frac{1}{2} g^{ij} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial y^i}.$$

Then $l_i = g_{ij} l^j$, $l^\alpha = l^i Y^\alpha_i$, $l_\alpha = X^i_\alpha l_i$.

Theorem 7.5 *In this conditions*

$$l^i = y^i$$

and if

$$e^i_\alpha = \frac{1}{\mathcal{E}} \left(X^i_\alpha - \left(1 - \frac{1}{\mathcal{E}} \right) l^i l_\alpha \right)$$

then $\mathcal{R} = (e^i_\alpha, e^i_\alpha)$ are a pseudo orthonormated invariant frames with respect to g_{ij}.

Corollary 7.1 *The invariant components of g_{ij} w.r.t $\mathcal{R}$ are exactly the Vranceanu tensors.*

Corollary 7.2 *In the frames $\mathcal{R}$ every d-linear connection is metrical one.*

References

[AB] **Antonelli, P. L., Bucătaru, I.**, *On Holland's frame for Randers spaces and its applications in physics*, Proc. Col. on Diff Geom, 23–30 july,Debrecen (2000), 39–53.

[BB] **Balan, V., Brinzei, N.,**, *Einstein equations for the Berwald-Moór type Euclidean-locally Minkowsky relativistic model*, 5-th Conf of B.S.G, Mangalia, Romania 27–31 aug 2005.

[IN] **Ingarden, R. S.**, *Differential geometry and physics*, Tensor, N.S. 30, (1976), 201–209.

[MA] **Miron, R., Atanasiu, Gh.**, *Geometrical Theory of gravitational and Electromagnetic fields in higher order Lagrange spaces*, Tsukuba j. Math. vol 20, No 1, (1996), 137–149.

[MAN] **Miron, R., Anastasiei, M.**, *The geometry of Lagrange spaces. Theory and applications.*, Kluwer Acad. Pub. FTPH 59, (1994).

[MM] **Miron, R., Izumi, H.,**, *Invariant frame in generalized metric spaces*, Tensor, N.S., vol 42(1985) 272, 282.

[P] **Păun, M.**, *Einstein Equations for a generalized Lagrange space of order two in invariant frames*, Proc Glob An., Diff. Geom. Lie Alg.G.B.P. 4, (1998), 76-82.

[P1] **Păun, M.**, *Structure equations in invariant frames*, Proc Glob An., Diff. Geom. Lie Alg.G.B.P. 3, (1996), 55–61.

[P2] **Păun, M.**, *The concept of invariant geometry of second order*, Balkan J. of Geom. vol 7,no 2, 2002, 57–66.

[PA] **Pavlov, D.,G.**, *Generalization of scalar product axioms*, Hypercomplex Numbers in Geometry and Physics, Ed. Mozet, Russia, 1, 1 (2004), 5–18.

[PA1] **Pavlov, D.,G.**, *Chronometry of the three-dimensional time*, Hypercomplex Numbers in Geometry and Physics, Ed. Mozet, Russia, 1, 1 (2004), 19–30.

[PA2] **Pavlov, D.,G.**, *Four-dimensional time*, Hypercomplex Numbers in Geometry and Physics, Ed. Mozet, Russia, 1, 1 (2004), 31–39.

[VR] **Vrănceanu, Gh.**, *Les espaces non holonomes*, Gauthier, Paris, (1936).

4-ПОЛИФОРМЫ ИМПУЛЬСОВ ПАВЛОВА $K(p)=\sqrt[4]{p_1p_2p_3p_4}$ И ИХ ПРИМЕНЕНИЯ В ГАМИЛЬТОНОВОЙ ГЕОМЕТРИИ

Георге Атанасиу[1], Владимир Балан[2] и Мирсеа Неагу[3]

Цель данной работы состоит в том, чтобы ассоциировать обобщенное гамильтоново пространство с 4-псевдоскалярным произведением, определенным в пространстве Картана-Минковского. Компоненты 4-псевдоскалярного произведения $G^{ijkl}(x,p)$ даются в терминах картановского метрического фундаментального d-тензора $g^{*ij}(x,p)$. В частном случае функции Павлова $K(p)=\sqrt[4]{p_1p_2p_3p_4}$ выводятся компоненты v-ковариантных производных в этом обобщенном гамильтоновом пространстве.

MSC: 53B40, 53C60, 53C07.

1 4-псевдоскалярное произведение в пространстве Картана-Минковского

Пусть M^n является n-мерным дифференцируемым многообразием класса гладкости C^∞, а (T^*M,π^*,M) – его кокасательное расслоение и (x^i,p_i) – локальные координаты в T^*M.

Пусть $K:T^*M\to\mathbf{R}_+$, где $K(x,p)=K(p)>0$ – локально метрическая функция Картана-Минковского. Отметим, что функция $K(p)$ является 1-положительно однородной по аргументу p. Более того, функция Картана-Минковского $K(p)$ порождает фундаментальное метрическое d-тензорное поле

$$g^{*ij}(x,p)=\frac{1}{2}\frac{\partial^2K^2}{\partial p_i\partial p_j}.$$

Теперь введем *"4-псевдоскалярное произведение"*, задаваемое уравнением:

$$(\omega^1,\omega^2,\omega^3,\omega^4)=G^{ijkl}(x,p)\omega_i^1\omega_j^2\omega_k^3\omega_l^4,$$

где $\omega^1,\omega^2,\omega^3,\omega^4\in\Gamma(T^*M)$ и

$$G^{ijkl}(x,p)=\frac{1}{4!}\frac{\partial^4K^4}{\partial p_i\partial p_j\partial p_k\partial p_l}.$$

Замечание. В частном случае 4-мерного многообразия M^4 и метрической функции Павлова

$$K(p)=\sqrt[4]{p_1p_2p_3p_4},$$

где $p_1p_2p_3p_4>0$, данное 4-псевдоскалярное произведение было изучено Павловым [8]. В этом случае мы имеем

$$G^{ijkl}(x,p)=\frac{1}{4!},$$

[1] Department of Algebra and Geometry, "Transilvania" University, Braşov, Romania, gh_atanasiu@yahoo.com

[2] Department of Mathematics I, University Politehnica of Bucharest, Bucharest, Romania, vbalan@mathem.pub.ro

[3] Brasov, Romania, mirceaneagu73@yahoo.com

так что

$$(\omega^1, \omega^2, \omega^3, \omega^4) = \frac{1}{4!} \sum_{\tau \in \sigma_4} \omega^1_{\tau(1)} \omega^2_{\tau(2)} \omega^3_{\tau(3)} \omega^4_{\tau(4)}.$$

Приняв во внимание 1-однородность функции Картана-Минковского $K(p)$, мы получим, что выполняются следующие утверждения:

- $G^{ijkl}(x,p)$ полностью симметричен относительно индексов i, j, k, l;
- $G^{ijk0}(x,p) = G^{ijkl}(x,p)p_l = \dfrac{1}{4!} \dfrac{\partial^3 K^4}{\partial p_i \partial p_j \partial p_k}$ является 1-однородным по p;
- $G^{ij00}(x,p) = G^{ijkl}(x,p)p_k p_l = \dfrac{1}{12} \dfrac{\partial^2 K^4}{\partial p_i \partial p_j}$ является 2-однородным по p;
- $G^{i000}(x,p) = G^{ijkl}(x,p)p_j p_k p_l = \dfrac{1}{4} \dfrac{\partial K^4}{\partial p_i}$ является 3-однородным по p;
- $G^{0000}(x,p) = G^{ijkl}(x,p)p_i p_j p_k p_l = K^4$ является 4-однородным по p.

Определим *"псевдоскалярное произведение"*

$$< \omega^1, \omega^2 >_\omega = \frac{1}{K^2} (\omega^1, \omega^2, \omega, \omega),$$

где $\omega = p_i dx^i$ – каноническая 1-форма Лиувилля в пространстве Картана-Минковского $(M^n, K(p))$ и $\omega^1, \omega^2 \in \Gamma(T^*M)$.

Замечание. Для метрики Павлова $K(p) = \sqrt[4]{p_1 p_2 p_3 p_4}$, очевидно, что форма $<,>_\omega$ билинейна по двум аргументам и она удовлетворяет аксиомам псевдоскалярного произведения [9].

Заметим, что локально мы имеем

$$< \omega^1, \omega^2 >_\omega = \frac{1}{K^2} G^{ijkl}(x,p) \omega^1_i \omega^2_j p_k p_l = \frac{G^{ij00}(x,p)}{K^2} \omega^1_i \omega^2_j$$

и, следовательно,

$$g^{ij}(x,p) = \frac{G^{ij00}(x,p)}{K^2} = \frac{1}{12K^2} \frac{\partial^2 K^4}{\partial p_i \partial p_j}.$$

Предполагая, что метрический d-тензор $g^{ij}(x,p)$ невырожден, мы можем дать следующий важный результат:

Предложение. Пара $GH^n = (M^n, g^{ij}(x,p))$ – обобщенное гамильтоново пространство. Абсолютная энергия этого пространства в точности равна $\mathcal{E} = K^2$.

Доказательство. Абсолютная энергия обобщенного гамильтонова пространства GH^n равна:

$$\mathcal{E} = g^{ij}(x,p) p_i p_j = \frac{G^{ij00}(x,p)}{K^2} p_i p_j = \frac{G^{0000}(x,p)}{K^2} = \frac{K^4}{K^2} = K^2. \qquad \square$$

Как следствие, метрическое d-тензорное поле, порождаемое абсолютной энергией $\mathcal{E} = K^2$ определяется уравнением

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial p_i \partial p_j} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 K^2}{\partial p_i \partial p_j} = g^{*ij}(x,p),$$

что в точности является картановским фундаментальным метрическим d-тензорным полем пространства Картана-Минковского $(M^n, K(p))$.

Замечание.

i) Из 1-однородности функции Картана-Минковского K и определения $g^{ij}(x,p)$ следует, что

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial p_i} = g^{ij}(x,p)p_j = g^{*ij}(x,p)p_j.$$

ii) Отметим, что мы также имеем $\mathcal{E} = K^2 = g^{ij}p_ip_j = g^{*ij}p_ip_j$.

2 Локальные компоненты 4-псевдоскалярного произведения

Вслед за этим, мы установим соотношение между обобщенной гамильтоновой метрикой $g^{ij}(x,p)$ и метрикой Картана-Минковского $g^{*ij}(x,p)$.

Теорема 1. *Выполняется соотношение:*

$$3g^{ij} = g^{*ij} + 2\frac{g^{*i0}g^{*j0}}{g^{*00}},$$

где $g^{*i0} = g^{*ij}p_j$ *и* $g^{*00} = g^{*ij}p_ip_j$.

Доказательство. Для регулярной обобщенной гамильтоновой метрики мы имеем равенство [5], [6]

$$g^{*ij} = g^{ij} + \frac{\partial g^{ik}}{\partial p_j}p_k. \tag{2.1}$$

Принимая во внимание, что $\mathcal{E} = K^2$, мы можем записать $g^{ij}(x,p)$ в более удобной форме

$$g^{ij}(x,p) = \frac{1}{12\mathcal{E}}\frac{\partial^2 \mathcal{E}^2}{\partial p_i \partial p_j}.$$

Теперь, заменяя $g^{ij}(x,p)$ на (2.1) и используя тот факт, что $\mathcal{E}$ является 2-однородной, прямой расчет приводит к

$$g^{*ij} = 3g^{ij} - \frac{1}{2\mathcal{E}}\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial p_i}\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial p_j}. \tag{2.2}$$

Поскольку мы имеем

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial p_i} = g^{ij}(x,p)p_j,$$

то мы получим

$$g^{*ij} = 3g^{ij} - 2\frac{g^{i0}g^{j0}}{g^{00}},$$

где $g^{i0} = g^{ij}p_j$ и $g^{00} = g^{ij}p_ip_j = \mathcal{E}$.

Обратное соотношение немедленно следует из (2.2), если мы отметим, что

$$2g^{*i0} = \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial p_i \partial p_j}p_j = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial p_i}$$

и

$$\mathcal{E} = g^{*00} = g^{*ij}p_ip_j,$$

и наше утверждение доказано.

Теперь выразим коэффициенты $G^{ijkl}(x,p)$ в терминах картановского фундаментального метрического d-тензорного поля $g^{*ij}(x,p)$. Посредством прямого вычисления мы получим уравнение

$$4!G^{ijkl} = 2S\mathcal{E}^{ijk}\mathcal{E}^{l} + 2(\mathcal{E}^{ij}\mathcal{E}^{kl} + \mathcal{E}^{ik}\mathcal{E}^{jl} + \mathcal{E}^{il}\mathcal{E}^{jk}) + 2\mathcal{E}\mathcal{E}^{ijkl},$$

где знак S означает циклическую сумму и верхние индексы у $\mathcal{E}$ означают дифференцирование по соответствующим компонентам $p = (p_i)$. Если в выше данном равенстве мы сделаем замену

$$\mathcal{E} = g^{*00}, \mathcal{E}^{i} = 2g^{*i0}, \mathcal{E}^{ij} = 2g^{*ij}, \mathcal{E}^{ijk} = 2g^{*ij,k}, \mathcal{E}^{ijkl} = 2g^{*ij,kl},$$

тогда требуемое соотношение таково:

$$4!G^{ijkl} = 2Sg^{*ij,k}g^{*l0} + 2(g^{*ij}g^{*kl} + g^{*ik}g^{*jl} + g^{*il}g^{*jk}) + 2g^{*00}g^{*ij,kl}.$$

Обозначим $g^{*}_{\omega^1\omega^2} = g^{*ij}\omega^1_i\omega^2_j$, где $\omega^1, \omega^2 \in \Gamma(T^*M)$. Посредством простого вычисления мы получим теорему:

Теорема 2. *Компоненты 4-псевдоскаляра выражаются посредством:*

$$(\theta,\theta,\eta,\eta) = 2\sum g^{*}_{\theta\theta,\eta}g^{*}_{\eta 0} + 2(g^{*}_{\theta\theta}g^{*}_{\eta\eta} + 2g^{*}_{\theta\eta}g^{*}_{\theta\eta}) + 2g^{*00}g^{*}_{\theta\theta,\eta\eta}$$

и

$$\begin{aligned}(\theta,\theta,\theta,\eta) + (\theta,\eta,\eta,\eta) \ = \ & 2\sum g^{*}_{\theta\theta,\theta}g^{*}_{\eta 0} + 6g^{*}_{\theta\theta}g^{*}_{\theta\eta} + 2g^{*00}g^{*}_{\theta\theta,\theta\eta} + \\ & +2\sum g^{*}_{\theta\eta,\eta}g^{*}_{\eta 0} + 6g^{*}_{\theta\eta}g^{*}_{\eta\eta} + 2g^{*00}g^{*}_{\theta\eta,\eta\eta},\end{aligned}$$

где $\theta, \eta \in \Gamma(T^*M)$.

3 v-ковариантное дифференцирование в Павловском случае $K(p) = \sqrt[4]{p_1p_2p_3p_4}$

Рассмотрим M^4 как 4-мерное многообразие. Пусть

$$K(p) = \sqrt[4]{p_1p_2p_3p_4},$$

где $p_1p_2p_3p_4 > 0$, – метрика Бервальда-Мора, изученная Павловым в работе [8]. Тогда абсолютная гамильтонова энергия равна:

$$\mathcal{E} = K^2 = \sqrt{p_1p_2p_3p_4}.$$

В этом случае, используя обозначение $(a,b,c,d) = (p_1,p_2,p_3,p_4)$, матрица $(g^{ij}(x,p))$ и обратная к ней $(g_{ij}(x,p))$ выражаются так:

$$g^{ij}(x,p)] = \frac{1}{12K^2}\begin{pmatrix} 0 & cd & bd & bc \\ cd & 0 & ad & ac \\ bd & ad & 0 & ab \\ bc & ac & ab & 0 \end{pmatrix}$$

и

$$g_{ij}(x,p) = K^2 \begin{pmatrix} -\dfrac{2a}{3dcb} & \dfrac{1}{3cd} & \dfrac{1}{3db} & \dfrac{1}{3cb} \\ \dfrac{1}{3cd} & -\dfrac{2b}{3dca} & \dfrac{1}{3da} & \dfrac{1}{3ca} \\ \dfrac{1}{3db} & \dfrac{1}{3da} & -\dfrac{2c}{3dba} & \dfrac{1}{3ba} \\ \dfrac{1}{3cb} & \dfrac{1}{3ca} & \dfrac{1}{3ba} & -\dfrac{2d}{3cba} \end{pmatrix},$$

где $\det g = -3(abcd)^2 \neq 0$ для $abcd > 0$.

Другими словами, мы имеем

$$g^{ii}(x,p) = 0, \qquad \forall i = \overline{1,4},$$
$$g^{i_1 i_2}(x,p) = \frac{p_{i_3} p_{i_4}}{12\mathcal{E}},\ i_1 \neq i_2,$$

где $\mathcal{E} = K^2 = \sqrt{p_1 p_2 p_3 p_4}$. Обратная матрица имеет компоненты

$$g_{ii}(x,p) = -\frac{8p_i^2}{\mathcal{E}}, \qquad \forall i = \overline{1,4},$$
$$g_{i_1 i_2}(x,p) = \frac{4\mathcal{E}}{g^{i_1 i_2}} = \frac{48\mathcal{E}^2}{p_{i_3} p_{i_4}} H p_{i_1} p_{i_2},\ i_1 \neq i_2,$$

где $\mathcal{E} = K^2 = \sqrt{p_1 p_2 p_3 p_4}$. Более того, мы имеем

$$g^{*ii}(x,p) = -\frac{\mathcal{E}}{8p_i^2},\ g^{*i_1 i_2}(x,p) = \frac{p_{i_3} p_{i_4}}{8\mathcal{E}},$$

где $g^{*ij}(x,p) = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 K^2}{\partial p_i \partial p_j}$ и $\mathcal{E} = K^2$. Отметим, что мы имеем

$$g^{i_1 i_2}(x,p) = \frac{2}{3} g^{*i_1 i_2}(x,p),\ i_1 \neq i_2.$$

Пусть

$$C^{hjk} = g^{hi} C_i^{jk} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g^{hk}}{\partial p_j} + \frac{\partial g^{jh}}{\partial p_k} - \frac{\partial g^{jk}}{\partial p_h}\right)$$

– компоненты, которые определяют коэффициенты C_i^{jk} вертикального ковариантного дифференцирования [6], порождаемого обобщенной гамильтоновой метрикой $g^{ij}(x,p)$.

Замечание. Отметим, что тензорное поле

$$C_i^{jk} = -\frac{1}{2} g_{is}\left(\frac{\partial g^{sk}}{\partial p_j} + \frac{\partial g^{js}}{\partial p_k} - \frac{\partial g^{jk}}{\partial p_s}\right)$$

дает v-коэффициенты v-ковариантного дифференцирования с метрическим свойством [6]:

$$g^{ij}|^k = \frac{\partial g^{ij}}{\partial p_k} + C_s^{ik} g^{sj} + C_s^{jk} g^{is} = 0.$$

В дальнейшем мы будем придерживаться того же соглашения: мы будем обозначать посредством i_1, i_2, i_3, i_4 различные значения от 1 до 4 ($i_j \neq i_k$ for $j \neq k$). Тогда для различных индексов i_1, i_2, i_3, мы имеем

$$C^{i_1 i_2 i_3} = -\frac{1}{3}\left(\frac{\partial g^{*i_1 i_3}}{\partial p_{i_2}} + \frac{\partial g^{*i_2 i_1}}{\partial p_{i_3}} - \frac{\partial g^{*i_2 i_3}}{\partial p_{i_1}}\right) =$$

$$= -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\mathcal{E}^{i_1 i_3 i_2} + \frac{1}{2}\mathcal{E}^{i_2 i_1 i_3} - \frac{1}{2}\mathcal{E}^{i_2 i_3 i_1}\right) = -\frac{1}{6}\mathcal{E}^{i_1 i_2 i_3}.$$

Тем же способом мы получим, что

$$C^{i_1 i_1 i_2} = C^{i_1 i_2 i_1} = 0,$$
$$C^{i_2 i_1 i_1} = -\frac{1}{3}\mathcal{E}^{i_1 i_1 i_2},$$
$$C^{i_1 i_1 i_1} = 0.$$

Теперь мы получим коэффициенты $C_i^{jk} = g_{is}C^{sjk}$ в терминах энергии $\mathcal{E}$.

Теорема 3. *v-Коэффициенты v-ковариантных дифференцирований в обобщенном гамильтоновом пространстве $GH^4 = (M^4, g^{ij}(x,p))$ даются формулами:*

$$C_{i_1}^{i_2 i_3} = \frac{4}{3}\frac{p_{i_1}^2}{\mathcal{E}}\mathcal{E}^{i_1 i_2 i_3} - 8p_{i_1}p_{i_4}\mathcal{E}^{i_2 i_3 i_4},$$
$$C_{i_1}^{i_1 i_2} = -8p_{i_1}p_{i_3}\mathcal{E}^{i_1 i_2 i_3} - 8p_{i_1}p_{i_4}\mathcal{E}^{i_1 i_2 i_4},$$
$$C_{i_1}^{i_2 i_2} = \frac{8}{3}\frac{p_{i_1}^2}{\mathcal{E}}\mathcal{E}^{i_1 i_2 i_2} - 16p_{i_1}p_{i_3}\mathcal{E}^{i_2 i_2 i_3} - 16p_{i_1}p_{i_4}\mathcal{E}^{i_2 i_2 i_4},$$
$$C_{i_1}^{i_1 i_1} = -16p_{i_1}p_{i_2}\mathcal{E}^{i_2 i_1 i_1} - 16p_{i_1}p_{i_3}\mathcal{E}^{i_3 i_1 i_1} - 16p_{i_1}p_{i_4}\mathcal{E}^{i_4 i_1 i_1}.$$

Благодарность. Настоящая работа была частично профинансирована грантом CNCSIS MEN A1478.

References

[1] Gh. Atanasiu, *The invariant expression of Hamilton geometry*, Tensor N. S. 47, 3 (1988), 225–234.

[2] Gh. Atanasiu, M. Hashiguchi, *Semi-symmetric Miron connections in dual Finsler spaces*, Reports of the Faculty of Science, Kagoshima Univ., Japan, 20 (1987), 43–49.

[3] Gh. Atanasiu, F. C. Klepp, *Nonlinear connection in cotangent bundle*, Publ. Math., Debrecen, Hungary 39, f. 1–2 (1991), 107–111.

[4] Gh. Atanasiu, Gh. Munteanu, *New aspects in geometry of time dependent generalized metrics*, Tensor N. S. 50, 3 (1991), 248–255.

[5] V. Balan, N. Brînzei, *Einstein equations for the Berwald-Moor type Euclidian-locally Minkowski relativistic model*, (2005), preprint.

[6] R. Miron, *Hamilton geometry*, An. Şt. Univ. "Al. I. Cuza", Iaşi, Romania, 35 (1989), 33–85.

[7] R. Miron, *The geometry of Cartan spaces*, Prog. in Math., India, 22 (1988), 1–38.

[8] D. G. Pavlov, *Four-dimensional time*, Hypercomplex Numbers in Geometry and Physics, Ed. "Mozet", Russia, 1, 1 (2004), 31–39.

[9] D. G. Pavlov, *Generalization of scalar product axioms*, Hypercomplex Numbers in Geometry and Physics, Ed. "Mozet", Russia, 1, 1 (2004), 5–18.

РАСШИРЕНИЕ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА

Я. А. Фурман, А. В. Кревецкий

Марийский государственный технический университет, г. Йошкар-Ола, каф. радиотехнических и медикобиологических систем
inf@marstu.mari.ru

Путем замены одномерной мнимой единицы i на многомерную $3D$ или $7D$ мнимую единицу r введены расширенные комплексные числа. Показано, что при таком подходе полные кватернионы и октавы возникают в результате поворота вокруг вещественной оси $0Re$ плоскости, в которой задано число $a+ib$, на ненулевой угол в $4D$ и $8D$ пространствах. Рассмотрены появляющиеся в результате подобных преобразований ротативно–компланарные классы кватернионов и октав, представляющих собой коммутативно-ассоциативные алгебры.

Ключевые слова: расширенные комплексные числа, кватернионы, октавы.

Введение

Пусть p и q – два полных кватерниона (КТ), равные $p = 0,5 + 0,5i + 0,707j$ и $q = 0,175 + 0,586i + 0,805j$. Если найти их произведение, то получим, что $pq = qp = -0,765 + 0,371i + 0,526j$. Пусть, далее, u, v и l – три полных октавы, равные

$$u = 0,5 + 0,2i + 0,3j + 0,2k + 0,6E + 0,3I + 0,2J + 0,3K,$$
$$v = 0,707 + 0,163i + 0,245j + 0,163k + 0,49E + 0,245I + 0,163J + 0,245K,$$
$$l = 0,866 + 0,116i + 0,173j + 0,115k + 0,347E + 0,173I + 0,115J + 0,173K.$$

Для этих октав справедливо:

$$uv = vu = -0,261 + 0,222i + 0,335j + 0,223k + 0,669E + 0,335I + 0,222J + 0,334K;$$
$$u\,(vl) = (uv)\,l = 0,575 + 0,188i + 0,284j + 0,189k + 0,567E + 0,284I + 0,188J + 0,283K.$$

Здесь приведены нехарактерные для КТ и октав результаты: операция их перемножения является коммутативной и ассоциативной: $pq = qp$, $uv = vu$, $u\,(vl) = (uv)\,l$. Гиперкомплексные числа из данного примера условно названы ротативно-компланарными (РК). Рассмотрим в связи с чем РК полные кватернионы и октавы обладают подобными исключительными свойствами.

Постановка задачи

Как известно, система комплексных чисел строится на базе действительных чисел путем введения “мнимой” единицы. Необходимость рассмотрения таких чисел возникает при формальном решении уравнения вида $(x-a)^2+b^2 = 0$. Корнем такого уравнения будет число $a + b\sqrt{-1}$. Л. Эйлер ввел буквенное обозначение $i = \sqrt{-1}$. Эта величина была названа мнимой единицей, а выражение вида $z = a + ib$ – комплексным числом. Здесь a и b – вещественные числа, а символу i приписывается свойство

$$i^2 = -1. \tag{1}$$

Операции над комплексными и вещественными числами носят одинаковый характер:

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1; \quad (z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)\,, \tag{2}$$

$$z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1; \quad (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)\,, \tag{3}$$

$$z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3. \tag{4}$$

Процедурой удвоения Кэли-Диксона на основе комплексных чисел вводятся кватернионы и октавы, для которых операция умножения является некоммутативной, т.е. $z_1 z_2 \neq z_2 z_1$, а для октав еще и неассоциативной, т. е. $(z_1 z_2)\, z_3 \neq z_1\, (z_2 z_3)$.

В данной работе предлагается принцип обобщения комплексных чисел, состоящий в расширении перечня объектов, которые в соответствии с выражением (1) могут быть приняты в качестве мнимой единицы, т. е. i – это не только $\sqrt{-1}$.

В результате такого обобщения для специфических условий "хорошими" свойствами комплексных и вещественных чисел, задаваемых выражениями (2), (3) и (4), будут обладать также КТ и октавы.

Ротативно-компланарные кватернионы и октавы

Без большого ущерба для полученных результатов ниже будет дан анализ некоторых представлений и операций только над полными нормированными кватернионами и октавами:

$$p = p_0 + p_1 i + p_2 j + p_3 k, \quad |p| = 1,$$

$$u = u_0 + u_1 i + u_2 j + u_3 k + u_4 E + u_5 I + u_6 J + u_7 K, \quad |u| = 1.$$

В тригонометрической форме эти числа имеют вид:

$$p = \cos\varphi + r\sin\varphi; \quad r = \frac{p_1 i + p_2 j + p_3 k}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}}; \quad |r| = 1$$

и

$$u = \cos\varphi + r\sin\varphi;$$

$$r = \frac{u_1 i + u_2 j + u_3 k + u_4 E + u_5 I + u_6 J + u_7 K}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 + u_5^2 + u_6^2 + u_7^2}}; \quad |r| = 1.$$

Здесь r – нормированный по длине 3D или 7D вектор, задаваемый соответственно векторными (мнимыми) числами полных кватерниона и октавы. Эти мнимые части чисел p и u обозначим через $p^{(v)}$ и $u^{(v)}$:

$$r = \frac{p^{(v)}}{|p^{(v)}|}, \quad r = \frac{u^{(v)}}{|u^{(v)}|}.$$

Величину r назовем *многомерной мнимой единицей*, соответственно *3D-единицей* (для кватернионного анализа) и *7D-единицей* (для анализа октав), а угол φ – аргументом соответственно полного КТ и октавы:

$$\varphi = \arg p, \quad \varphi = \arg u.$$

На рис. 1 условно в 4D-пространстве показан вектор p полного КТ $p = p_0 + p^{(v)}$. Здесь по оси $0Re$ откладывается вещественная часть p_0 кватерниона p, рассматриваемая как вектор, по осям x, y и z – соответственно значения p_1, p_2 и p_3. Ось $0Re$ с вещественной частью p_0, векторы $p^{(v)}$ и $p = p_0 + p^{(v)}$ находятся в одной 4D плоскости, которую назовем собственной плоскостью полного КТ p.

Эту 4D плоскость далее будет обозначать через Ω с соответствующим нижним индексом. 4D векторы $p^{(v)} = (0, p_1, p_2, p_3)$ и $p_0 = (p_0, 0, 0, 0)$ ортогональны. Как видно из рис. 1, аргумент φ – это угол в собственной плоскости Ω_p, образуемый вектором

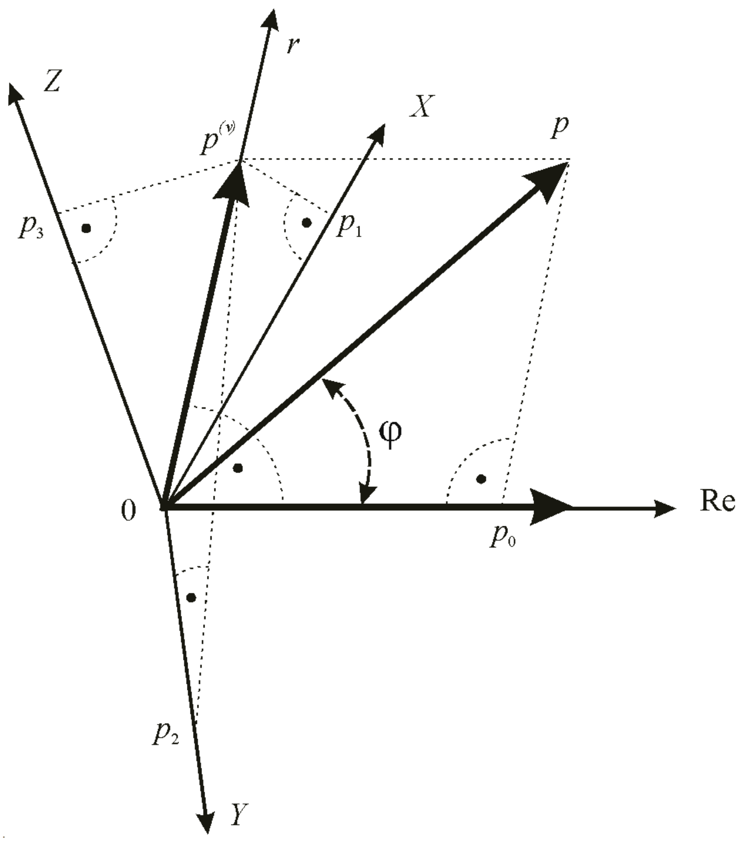


Рис. 1: Графическая интерпретация основных обозначений

полного КТ p и осью $0Re$. Векторы $p^{(v)}$ и r, $|r| = 1$, $\left|p^{(v)}\right| < 1$, коллинеарны, причем $p^{(v)} = r\sin\varphi$, а $p_0 = \cos\varphi$. Варьируя значения аргумента φ при фиксированном r в собственной плоскости Ω_p можно задать целый ряд полных КТ $p\,(\varphi)$, отличающихся друг от друга лишь значением φ:

$$p\,(\varphi) = \cos\varphi + r\sin\varphi, \quad r = const, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

4D вектор $p\,(\varphi)$ есть результат вращения вектора в своей собственной плоскости Ω_p. Поэтому, естественно, векторы $p\,(\varphi)$ и связанные с ним полные КТ $p\,(\varphi)$ назвать ротативно-компланарными с КТ p. Таким образом, РК кватернионы – это полные КТ, порождаемые вращением вектора p в собственной плоскости Ω_p. Аналогично можно ввести собственную 8D плоскость Ω_p для полной октавы $u = u_0 + u^{(v)}$ с аргументом $\varphi = \arccos u_0$ и ротативно-компланарные с u октавы $u\,(\varphi)$,$r = const$ и $0 \leq \varphi < 2\pi$.

Аналитические соотношения для РК кватернионов и октав

Квадрат нормированного векторного кватерниона или октавы

Покажем, что квадрат векторного КТ r, задающего 3D вектор $r = r_1 i + r_2 j + r_3 k$, $|r| = 1$, есть минус единица:

$$r^2 = -1. \tag{5}$$

В общем случае произведение двух векторных КТ $q = q_1 i + q_2 j + q_3 k$ и $g = g_1 i + g_2 j + g_3 k$ равно

$$qg = -\,(q, g) + [q, g],$$

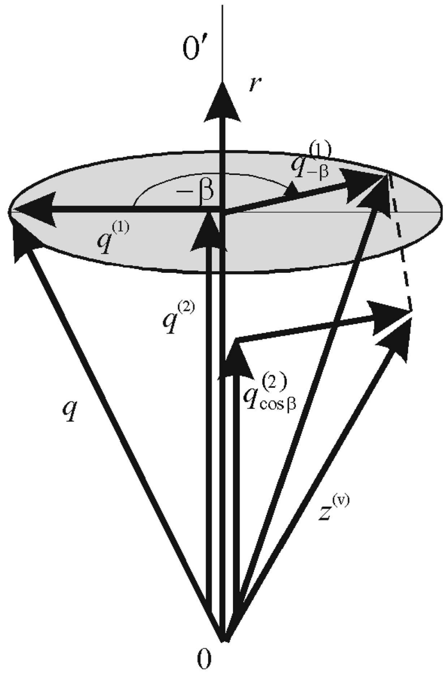


Рис. 2: Формирование векторной части $z^{(v)}$ произведения $z = qp$

где $(q,g) = ((q_1,q_2,q_3),(g_1,g_2,g_3))$ – скалярное произведение, а $[q,g] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ g_1 & g_2 & g_3 \end{vmatrix}$ – векторное произведение векторов q и g.

Для случая перемножения двух одинаковых нормированных векторных КТ r будем иметь: $(r,r) = 1$ и $[r,r] = 0$. Эти соотношения вытекают из автоколлинеарности любого нормированного вектора и приводят к равенству (5).

Аналогичный результат получается для произведения двух нормированных векторных октав $u^{(v)}$ и $l^{(v)}$, $\left|u^{(v)}\right| = \left|l^{(v)}\right| = 1$ при $u^{(v)} = l^{(v)} = r$.

Вращение вектора полного кватерниона в собственной плоскости

Пусть $p = \cos\varphi + r\sin\varphi$ и $q = \cos\psi + r\sin\psi$ – два полных нормированных КТ с одинаковым 3D вектором r и аргументами φ и ψ. При их перемножении с учетом (5) получим

$$t = pq = \cos(\varphi+\psi) + r\sin(\varphi+\psi)\,. \tag{6}$$

КТ $t = pq$ характеризуется аргументом $\theta = \varphi + \psi$, единичным модулем и расположением в собственной плоскости КТ сомножителей p и q. Поэтому t является РК с кватернионами p и q и его можно рассматривать как результат поворота p в собственной плоскости вектора кватерниона на угол ψ. Если $\psi = \pi/2 - \varphi$, то в результате такого поворота получим чисто мнимый КТ $p = r$, а при $\psi = -\varphi$ – вещественное число $t = 1$. При изменении порядка следования сомножителей p и q результат (6) сохраняется:

$$qp = \cos(\varphi+\psi) + r\sin(\varphi+\psi) = pq = t.$$

Таким образом, операция умножения полных РК кватернионов является коммутативной. Рассмотрим геометрическую интерпретацию этого факта. На рис. 2 поясняется геометрический смысл получения векторной части $z^{(v)}$ произведения $z = qp$ при умножении произвольного векторного КТ $q = q_1 i + q_2 j + q_3 k$ на полный КТ

$p = p_0 + p_1 i + p_2 j + p_3 k = \cos\beta + r\sin\beta$, $|p| = 1$. Здесь через $q^{(1)}$ и $q^{(2)}$ обозначены квадратурные составляющие вектора q относительно вектора r. В процессе формирования $z^{(v)}$ ортогональная компонента $q^{(1)}$ поворачивается вокруг оси $00'$ с направляющим вектором r на угол $(-\beta)$ и затем складывается с коллинеарной компонентой $q^2\cos\beta$. Вещественная часть КТ z равна $z_0 = -(q,p)^{(v)}\sin\beta$. Если q – не векторный, а полный КТ, то механизм перемножения q и p принципиально не меняется. Для нас здесь важен поворот квадратурной компоненты $q^{(1)}$ на угол $(-\beta)$ вокруг оси $00'$, приводящий к выходу вектора $z = qp$ из 4D плоскостей Ω_q. В результате операция $z = qp$ теряет свойство коммутативности.

Если же q и p – ротативно-компланарные КТ, то вектор $q^{(v)}$ одного из КТ коллинеарен вектору r, а значит и вектору $p^{(v)}$ другого перемножаемого КТ. Поэтому ортогональная квадратурная компонента $q^{(1)}$ будет равна нулю и вектор $z = qp$ остается в собственной плоскости Ω кватернионов сомножителей, т.е. ротативно-компланарен с ними. В результате операция $z = qp$ становится коммутативной.

Отметим, что выражение (6) сохраняет свою структуру и дает такой же результат при перемножении полных РК октав. При этом операция перемножения таких октав становится не только коммутативной, но и ассоциативной.

Расширение комплексных чисел

Полные нормированные КТ и октавы $p = \cos\varphi + r\sin\varphi$ и $u = \cos\varphi + r\sin\varphi$ формально можно рассматривать в качестве комплексных чисел $a + br$, $r^2 = -1$, представленных в своих собственных 4D и 8D плоскостях Ω_p и Ω_u. Каждая из таких собственных плоскостей задается углом α_p или α_u, который она образует с координатной плоскостью $X0Re$. Если $\alpha_p = \alpha_u = 0$, то $r = i$ и числа p и u становятся равными $p = \cos\varphi + i\sin\varphi$ и $u = \cos\varphi + i\sin\varphi$, т.е. обычными комплексными числами. По мере роста этих углов возникают ненулевые проекции вектора r на оси Y и Z для 3D вектора и на оси $X_2, X_3, ..., X_6$ для 7D вектора, т.е. возникают полные кватернионы и октавы.

Если учесть возможность вращения вектора r вокруг оси $0X$, то при повороте собственной плоскости вокруг оси $0Re$ может быть получен произвольный КТ p или октава u. При этом векторы r и p_0 (r и u_0) сохраняют ортогональность. РК кватернионы p и октавы u являются расширенными комплексными числами, заданными только не в 2D плоскости $0Re$, а в собственной плоскости Ω, расположенной в 4D или 8D-мерной координатных системах. Именно этим и объясняется совпадение свойств РК кватернионов и октав со свойствами комплексных чисел, определяемых выражениями (2), (3) и (4).

Тригонометрические и показательные функции связаны формулой Эйлера. Для рассматриваемого случая данная связь имеет вид:

$$\cos\varphi + r\sin\varphi = \exp\{i\varphi\}. \tag{7}$$

С учетом (7) результаты умножения и деления РК кватернионов и октав могут быть получены как

$$pq = \exp\{r(\varphi+\psi)\}; \quad uv = \exp\{r(\varphi+\psi)\};$$

$$\frac{p}{q} = \exp\{r(\varphi-\psi)\}; \quad \frac{u}{v} = \exp\{r(\varphi-\psi)\}, \quad q \neq 0.$$

Воспользовавшись формулой Муавра получим выражение возведения КТ или октавы в степень и извлечения квадратного корня:

$$p^n = \exp\{nr\varphi\}; \quad u^n = \exp\{nr\varphi\}, \quad n = 1, 2, ...$$

$$\frac{1}{p^n} = p^{-n} = \exp\{-nr\varphi\}; \quad \frac{1}{u^n} = u^{-n} = \exp\{-nr\varphi\}, \quad n = 1, 2, ...$$

$$p^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{p} = \exp\left\{r\frac{\varphi + 2s\pi}{n}\right\}; \quad u^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{u} = \exp\left\{r\frac{\varphi + 2s\pi}{n}\right\}, \quad s = 0, 1, ..., n-1.$$

Необходимо отметить, что все участвующие в приведенных выше арифметических операциях КТ, p^n, p^{-n}, $p^{\frac{m}{n}}$, а также октавы u^n, u^{-n}, $u^{\frac{m}{n}}$ являются ротативно-компланарными с исходными произвольно выбранными КТ p и октавы u. Это связано с тем, что при данных операциях гиперкомплексная мнимая единица r не меняется. Также следует отметить, что если в операции участвуют ненормированные КТ и октавы, то модуль результата вычисляется на основе полной формулы Эйлера:

$$p = |p| (\cos\varphi + r\sin\varphi) = |p| \exp\{r\varphi\}.$$

В завершение этого раздела запишем выражение для скалярного произведения РК кватернионов и октав в виде расширения скалярного произведения РК комплексных чисел в унитарном пространстве [4]:

$$(q, p) = qp^* = (\cos\psi + r\sin\psi)(\cos\varphi - r\sin\varphi) = \cos(\psi - \varphi) + r\sin(\psi - \varphi),$$

$$(v, u) = vu^* = (\cos\psi + r\sin\psi)(\cos\varphi - r\sin\varphi) = \cos(\psi - \varphi) + r\sin(\psi - \varphi).$$

Из этих выражений видно, что скалярное произведение РК кватернионов и октав есть также РК кватернион и октава. Вещественная часть скалярного произведения равна скалярному произведению векторов q и p (v и u), заданных в действительном пространстве. Кроме того, наличие мнимой части $r\sin(\psi - \varphi)$ делает данные скалярные произведения более информативными по сравнению со скалярными произведениями, полученных для векторов q и p, (v и u), в действительном пространстве.

Заключение

Обычно мнимая единица была лишена конкретного содержания примерно так же, как точка, по Эвклиду, “есть то, что не имеет частей”. Представление $i = \sqrt{-1}$ связано лишь с историей комплексных чисел, потому что далее аксиоматически, без связи с конкретными объектами, было введено, что $i^2 = -1$. В данной работе была сделана одна из возможных попыток наполнить понятие мнимой единицы в составе комплексного числа определенным содержанием. В результате было показано существование ротативно-компланарных кватернионов и октав и на их основе введены арифметические операции над произвольными октавами и кватернионами по правилам аналогичных операций с комплексными числами. Также для ротативно-компланарных кватернионов и октав была показана коммутативность операции умножения, а отдельно для – октав еще и ассоциативность этой операции. Хотя подобные гиперкомплексные числа представляют собой узкий, скорее экзотический, класс кватернионов и октав, но их существование требует осторожности при утверждении вообще о некоммутативности операции перемножения кватернионов или октав и невыполнении сочетательного закона для октав.

Литература

1. Кантор И. Л., Солодовников А. С. Гиперкомплексные числа. М.: Наука, 1973. 144 с.

2. Комплекснозначные и гиперкомплексные системы в задачах обработки многомерных сигналов. Я. А. Фурман, А. В. Кревецкий, и др.; Под ред. Я. А. Фурмана. М.: Физматлит, 2004. 456 с.

3. Furman Y. A. Processing of quaternion signals specifying spatially located group point objects. Pattern Recognition and Image Analysis. 2002. V. 12, N 2, P. 173-191.

4. Ефимов Н. В., Розендорн Э. Р. Линейная алгебра и многомерная геометрия. М.: Наука, 1974.

5. Ротативно-компланарные кватернионы и октавы/ Фурман Я. А., Кревецкий А.В.; МарГТУ. Йошкар-Ола. Деп. в ВИНИТИ 4.11.2004 № 1736-В2004.

Expansion of Complex Number

Y. A. Furman, A. V. Krevetsky

Mari state technical university, Yoshkar Ola, Radio engineering faculty
inf@marstu.mari.ru

The expanded complex numbers are introduced by means of imaginary unit i replacement by one-dimensional on multivariate $3D$ or $7D$ imaginary unit r. It is shown, full quaternions and octaves appear as a result of a turn around the material axis $0Re$ plane where $a + ib$ number is set in $4D$ and $8D$ spaces. Rotor-complanar classes of quaternions and the octaves appearing as a result of similar transformations are considered. They represent commutative-associative algebras.

Key-words: extended complex numbers, quaternions, octaves.
MSC: 11R20, 11R52.

ОПИСАНИЕ ПРЕЦЕССИИ ТОМАСА ПСЕВДОКВАТЕРНИОНАМИ

Д. Е. Бурланков, Г. Б. Малыкин

Нижегородский государственный университет, Нижний Новгород,
bur@phys.unn.runnet.ru

Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород,
malykin@ufp.appl.sci-nnov.ru

При криволинейном движении тела в плоскости со скоростью, сравнимой со скоростью света, преобразованию Лоренца подвергаются лишь три его координаты и матрица преобразования оказывается трехпараметрической. Это дает возможность описания таких преобразований слегка модифицированными на псевдоевклидовость метрики кватернионами Гамильтона – псевдокватернионами. Определены их алгебраические свойства и связь с преобразованиями Лоренца в (2+1)-мерном пространстве Минковского. Проведено интегрирование псевдокватернионного дифференциального уравнения непрерывных преобразований при движении тела по круговой орбите, откуда получено выражение для величины прецессии Томаса.

Ключевые слова: преобразования Лоренца, кватернионы, пространство Минковского, прецессия Томаса.

Преобразования Лоренца при плоском движении

В специальной теории относительности для описания шестипараметрических преобразований Лоренца используются комплексные кватернионы Ньюмена - Пенроуза [1, 2]. Однако техника работы с ними исключительно сложна. В то же время ряд принципиальных задач специальной теории относительности имеет дело с плоским движением тела, при котором преобразованиям Лоренца подвергаются только две пространственные координаты и время, тогда как нормальная к плоскости движения координата остается неизменной. В этом случае мы имеем дело с трехпараметрическим преобразованиями Лоренца в $(2+1)$-мерном пространстве Минковского. Для описания таких преобразований не нужно вводить комплексные кватернионы, достаточно лишь слегка модернизировать технику кватернионов Гамильтона.

Мы в дальнейшем обозначаем скорость света в вакууме c, а для тела, движущегося со скоростью $\mathbf{v}$ примем стандартные обозначения:

$$\beta = \frac{v}{c}; \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{1}$$

Псевдокватернионы

(2+1)-мерное пространство Минковского имеет диагональную метрику $(\gamma_{ij}) = \mathrm{diag}(1, -1, -1)$.

Введем три псевдокватернионных орта η_0, η_1, η_2 с алгебраическими свойствами:

$$\eta_i \eta_j = -\gamma_{ij} - \varepsilon_{ijk}\gamma^{kl}\eta_l; \tag{2}$$

$$\eta_0^2 = -1;\ \eta_1^2 = \eta_2^2 = 1;$$

$$\eta_0\eta_1 = -\eta_1\eta_0 = \eta_2;$$

$$\eta_0\eta_2 = -\eta_2\eta_0 = -\eta_1;$$

$$\eta_2\eta_1 = -\eta_1\eta_2 = \eta_0.$$

Добавление единицы, коммутирующей со всеми ортами, приводит к алгебре псевдокватернионов

$$z = a \cdot 1 + t \cdot \eta_0 + x \cdot \eta_1 + y \cdot \eta_2 \tag{3}$$

с нормой (не положительно определенной)

$$|z|^2 = a^2 + t^2 - x^2 - y^2 \tag{4}$$

и обратным значением

$$z^{-1} = \frac{1}{|z|^2}(a \cdot 1 - t \cdot \eta_0 - x \cdot \eta_1 - y \cdot \eta_2).$$

Аналогично евклидову случаю, псевдокватернионы с единичной нормой описывают вращения и псевдовращения в пространстве Минковского (2+1). Если $(n_0,\ n_1,\ n_2)$ – положительно или отрицательно определенный единичный вектор ($\mathbf{n}^2 \equiv n_0^2 - n_1^2 - n_2^2 = \pm 1$), то кватернион

$$\xi(\mathbf{n}, \psi) = C(\psi) + S(\psi)(n_0 \cdot \eta_0 + n_1 \cdot \eta_1 + n_2 \cdot \eta_2) = C(\psi) + S(\psi)(\mathbf{n} \cdot \eta) \tag{5}$$

описывает вращение или псевдовращение относительно оси $\mathbf{n}$, при этом два последовательных (псевдо)поворота вокруг этой оси определяют поворот вокруг этой же оси:

$$(C(\psi_1) + S(\psi_1)(\mathbf{n} \cdot \eta))\,(C(\psi_2) + S(\psi_2)(\mathbf{n} \cdot \eta)) =$$

$$(C(\psi_1)C(\psi_2) + (\mathbf{n}^2)S(\psi_1)S(\psi_2)) + (C(\psi_1)S(\psi_2) + S(\psi_1)C(\psi_2))(\mathbf{n} \cdot \eta) =$$

$$C(\psi_1 + \psi_2) + S(\psi_1 + \psi_2)(\mathbf{n} \cdot \eta).$$

В зависимости от знака $\mathbf{n}^2$ величины C и S являются либо круговыми, либо гиперболическими косинусом и синусом.

При $\mathbf{n} = (1, 0, 0)$ – вращение в плоскости (x, y) – синус S обращается в нуль впервые при $\psi = \pi$ – и при этом псевдокватернион описывает тождественное преобразование, т. е. поворот на 360^{o}. Отсюда следует, что аргументом функций C и S является половинный угол. Этот вывод можно рассматривать и как результат аналитического продолжения кватернионов в евклидовом пространстве.

Преобразование самого псевдокватерниона z другим псевдокватернионом u производится в соответствии с выражением

$$z_u = u \cdot z \cdot u^{-1}. \tag{6}$$

Буст (преобразование Лоренца, определяемое только вектором скорости) вдоль направления, перпендикулярного пространственному двумерному единичному вектору $(n_x,\ n_y)$ – нормали к траектории – описывается псевдокватернионом

$$z_\chi = \mathrm{ch}\frac{\chi}{2} + \mathrm{sh}\frac{\chi}{2}(n_x\,\eta_1 + n_y\,\eta_2);$$

где функции χ можно выразить через γ:

$$\mathrm{sh}\frac{\chi}{2} = \sqrt{\frac{\gamma - 1}{2}}; \quad \mathrm{ch}\frac{\chi}{2} = \sqrt{\frac{\gamma + 1}{2}}; \quad \beta = \frac{v}{c} = \theta(\chi) = \frac{\mathrm{sh}(\chi)}{\mathrm{ch}(\chi)} = \frac{\sqrt{\gamma^2 - 1}}{\gamma}; \tag{7}$$

С учетом этих соотношений буст, определяемый нормалью к траектории $n_x, = \cos\varphi$, $n_y = \sin\varphi$ определяется псевдокватернионом:

$$z_\chi = \sqrt{\frac{\gamma+1}{2}} + \sqrt{\frac{\gamma-1}{2}}(\eta_1 \cos\varphi + \eta_2 \sin\varphi), \tag{8}$$

а поворот в плоскости $(x,\,y)$ на угол ψ – псевдокватернионом

$$z_\psi = \cos\frac{\psi}{2} + \eta_0 \sin\frac{\psi}{2}.$$

Псевдокватернион с единичной нормой определяется тремя параметрами, в качестве которых можно выбрать γ, ψ, ϕ:

$$z(\gamma,\psi,\phi) = \sqrt{\frac{\gamma+1}{2}}(\cos\psi + \eta_0 \sin\psi) + \sqrt{\frac{\gamma-1}{2}}(\eta_1 \cos\phi + \eta_2 \sin\phi) \tag{9}$$

Мера в пространстве параметров выражается как модуль псевдокватерниона

$$dz = \frac{\partial z}{\partial\gamma}\,d\gamma + \frac{\partial z}{\partial\psi}\,d\psi + \frac{\partial z}{\partial\phi}\,d\phi =$$

$$\frac{\cos\psi\,d\gamma - 2\,(\gamma+1)\,\sin\psi\,d\psi}{2\sqrt{2}\sqrt{\gamma+1}} + \eta_0\,\frac{\sin\psi\,d\gamma + 2\,(\gamma+1)\,\cos\psi\,d\psi}{2\sqrt{2}\sqrt{\gamma+1}} + \tag{10}$$

$$\eta_1\,\frac{\cos\phi\,d\gamma - 2\,(\gamma-1)\,\sin\phi\,d\phi}{2\sqrt{2}\sqrt{\gamma-1}} + \eta_2\,\frac{\sin\phi\,d\gamma + 2\,(\gamma-1)\,\cos\phi\,d\phi}{2\sqrt{2}\sqrt{\gamma-1}}$$

Норма этого псевдокватерниона в соответствии с (4) и определяет метрику в пространстве параметров:

$$dl^2 = -\frac{d\gamma^2}{\gamma^2-1} + \frac{\gamma+1}{2}\,d\psi^2 + \frac{\gamma-1}{2}\,d\phi^2 = \tag{11}$$

$$-\left(\frac{d\chi}{2}\right)^2 + \mathrm{ch}^2\left(\frac{\chi}{2}\right)\,d\psi^2 + \mathrm{sh}^2\left(\frac{\chi}{2}\right)\,d\phi^2,$$

если представить $\gamma = \mathrm{ch}\chi$. Это – метрика пространства постоянной отрицательной кривизны, однако это не пространство Лобачевского, которое локально имеет евклидову метрику, а псевдориманово пространство с постоянной отрицательной кривизной.

Релятивистское вращение по окружности

Тело, вращающееся по окружности с постоянной скоростью v, испытывает центростремительное ускорение и пространство - время в бесконечно малой окрестности этого тела претерпевает бесконечно малое преобразование Лоренца (буст), определяемое выражением (8). Если тело на окружности достигло угла φ, изменение скорости равно $\mathbf{a}\,dt = \mathbf{n}\,v\,\omega\,dt = \mathbf{n}\,v\,d\varphi$, где $\mathbf{n}$ – вектор нормали, то псевдокватернион, описывающий это преобразование

$$w(\varphi) = 1 + \beta\,\frac{d\varphi}{2}\,(-\eta_1 \sin\varphi + \eta_2 \cos\varphi) = 1 + \frac{\sqrt{\gamma^2-1}}{\gamma}\;\frac{d\varphi}{2}\,(-\eta_1 \sin\varphi + \eta_2 \cos\varphi). \tag{12}$$

При последующих поворотах угол меняется на величину $d\varphi$ и при повороте на конечный угол псевдокватернион преобразования определяется бесконечным произведением таких кватернионов, близких к единице с переменным углом φ.

Интегрирование проще провести, рассматривая действие этих близких к единице псевдокватернионов на псевдокватернион (9):

$$w(\varphi)\cdot z(\gamma,\psi,\phi)=\left(1+\frac{\sqrt{\gamma^2-1}}{\gamma}\,\frac{d\varphi}{2}\,(-\eta_1\,\sin\varphi+\eta_2\,\cos\varphi)\right)\cdot$$
$$\left(\sqrt{\frac{\gamma+1}{2}}(\cos\psi+\eta_0\,\sin\psi)+\sqrt{\frac{\gamma-1}{2}}(\eta_1\,\cos\phi+\eta_2\,\sin\phi)\right)=$$
$$\sqrt{\frac{\gamma+1}{2}}\left(\left(\cos\psi-(1-\frac{1}{\gamma})\,\frac{d\varphi}{2}\,\sin(\varphi-\phi)\right)+\eta_0\,\left(\sin\psi+(1-\frac{1}{\gamma})\,\frac{d\varphi}{2}\,\cos(\varphi-\phi)\right)\right)+$$
$$\sqrt{\frac{\gamma-1}{2}}\left(\eta_1\,\left(\cos\phi-(1+\frac{1}{\gamma})\,\frac{d\varphi}{2}\,\sin(\varphi-\psi)\right)+\eta_2\,\left(\sin\phi+(1+\frac{1}{\gamma})\,\frac{d\varphi}{2}\,\cos(\varphi-\psi)\right)\right) \qquad (13)$$

При сдвиге тела по круговой траектории параметр γ не меняется, а могут меняться только углы ψ и ϕ. Сравним полученное выражение с приращением псевдокватерниона (9) при приращении этих углов:

$$z(\gamma,\psi+d\psi,\phi+d\phi)=\sqrt{\frac{\gamma+1}{2}}\,((\cos\psi-d\psi\,\sin\psi)+\eta_0\,(\sin\psi+d\psi\,\cos\psi))+$$
$$\sqrt{\frac{\gamma-1}{2}}\,(\eta_1\,(\cos\phi-d\phi\,\sin\phi)+\eta_2\,(\sin\phi+d\phi\,\cos\phi))\,.$$

Эти соотношения совпадают при

$$\psi+\phi=\varphi;\quad \psi=(1-\frac{1}{\gamma})\,\frac{\varphi}{2};\quad \phi=(1+\frac{1}{\gamma})\,\frac{\varphi}{2}. \qquad (14)$$

Если эти значения подставить в (9) и обозначить

$$k=1-\frac{1}{\gamma}, \qquad (15)$$

то получится псевдокватернион, определяемый двумя параметрами – константой γ, определяемой скоростью движения тела, и углом φ, равномерно изменяющимся вдоль траектории:

$$z(\gamma,\varphi)=\sqrt{\frac{\gamma+1}{2}}\,(\cos(k\,\varphi)+\eta_0\,\sin(k\,\varphi))+\sqrt{\frac{\gamma-1}{2}}\,(\eta_1\,\cos((1-k)\varphi)+\eta_2\,\sin((1-k)\varphi))=$$
$$\cos(k\,\varphi)\,z_n+\sin(k\,\varphi)\,z_\tau, \qquad (16)$$

где

$$z_n=\sqrt{\frac{\gamma+1}{2}}+\sqrt{\frac{\gamma-1}{2}}\,(\eta_1\,\cos\varphi+\eta_2\,\sin\varphi)$$

– псевдокватернион нормали к траектории, а

$$z_\tau=\eta_0\sqrt{\frac{\gamma+1}{2}}+\sqrt{\frac{\gamma-1}{2}}\,(\eta_1\sin\varphi-\eta_2\,\cos\varphi).$$

– псевдокватернион касательной. Оба этих вектора имеют единичный модуль.

Если $k=0$, то $z(\gamma,\varphi)=z_n$ – указывает на нормаль, определяющую ускорение, – но при $k>0$ ПК начинает поворачиваться между касательной и нормалью пропорционально углу сдвига тела по орбите с угловой частотой прецессии Томаса

$$\Omega_T=k\,\omega=\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\,\omega, \qquad (17)$$

если ω – угловая частота вращения по орбите.

Введенные выше псевдокватернионы являются подмножеством комплексных кватернионов Ньюмена и Пенроуза, введенных для описания четырехмерных преобразований Лоренца, но техника работы с последними несравненно сложнее.

Описание с помощью псевдокватернионов произведения конечных преобразований Лоренца, приводящих к т. наз. *вращению Вигнера*, приведено в нашей работе [3].

Прецессия Томаса

Выведенная величина коэффициента томасовой прецессии $k = 1 - \sqrt{1-\beta^2}$ говорит о том, что с ростом линейной скорости вращения от нуля до скорости света (β от 0 до 1) коэффициент растет от нуля (при малых скоростях квадратично) до единицы, то есть в ультрарелятивистском пределе угловая скорость томасовой прецессии совпадает с угловой скоростью орбитального вращения.

Однако в литературе наиболее распространенным выражением (см., например, [4–6]) является

$$k_T = \gamma - 1 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1, \tag{18}$$

приводящая для ультрарелятивистского движения ($\beta \to 1$) к бесконечной скорости вращения локального репера.

В препринте [3] показано, что эта ошибка возникла вследствие пренебрежения в матрице преобразования Лоренца преобразованием времени, которое при бесконечно малом преобразовании вроде бы не играет ни какой роли, однако существенно сказывается при интегрировании матриц в процессе конечного поворота по орбите.

Очень убедительным кажется вывод формулы (18) в работе Rhodes и Semon [7]. Авторы пытаются вывести величину ПТ путем переноса теоремы Гамильтона-Родригеса (см., например, [8, 9]) в псевдоевклидово пространство: при проведении преобразований Лоренца, при которых некоторая ось, *вокруг которой в процессе преобразований вращение отсутствует*, возвращается к своему первоначальному положению, результирующее преобразование Лоренца оказывается поворотом вокруг этой оси на угол, равный телесному углу, описанному направляющим вектором этой оси на псевдосфере.

Доказав эту теорему, авторы применяют ее к вектору, *касательному* к мировой линии вращающегося тела, конец которого описывает кривую в пространстве Лобачевского. Однако для этой оси условия теоремы о телесном угле неприменимы: она не является осью без вращения, так как в каждый момент именно вокруг нее и совершается томасов поворот.

Ось в трехмерном пространстве-времени, вокруг которой при движении тела по окружности не происходит вращения – это нормаль к траектории. Но она пространственно-подобна и ее направляющий вектор описывает кривую не на верхней полости двуполосного гиперболоида (римановой псевдосферы – пространства Лобачевского), которую рассматривают авторы, а на однополостном гиперболоиде (псевдоримановой псевдосфере), разрезая его на две половины бесконечной площади. Это можно прямо увидеть из метрики (11) параметров преобразования Лоренца: γ имеет отрицательную норму, а углы, изменяющиеся пропорционально углу сдвига по орбите φ, определяют одномерное пространство с положительной нормой, поэтому геометрия Лобачевского, которую авторы работы [7] применяют к описанию прецессии Томаса, прямого отношения к ней не имеет.

Выражение (17) для угловой скорости прецессии Томаса получено в ряде работ одного из авторов, в частности, в [10].

Авторы благодарны В. Ф. Чубу за обсуждение проблем описания прецессии Томаса гиперкомплексными числами и В. Л. Гинзбургу за внимание к проблеме.

Литература

[1] Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж. А. *Гравитация* (М.: Мир. Т. 1. 1977, С. 222 [Misner C. W., Thorne K. S., Wheeler J. A. Gravitation (San Francisco: W. H. Freeman and C^0, 1973)]

[2] Пенроуз Р., Риндлер В.. *Спиноры и пространство – время* (М.: Мир, 1987) [Penrose R., Rindler W. *Two-Spinors Calculus and Relativistic Fields* (Cambrige University Press. 1986)]

[3] Бурланков Д. Е. Малыкин, Г. Б. *Препринт ИПФ РАН N^o* 576, Н. Новгород (2000)

[4] Thomas L. H., Nature. 1926. V. 117, P. 514.

[5] Thomas L. H., Phil. Mag. 1927. S.7 . V. 3, N 13. P. 1-22.

[6] Мёллер К. *Теория относительности* (М.: Атомиздат, 1975) [Möller C., *The theory of relativity* (Oxford: Claredon press, 1952, 1972)].

[7] Rhodes J. A., Semon M. D., Am. J. Phys. 2004. **72**, P. 943

[8] Уиттекер Э. *Аналитическая динамика* (Ижевск: РХД, 1999) [E. T. Whittaker, *Tretise on the Analitical Dynamics of Particles and Rigid Bodies* (Cambrige, 1927)]

[9] Малыкин Г. Б. Харламов, С. А., УФН, 2003. Т. 173, N^o 9, С. 985

[10] Малыкин Г. Б., Пермитин Г. В., *Томасовская прецессия* Физическая энциклопедия, М.: Рос. энциклопедия, 1998. Т. 5, С. 123.

Thomas precession by pseudoquaternions

D. E. Burlankov, G. B. Malykin

Nizhny Novgorod State University, Russia, bur@phys.unn.runnet.ru
Institute of Applied Physics RAS, Nizhny Novgorod, Russia, malykin@ufp.appl.sci-nnov.ru

When a body moves curvilinearly in a plane with a velocity that is comparable to the velocity of light, only three coordinates of the body undergo Lorentz transformation, and the transformation matrix appears to be three-parametric. This enables description of these transformations by pseudoquaternions, Hamilton quaternions slightly modified for pseudo-Euclidean character of the metrics. Their algebraic properties and relation to the Lorentz transformations in a 2+1-dimensional Minkovsky space were determined. We integrated the pseudoquaternion differential equation of continuous transformations at a body's motion along a circular orbit and, as a result, obtained an expression for the value of the Thomas precession.

Key-words: Lorentz transformations, quaternions, Minkowski space, Thomas precession.
MSC: 22E43, 51B20, 46S10.

НЕЗАМКНУТОСТЬ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ

В. Ф. Чуб

Ракетно-космическая корпорация “Энергия” им. С. П. Королева, г. Королев, Россия

Дается краткий теоретико-групповой сравнительный анализ трех теорий пространства-времени: (теории пространства-времени в рамках) классической механики Ньютона, специальной теории относительности и развитой автором теории, основанной на использовании кватернионов с комплексно-дуальными коэффициентами.

Ключевые слова: преобразования Галилея, специальная теория относительности, кватернионы.

1. Введение

В работе обсуждается один из основных результатов статьи автора, опубликованной в журнале «Известия АН. Механика твердого тела» (2002), связанный с исследованием групповых свойств следующих физических преобразований: сдвигов (переносов, трансляций) пространства и времени, пространственных вращений (поворотов) и движений с постоянной скоростью (бустов), описываемых в рамках специальной теории относительности (СТО) и классической механики, соответственно, преобразованиями Лоренца и Галилея. Вышеупомянутый результат состоит в логической (математической) возможности построения новой теории пространства-времени на основе алгебры кватернионов с комплексно-дуальными коэффициентами и соответствующей «кватернионной группы».

Теоретико-групповые идеи играют основополагающую роль в геометрии и современной теоретической физике, а применение кватернионов представляет специальный интерес для журнала «Гиперкомплексные числа в геометрии и физике». Автор надеется, что работа, носящая обзорно-методический характер, будет доступна широкому кругу читателей журнала, знакомых с основами теории групп и гиперкомплексных чисел.

2. Незамкнутость преобразований

Замкнутостью относительно операции называют *“свойство подгрупп (или алгебраических подструктур) группы (алгебраической структуры), состоящее в том, что результат операции, производимой над элементами подгруппы (подструктуры), также принадлежит подгруппе (подструктуре)”* [1, с. 254].

В основной части работы в качестве алгебраических структур будут использоваться только группы преобразований, а в качестве операции — только композиция (последовательное выполнение) преобразований. Соответственно, незамкнутостью назовем свойство подмножеств группы преобразований, состоящее в том, что результат композиции преобразований подмножества в общем случае не принадлежит подмножеству. В этом случае преобразования рассматриваемого подмножества не образуют группы (подгруппы исходной группы преобразований). Далее будет показано, что понятие незамкнутости допускает естественное расширение на случай пары подмножеств исходной группы преобразований.

Ниже приведены три таблицы, характеризующие свойства незамкнутости элементарных преобразований в рамках трех физических теорий пространства-времени, допускающих формулировку в рамках теоретико-группового подхода, т. е. свойства трех соответствующих фундаментальных групп преобразований:

- 10-параметрической группы Галилея;
- 10-параметрической группы Пуанкаре;
- 13-параметрической группы, исследуемой в работе [2].

	t	$\vec{r}$	$\vec{\vartheta}$	$\vec{v}$
t				$\vec{r}$
$\vec{r}$				
$\vec{\vartheta}$				
$\vec{v}$	$\vec{r}$			

	t	$\vec{r}$	$\vec{\vartheta}$	$\vec{\psi}$
t				$\vec{r}$
$\vec{r}$				t
$\vec{\vartheta}$				
$\vec{\psi}$	$\vec{r}$	t		$\vec{\vartheta}$

	t	$\vec{r}$	$\vec{\vartheta}$	$\vec{\psi}$	$\vec{\varphi}$
t					
$\vec{r}$				$\vec{\varphi}$	
$\vec{\vartheta}$					
$\vec{\psi}$		$\vec{\varphi}$		$\vec{\vartheta}$	$\vec{r}$
$\vec{\varphi}$				$\vec{r}$	

Здесь параметр:

t соответствует переносу (сдвигу, трансляции) во времени;

$\vec{r}$ — переносу в пространстве;

$\vec{\vartheta}$ — повороту в пространстве;

$\vec{\psi}$ (для группы Галилея использован символ $\vec{v}$) — бусту;

$\vec{\varphi}$ (только для кватернионной теории) — векторному преобразованию, не получившему физической интерпретации в работе [2].

В каждой клетке таблицы (кроме левого столбца и верхней строки) стоит параметр преобразования, возникающего при сложении (перестановке) преобразований, характеризуемых параметрами, стоящими в начале строки и столбца, образующих эту клетку[1]. Если новых типов преобразований не возникает, то клетка остается пустой.

3. Пояснения

Данные для заполнения таблиц взяты:

- Для кватернионной группы из формул пункта 2.4 статьи [2].
- Для группы Пуанкаре из формулы (ср. [3, с. 13]):

$$\mathrm{X}' = e^{\frac{\vec{\psi}}{2}} \circ e^{i\frac{\vec{\vartheta}}{2}} \circ \mathrm{X} \circ e^{-i\frac{\vec{\vartheta}}{2}} \circ e^{\frac{\vec{\psi}}{2}} + t + \vec{r} \tag{1}$$

(где $\mathrm{X} = \tau + \vec{\rho}$ и $\mathrm{X}' = \tau' + \vec{\rho}\,'$ – координаты двух “точек”), обычным образом интерпретируемой (активная точка зрения) как преобразование геометрического объекта X типа “точка” под действием преобразования[2] общего вида из группы Пуанкаре. Для получения, например, перестановочного соотношения для буста и пространственного переноса следует приравнять результат действия буста с последующим переносом результату действия переноса с последующим бустом:

$$e^{\frac{\vec{\psi}}{2}} \circ \mathrm{X} \circ e^{\frac{\vec{\psi}}{2}} + \vec{r} = e^{\frac{\vec{\psi}}{2}} \circ (\mathrm{X} + \vec{r}\,' + t) \circ e^{\frac{\vec{\psi}}{2}}$$

[1] Некоторая избыточность информации, связанная с симметричностью таблиц, полезна для визуального отделения диагональных членов.

[2] Повторное использование слова “преобразование” вряд ли может привести к недоразумениям (хотя, например, согласно работе [4], словосочетание “преобразование из группы Пуанкаре” следовало бы заменить на “переход из группы Пуанкаре”).

(легко убедиться, что параметр буста не изменяется, а без переноса во времени в общем случае не обойтись).

- Для группы Галилея из формулы (ср. [5, с. 11]):

$$\mathrm{X}' = e^{i\frac{\vec{\vartheta}}{2}} \circ \mathrm{X} \circ e^{-i\frac{\vec{\vartheta}}{2}} + t + \vec{r} + \tau\vec{v} \tag{2}$$

(где $\mathrm{X} = \tau + \vec{\rho}$ и $\mathrm{X}' = \tau' + \vec{\rho}\,'$), обычным образом интерпретируемой (активная точка зрения) как преобразование геометрического объекта X типа "точка" под действием преобразования общего вида из группы Галилея.

Заметим, что формула (2) получается из (1) не просто в первом порядке малости по параметру $\vec{\psi}$ (с заменой его на $\vec{v}$), но еще и в первом порядке малости по параметру $\frac{\vec{\rho}}{\tau}$. Мы не будем останавливаться на формальном приеме введения константы, которая потом устремляется к бесконечности, часто используемом в учебниках по специальной теории относительности.

Таблицы для групп Пуанкаре и Галилея можно заполнить и на основании вида коммутаторов инфинитезимальных операторов соответствующих алгебр Ли[3]. Все необходимые формулы приведены также в пункте 2.5 статьи [2][4].

Из приведенных таблиц видно, что во всех трех группах есть подгруппы[5] движений пространства, соответствующие параметрам $\vec{r}$ и $\vec{\vartheta}$, (а также 7-параметрическая "группа Аристотеля"[6], соответствующая параметрам t, $\vec{r}$ и $\vec{\vartheta}$, отвечающая пустым квадратам 3×3 в верхних левых углах таблиц), т.е. есть и логическая возможность использовать бикватернионы Клиффорда [10, с. 67] для описания поворотов и переносов пространства во всех трех теориях.

4. Комментарии

Сделаем еще несколько замечаний по поводу выписанных таблиц.

Во-первых, понятие группы преобразований возникло и приобрело первостепенное значение в теоретической физике значительно позже механики Ньютона. Поэтому представления о пространстве-времени во времена Галилея и Ньютона были сформулированы отнюдь не в рамках теоретико-группового подхода [11]. В этом смысле и термин "группа Галилея" (или "галилей-ньютоновская группа") связан с некоторой "рациональной реконструкцией" истории механики. Однако, *"следует принять во внимание, что группы преобразований — один из наиболее естественных и универсальных инструментов исследования и классификации фундаментальных явлений в точном естествознании"* [8, с. 563].

Во-вторых, 3-параметрическая группа Галилея, элементы которой описывают в рамках механики Галилея-Ньютона переходы *"от одной системы координат к другой, движущейся равномерно и прямолинейно относительно первой", "в механике Ньютона всегда стояла особняком"; "группа, отражающая свойства однородности времени и однородности и изотропности пространства*[7] *и группа Галилея*[8]

[3] См., например, [6–8].

[4] Пользуясь случаем укажем, что выражение для $\vec{r}\,'$ в формулах (2.19) и (2.20) работы [2] выписано с ошибкой.

[5] Легко убедиться, выписав формулы полностью, что соответствующие подгруппы изоморфны.

[6] См. [9, с. 98]. Хотя, сравнив с указанной выше статьей [4], убедимся, что и здесь терминология неоднозначна.

[7] Описывается, соответственно, параметрами t, $\vec{r}$ и $\vec{\vartheta}$ в наших обозначениях.

[8] Описывается параметрами $\vec{v}$ (тремя компонентами вектора скорости).

имеют независимое существование, и глубокая связь между ними[9] *долгое время, вплоть до работ Пуанкаре и Минковского, по существу, не была установлена"* [12, с. 13]. *"По существу говоря, фундаментальная группа классической механики, т.е. галилей-ньютоновская группа, как единая система преобразований, действующая на пространственно-временном многообразии, была открыта только после построения основ СТО"* [9, с. 77].

В-третьих, в специальной теории относительности переходы *"от одной системы координат к другой, движущейся равномерно и прямолинейно относительно первой"* (которые в механике Ньютона образуют 3-параметрическую группу Галилея), вообще не образуют 3-параметрической группы[10]. Поскольку в СТО указанные преобразования кратко называют бустами, то отмеченный факт естественно назвать незамкнутостью бустов[11]. Следует отметить отсутствие единого общепринятого краткого термина для того физического преобразования, которое в механике Ньютона описывается (как известно, при больших скоростях — неадекватно) элементом 3-параметрической группы Галилея, а в СТО — гиперболическим поворотом (бустом). По мнению автора, целесообразно использовать для обозначения указанного физического преобразования термин "буст", который сам по себе не несет прямого указания на конкретную математическую модель этого преобразования (в отличие от эквивалентных ему в СТО терминов "гиперболический поворот", "чистое преобразование Лоренца"). Путаницы при этом возникнуть не должно, так как тем и отличаются различные физические теории, что одни и те же явления могут иметь в них прямо противоположные свойства. В частности, по нашей терминологии, в специальной теории относительности бусты незамкнуты, а в механике Ньютона — замкнуты.

Наконец, обратим внимание на то, что в развитой автором теории переносы во времени независимы от других элементарных преобразований (в отличие от СТО и механики Ньютона[12]). На уровне выписанных нами таблиц этому факту соответствуют пустые столбец и строка, соответствующие параметру t, в последней из таблиц[13].

5. Заключение

В статье рассматривались три теории (модели), претендующие на описание одного и того же физического объекта — пространства-времени. Поэтому по крайней мере две из них ошибочны.

---

[9] Проявляющаяся, в частности, в непустоте выписанной нами таблицы для 10-параметрической группы Галилея.

[10] Во избежание недоразумений укажем, что в литературе нередко встречаются ошибочные утверждения о существовании *"трехпараметрической группы Лоренца"* [5, с. 270] [13, с. 31], *"параметрами которой являются 3 компоненты относительной скорости"* [12, с. 105,109–110] [14, с. 38,43] (наличия трех однопараметрических групп Лоренца, параметрами которых являются 3 компоненты вектора скорости, недостаточно для существования соответствующей трехпараметрической группы; это можно установить прямым исследованием групповых свойств преобразований Лоренца [2], вычислением коммутаторов инфинитезимальных операторов преобразований Лоренца [5, с. 209] или изучением пространства скоростей СТО, т.е. пространства Лобачевского [15, с. 498]).

[11] В энциклопедиях его обычно называют прецессией Томаса [16], хотя факт незамкнутости бустов был известен и до работ Л. Томаса (1926–1927 гг.). На уровне выписанной нами таблицы для группы Пуанкаре незамкнутость бустов [17, с. 134] [18, с. 403] проявляется в непустоте диагонали этой таблицы.

[12] В соответствии с развитой выше терминологией можно сказать, что в специальной теории относительности и в классической механике переносы во времени и бусты незамкнуты и порождают новое элементарное преобразование: переносы в пространстве.

[13] Но в отличие от пространственных поворотов, которым во всех трех таблицах также соответствуют пустые столбцы и строки, переносы во времени в кватернионной теории еще и коммутируют со всеми другими преобразованиями — см. Приложение.

В настоящее время имеется весьма убедительное доказательство ошибочности кватернионной теории пространства-времени как физической теории, связанное именно с независимостью в этой теории переносов во времени от других элементарных преобразований [2]. Также имеется доказательство ошибочности (как физической теории) теории пространства-времени, основанной на группе Галилея, связанное с экспериментально наблюдаемыми следствиями незамкнутости бустов [19].

Приложение. Некоммутативность преобразований

Обсуждаемое в статье понятие незамкнутости элементарных преобразований пространства-времени полезно сравнить с широко известным понятием некоммутативности преобразований и тесно связанным с ним понятием алгебры Ли непрерывной группы преобразований.

Ниже приведены таблицы, определяющие алгебры Ли для трех рассматриваемых в статье групп преобразований, вместе с физической интерпретацией элементов этих алгебр Ли (традиционно называемых операторами) и одним из их математических представлений. В каждой клетке таблиц (кроме левого столбца и верхней строки) стоит оператор, являющийся коммутатором $[\hat{U},\hat{V}]$ операторов, стоящих в начале строки и столбца, образующих эту клетку. Если операторы перестановочны (коммутируют), то в соответствующей клетке стоит 0. Приведенные таблицы, конечно, содержат всю информацию, содержащуюся в таблицах, выписанных в основном тексте статьи, но не позволяют представить в чистом виде понятие, вынесенное в заголовок статьи.

Алгебра Ли группы Галилея

$\hat{U}\backslash\hat{V}$	$\hat{T}$	$\hat{P}_x$	$\hat{P}_y$	$\hat{P}_z$	$\hat{M}_x$	$\hat{M}_y$	$\hat{M}_z$	$\hat{N}_x$	$\hat{N}_y$	$\hat{N}_z$
$\hat{T}$	0	0	0	0	0	0	0	$\hat{P}_x$	$\hat{P}_y$	$\hat{P}_z$
$\hat{P}_x$	0	0	0	0	0	$\hat{P}_z$	$-\hat{P}_y$	0	0	0
$\hat{P}_y$	0	0	0	0	$-\hat{P}_z$	0	$\hat{P}_x$	0	0	0
$\hat{P}_z$	0	0	0	0	$\hat{P}_y$	$-\hat{P}_x$	0	0	0	0
$\hat{M}_x$	0	0	$\hat{P}_z$	$-\hat{P}_y$	0	$\hat{M}_z$	$-\hat{M}_y$	0	$\hat{N}_z$	$-\hat{N}_y$
$\hat{M}_y$	0	$-\hat{P}_z$	0	$\hat{P}_x$	$-\hat{M}_z$	0	$\hat{M}_x$	$-\hat{N}_z$	0	$\hat{N}_x$
$\hat{M}_z$	0	$\hat{P}_y$	$-\hat{P}_x$	0	$\hat{M}_y$	$-\hat{M}_x$	0	$\hat{N}_y$	$-\hat{N}_x$	0
$\hat{N}_x$	$-\hat{P}_x$	0	0	0	0	$\hat{N}_z$	$-\hat{N}_y$	0	0	0
$\hat{N}_y$	$-\hat{P}_y$	0	0	0	$-\hat{N}_z$	0	$\hat{N}_x$	0	0	0
$\hat{N}_z$	$-\hat{P}_z$	0	0	0	$\hat{N}_y$	$-\hat{N}_x$	0	0	0	0

Здесь операторы инфинитезимальных преобразований:

$\hat{T} = \dfrac{\partial}{\partial t}$ — перенос (сдвиг, трансляция) во времени;

$\hat{P}_x = \dfrac{\partial}{\partial x}$ — перенос (сдвиг, трансляция) по оси x;

$\hat{P}_y = \dfrac{\partial}{\partial y}$ — перенос (сдвиг, трансляция) по оси y;

$\hat{P}_z = \dfrac{\partial}{\partial z}$ — перенос (сдвиг, трансляция) по оси z;

$\hat{M}_x = z\dfrac{\partial}{\partial y} - y\dfrac{\partial}{\partial z}$ — поворот вокруг оси x;

$\hat{M}_y = x\dfrac{\partial}{\partial z} - z\dfrac{\partial}{\partial x}$ — поворот вокруг оси y;

$\hat{M}_z = y\dfrac{\partial}{\partial x} - x\dfrac{\partial}{\partial y}$ — поворот вокруг оси z;

$\hat{N}_x = t\dfrac{\partial}{\partial x}$ — буст (преобразование Галилея) по оси x;

$\hat{N}_y = t\dfrac{\partial}{\partial y}$ — буст (преобразование Галилея) по оси y;

$\hat{N}_z = t\dfrac{\partial}{\partial z}$ — буст (преобразование Галилея) по оси z;

$[\hat{U}, \hat{V}] = \hat{U}\hat{V} - \hat{V}\hat{U}$ — коммутаторы операторов преобразований.

Алгебра Ли группы Пуанкаре

$\hat{U}\backslash\hat{V}$	$\hat{T}$	$\hat{P}_x$	$\hat{P}_y$	$\hat{P}_z$	$\hat{M}_x$	$\hat{M}_y$	$\hat{M}_z$	$\hat{N}_x$	$\hat{N}_y$	$\hat{N}_z$
$\hat{T}$	0	0	0	0	0	0	0	$\hat{P}_x$	$\hat{P}_y$	$\hat{P}_z$
$\hat{P}_x$	0	0	0	0	0	$\hat{P}_z$	$-\hat{P}_y$	$\hat{T}$	0	0
$\hat{P}_y$	0	0	0	0	$-\hat{P}_z$	0	$\hat{P}_x$	0	$\hat{T}$	0
$\hat{P}_z$	0	0	0	0	$\hat{P}_y$	$-\hat{P}_x$	0	0	0	$\hat{T}$
$\hat{M}_x$	0	0	$\hat{P}_z$	$-\hat{P}_y$	0	$\hat{M}_z$	$-\hat{M}_y$	0	$\hat{N}_z$	$-\hat{N}_y$
$\hat{M}_y$	0	$-\hat{P}_z$	0	$\hat{P}_x$	$-\hat{M}_z$	0	$\hat{M}_x$	$-\hat{N}_z$	0	$\hat{N}_x$
$\hat{M}_z$	0	$\hat{P}_y$	$-\hat{P}_x$	0	$\hat{M}_y$	$-\hat{M}_x$	0	$\hat{N}_y$	$-\hat{N}_x$	0
$\hat{N}_x$	$-\hat{P}_x$	$-\hat{T}$	0	0	0	$\hat{N}_z$	$-\hat{N}_y$	0	$-\hat{M}_z$	$\hat{M}_y$
$\hat{N}_y$	$-\hat{P}_y$	0	$-\hat{T}$	0	$-\hat{N}_z$	0	$\hat{N}_x$	$\hat{M}_z$	0	$-\hat{M}_x$
$\hat{N}_z$	$-\hat{P}_z$	0	0	$-\hat{T}$	$\hat{N}_y$	$-\hat{N}_x$	0	$-\hat{M}_y$	$\hat{M}_x$	0

Здесь операторы инфинитезимальных преобразований:

$\hat{T} = \dfrac{\partial}{\partial t}$ — перенос (сдвиг, трансляция) во времени;

$\hat{P}_x = \dfrac{\partial}{\partial x}$ — перенос (сдвиг, трансляция) по оси x;

$\hat{P}_y = \dfrac{\partial}{\partial y}$ — перенос (сдвиг, трансляция) по оси y;

$\hat{P}_z = \dfrac{\partial}{\partial z}$ — перенос (сдвиг, трансляция) по оси z;

$\hat{M}_x = z\dfrac{\partial}{\partial y} - y\dfrac{\partial}{\partial z}$ — поворот вокруг оси x;

$\hat{M}_y = x\dfrac{\partial}{\partial z} - z\dfrac{\partial}{\partial x}$ — поворот вокруг оси y;

$\hat{M}_z = y\dfrac{\partial}{\partial x} - x\dfrac{\partial}{\partial y}$ — поворот вокруг оси z;

$$\hat{N}_x = x\frac{\partial}{\partial t} + t\frac{\partial}{\partial x}$$ — буст (преобразование Лоренца) по оси x;

$$\hat{N}_y = y\frac{\partial}{\partial t} + t\frac{\partial}{\partial y}$$ — буст (преобразование Лоренца) по оси y;

$$\hat{N}_z = z\frac{\partial}{\partial t} + t\frac{\partial}{\partial z}$$ — буст (преобразование Лоренца) по оси z;

$[\hat{U}, \hat{V}] = \hat{U}\hat{V} - \hat{V}\hat{U}$ — коммутаторы операторов преобразований.

Алгебра Ли кватернионной группы

$\hat{U}\backslash\hat{V}$	$\hat{T}$	$\hat{P}_x$	$\hat{P}_y$	$\hat{P}_z$	$\hat{M}_x$	$\hat{M}_y$	$\hat{M}_z$	$\hat{N}_x$	$\hat{N}_y$	$\hat{N}_z$	$\hat{\Phi}_x$	$\hat{\Phi}_y$	$\hat{\Phi}_z$
$\hat{T}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\hat{P}_x$	0	0	0	0	0	$\hat{P}_z$	$-\hat{P}_y$	0	$\hat{\Phi}_z$	$-\hat{\Phi}_y$	0	0	0
$\hat{P}_y$	0	0	0	0	$-\hat{P}_z$	0	$\hat{P}_x$	$-\hat{\Phi}_z$	0	$\hat{\Phi}_x$	0	0	0
$\hat{P}_z$	0	0	0	0	$\hat{P}_y$	$-\hat{P}_x$	0	$\hat{\Phi}_y$	$-\hat{\Phi}_x$	0	0	0	0
$\hat{M}_x$	0	0	$\hat{P}_z$	$-\hat{P}_y$	0	$\hat{M}_z$	$-\hat{M}_y$	0	$\hat{N}_z$	$-\hat{N}_y$	0	$\hat{\Phi}_z$	$-\hat{\Phi}_y$
$\hat{M}_y$	0	$-\hat{P}_z$	0	$\hat{P}_x$	$-\hat{M}_z$	0	$\hat{M}_x$	$-\hat{N}_z$	0	$\hat{N}_x$	$-\hat{\Phi}_z$	0	$\hat{\Phi}_x$
$\hat{M}_z$	0	$\hat{P}_y$	$-\hat{P}_x$	0	$\hat{M}_y$	$-\hat{M}_x$	0	$\hat{N}_y$	$-\hat{N}_x$	0	$\hat{\Phi}_y$	$-\hat{\Phi}_x$	0
$\hat{N}_x$	0	0	$\hat{\Phi}_z$	$-\hat{\Phi}_y$	0	$\hat{N}_z$	$-\hat{N}_y$	0	$-\hat{M}_z$	$\hat{M}_y$	0	$-\hat{P}_z$	$\hat{P}_y$
$\hat{N}_y$	0	$-\hat{\Phi}_z$	0	$\hat{\Phi}_x$	$-\hat{N}_z$	0	$\hat{N}_x$	$\hat{M}_z$	0	$-\hat{M}_x$	$\hat{P}_z$	0	$-\hat{P}_x$
$\hat{N}_z$	0	$\hat{\Phi}_y$	$-\hat{\Phi}_x$	0	$\hat{N}_y$	$-\hat{N}_x$	0	$-\hat{M}_y$	$\hat{M}_x$	0	$-\hat{P}_y$	$\hat{P}_x$	0
$\hat{\Phi}_x$	0	0	0	0	0	$\hat{\Phi}_z$	$-\hat{\Phi}_y$	0	$-\hat{P}_z$	$\hat{P}_y$	0	0	0
$\hat{\Phi}_y$	0	0	0	0	$-\hat{\Phi}_z$	0	$\hat{\Phi}_x$	$\hat{P}_z$	0	$-\hat{P}_x$	0	0	0
$\hat{\Phi}_z$	0	0	0	0	$\hat{\Phi}_y$	$-\hat{\Phi}_x$	0	$-\hat{P}_y$	$\hat{P}_x$	0	0	0	0

Здесь операторы:

$\hat{T} = \varepsilon i/2$; $\exp(t\hat{T})$ — перенос (сдвиг, трансляция) во времени;

$\hat{P}_x = \varepsilon\vec{\mathbf{i}}/2$; $\exp(x\hat{P}_x)$ — перенос (сдвиг, трансляция) по оси x;
$\hat{P}_y = \varepsilon\vec{\mathbf{j}}/2$; $\exp(y\hat{P}_y)$ — перенос (сдвиг, трансляция) по оси y;
$\hat{P}_z = \varepsilon\vec{\mathbf{k}}/2$; $\exp(z\hat{P}_z)$ — перенос (сдвиг, трансляция) по оси z;

$\hat{M}_x = \vec{\mathbf{i}}/2$; $\exp(\vartheta_x\hat{M}_x)$ — поворот вокруг оси x;
$\hat{M}_y = \vec{\mathbf{j}}/2$; $\exp(\vartheta_y\hat{M}_y)$ — поворот вокруг оси y;
$\hat{M}_z = \vec{\mathbf{k}}/2$; $\exp(\vartheta_z\hat{M}_z)$ — поворот вокруг оси z;

$\hat{N}_x = \vec{\mathbf{e}}_x/2$; $\exp(\psi_x\hat{N}_x)$ — буст (преобразование Лоренца) по оси x;
$\hat{N}_y = \vec{\mathbf{e}}_y/2$; $\exp(\psi_y\hat{N}_y)$ — буст (преобразование Лоренца) по оси y;
$\hat{N}_z = \vec{\mathbf{e}}_z/2$; $\exp(\psi_z\hat{N}_z)$ — буст (преобразование Лоренца) по оси z;

$\hat{\Phi}_x = \varepsilon\vec{\mathbf{e}}_x/2$; $\exp(\varphi_x\hat{\Phi}_x)$ — неинтерпретированное преобразование по оси x;
$\hat{\Phi}_y = \varepsilon\vec{\mathbf{e}}_y/2$; $\exp(\varphi_y\hat{\Phi}_y)$ — неинтерпретированное преобразование по оси y;
$\hat{\Phi}_z = \varepsilon\vec{\mathbf{e}}_z/2$; $\exp(\varphi_z\hat{\Phi}_z)$ — неинтерпретированное преобразование по оси z;

$[\hat{U}, \hat{V}] = \hat{U} \circ \hat{V} - \hat{V} \circ \hat{U}$ — коммутаторы половинок гиперкомплексных ортов;

$\varepsilon^2 = 0$; $i^2 = \vec{\mathbf{i}}^2 = \vec{\mathbf{j}}^2 = \vec{\mathbf{k}}^2 = -1$; $\vec{\mathbf{i}} \circ \vec{\mathbf{j}} = \vec{\mathbf{k}} = -\vec{\mathbf{j}} \circ \vec{\mathbf{i}}$; $\vec{\mathbf{i}} = i\vec{\mathbf{e}}_x$; $\vec{\mathbf{j}} = i\vec{\mathbf{e}}_y$; $\vec{\mathbf{k}} = i\vec{\mathbf{e}}_z$;

$\circ$ — традиционное обозначение для кватернионного умножения.

Литература

[1] *Э. Фрид.* Элементарное введение в абстрактную алгебру. М.: Мир, 1979.

[2] *В. Ф. Чуб.* Изв. АН. МТТ. 2002. *N* 6. С. 3.

[3] *Ю. В. Новожилов.* Введение в теорию элементарных частиц. М.: Наука, 1972.

[4] *Н. П. Клепиков.* Вестник МГУ. Сер. 3. Физика, астрономия. 1995. Т. 36. С. 3.

[5] *В. Ф. Журавлев.* Основы теоретической механики. М.: Наука, 1997.

[6] *Б. В. Медведев.* Начала теоретической физики. М.: Наука, 1977.

[7] *Г. А. Зайцев.* О связи теории относительности с теорией групп. В кн.: М.–А. Тоннела. Основы электромагнетизма и теории относительности. М.: Изд-во иностр. литературы, 1962. С. 447.

[8] *Л. М. Мархашов.* ПММ. 1992. Т. 56. Вып. 4. С. 563.

[9] *В. П. Визгин.* “Эрлангенская программа” и физика. М.: Наука, 1975.

[10] *В. Н. Бранец, И. П. Шмыглевский.* Введение в теорию бесплатформенных инерциальных навигационных систем. М.: Наука, 1992.

[11] *Вл. П. Визгин.* Галилеевский принцип относительности. В сб.: Исследования по истории механики. М.: Наука, 1983. С. 200.

[12] *А. А. Логунов.* Лекции по теории относительности и гравитации: Современный анализ проблемы. М.: Наука, 1987.

[13] *В. Ф. Журавлев.* Основания механики. Методические аспекты. Препринт *N* 251 Института проблем механики АН СССР. М.: ИПМ, 1985.

[14] *А. А. Логунов.* Лекции по теории относительности: Современный анализ проблемы. М.: Изд-во Московского университета, 1983.

[15] *И. Ю. Кобзарев.* Относительности теория. В кн.: Физическая энциклопедия. Т. 3. М.: БРЭ, 1992. С. 493.

[16] *М. И. Войцеховский.* Буст. В кн.: Математическая физика. Энциклопедия. М.: БРЭ, 1998. С. 63.

[17] *А. Пуанкаре.* О динамике электрона. В сб.: Принцип относительности. Сборник работ по специальной теории относительности. М.: Атомиздат, 1973. С. 118[14)].

[18] *Ч. Мизнер, К. Торн, Дж. Уилер.* Гравитация. Т. 3. М.: Мир, 1977.

[19] *Г. Б. Малыкин, Г. В. Пермитин.* Томасовская прецессия. В кн.: Физическая энциклопедия. Т. 5. М.: БРЭ, 1998. С. 123.

Nonclosure of elementary space-time transformations

V. F. Chub

Korolev Rocket and Space Corporation “Energia”

The article gives a brief group-theoretical comparative study of three space-time theories: (space-time theory in frames of) classical Newton mechanics, special theory of relativity and author-developed theory based on complex-dual quaternions.

Key-words: Galilean transformations, Special Relativity Theory, quaternions.
MSC: 83-02, 83A05, 83D05, 11R52.

---

14) См. также с. 51–54 монографии: *А. А. Логунов.* К работам Анри Пуанкаре “О динамике электрона”. М.: ИЯИ АН СССР, 1984.

ИНФОРМАЦИЯ ДЛЯ АВТОРОВ

В журнале печатаются оригинальные и обзорные статьи российских и зарубежных авторов по тематике: а) Гиперкомплексные числа, б) Геометрии, связанные с гиперкомплексными числами, в) Финслеровы пространства, г) Фракталы, основанные на гиперкомплексных числах, д) Применение гиперкомплексных чисел в физике, е) Экспериментальные исследования возможной анизотропии пространства-времени и иных проявлений финслеровой геометрии.

Редколлегия информирует авторов статей о принятых ею правилах:

1. Язык статей – русский или английский.
2. Объем статьи не должен превышать 1 печ. листа (24 усл. маш. стр.)
3. Автор предоставляет в редакцию файл статьи в формате LaTeX (версия LaTeX2$_\varepsilon$, для набора формул используется $\mathcal{AMS}$-LaTeX) и файл статьи в формате PostScript или PDF.
4. Принимаемые форматы файлов рисунков: для растровых TIFF, GIF, PNG (должна быть возможна инкапсуляция в EPS); для векторных EPS, PDF, TEX. Каждый рисунок должен быть помещен в отдельный файл. Цветовая гамма – черно-белая или серая (8 бит).
5. Текст статьи должен включать аннотацию (в ней не должно быть громоздких формул и ссылок), ключевые слова, классификацию по PACS или MSC2000. Глубина разбивки текста не должна превышать трех уровней.
6. Название статьи, аннотация, ключевые слова, имена авторов и их организации предоставляются на русском и английском языках.
7. Автор указывает e-mail и телефон для оперативной связи. Возвращение статьи автору на доработку не означает, что она принята к опубликованию.
8. Отклонение от данных правил уменьшает вероятность опубликования статьи.
9. Публикация бесплатна для всех авторов.

Гиперкомплексные числа
в геометрии и физике

Научный журнал. Основан в 2003 г.

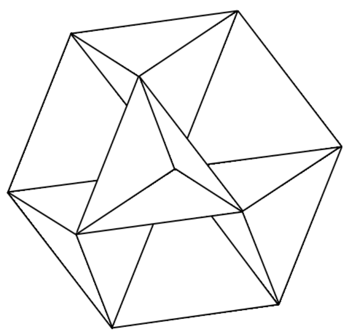
2005, № 2 (4)

Главный редактор Павлов Д. Г.
Ответственный секретарь Элиович А. А.

www.polynumbers.ru
hypercomplex@mail.ru

Свидетельство о регистрации
ПИ № 77-15331 от 30 апреля 2003 г.

ISSN 1814-3946



Типографские данные