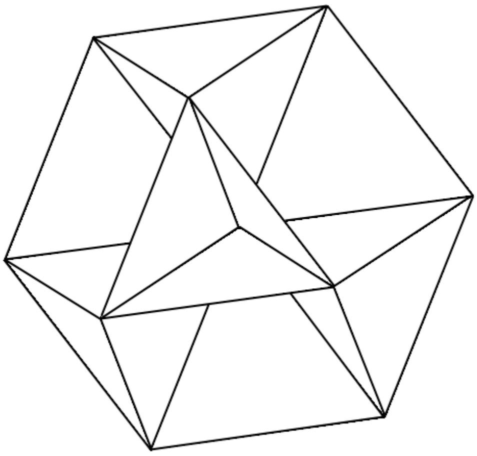
Гиперкомплексные числа в геометрии и физике

2005, № 1 (3)

Научный журнал

Основан в 2003 г.



www.polynumbers.ru
hypercomplex@mail.ru

Адрес редакции:
129515, Россия, Москва,
ул. Прасковьина, 21, офис 112, "МОЗЭТ"

Оглавление

ПОНЯТИЯ РАССТОЯНИЯ И МОДУЛЯ СКОРОСТИ В ЛИНЕЙНЫХ ФИНСЛЕРОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Д. Г. Павлов

Московский Государственный Технический Университет им. Н. Э. Баумана
geom2004@mail.ru

Г. И. Гарасько

Всероссийский электротехнический институт, Москва, Россия
gri9z@mail.ru

Получены формулы для трёхмерного расстояния и модуля скорости в четырёхмерном линейном пространстве с метрикой Бервальда-Моора при помощи разработанного алгоритма, который применим как для пространства Минковского, так и для произвольного полилинейного финслерова пространства, если в нем можно выделить времениподобную компоненту. Построенный в данной работе модуль трёхмерной скорости в пространстве с метрикой Бервальда-Моора при малых (нерелятивистских) скоростях совпадает с соответствующим выражением в пространстве Галилея, а при максимально возможных скоростях, то есть для мировых линий, лежащих на поверхности конуса будущего, – равен единице. Для построения трехмерного расстояния используется понятие поверхности относительной одновременности, что концептуально аналогично соответствующему методу специальной теории относительности. Выведены формулы преобразования скорости при переходе из одной инерциальной системы отсчета в другую. В случае когда обе скорости направлены вдоль одной из трёх выделенных прямых, полученные соотношения совпадают с аналогичными соотношениями в специальной теории относительности, однако отличаются в других случаях. Получены выражения для преобразований, играющих роль преобразований Лоренца пространства Минковского. Если при этом три пространственные координатные оси есть прямые, вдоль которых скорости складываются так же, как в специальной теории относительности, то выбирая скорость новой инерциальной системы коллинеарной одной из таких координатных осей, получим, что преобразования этой координаты и временной совпадают с преобразованиями Лоренца, а преобразования двух поперечных координат отличаются от соответствующих преобразований Лоренца.

Ключевые слова: метрика Бервальда-Моора, трехмерные расстояния, скорости, специальная теория относительности, преобразования Лоренца.

Введение

Геометрию пространства классической нерелятивистской физики, обычно связываемую с именами Галилея и Ньютона, можно считать приближением второго порядка по малому параметру (отношению модуля скорости к скорости света) от геометрии пространства Минковского. Однако, существуют и другие геометрии необязательно с квадратичной метрикой, для которых подобный предельный переход приводит к пространству Галилея, то есть к классической нерелятивистской механике.

Отталкиваясь от четырёх измерений, как несомненно присутствующих в нашем физическом мире, и желая рассмотреть, в первую очередь, простейшую метрическую форму четвертого порядка, мы считаем целесообразным начать подобные исследования с линейного пространства с метрикой Бервальда-Моора, интервал которого в одном из базисов представим в виде произведения четырех координат:

$$S = \sqrt[4]{\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4}. \tag{1}$$

Такое пространство условимся обозначать H_4 [1]. Метрическая функция (1) является частным случаем более общей метрической функции ([2], [3])

$$S = \xi_1^{(1+r_1+r_2+r_3)/4}\xi_2^{(1+r_1-r_2-r_3)/4}\xi_3^{(1-r_1+r_2-r_3)/4}\xi_4^{(1-r_1-r_2+r_3)/4}, \tag{2}$$

когда входящие в нее три параметра r_1, r_2, r_3 оказываются равными нулю. Замечательной особенностью пространства H_4 является то, что с ним можно связать коммутативно-ассоциативную алгебру, а также естественным образом ввести аналог скалярному произведению, в качестве которого выступает симметрическая полилинейная форма от нескольких векторов [4].

Следует отметить, что несмотря на свой экзотический вид метрическая форма в правой части формулы (1) может рассматриваться как четырехмерное обобщение квадратичной формы обычной псевдоевклидовой плоскости, которая помимо привычной записи

$$S^2 = x_0^2 - x_1^2 \tag{3}$$

при переходе из ортонормированного базиса в специальный, состоящий из особого вида изотропных векторов, принимает вид:

$$S^2 = \xi_1\xi_2. \tag{4}$$

Уже одного этого наблюдения достаточно, чтобы ожидать от пространства с метрикой (1) свойств, близких к свойствам псевдоевклидова пространства (особенно двухмерного), среди которых, конечно же, должны быть и релятивистские черты.

Замечание. Чтобы упростить написание формул, мы, как правило, все тензорные индексы будем писать внизу, а также иногда не станем выписывать координаты векторов через разности координат их конца и начала. Это не должно привести к ошибкам или непониманию, так как рассматриваются пока только аффинные пространства, а поднятие и опускание индексов не используется.

Физическая интерпретация основных геометрических объектов

В четырехмерном многообразии, рассматриваемом как некоторая модель пространства-времени, с наглядной точки зрения важны, прежде всего, эффекты, реализующиеся в его трехмерном подпространстве. Последнее желательно иметь возможность интерпретировать как обычное трехмерное пространство наблюдателя с его классическими свойствами. В пространстве Минковского (а также в его римановых обобщениях) евклидовы свойства некоторых из его (их) трехмерных подпространств заложены уже в самом виде фундаментальной метрической формы, включающей положительно определенную квадратичную составляющую. В связи с этим, методологические трудности при сопоставлении особенностей таких многообразий со свойствами реального трехмерного пространства (несомненно, весьма близкого к евклидовой геометрии), если и возникают, то только в отношении следствий, связанных с отказом от абсолютной одновременности.

При переходе от пространства Минковского с его квадратичной формой к финслерову пространству, в котором интервалы связаны с формой четвертого порядка, в частности к H_4, ответ на вопрос, какую геометрию вокруг себя обнаружит "живущий" в таком многообразии наблюдатель, не является столь же очевидным. Чтобы ответить на него, рассмотрим, каким образом объектам данного многообразия можно сопоставить общепринятые физические понятия и величины. Прежде чем сделать это, остановимся на интерпретациях геометрических объектов, связанных со специальной теорией относительности (СТО). К таким интерпретациям относятся:

1) точка четырехмерного пространства – событие;

2) прямая – мировая линия инерциальной системы отсчета;

3) расстояние между парой точек вдоль прямой – интервал между событиями;

4) множество изотропных (имеющих нулевой интервал) прямых, пересекающихся в одной точке, – световой конус;

5) гиперповерхность, точки которой удалены на равный интервал от некоторой фиксированной точки – гиперсфера пространства-времени, или множество событий, равноудаленных в собственном времени наблюдателя от фиксированного события;

6) гиперповерхность, точки которой равноотстоят от двух фиксированных точек – множество относительно одновременных событий в выделенной инерциальной системе отсчета, мировая линия которой проходит через фиксированные точки;

7) прямые, параллельные некоторой заданной, – множество неподвижных точек трехмерного пространства наблюдателя, находящегося в заданной инерциальной системе отсчета.

Для геометрических объектов, существующих в рассматриваемом пространстве H_4 (равно, как и для многих других линейных финслеровых пространств), можно оставить фактически те же физические интерпретации, что были перечислены выше и достаточно часто используются в СТО. Отличия проявляются только в частностях и в рассматриваемом случае H_4 сводятся всего к трем фактам: место светового конуса, имеющего круговую симметрию, занимает конус с плоскими гранями; множество относительно одновременных событий (то есть множество событий, равноудаленных от двух фиксированных точек пространства-времени) оказывается не плоским, а представляет собой достаточно сложную гиперповерхность; и, наконец, аналогом псевдоевклидовой сферы, состоящей из трех односвязных гиперболоидов (поверхностей второго порядка), является гиперповерхность, состоящая из шестнадцати гиперболоидов (поверхностей четвертого порядка). Все эти обстоятельства являются прямыми следствиями того, что теперь интервал между двумя событиями определяется не квадратным корнем из квадратичной формы, а корнем четвертой степени из формы четвертого же порядка (1).

Специальный базис, в котором интервал пространства H_4 имеет лаконичный вид (1), связан с особыми изотропными векторами. В специальной теории относительности в аналогичном базисе квадрат интервала имеет также непривычный вид:

$$S^2 = \xi_1\xi_2 + \xi_1\xi_3 + \xi_1\xi_4 + \xi_2\xi_3 + \xi_2\xi_4 + \xi_3\xi_4. \qquad (5)$$

Такое представление интервала пространства Минковского довольно редко используется, поэтому, чтобы не отступать от общепринятых в СТО построений, перепишем и нашу метрическую форму пространства H_4 в базисе, являющимся аналогом ортонормированного [5]. Для этого достаточно воспользоваться линейной подстановкой:

$$\xi_i = A_{ij}x_j, \ \ (A_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \ \ A_{ik}A_{kj} = 4\delta_{ij} \qquad (6)$$

– после которой четвертая степень интервала окажется связанной со своими компонентами соотношением:

$$S^4 = x_0^4 - 2x_0^2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 8x_0x_1x_2x_3+ \\ +x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 - 2x_1^2x_2^2 - 2x_1^2x_3^2 - 2x_2^2x_3^2. \tag{7}$$

Если квадрат интервала в пространстве Минковского

$$S^2 = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 \tag{8}$$

возвести еще раз в квадрат, чтобы в обоих выражениях фигурировали одинаковые четвертые степени, то справа получится полином, напоминающий по виду полином в правой части (7):

$$S^4 = x_0^4 - 2x_0^2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + 2x_1^2x_2^2 + 2x_1^2x_3^2 + 2x_2^2x_3^2. \tag{9}$$

В областях, для которых $|v_\alpha| \ll 1$, где $v_\alpha = x_\alpha/x_0$, $\alpha = 1, 2, 3$, характерных для нерелятивистской физики, выражения (7) и (9) равны с точностью до бесконечно малых $|v_\alpha|$ второго порядка. Из этого следует уже отмеченный выше предельный переход от геометрии H_4 к геометрии пространства Галилея, то есть к геометрии классической ньютоновой физики.

Определение расстояния и модуля скорости в пространстве Минковского

В пространстве Минковского множество событий, которым с точки зрения наблюдателя правомерно приписывать одинаковые значения пространственной (в трехмерном смысле) удаленности можно получить простым и наглядным геометрическим приемом, пересекая друг с другом две сферы (имеющие в пространстве Минковского вид гиперболоидов) одинаковых по величине радиусов, но имеющих разные центры (рис. 1). Прямую, проходящую через точки центров этих гиперболических сфер, можно ассоциировать с инерциальной системой отсчета, с позиции которой события, являющиеся пересечением соответствующих гиперболоидов, оказываются равноудаленными.

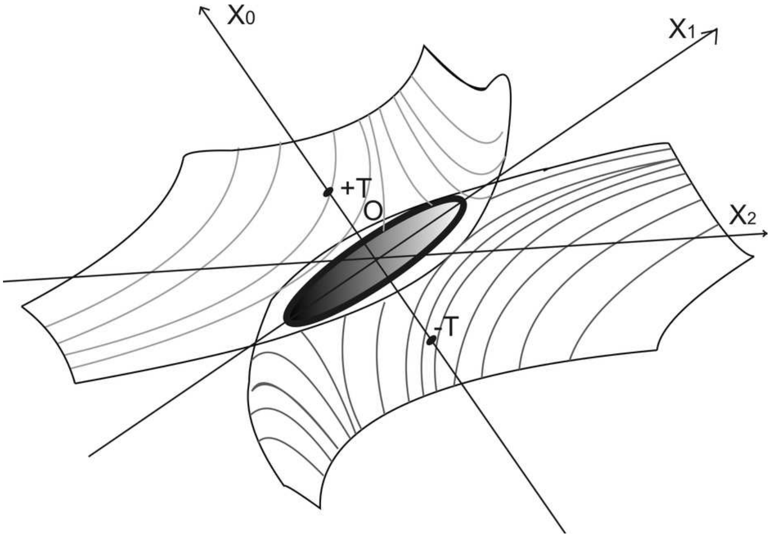


Рис. 1: Пересечение гиперболоидов в пространстве Минковского

Без потери общности рассуждения центры гиперболоидов можно разместить симметрично относительно начала координат и вдоль временной оси x_0, связав с точками: $(-T, 0, 0, 0)$ и $(T, 0, 0, 0)$. Чтобы получить уравнение поверхности, соответствующей пересечению двух псевдоевклидовых сфер радиуса S с центрами в данных точках, необходимо решить систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} S^2 &= (T + x_0)^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2, \\ S^2 &= (T - x_0)^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Складывая первое уравнение со вторым и вычитая одно из другого, мы переходим к эквивалентной системе

$$\left.\begin{aligned} S^2 &= T^2 + x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2, \\ 0 &= 2Tx_0, \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

первое из уравнений которой задает однополостный сферический гиперболоид (в качестве оси симметрии выступает временная ось), а второе описывает гиперплоскость $x_0 = 0$ ортогональную оси x_0 (рис. 2).

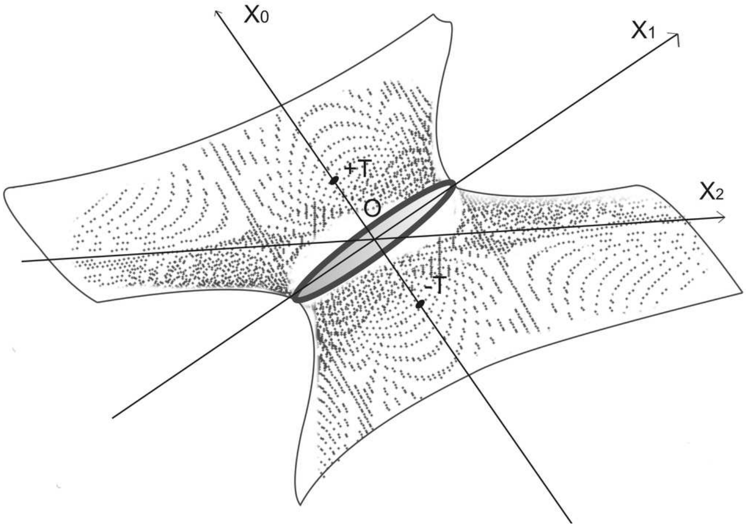


Рис. 2: Пересечение плоскости с однополостным гиперболоидом в пространстве Минковского

Варьируя величину интервала S от 0 до T, получаем семейство двухмерных поверхностей, вложенных друг в друга. Каждой из этих поверхностей следует присвоить конкретное значение некоторой положительной действительной величины, под которой мы и могли бы понимать расстояние (с позиции наблюдателя, связанного с конкретной системой отсчета). Для этого достаточно присвоить конкретные величины расстояний хотя бы одной из точек каждой поверхности и распространить это значение уже на все ее точки. Реализовать последнее проще всего, выбрав прямую, пересекающую все такие поверхности, тогда линейный параметр вдоль этой прямой как раз и мог бы выступать в качестве понятия расстояния. В частности, нужной прямой может выступать ось x_1. Принимая линейный закон соответствия расстояния l с координатой x_1, то есть подставляя в первое уравнение (11) $x_0 = 0$, $x_1 = l$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, приходим к соотношению

$$l = \sqrt{T^2 - S^2}, \tag{12}$$

получая т. о. связь расстояния l с радиусом (интервалом) S исходных гиперболоидов, чье пересечение и дало нам поверхности с одинаковыми значениями расстояний. Это соотношение позволяет переписать первое уравнение (11) в виде общеизвестного в СТО выражения трехмерного расстояния от оси x_0 до параллельных ей мировых линий, задаваемых координатами $(x_1,\ x_2,\ x_3)$:

$$l = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}. \tag{13}$$

Следует отметить, что в СТО проделанная только что процедура получения формулы для расстояний, как правило, не применяется, но она совершенно равноценна тем, что обычно используются. Нам же такая, несколько усложненная, процедура потребовалась для того, чтобы реализовать аналогичное построение в пространстве H_4, в котором обычно применяемые в СТО алгоритмы, не приводят к желаемому результату.

Для трехмерной скорости в пространстве Минковского можно также использовать похожие рассуждения. Две точки $(x_{(1)0}, x_{(1)1}, x_{(1)2}, x_{(1)3})$ и $(x_{(2)0}, x_{(2)1}, x_{(2)2}, x_{(2)3})$, вторая из которых находится в конусе будущего относительно первой, определяют вектор с координатами $(x_{(2)i} - x_{(1)i})$, которые можно переписать, введя понятие скорости следующим образом:

$$(x_{(2)i} - x_{(1)i}) \equiv (x_{(2)0} - x_{(1)0})v_i, \tag{14}$$

где $v_0 \equiv 1$, а компоненты v_1, v_2, v_3 образуют вектор трехмерной скорости. Тогда интервал между этими двумя точками может быть записан через компоненты скорости:

$$S_{21} = (x_{(2)0} - x_{(1)0})\sqrt{1 - v^2}, \tag{15}$$

где

$$v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}. \tag{16}$$

Отметим, что модуль v трехмерной скорости в СТО обладает свойством

$$S_{21} = (x_{(2)0} - x_{(1)0})f(v), \tag{17}$$

где $f(v)$ – функция одного действительного переменного. Если же вектор $(1, v_1, v_2, v_3)$, а значит и вектор $(x_{(2)0} - x_{(1)0}, x_{(2)1} - x_{(1)1}, x_{(2)2} - x_{(1)2}, x_{(2)3} - x_{(1)3})$ стремится к изотропному направлению, то $v \to 1$.

Определение расстояния и модуля скорости в пространстве H_4

Примем по определению, что в H_4 так же, как и в пространстве Минковского пересечение двух сфер (гиперболоидов) с одинаковыми радиусами, но разными центрами, представляет собой множество, точки которого (с позиции наблюдателя, чья мировая линия проходит через эти центры) являются равноудаленными в пространственном отношении от наблюдателя. Помимо аналогии с псевдоевклидовым случаем основанием к такому заключению служит факт равенства собственных времен для сигналов, исходящих из точки $(-T, 0, 0, 0)$ и приходящих в точки пересечения двух гиперболоидов, и собственных времен обратных сигналов, исходящих из этих точек и приходящих в точку $(T, 0, 0, 0)$. С позиции наблюдателя, чья мировая линия проходит через данные точки (то есть совпадает с осью x_0) и пользующегося информацией, связанной только с ним самим и с этими сигналами, последние отражаются от точек трехмерного пространства, удаленных от него на одинаковые расстояния. При этом общее время в пути (по часам самих сигналов) оказывается для всех пар сигналов (вне зависимости от направления) равным $2S$. По часам же считающего себя неподвижным наблюдателя прошел интервал 2T. Таким образом, ни показания часов, связанных с сигналами, ни показания часов самого наблюдателя не будут противоречить предположению, что расстояния от него до мировых линий, проходящих через точки поверхности, являющейся пересечением двух гиперболоидов, одинаковы и, следовательно, полностью характеризуются этими двумя величинами S и T.

Для пространства H_4 система двух уравнений, определяющая поверхность пересечения двух гиперболоидов с центрами в точках $(-T,0,0,0)$ и $(T,0,0,0)$, получается подстановкой в уравнение (7) вместо координат (x_0,x_1,x_2,x_3) вначале $(T+x_0,x_1,x_2,x_3)$, а затем $(T-x_0,-x_1,-x_2,-x_3)$:

$$\left.\begin{aligned}&S^4=(T+x_0)^4-2(T+x_0)^2(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+8(T+x_0)x_1x_2x_3+\\&+x_1^4+x_2^4+x_3^4-2x_1^2x_2^2-2x_1^2x_3^2-2x_2^2x_3^2,\\&S^4=(T-x_0)^4-2(T-x_0)^2(x_1^2+x_2^2+x_3^2)-8(T-x_0)x_1x_2x_3+\\&+x_1^4+x_2^4+x_3^4-2x_1^2x_2^2-2x_1^2x_3^2-2x_2^2x_3^2.\end{aligned}\right\}\tag{18}$$

Перейдем, как и в случае пространства Минковского, к эквивалентной системе, взяв сумму и разность данных уравнений:

$$\left.\begin{aligned}&S^4=x_0^4+2x_0^2(3T^2-x_1^2-x_2^2-x_3^3)+8x_0x_1x_2x_3+T^4-\\&-2T^2(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+x_1^4+x_2^4+x_3^4-2(x_1^2x_2^2+x_1^2x_3^2+x_2^2x_3^2),\\&0=x_0^3+(T^2-x_1^2-x_2^2-x_3^2)x_0+2x_1x_2x_3.\end{aligned}\right\}\tag{19}$$

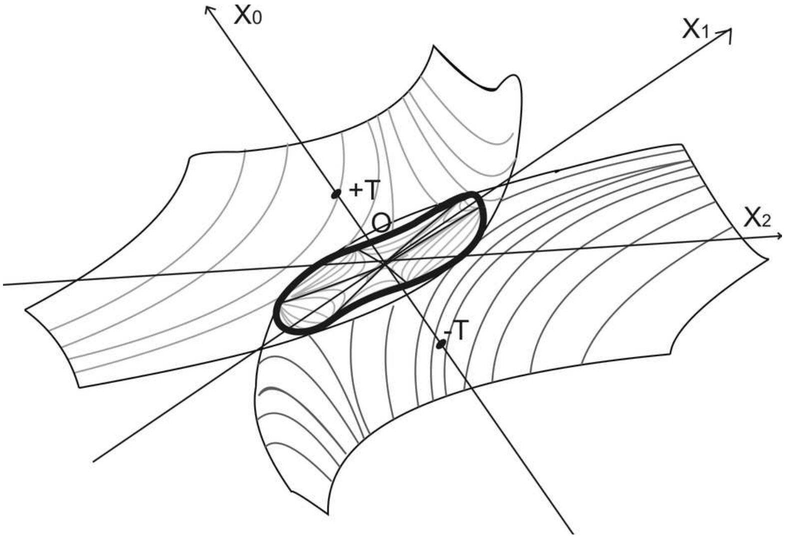


Рис. 3: Пересечение гиперболоидов в пространстве H_3

Изобразить, даже схематически, соответствующие системе уравнений (18) двумерные поверхности в четырехмерном пространстве затруднительно, поэтому для иллюстрации (рис. 3) мы воспользуемся более наглядным трехмерным случаем, соответствующим пространству H_3, которое устроено аналогично исследуемому пространству H_4 и имеет в изотропном базисе метрическую форму:

$$S^3=\xi_1\xi_2\xi_3.\tag{20}$$

Перейдя от (18) к системе уравнений (19), мы перешли от пересечения двух гиперболоидов к пересечению двух новых гиперповерхностей. Первая из них аналогична эквивалентна однополостному гиперболоиду пространства Минковского, а вторая –

гиперплоскости $x_0 = 0$ псевдоевклидова пространства, поскольку каждая ее точка удалена на равные интервалы, как от точки $(-T, 0, 0, 0)$, так и от точки $(T, 0, 0, 0)$ (рис. 4). Однако теперь второе уравнение (19) определяет существенно нелинейную поверхностью, что является следствием специфики финслеровых метрических функций более высокого порядка, чем квадратичная. С физической точки зрения такой гиперповерхности можно поставить в соответствие понятие относительной одновременности, в финслеровом случае имеющее смысл только тогда, когда указана конкретная система отсчета и характерный масштаб T, задающий интервал времени между мгновенным положением наблюдателя и событием, по отношению к которому эта одновременность определяется. В псевдоевклидовом случае указание конкретного масштаба было излишне, так как связанная с понятием относительной одновременности гиперплоскость оставалась одной и той же для всех интервалов, разделяющих наблюдателя и интересующий его слой относительно одновременных событий. В рассматриваемых линейных финслеровых пространствах это уже не так, что неизбежно приводит к необходимости переосмысления свойств времени, во всяком случае, для пространств с неквадратичной метрикой.

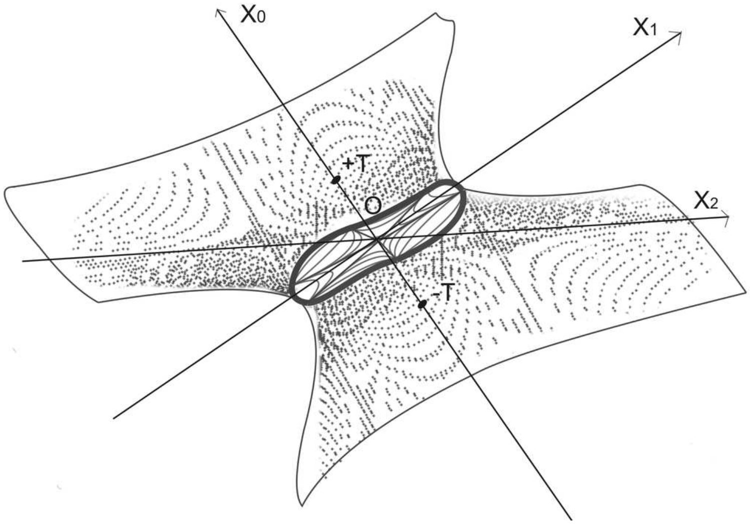


Рис. 4: Пересечение специальной поверхности с однополостным гиперболоидом в пространстве H_3

Пересечение гиперболоидов (18) с центрами в точках $(-T,\ 0,\ 0,\ 0)$ и $(T,\ 0,\ 0,\ 0)$ является множеством событий, которым с точки зрения наблюдателя, связанного с мировой линией, проходящей через эти точки, следует приписать одинаковые значения пространственной удаленности от данной мировой линии, то есть данного наблюдателя. Варьируя величину интервала S от 0 до T, мы получаем семейство таких двухмерных поверхностей, вложенных друг в друга, каждой из которых отвечает только одно значение пространственного расстояния. Для того, чтобы каждое получающееся таким образом двухмерное множество автоматически характеризовалось одним и тем же значением удаленности, нам достаточно присвоить конкретные величины расстояний хотя бы одной из точек каждой поверхности и распространить это значение уже на все ее точки. Для этого, как и в рассматривавшемся выше псевдоевклидовом случае, проще всего выбрать прямую, пересекающую все такие поверхности, а линейному параметру l вдоль такой прямой поставить в соответствие величину, которую можно условиться называть расстоянием, но уже не в обычном псевдоевклидовом, а в линейном финслеровом пространстве-времени.

Из анализа системы уравнений (19) следует, что поверхности относительной одновременности пространства H_4, соответствующей данному уравнению принадлежат все прямые, выходящие из начала координат и лежащие в одной из трех плоскостей: (x_1, x_2), (x_1, x_3) или (x_2, x_3). В частности, одной из таких прямых является ось x_1, поэтому, принимая линейный закон соответствия расстояния l и координаты x_1, из уравнений (19) получим связь расстояния l от наблюдателя до покоящихся относительно его других наблюдателей с радиусом S исходных гиперболоидов и половиной интервала между их центрами T. Для этого подставим в систему (19) $x_1 = l,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0$, получим

$$\left.\begin{aligned} &S^4 = x_0^4 + 2x_0^2(3T^2 - l^2) + T^4 - 2T^2l^2 + l^4, \\ &0 = x_0^3 + (T^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2)x_0. \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Из второго уравнения следует, что $x_0 = 0$, поэтому первое уравнение принимает вид

$$S^4 = T^4 - 2T^2l^2 + l^4. \tag{22}$$

Разрешая это уравнение относительно величины l, получим выражение

$$l = \sqrt{T^2 - S^2}. \tag{23}$$

Таким образом, трехмерное расстояние от мировой линии $(0, 0, 0)$ до параллельной ей мировой линии с координатами (x_1, x_2, x_3) выражается формулой:

$$l(T, x_1, x_2, x_3) = \sqrt{T^2 - S^2(T, x_1, x_2, x_3)}, \tag{24}$$

где $S^2(T, x_1, x_2, x_3)$ – корень квадратный из правой части первого соотношения (19) с заменой x_0 на действительный корень кубического уравнения (второго соотношения (19)) относительно неизвестной x_0.

Получившееся выражение для трёхмерного расстояния помимо того, что оно существенно отличается от привычной сферически симметричной формулы (13), включает зависимость от явно отсутствующего в СТО параметра T. Эти отличия приводят к тому, что трехмерные расстояния в H_4 приобретают несколько необычные свойства. В частности, расстояние от мировой линии A до мировой линии B, как правило, не совпадает с расстоянием от B до A. Однако, подобные эффекты проявляются только когда хотя бы одним из модулей $|x_\alpha|$ нельзя пренебречь по сравнению с величиной T. Если третьими и более высоким степенями отношений $|x_\alpha|/T$ можно пренебречь по сравнению с единицей, то выражение для расстояния (24) принимает вид:

$$l(T, x_1, x_2, x_3) \simeq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}. \tag{25}$$

Качественно новой особенностью, проявившейся при построении поверхности относительно одновременных событий в H_4 по сравнению с пространством Минковского, оказалась необходимость конкретизации параметра T, имеющего размерность длины. Представляется логичным данный характерный масштаб, отсутствующий в явном виде в построениях СТО, связывать непосредственно с наблюдателем, то есть системой отсчета, и интерпретировать его, как дополнительный параметр, характеризующий систему отсчета и позволяющий в данной системе отсчета однозначно строить поверхность относительной одновременности.

Перейдем теперь к трехмерной скорости.

В пространстве H_4 две точки $(x_{(1)0}, x_{(1)1}, x_{(1)2}, x_{(1)3})$ и $(x_{(2)0}, x_{(2)1}, x_{(2)2}, x_{(2)3})$, вторая из которых находится в конусе будущего относительно первой, определяют вектор с координатами $(x_{(2)i} - x_{(1)i})$, которые можно переписать, введя понятие скорости:

$$(x_{(2)i} - x_{(1)i}) \equiv (x_{(2)0} - x_{(1)0})v_i, \tag{26}$$

где $v_0 \equiv 1$, а компоненты v_1, v_2, v_3 образуют вектор трехмерной скорости. Тогда интервал между этими двумя точками может быть записан через компоненты скорости следующим образом:

$$S_{21} = (x_{(2)0} - x_{(1)0})\sqrt[4]{W}, \tag{27}$$

где

$$W = (1 + v_1 + v_2 + v_3)(1 + v_1 - v_2 - v_3)(1 - v_1 + v_2 - v_3)(1 - v_1 - v_2 + v_3). \tag{28}$$

Модуль v трехмерной скорости в пространстве H_4 должен обладать свойством

$$S_{21} = (x_{(2)0} - x_{(1)0})f(v), \tag{29}$$

где $f(v)$ – функция одного действительного переменного. Если только одна из компонент трехмерной скорости отлична от нуля, например v_1, то естественно считать, что $v = |v_1|$, причем из формулы (27) следует, что в этом случае

$$S_{21} = (x_{(2)0} - x_{(1)0})\sqrt{1 - v^2}. \tag{30}$$

Обобщая этот одномерный случай, как и в случае с трехмерным расстоянием, на произвольную скорость, получим

$$\sqrt{1 - v^2} = \sqrt[4]{W(v_1, v_2, v_3)}, \tag{31}$$

или

$$v = \sqrt{1 - \sqrt{W(v_1, v_2, v_3)}}. \tag{32}$$

В нерелятивистском приближении

$$v \simeq \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}. \tag{33}$$

Если же вектор $(1, v_1, v_2, v_3)$, а значит и вектор $(x_{(2)0} - x_{(1)0},\ x_{(2)1} - x_{(1)1},\ x_{(2)2} - x_{(1)2},\ x_{(2)3} - x_{(1)3})$ стремится к изотропному направлению, то $v \to 1$. Отметим также, что в общем случае $W(-v_1, -v_2, -v_3) \neq W(v_1, v_2, v_3)$.

Сложение скоростей

Группа симметрии $G_1(H_4)$, оставляющая инвариантным интервал (1) и состоящая из непрерывных линейных преобразований вида

$$x'_i = \frac{1}{4} A_{ik} D_{km} A_{mj} x_j, \tag{34}$$

где

$$(D_{km}) = diag(\exp\varepsilon_0, \exp\varepsilon_1, \exp\varepsilon_2, \exp\varepsilon_3), \tag{35}$$

действительные параметры ε_i изменяются в пределах $(-\infty, \infty)$ и связаны соотношением

$$\varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0, \tag{36}$$

может быть параметризована тремя действительными величинами, V_1, V_2, V_3, имеющими смысл компонент скорости, которую приобретает покоящийся объект после преобразования (35):

$$\exp\varepsilon_i = \frac{A_{ij}V_j}{\sqrt{1-V^2}}, \tag{37}$$

где $i,j = 0,1,2,3$; $V_0 = 1$. Если в исходной системе отсчёта объект имел скорость (v_1, v_2, v_3), то в новой системе отсчёта этот же объект будет иметь скорость

$$\left.\begin{aligned} v'_1 &= \frac{v_1+V_1+v_2V_3+v_3V_2}{1+v_1V_1+v_2V_2+v_3V_3},\\ v'_2 &= \frac{v_2+V_2+v_1V_3+v_3V_1}{1+v_1V_1+v_2V_2+v_3V_3},\\ v'_3 &= \frac{v_3+V_3+v_1V_2+v_2V_1}{1+v_1V_1+v_2V_2+v_3V_3}.\end{aligned}\right\} \tag{38}$$

Из определения группы $G_1(H_4)$ имеем

$$(x'_{(2)0}-x'_{(1)0})\sqrt{1-(v')^2} = (x_{(2)0}-x_{(1)0})\sqrt{1-v^2}, \tag{39}$$

что даёт формулу для модуля трёхмерной скорости в новой системе координат

$$v' = \sqrt{1-\frac{(1-v^2)(1-V^2)}{(1+v_1V_1+v_2V_2+v_3V_3)^2}}, \tag{40}$$

так как при преобразованиях (34) – (37)

$$x'_{(2)0}-x'_{(1)0} = \frac{1+v_1V_1+v_2V_2+v_3V_3}{\sqrt{1-V^2}}(x_{(2)0}-x_{(1)0}). \tag{41}$$

Если среди компонент v_α и V_α отличны от нуля только по одной компоненте вдоль одного и того же специального направления, например, $(v_1, 0, 0)$ и $(V_1, 0, 0)$, то формулы (38) совпадают с соответствующими формулами сложения скоростей в СТО.

Переход из покоящейся инерциальной системы в движущуюся

В данном разделе рассмотрим переход из старой (нештрихованной) системы отсчета в новую (штрихованную) систему отсчета, инерциально движущуюся со скоростью (V_1, V_2, V_3) относительно старой. Т. о. точка, движущаяся в старой системе отсчета со скоростью (V_1, V_2, V_3), в новой системе отсчета будет двигаться со скоростью $(0,0,0)$. Формулы (34) – (36) останутся теми же, а вместо формулы (37) получим

$$\exp(-\varepsilon_i) = \frac{A_{ij}V_j}{\sqrt{1-V^2}}, \tag{42}$$

то есть переходы от одной системы отсчета к другой, рассмотренные в предыдущем разделе и в данном, являются обратными друг к другу. Заметим, что замена в преобразовании (34) – (37) (V_1, V_2, V_3) на $(-V_1, -V_2, -V_3)$ не дает обратное преобразование к преобразованию (34) – (37).

Итак, при переходе к системе координат, движущейся со скоростью (V_1, V_2, V_3), старые координаты будут выражаться через новые по формулам

$$\begin{pmatrix} x_0\\ x_1\\ x_2\\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{4\sqrt{1-V^2}}\cdot\hat{A}\cdot\begin{pmatrix} (1+V_1+V_2+V_3)(x'_0+x'_1+x'_2+x'_3)\\ (1+V_1-V_2-V_3)(x'_0+x'_1-x'_2-x'_3)\\ (1-V_1+V_2-V_3)(x'_0-x'_1+x'_2-x'_3)\\ (1-V_1-V_2+V_3)(x'_0-x'_1-x'_2+x'_3) \end{pmatrix}, \tag{43}$$

где матрица $\hat{A}$ имеет компоненты A_{ij} (6).

Рассмотрим это преобразование, когда компоненты скорости новой системы отсчета в старой по трем специальным направлениям все равны нулю, кроме одной компоненты, например, $V_1 \neq 0$, а $V_2 = 0$ и $V_3 = 0$. Тогда

$$V = |V_1|, \tag{44}$$

а формулы (43) принимают вид

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-V_1^2}} & \frac{V_1}{\sqrt{1-V_1^2}} & 0 & 0 \\ \frac{V_1}{\sqrt{1-V_1^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-V_1^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-V_1^2}} & \frac{V_1}{\sqrt{1-V_1^2}} \\ 0 & 0 & \frac{V_1}{\sqrt{1-V_1^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-V_1^2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}, \tag{45}$$

или

$$\left.\begin{aligned} x_0 = \frac{x'_0 + V_1 x'_1}{\sqrt{1-V_1^2}} \quad x_1 = \frac{V_1 x'_0 + x'_1}{\sqrt{1-V_1^2}} \\ x_2 = \frac{x'_2 + V_1 x'_3}{\sqrt{1-V_1^2}} \quad x_3 = \frac{V_1 x'_2 + x'_3}{\sqrt{1-V_1^2}} \end{aligned}\right\}. \tag{46}$$

Такое преобразование координат $(x'_0, x'_1) \leftrightarrow (x_0, x_1)$ совпадает с соответствующим преобразованием в СТО, а преобразование координат $(x'_2, x'_3) \leftrightarrow (x_2, x_3)$ отличается от соответствующих преобразования в СТО, где $x_2 = x'_2$, $x_3 = x'_3$.

Заключение

Пространство H_4, являясь пространством ассоциативно-коммутативных гиперкомплексных чисел (поличисел), алгебраически устроено весьма просто – оно изоморфно алгебре квадратных диагональных действительных матриц 4×4. Это пространство есть неизотропное метрическое финслерово пространство с трехпараметрической абелевой группой симметрии и оно не сводится никоим образом к пространствам с квадратичной метрической функцией. Именно совместное рассмотрение и алгебраических, и геометрических свойств пространства H_4 приводит к появлению весьма нетривиального математического объекта. Как показано в настоящей работе, наполнение пространства H_4, кроме алгебраической и геометрической структур, еще и физическим содержанием, делает его, несмотря на исходную алгебраическую простоту, еще более сложным и интересным. В нерелятивистском пределе (с точностью до второго порядка по отношению скорости физического объекта к скорости света) оно неотличимо как от пространства Галилея (то есть от пространства классической нерелятивистской механики), так и от пространства Минковского (СТО). Более того, и в общем случае по некоторым выделенным направлениям и двумерным плоскостям свойства пространства H_4 совпадают с соответствующими свойствами пространства Минковского по тем же направлениям и плоскостям.

Так как отличие пространства H_4 от пространства Минковского связано с анизотропией первого и физическими эффектами порядка кубической и более высоких степеней отношений скоростей физических объектов к скорости света, вопрос о том, какое из пространств наиболее адекватно реальному Миру, на наш взгляд, остается открытым. Во всяком случае, представляется неоспоримой необходимость тщательного изучения пространства H_4 и ему подобных, тем более, что по ряду объективных и субъективных причин они оказались в стороне от основного направления современных геометрических и физических исследований и при этом вполне могут содержать в себе сущности, близкие к свойствам реального Мира.

Подчеркнем, что подход, предложенный в данной работе для получения модуля трёхмерной скорости и трёхмерного пространственного расстояния, применим для произвольного линейного финслерова пространства, если в нем некоторую специальную систему координат можно разделить на одну временную и остальные пространственные координаты.

Литература

[1] Д. Г. Павлов, "Четырехмерное время", Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. 1, N 1, (2004), 33.

[2] G. Yu. Bogoslovsky, H. F. Goenner: Phys. Lett. A 244, N 4, (1988) 222.

[3] G. Yu. Bogoslovsky, H. F. Goenner: Gen. Relativ. Gravit. 31, N 10, (1999) 1565.

[4] D. G. Pavlov: ArXiv: gr-qc/0206004.

[5] Д. Г. Павлов, "Обобщение аксиом скалярного произведения", Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. 1, N 1, (2004), 5.

The notions of distance and norm of velocity in linear Finsler spaces

G. I. Garas'ko, D. G. Pavlov

Electrotechnical institute of Russia, Moscow; MSU n. a. M. V. Lomonosov, Russia
geom2004@mail.ru, gri9z@mail.ru

We obtain the formulas for the 3-dimensional distance and module of velocity in the 4-dimensional linear space endowed with the Berwald-Moor metric, using the algorithm which is applicable both to the Minkowski space, and to any poly-linear Finsler space, when we are able to point out the time-like coordinate. The constructed module of the 3-dimensional velocity in the Berwald-Moor space for small (non-relativistic) speeds, coincides with the similar expression from the Galilean space, and for maximal admissible speeds, i.e., for universe lines, which lay on the surface of the future cone, is equal to one. For constructing the 3-dimensional distance we use the notion of surface of relative simultaneity, which is conceptually analogous to the method used in the Special Relativity Theory. We obtain the formulas of transformation of velocity while passing from an inertial system of reference, to another one. When both velocities are oriented along one of the three distinguished straight lines, the obtained relations coincide to the similar ones from the Special Relativity Theory, but in the other cases, they differ. We obtain the expressions for the transformations, which play the role of Lorentz transformations of the Minkowski space. If in this case the space-coordinate axes are straight, along which the velocities sum up as in the Special Relativity Theory, then choosing the velocity of the new inertial system as being collinear to one of these axes of coordinates, we infer that the transformations of this coordinate and of the time coordinate coincide with the Lorentz transformation, and that the transformation of two transversal coordinates differ from the corresponding Lorentz transformation.

Key-words: Berwald-Moor space, 3-dimensional distance, velocity, Special Relativity Theory, Lorentz transformations.
MSC: 53B40, 53B30, 83A05.

ОБОБЩЕНИЕ ПОНЯТИЯ КОНФОРМНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Г. И. Гарасько

Всероссийский электротехнический институт
gri9z@mail.ru

Конформные преобразования евклидовой (комплексной) плоскости обладают некой полнотой (достаточностью) для решения целого ряда математических и физико-математических задач, формулируемых на этой плоскости. Для евклидовых, псевдоевклидовы и поличисловых пространств размерности больше двух такая полнота (достаточность) множества конформных преобразований отсутствует. В настоящей работе показано, что, используя понятие аналогичных геометрий, можно несколько обобщить понятие конформных преобразований, не только для евклидовых и псевдоевклидовых пространств, но и для финслеровых пространств, аналогичных пространствам аффинной связности. Приведены конкретные примеры таких преобразований для комплексных и гиперкомплексных чисел H_4. В общем случае такие преобразования образуют группу переходов, элементы которой можно представлять как переходы между проективно евклидовыми геометриями выделенного класса, фиксируемого выбором метрической геометрии, допускающей аффинные координаты. Взаимосвязь между функциями, осуществляющими обобщенно-конформные преобразования, и обобщенно-аналитическими функциями может оказаться продуктивной для решения фундаментальных задач теоретической и математической физики.

Ключевые слова: обобщенные конформные преобразования, гиперкомплексное пространство, аффинные координаты.

Введение

Конформные преобразования играют в физике и математике выделенную роль. Не менее важны римановы и псевдоримановы пространства постоянной кривизны (к ним, например, относятся пространство Лобачевского и сферическое пространство), их однородность столь же полная, как и у евклидова пространства, так как группы движений таких пространств содержат то же число параметров, что и евклидово пространство [1]. В случае метрических пространств, а данная работа не выходит за рамки финслеровых пространств, допускающих аффинную систему координат, мы исходим из "главенства" элемента длины, а понятие угла будем считать "вторичным". Предложенный подход (конечно, несколько видоизмененый) применим и для пространств (геометрий), в которых элемент длины не определен, но зато в каждой точке определен угол между векторами.

Если V_n – некое риманово или псевдориманово пространство с координатами x^i и метрическим тензором $g_{ij}(x)$, то коэффициенты связности Γ^i_{kl} в этом пространстве, как известно, определяются формулой

$$\Gamma^i_{kl}(g) = \frac{1}{2} g^{im} \left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m} \right). \tag{1}$$

Если

$$G_{ij}(x) = \Lambda(x) \cdot g_{ij}(x), \tag{2}$$

где $\Lambda(x) > 0$ – некая скалярная функция координат, то

$$\Gamma^i_{kl}(G) = \Gamma^i_{kl}(g) + \frac{1}{2\Lambda}\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial x^l}\delta^i_k + \frac{\partial\Lambda}{\partial x^k}\delta^i_l - g^{im}\frac{\partial\Lambda}{\partial x^m}g_{kl}\right). \qquad (3)$$

Пространства с метрическими тензорами g_{ij} и G_{ij} называются конформно связными [1].

Так как коэффициенты связности преобразовываются при переходе от одной системы координат к другой по формулам:

$$\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\Gamma^i_{kl} = \Gamma^{i'}_{n'p'}\frac{\partial x^{n'}}{\partial x^k}\frac{\partial x^{p'}}{\partial x^l} + \frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^k \partial x^l}, \qquad (4)$$

то конформные преобразования координат, осуществляемые функциями f^i в некоторой области $W_n \subset V_n$, где метрический тензор g_{ij} не зависит от точки пространства, должны удовлетворять следующей системе уравнений:

$$\frac{\partial^2 f^i}{\partial x^k \partial x^l} = \frac{1}{2\Lambda}\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial x^l}\delta^m_k + \frac{\partial\Lambda}{\partial x^k}\delta^m_l - g^{mp}\frac{\partial\Lambda}{\partial x^p}g_{kl}\right)\frac{\partial f^i}{\partial x^m}. \qquad (5)$$

Свернем левую и правую части уравнений (5) с тензором g^{kl} сразу по двум индексам, получим

$$g^{kl}\frac{\partial^2 f^i}{\partial x^k \partial x^l} = \frac{2-n}{2\Lambda}g^{kl}\frac{\partial\Lambda}{\partial x^k}\frac{\partial f^i}{\partial x^l}. \qquad (6)$$

Таким образом, функции, которые осуществляют конформное преобразование в евклидовых или псевдоевклидовых пространствах, являются решениями дифференциального уравнения (6).

Для аналитических функций комплексной переменной (конформные преобразования евклидовой плоскости первого рода) и для комплексно сопряженной аналитической функции комплексной переменной (конформные преобразования евклидовой плоскости второго рода)

$$\Lambda = \left(\frac{\partial f^1}{\partial x^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f^1}{\partial x^2}\right)^2, \qquad (7)$$

и уравнения (5) выполняются в области аналитичности и односвязности.

Обобщение конформных преобразований евклидовых и псевдоевклидовых пространств

В работе [2] введено понятие аналогичных геометрий. Предлагается называть геометрии аналогичными в некоторых областях, если эти геометрии одноразмерные и найдется такое отображение одной области на другую, при котором некоторый класс геодезических (экстремалей) одной геометрии совместятся полностью с некоторым классом геодезических (экстремалей) другой геометрии. При определенных допущениях аналогичность геометрий означает, что найдутся такие системы координат, в которых дифференциальные уравнения для геодезических (экстремалей) совпадают.

Если в некоторой геометрии аффинной связности к коэффициентам связности аддитивно добавить тензор

$$T^i_{kl} = \frac{1}{2}(p_k\delta^i_l + p_l\delta^i_k) + S^i_{kl}, \qquad (8)$$

где p_i – произвольное ковариантное поле, а S^i_{kl} – произвольное поле тензора, антисимметрического по двум нижним индексам, то геодезические останутся теми же кривыми [1].

Пусть функции f^i осуществляют взаимно однозначное отображение некоторой области евклидового или псевдоевклидового пространства с метрическим тензором g_{ij} на некоторую другую область того же пространства, и при этом функции f^i удовлетворяют системе уравнений

$$\frac{\partial^2 f^i}{\partial x^k \partial x^l} = \left[\frac{1}{2}(p_l \delta_k^m + p_k \delta_l^m) - g^{mp}\frac{\partial L}{\partial x^p} g_{kl}\right] \frac{\partial f^i}{\partial x^m}\,, \tag{9}$$

где p_i – некое ковариантное векторное поле, а L – некое скалярное поле, тогда такое отображение (преобразование координат) будем называть *элементарным обобщенно-конформным.*

Заметим, что если бы мы для получения формул (9) использовали аддитивную добавку (8) с ненулевым тензором кручения S^i_{kl}, то вместо обобщения получили бы дополнительные условия

$$S^m_{kl}\frac{\partial f^i}{\partial x^m} = 0\,, \tag{10}$$

так как все остальные аддитивные члены в левой и правой частях системы уравнений (9) симметричны относительно перестановки индексов k и l.

Из определения элементарных обобщенно-конформных преобразований евклидовых и псевдоевклидовых пространств следует, что эти преобразования и функции f^i, которые их осуществляют, тесно связаны с понятием проективно евклидовых геометрий [1].

Таким образом, каждая функция (компонента) элементарного обобщенно-конформного преобразования удовлетворяют следующему скалярному уравнению:

$$g^{kl}\frac{\partial^2 f^i}{\partial x^k \partial x^l} = g^{kl}\left(p_k - \frac{n}{2}\frac{\partial L}{\partial x^k}\right)\frac{\partial f^i}{\partial x^l}. \tag{11}$$

Хотя для собственно обобщенно-конформных преобразований формула (2) не имеет места, будем считать по определению, что

$$\Lambda = \Lambda_0 \cdot \exp(L). \tag{12}$$

В некотором смысле, таким образом определенное скалярное поле Λ будет характеризовать квадрат коэффициента "сжатия-растяжения" пространства при элементарном обобщенно-конформном преобразовании.

Чтобы показать нетривиальность такого обобщения понятия конформных преобразований, приведем одно из решений системы уравнений (9):

$$f^i = \frac{x^i}{a + b\cdot g_{kl}x^k x^l}, \tag{13}$$

где a и b – некоторые действительные числа, причем

$$\Lambda = \frac{d}{(a - b\cdot g_{kl}x^k x^l)^2}, \tag{14}$$

где d – некоторое действительное число.

В случае евклидовой (комплексной) плоскости (x, y)

$$z = x + iy, \qquad F(z) = f^1 + if^2, \tag{15}$$

функция (13)

$$F(z) = \frac{z}{a + bz\bar{z}} \tag{16}$$

при $a \neq 0$ и $b \neq 0$ не является ни аналитической, ни комплексно сопряженной аналитической, но осуществляет элементарное обобщенно-конформное преобразование евклидовой плоскости. При $a = 0$ эта функция становится комплексно сопряженной аналитической

$$F(z) = \frac{1}{b\bar{z}}, \tag{17}$$

что соответствует конформному отображению второго рода. При $b = 0$ функция $F(z)$ является аналитической,

$$F(z) = \frac{1}{a} z, \tag{18}$$

что соответствует конформному отображению первого рода.

Поличисла H_4

В пространстве H_4 четвертая степень элемента длины в ψ-базисе имеет вид

$$(ds)^4 = d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3 d\xi^4, \tag{19}$$

а конформно связная геометрия будет иметь элемент длины вида

$$(ds)^4 = \Xi\, d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3 d\xi^4, \tag{20}$$

где $\Xi > 0$ – некоторое скалярное поле. Такая геометрия аналогична геометрии аффинной связности с коэффициентами связности [2]

$$\Gamma^i_{kj} = \frac{1}{2}(p_k \delta^i_j + p_j \delta^i_k) - p^i_{kj} \frac{1}{\Xi} \frac{\partial \Xi}{\partial \xi^{j_-}} + S^i_{kj}, \tag{21}$$

где

$$\psi_k \psi_j = p^i_{kj} \psi_i, \qquad p^i_{kj} = \begin{cases} 1, \text{ если } i = j = k, \\ 0, \text{ во всех остальных случаях}, \end{cases} \tag{22}$$

p_k, $S^i_{kj} = -S^i_{jk}$ – произвольные тензорные поля, индекс $j_- = j$, но по нему не ведется суммирование.

Таким образом, система уравнений для функций f^i, которые осуществляют элементарное обобщенно-конформные преобразования в координатном пространстве поличисел H_4, имеет следующий вид:

$$\frac{\partial^2 f^i}{\partial x^k \partial x^l} = \left[\frac{1}{2}(p_l \delta^m_k + p_k \delta^m_l) - p^m_{kl} \frac{\partial L}{\partial x^{l_-}} \right] \frac{\partial f^i}{\partial x^m}, \tag{23}$$

где

$$\Xi = \Xi_0 \cdot \exp(L). \tag{24}$$

Любая аналитическая функция переменной H_4, которая осуществляет взаимно однозначное отображение некоторой области координатного пространства H_4 на некоторую другую область того же пространства, удовлетворяет системе уравнений (23), причем

$$p_i = 0, \qquad \Xi = \dot{f}^1 \dot{f}^2 \dot{f}^3 \dot{f}^4, \qquad L = \ln |\Xi / \Xi_0|. \tag{25}$$

Множество решений системы уравнений (23) не сводится только к аналитическим функциям переменной H_4. Так, решением этой системы уравнений является функция

$$f^i = \frac{f^i_0 \ln \left| \dfrac{\xi^{i_-}}{\xi^{i_-}_0} \right|}{a + b \ln \left| \dfrac{\xi^1 \xi^2 \xi^3 \xi^4}{\xi^1_0 \xi^2_0 \xi^3_0 \xi^4_0} \right|}, \tag{26}$$

которая только при $b = 0$ становится аналитической функцией переменной H_4. В формуле (26) a, b, ξ_0^i, f_0^i – постоянные, но, конечно, не все они независимы. Для функции (26)

$$\Xi = \frac{const}{\xi^1\xi^2\xi^3\xi^4}. \qquad (27)$$

Так как в пространстве H_4 можно образовать тензор

$$q_{ij} = p_{ik}^m p_{mj}^k, \qquad (q_{ij}) = diag(1,1,1,1), \qquad (28)$$

то существует и дважды контравариантный тензор q^{ij}, причем

$$(q^{ij}) = diag(1,1,1,1). \qquad (29)$$

Поэтому каждая компонента элементарного обобщенно-конформного преобразования в пространстве H_4 должна удовлетворять следующему скалярному уравнению:

$$q^{kl}\frac{\partial^2 f^i}{\partial x^k \partial x^l} = q^{kl}\left(p_k - \frac{\partial L}{\partial x^k}\right)\frac{\partial f^i}{\partial x^l}. \qquad (30)$$

Сравнивая уравнения (11), (30) и учитывая формулы (12), (24), видим, что скалярное уравнение (11), решениями которого являются функции, осуществляющие обобщенно-конформные преобразования в 4-мерном евклидовом пространстве, и скалярное уравнение (30), которому подчиняются функции, осуществляющие обобщенно-конформные преобразования в пространстве H_4, имеют совершенно одинаковую структуру:

$$\delta^{kl}\frac{\partial^2 f^i}{\partial x^k \partial x^l} = \delta^{kl}\left(p_k - 4\frac{\partial l}{\partial x^k}\right)\frac{\partial f^i}{\partial x^l}, \qquad (31)$$

где коэффициент линейного "сжатия-растяжения" λ выражается через скалярное поле l и для 4-мерного евклидового пространства, и для пространства H_4 по одной и той же формуле

$$\lambda = \lambda_0 \exp(l). \qquad (32)$$

Заметим однако, что при этом мы не можем утверждать, что p_k, l одинаковы для 4-мерного евклидового пространства и пространства H_4. В то же время было бы весьма интересно найти такой класс элементарных обобщенно-конформных преобразований, для элементов которого одноковариантное поле $\left(p_k - 4\dfrac{\partial l}{\partial x^k}\right)$ было бы одним и тем же как для 4-мерного евклидового пространства, так и для пространства H_4, то есть в обоих случаях функции f^i удовлетворяли бы одному и тому же скалярному уравнению не только по форме. Линейные преобразования автоматически являются подмножеством такого класса преобразований.

Обобщенно-конформные преобразования

Предыдущие построения позволяют предположить, что наиболее общий вид системы уравнений, которые определяют элементарные обобщенно-конформные преобразования некой метрической геометрии (на данный момент развития понятия финслеровой геометрии, по-видимому, более чем достаточно для нужд теоретической и математической физики), допускающей аффинные координаты и для которой все ее конформно связные пространства всегда аналогичны некоторой геометрии аффинной связности, в аффинных координатах таков:

$$\frac{\partial^2 f^i}{\partial x^k \partial x^l} = \left[\frac{1}{2}(p_l\delta_k^m + p_k\delta_l^m) - \Delta_{kl}^{pm}\frac{\partial L}{\partial x^p}\right]\frac{\partial f^i}{\partial x^m}, \qquad (33)$$

где Δ^{pm}_{kl} – симметрический по нижним индексам числовой тензор в аффинной системе координат исходной метрической геометрии, L и p_k – скалярное и одноковариантное поля, причем для конформных преобразований коэффициент линейного "растяжения-сжатия" λ выражается через скалярное поле L по формуле

$$\lambda = \lambda_0 \exp(L/m) \equiv \lambda_0 \exp(l). \tag{34}$$

Здесь λ_0 – действительное число, а m – натуральное число, равное порядку формы финслеровой геометрии, через которую выражается элемент длины, например, для евклидовых и псевдоевклидовых геометрий $m = 2$, а для H_4-чисел $m = 4$.

Из формул (33) следует, что любое линейное невырожденное преобразование является элементарным обобщенно-конформным с

$$p_i = 0, \qquad L = const. \tag{35}$$

Хотя мы надеемся, что для всех возможных тензоров Δ^{pm}_{kl} вполне достаточно понятия финслеровой геометрии (возможно, что даже достаточно только понятия полиномиальной геометрии [3]), эта гипотеза (как и более жесткая) требует строгого доказательства.

Для невырожденных поличисловых пространств P_n всегда имеется тензор q^{ij} (см. (28), (29)), поэтому для таких пространств элементарные обобщенно-конформные преобразования удовлетворяют следующему скалярному уравнению:

$$q^{kl}\frac{\partial^2 f^i}{\partial x^k \partial x^l} = \left(p_k q^{km} - q^{kl}\Delta^{pm}_{kl}\frac{\partial L}{\partial x^p}\right)\frac{\partial f^i}{\partial x^m}. \tag{36}$$

Элементарные обобщенно-конформные преобразования (33) не образуют группу, но всевозможные произведения (то есть последовательное выполнение) таких преобразований вместе с обратными элементарными преобразованиями образуют группу, которую будем обозначать $G_n(\Delta^{pm}_{kl})$ и называть группой обобщенно-конформных преобразований. Элементы этой группы – решения системы уравнений

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f^i}{\partial x^k \partial x^l} &= \left[\frac{1}{2}(p_l\delta^m_k + p_k\delta^m_l) - \Delta^{pm}_{kl}\frac{\partial L}{\partial x^p}\right]\frac{\partial f^i}{\partial x^m} - \\ &- \left[\frac{1}{2}(p'_r\delta^i_s + p'_s\delta^i_r) - \Delta^{pi}_{sr}\frac{\partial L'}{\partial f^p}\right]\frac{\partial f^s}{\partial x^k}\frac{\partial f^r}{\partial x^l},\end{aligned} \tag{37}$$

где p_l, p'_k, L, L' – некоторые поля, Δ^{pi}_{sr} – тот же самый скалярный тензор, что и в системе уравнений (33); причем подразумевается, что производные $\dfrac{\partial L}{\partial f^p}$ явно выражены через частные производные по x^i.

Обобщенно-конформные преобразования можно рассматривать как переходы в подмножестве (классе) проективно евклидовых пространств, которое (подмножество) однозначно характеризуется тензором Δ^{pi}_{sr}. Подчеркнем еще раз, что достаточно изучить элементарные обобщенно-конформные преобразования, так как произвольное обобщенно-конформное преобразование можно построить в виде произведения некоторого элементарного и некоторого обратного к элементарному преобразованию, конечно, другому, если мы не хотим получить в результате тождественное преобразование. Римановы и псевдоримановы конформно евклидовы пространства обязательно являются пространствами постоянной кривизны [1], поэтому предложенные построения определяют класс финслеровых пространств, которые можно назвать финслеровыми пространствами постоянной кривизны. Тем самым обобщенно-конформные преобразования образуют группу переходов между элементами такого класса финслеровых пространств.

Обобщенно-аналитические функции

Если исходное метрическое пространство, которому соответствует числовой тензор Δ^{pm}_{kl}, является поличисловым $P_n \ni X$, то, во-первых, аналитические функции поличисловой переменной P_n осуществляют в области, где якобиан от их компонент не равен нулю, конформные преобразования, и, во-вторых, в этом же пространстве можно ввести понятие обобщенно-аналитической функции [3]. Конечно, в этом случае функции, осуществляющие обобщенно-конформные преобразования, являются обобщенно-аналитическими данной поличисловой переменной. Более интересной является следующая задача: найти такой класс $\Upsilon(\Delta^{pm}_{kl}) \ni F(X)$ обобщенно-аналитических функций, любой элемент которого являлся бы автоматически решением системы уравнений (37).

Заметим, что если $F_{(1)}(X)$, $F_{(2)} \in \Upsilon(\Delta^{pm}_{kl})$, то $F_{(1)}\left(F_{(2)}\right) \in \Upsilon(\Delta^{pm}_{kl})$. Это следует из групповых свойств обобщенно-конформных преобразований.

Обобщенно-аналитическая функция поличисловой переменной $X \in P_n$

$$F(X) = f^1(x^1, x^2, ..., x^n)e_1 + f^2(x^1, x^2, ..., x^n)e_2 + ... + f^n(x^1, x^2, ..., x^n)e_n, \tag{38}$$

где $X = x^i e_i$, e_i – базис, удовлетворяет соотношениям

$$\frac{\partial f^i}{\partial x^k} + \gamma^i_k = p^i_{kj}\dot{f}^j, \tag{39}$$

где $\dot{f}^j$ – обобщенная производная, тензор p^i_{kj} определяется соотношениями

$$e_k e_j = p^i_{kj} e_i, \tag{40}$$

а объект γ^i_k должен при переходе от одних координат к другим преобразовываться по закону

$$\gamma^{i'}_{k'} = \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\gamma^i_k - \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^k \partial x^i} f^i. \tag{41}$$

Если ε^i – коэффициенты разложения единицы в базисе e_i, то, учитывая формулу

$$\varepsilon^k p^i_{kj} = \delta^i_j, \tag{42}$$

из формулы (39) получим

$$\dot{f}^i = \varepsilon^m \frac{\partial f^i}{\partial x^m} + \varepsilon^m \gamma^i_m \tag{43}$$

и аналог соотношений Коши-Римана:

$$\frac{\partial f^i}{\partial x^k} + \gamma^i_k - p^i_{kj}\left(\varepsilon^m \frac{\partial f^j}{\partial x^m} + \varepsilon^m \gamma^j_m\right) = 0. \tag{44}$$

Условия интегрируемости соотношений (39) относительно функций f^i выглядят следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial x^m}\left(-\gamma^i_k + p^i_{kj}\dot{f}^j\right) = \frac{\partial}{\partial x^k}\left(-\gamma^i_m + p^i_{mj}\dot{f}^j\right). \tag{45}$$

Если система поличисел P_n невырождена и обобщенная производная также является обобщенно-аналитической функцией $\{\dot{f}^i, \dot{\gamma}^i_k\}$, то формально каждая компонента f^i удовлетворяет следующему скалярному уравнению:

$$q^{mk}\dot{\tilde{\nabla}}_m \tilde{\nabla}_k f^i = Q^i_r \ddot{f}^r, \tag{46}$$

где

$$Q^i_r = q^{mk} p^i_{kj} p^j_{mr}. \tag{47}$$

Для аналитических функций комплексной переменной это уравнение принимает вид

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) f^i = 2\ddot{f}^i \tag{48}$$

и выполняется тождественно. Таким образом, поле $(2\ddot{f}^i)$ можно рассматривать как поле источника поля f^i для оператора

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \tag{49}$$

Рассмотрим двумерное неоднородное (с правой частью) гиперболическое уравнение в частных производных

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2}{\partial x_s^2}\right) u_s = f_s(t, x_s), \tag{50}$$

где t – время, x_s – координата вдоль струны, $u_s(t, x_s)$ – амплитуда поперечных малых колебаний струны, $\rho f_s dx_s$ – действующая на элемент $(x_s, x_s + dx_s)$ струны поперечная сила, ρ – плотность массы на единицу длины струны. При замене переменных

$$f^i = u_s, \qquad at = x, \qquad y = x_s, \qquad \frac{1}{a^2} f_s(t, x_s) = 2f^i(x, y) \tag{51}$$

уравнения (48) и (50) переходят друг в друга, но правая часть уравнения (48) есть аналитическая функция комплексной переменной (x, y), что существенно ограничивает разнообразие источников.

Итак, если функцией источника (правой частью) в неоднородном двумерном гиперболическом уравнении (волновом уравнении), записанном в специальном виде (48) является аналитическая функция комплексной переменной, то одним из частных решений этого уравнения будет вторая первообразная функции источника, деленная на два.

Кроме уравнения (48) каждая аналитическая функция комплексной переменной подчиняется также уравнению Лапласа, которое можно получить аналогично уравнению (46), заменив тензор q^{mk} на тензор g^{mk}, который есть обратный к g_{ij} – метрическому тензору евклидовой плоскости:

$$g^{mk}\dot{\tilde{\nabla}}_m \tilde{\nabla}_k f^i = 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) f^i = 0. \tag{52}$$

Аналогичные уравнения справедливы и для аналитических функций H_2-переменной,

$$X = x + jy, \qquad j^2 = 1, \tag{53}$$

но эллиптический и гиперболический типы уравнений меняются местами:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) f^i = 2\ddot{f}^i, \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) f^i = 0. \tag{54}$$

Итак, если функцией источника (правой частью) в неоднородном двумерном уравнении Лапласа является аналитическая функция H_2 переменной, то одним из частных решений этого уравнения будет вторая первообразная функции источника, деленная на два.

Таким образом, при замене $C \leftrightarrow H_2$ не только "меняются местами" волновое уравнение и уравнение Лапласа, но при этом одно из них теряет источник (неоднородную правую часть), а другое приобретает. Есть все основания полагать, что подобная симметрия может иметь место для поличисел размерности больше двух и не только для аналитических, но и обобщенно-аналитических функций.

Скалярное уравнение (46) для аналитических функций H_4-переменной в координатной системе ψ-базиса (22) принимает вид

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial(\xi^1)^2}+\frac{\partial^2}{\partial(\xi^2)^2}+\frac{\partial^2}{\partial(\xi^3)^2}+\frac{\partial^2}{\partial(\xi^4)^2}\right)f^i=\ddot{f}^i, \tag{55}$$

или в координатной системе (x^0, x^1, x^2, x^3) базиса $\{1,\, j,\, k,\, jk\}$, состоящего из единицы и трех символьных единиц $j^2 = k^2 = (jk)^2 = 1$:

$$\left.\begin{aligned}\xi^1 = x^0 + x^1 + x^2 + x^3,\ \xi^2 = x^0 + x^1 - x^2 - x^3,\\ \xi^3 = x^0 - x^1 + x^2 - x^3,\ \xi^4 = x^0 - x^1 - x^2 + x^3,\end{aligned}\right\} \tag{56}$$

то же уравнение запишется следующим образом:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial(x^0)^2}+\frac{\partial^2}{\partial(x^1)^2}+\frac{\partial^2}{\partial(x^2)^2}+\frac{\partial^2}{\partial(x^3)^2}\right)f^i=4\ddot{f}^i. \tag{57}$$

Итак, если функцией источника (правой частью) неоднородного 4-мерного уравнения Лапласа является аналитическая функция H_4-переменной, то одним из частных решений этого уравнения является вторая первообразная функции источника, деленная на 4.

Заметим также, что в уравнениях (48), первом (54) и (57) можно брать произвольную линейную комбинацию компонент функции источника, не меняя координаты, так как индекс i свободен и в левой и правой частях, а также использовать симметрию (несвойственную соответствующим поличислам) скалярных операторов, стоящих в правой части, для перехода к другим координатам, не "перемешивая" компоненты аналитических функций. Эти обстоятельства несколько расширяют соответствующие множества функций источников.

Заключение

В настоящей работе предложено обобщение понятия конформных преобразований метрического пространства. Если ограничиться пространствами, которые допускают аффинные координаты, то обобщенно-конформные преобразования при фиксированном исходном метрическом пространстве можно рассматривать как группу переходов между элементами некоторого класса пространств постоянной кривизны.

При решении проблемы взаимно однозначного (с точностью до дискретной группы преобразований) соответствия между обобщенно-конформными преобразованиями пространства P_n и обобщенно-аналитическими функциями поличисловой переменной P_n есть все основания надеяться получить мощный математический аппарат для решения физико-теоретических и математических задач в пространствах P_n.

Литература

[1] П. К. Рашевский: Риманова геометрия и тензорный анализ, Наука, М. 1967.

[2] Г. И. Гарасько: Обобщенно-аналитические функции поличисловой переменной, Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **1** (2004), 75 – 88.

[3] Д. Г. Павлов: Обобщение аксиом скалярного произведения, Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **1** (2004), 5 – 19.

The extension of the conformal transformation concept

G. I. Garas'ko

Electrotechnical institute of Russia, Moscow

The conformal transformations of the Euclidean (complex) plane satisfy a certain kind of completeness (exhaustiveness) for a full range of problems from mathematics and mathematical physics, stated on this plane. For Euclidean, pseudo-Euclidean and hypercomplex spaces of dimension greater than two, such a completeness does no longer exist for the associated conformal transformations. In the present work it is shown, that, using the notion of *analogous geometries*, we can to a certain extent generalize the notion of conformal transformation, not only for Euclidean and pseudo-Euclidean spaces, but Finsler spaces as well, which are analogous to the spaces with affine connection. There are presented concrete examples of such transformations for complex and for the hypercomplex numbers H_4. In the general case, these transformations determine a group of transitions, whose elements can be represented as transitions between the projective Euclidean geometries of a distinguished class, fixed by means of choosing the metric geometry which admits affine coordinates. The relation between the functions which ensure generalized conformal coordinate transformations and the generalized analytic functions can be productive for solving fundamental problems of theoretical mathematical physics.

Key-words: generalized conformal transformations, hypercomplex space, affine coordinates.
MSC: 30C65, 30C35, 53A30.

СКАЛЯРНЫЕ ПОЛИПРОИЗВЕДЕНИЯ. РАЗРЕШИМОСТЬ

С. А. Шишкин, И. С. Шишкин

Рассматривается скалярная форма, являющаяся функцией n векторов. Предлагается следуя Д. Г. Павлову использовать такие формы для построения полискалярных произведений. Строится ассоциированный к обычному вектору объект сложной структуры. Для ассоциированных объектов строится метрический тензор.

Приводятся нетривиальные решения матричного уравнения $X^{p/q} = I$. Решаются уравнения стационарного движения Лагранжевой системы.

Ключевые слова: полилинейные формы, метрический тензор, Лагранжевы системы.

§1.

Рассмотрим скалярную форму, определенную на n-индексированных объектах. Так, например, введено скалярное полипроизведение индексированного объекта по Д. Г. Павлову [1]. Другими словами, рассматривается скалярная форма от n векторов вида

$$f(a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n) = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n). \tag{1}$$

Это выражение, записанное с использованием структурных констант $C_{i_1\, i_2\, i_3 \dots\, i_{n-1}\, i_n}$ формы f, может быть записано в виде

$$f(a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n) = C_{i_1\, i_2\, i_3 \dots\, i_{n-1}\, i_n} \cdot (a_1^{i_1} \cdot a_2^{i_2} \cdot a_3^{i_3} \cdot \dots \cdot a_{n-1}^{i_{n-1}} \cdot a_n^{i_n}). \tag{2}$$

Структурные константы должны быть доопределены некоторыми дополнительными условиями, быть может, аксиоматического вида.

Аналогично [1] выполним замену для элементов $a_p^{i_p}$

$$a_p^{i_p} \Rightarrow a_p^{i_p} + b_p^{i_p},$$

тогда получаем выражение вида

$$f(a+b) = C_{i_1\, i_2\, i_3 \dots\, i_{n-1}\, i_n} \cdot ((a+b)^{i_1} \cdot (a+b)^{i_2} \cdot (a+b)^{i_3} \cdot \dots \cdot (a+b)^{i_{n-1}} \cdot (a+b)^{i_n}). \tag{3}$$

Далее

$$\begin{aligned} f(a+b) = C_{i_1\, i_2\, i_3 \dots\, i_{n-1}\, i_n} \cdot (a^{i_1} \cdot a^{i_2} \cdot a^{i_3} \cdot \dots \cdot a^{i_{n-1}} \cdot a^{i_n}) +& \\ + C_{i_1\, i_2\, i_3 \dots\, i_{n-1}\, i_n} \cdot (b^{i_1} \cdot b^{i_2} \cdot b^{i_3} \cdot \dots \cdot b^{i_{n-1}} \cdot b^{i_n}) + S(a,b).& \end{aligned} \tag{4}$$

Полученная в (4) форма $S(a,b)$, порожденная формой f, совершенно аналогична обычным образом введенным скалярным произведениям в тензорных пространствах, где косинус угла между векторами определяется выражениями типа

$$Cos(A \wedge B) = 1/2[(A+B)^2 - (A,A) - (B,B)]/(A,A)^{1/2}/(B,B)^{1/2}. \tag{5}$$

Образуем ассоциированный с b_i объект

$$B^I = \begin{cases} b^i \\ b^{i_1} \cdot b^{i_2} \\ b^{i_1} \cdot b^{i_2} \cdot b^{i_3} \\ \dots\dots\dots \\ b^{i_1} \cdot b^{i_2} \cdot \ldots \cdot b^{i_{n-1}} \end{cases} \tag{6}$$

обозначим его B^I, здесь и далее $\{^I\}$ – мультииндекс, а также ассоциированные с a^i и $a^i + b^i$ объекты

$$A^I = \begin{cases} a^i \\ a^{i_1} \cdot a^{i_2} \\ a^{i_1} \cdot a^{i_2} \cdot a^{i_3} \\ \dots\dots\dots \\ a^{i_1} \cdot a^{i_2} \cdot \ldots \cdot a^{i_{n-1}} \end{cases} \qquad C^I = \begin{cases} (a^i + b^i) \\ (a^{i_1} + b^{i_1}) \cdot (a^{i_2} + b^{i_2}) \\ (a^{i_1} + b^{i_1}) \cdot (a^{i_2} + b^{i_2}) \cdot (a^{i_3} + b^{i_3}) \\ \dots\dots\dots \\ (a^{i_1} + b^{i_1}) \cdot (a^{i_2} + b^{i_2}) \cdot \ldots \cdot (a^{i_{n-1}} + b^{i_{n-1}}) \end{cases} \tag{7}$$

обозначим их A^I и C^I соответственно. Тогда форма $S(a, b)$ может быть записана в виде, аналогичном обычному скалярному произведению с расширенной метрикой S_{IJ}.

Имеем

$$S(a, b) = S_{IJ} A^I B^J. \tag{8}$$

Построенная в (8) матрица может быть обращена или псевдообращена, при этом будет построен ассоциированный расширенный метрический тензор S^{IJ}. Он может быть использован для поднятия или опускания индексов ассоциированных объектов A^I, A_J. Законы преобразования ассоциированных объектов следуют из их строения. Операция сложения ассоциированных объектов определена соотношениями (6), (7).

При необходимости может быть разрешена линейная система

$$S_{IJ} X^J = B_I. \tag{9}$$

Что можно сказать о системе (9) и о матрице системы (9). Матрица S_{IJ} квадратная. К сожалению нельзя сказать что либо определенное о ее невырожденности, знакоопределенности и обусловленности.

Однако из [2] для матрицы S_{IJ} следует существование ее представления в виде

$$S_{IJ} = G_{IP} U^P_J \tag{10}$$

где U^P_J – r-ортогональная матрица, а G_{IP} – симметричная неотрицательно определенная матрица ранга r.

Здесь и далее предполагается невырожденность матрицы S_{IJ}. Случай вырожденных матриц S_{IJ} должен рассматриваться особо.

В приложении 1 приведено решение задачи по определению стационарных решений уравнений Лагранжа, основанное на идеях раздела 1 настоящей работы.

В следующем разделе приведены теоремы, позволяющие решать линейные системы как вырожденные, так и невырожденные.

§2. Сингулярная фильтрация полярное разложение и обращение матриц линейных систем алгебраических уравнений

Краткая постановка задач, определения, теоремы по материалам [2], [3], [4].

Обозначим:

$Q^{+}_{symmetric}$ или Q^{+}_{s} – коммутативное множество симметричных положительно определенных диагонализируемых матриц,

$Q_{fixed\,rank}$ – коммутативное множество симметричных положительно определенных диагонализируемых матриц фиксированного ранга,

$\alpha_A = norm_2(A)\cdot norm_2(A^{-1})$ – спектральное число обусловленности невырожденной матрицы A,

$\alpha_A = norm_2(A)\cdot norm_2(A^{+})$ – спектральное число обусловленности вырожденной матрицы A,

$\|A\|_2$ – спектральную норму матрицы A.

Определение 1. Проектор P удовлетворяет уравнению $P^2 = P$.

Определение 2. Будем называть $(m\times n)$-матрицу U_{pj} ортогональной матрицей фиксированного ранга r или для краткости r-ортогональной матрицей, если

$$P_{pq} = U_{pj}\cdot U_{qj};\quad R_{ij} = U_{pi}\cdot U_{pj}; \tag{11}$$

являются $(m\times m)$- и $(n\times n)$-проекторами соответственно.

Для матричного оператора A_{pj} неопределенного ранга имеет место полярное разложение

$$A_{pj} = G_{pq}\cdot U_{qj}; \tag{12}$$

где:

G_{pq} – $(m\times m)$-положительно определенная матрица, и U_{qj} – $(m\times n)$ r-ортогональная матрица или ортогональная матрица фиксированного ранга $rank = r$; если при этом

$$rank\,G = rank\,U = rank\,A, \tag{13}$$

то разложение (12) единственно.

Следующие теоремы могут использоваться для решения линейных систем уравнений, сингулярной фильтрации матричных и сеточных операторов, а также для вычисления проекторов. Эти теоремы использовались также при проведения гарантированных оценок максимально возможной гарантированной точности, согласованной с алгоритмом (процедурой) вычисления произведения матриц.

Теорема 1. Пусть $B\in Q^{+}_{s}$ и $F(t) = (1-t)I + tB,\ t\in[0,1]$. Тогда

1. $C = F(t)^{-1}\cdot B\ \in Q^{+}_{s},\ t\in[0,1]$

2. число обусловленности матрицы C есть монотонная функция параметра t, более того,

$$\alpha_C = \alpha_B\cdot\left[1 - \frac{t\cdot(\Lambda_{max}-\Lambda_{min})}{1-t(1-\Lambda_{max})}\right], \tag{14}$$

$$\frac{d\alpha_C}{dt} = -\alpha_B\cdot\frac{\Lambda_{max}-\Lambda_{min}}{[1-t(1-\Lambda_{max})]^2}, \tag{15}$$

где $\Lambda_{max}, \Lambda_{min}$ являются минимальным и максимальным собственным значением матрицы B;

3. $\alpha_C\cdot\alpha_F = \alpha_B$.

Теорема 2. Пусть U – r-ортогональная матрица фиксированного ранга $rank\, U = r$ полярного разложения $(m \times n)$-матрицы A, такой что $rank\, A = r$. Тогда при $t \in [0, 1]$ число обусловленности матрицы $C = F^+ \cdot A$, где

$$F(t) = (1-t)U + tA,\ t \in [0,1]$$

– монотонно убывающая функция параметра t, более того:

1.

$$\alpha_C = \alpha_A \cdot \left[1 - \frac{t \cdot (d_{max} - d_{min})}{1 - t(1 - d_{max})}\right], \tag{16}$$

2.

$$\frac{d\alpha_C}{dt} = -\alpha_A \cdot \frac{d_{max} - d_{min}}{[1 - t(1 - d_{max})]^2}, \tag{17}$$

здесь d_{max}, d_{min} – максимальное и минимальное сингулярные числа матрицы A;

3. $\alpha_C \cdot \alpha_F = \alpha_A$.

Теорема 3. Для произвольной матрицы A, такой что $\|A\|_2 = 1$ и матрицы $F(t),\ t \in [0, 1/2]$, вычисляемой по правилу $F = (1-t)I + tA^T \cdot A$

имеет место:

1. Итерационный процесс $X_{k+1} = F_k^{-1} \cdot X_k$, где $X_1 = A$, а F_k вычисляется как $F_k = (1-t)I + tX_k^T \cdot X_k$, сходится к r-ортогональной матрице U полярного разложения матрицы $A = G \cdot U$.

При этом $G \in Q_s^+$; $\lim\limits_{k \to \infty} X_k = U$; $rank\, A = rank\, U = rank\, G$;

2. Число обусловленности матрицы X_k удовлетворяет выражению

$$\alpha_{X_{k+1}} = (1-t)\alpha_{X_k} + t\alpha_{X_k}^{-1} \tag{18}$$

3. Число обусловленности матрицы F_k удовлетворяет выражению

$$\alpha_{F_{k+1}} = [(1-t) + t\alpha_{X_k}^{-2}]^{-1} \tag{19}$$

4. Имеет место равенство $\alpha_{X_{k+1}} \cdot \alpha_{F_k} = \alpha_{X_k}$.

Теоремы 1, 2, 3 позволяют строить r-ортогональные матрицы проекционного типа, а также левые и правые проекторы операторов.

В приложении 2 приведены конечные сравнительные результаты оценок точности для различных алгебраических алгоритмов – Гаусса, Хаусхолдера и для алгебраических алгоритмов С. А. Шишкина. Последние при проведении вычислений с простой точностью по оценкам гарантированно в

в n раз точнее алгоритма Гаусса,
в $n^{1/2}$ раз точнее алгоритма Хаусхолдера,
и согласованы с точностью умножения матриц.

Как известно, проекционные операторы удовлетворяют уравнению

$$P \cdot P = P. \tag{20}$$

Однако нетривиальным и состоявшимся фактом является существование квадратных корней из единичного, а значит и из проекционного оператора, не совпадающих с P.

То есть наряду с оператором P, удовлетворяющим уравнению (20), существуют нетривиальные решения уравнения

$$X \cdot X = P. \tag{21}$$

§3.

Рассмотрим матричное квадратное уравнение

$$X \cdot X = I. \tag{22}$$

Теорема 4. Всякая матрица S, ортогонально подобная матрице X, удовлетворяющей уравнению (22) $X \cdot X = I$, удовлетворяет уравнению

$$S \cdot S = I.$$

Доказательство очевидно.

Другими словами, если матрица X удовлетворяет уравнению $X \cdot X = I$, то матрица $Y = \Phi \cdot X \cdot \Phi^T$, где Φ ортогональна, удовлетворяет уравнению

$$Y \cdot Y = I.$$

Уравнению (22) $X \cdot X = I$ удовлетворяет всякая симметричная матрица перестановок. Действительно, пусть p – матрица перестановок и пусть $p = p^T$. Тогда, так как $p \cdot p^T = I$, то

$$p \cdot p = I. \tag{23}$$

Пусть теперь ненулевые элементы матрицы q принимают значения ± 1 и стоят на тех же местах, что и ненулевые элементы матрицы p.

Тогда, если $q = q^T$, то матрица q удовлетворяет уравнению

$$q \cdot q = I \tag{24}$$

Будем называть такие матрицы *матрицами перестановочного типа.*

Множество корней из 3×3 единичной матрицы может быть классифицировано в соответствии с классификацией симметричных знаковых матриц.

Недавно, в мае 2004 года, на конференции начинающих молодых ученых в МФТИ был сделан доклад Алексея С. Шишкина, Ивана С. Шишкина (см. материалы конференции, а также [5]), в котором были найдены новые корни уравнения $X \cdot X = I$. Одним из результатов этого доклада явилось решение матричного квадратного уравнения $U \cdot U = I$ для размерности $n = 3$. Точнее было получено

$$U = \pm 1/3 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \tag{25}$$

С учетом этих матриц и матриц перестановочного типа множество решений уравнения $X \cdot X = I$ для $3 \cdot 3$ матриц может быть разбито на линейно несвязные плотно заполненные множества.

Казалось бы, какое отношение этот результат имеет к $Cos(A \wedge B)$? Однако имеет место

Теорема 5. (А. С. Шишкин, И. С. Шишкин 2002, 2004).

Для всякого треугольника ABC с медианами m_a, m_b, m_c и сторонами a, b, c имеют место равенства

$$\begin{pmatrix} m_a^2 \\ m_b^2 \\ m_c^2 \end{pmatrix} = 3/4U \begin{pmatrix} a^2 \\ b^2 \\ c^2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a^2 \\ b^2 \\ c^2 \end{pmatrix} = 4/3U \begin{pmatrix} m_a^2 \\ m_b^2 \\ m_c^2 \end{pmatrix}$$

$$(m_a^4 + m_b^4 + m_c^4) = 9/16 \cdot (a^4 + b^4 + c^4),$$

где

$$U = \pm 1/3 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

– симметричная, ортогональная, кроссимметричная матрица, удовлетворяющая уравнению $U \cdot U = I$.

Полученная в теореме 5 матрица U линейно связна с ортогональной матрицей перестановочного типа

$$\pm \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Кое-что можно сказать о существовании квадратных корней такого типа из единичных матриц порядка n.

Обозначим через $\mathbf{1}$ $n \times n$ матрицу, составленную только из единиц 1.

Тогда (А. С. Шишкин, И. С. Шишкин, 2004) матрица

$$U = \pm[I - (2/n) \cdot \mathbf{1}] \tag{26}$$

ортогональна и удовлетворяет уравнению

$$U \cdot U = I.$$

В заключение, рассмотрим решение уравнения

$$X^{p/q} = I. \tag{27}$$

Очевидно, имеют место равенства

$$X^p = I^q, \quad X^p = I. \tag{28}$$

Решение уравнений типа $X^{p/q} = I$ дает следующий результат.

Теорема 6. На поле комплексных матриц Z нетривиальные (то есть те, которые не могут быть сформированы при помощи матриц перестановочного типа) решения уравнения

$$Z^{p/q} = I \tag{29}$$

задаются выражением

$$Z = \xi([I + \alpha \cdot 1], \tag{30}$$

где комплексные числа α, ξ удовлетворяют уравнениям

$$\sum_{k=1}^{k=p}(C_k^p \cdot (\alpha^k) \cdot (n^{k-1}), \quad [\xi]^{p/q} = 1, \quad C_k^p = p!/(p-k)!/(k!). \tag{31}$$

Следствие. Множество комплексных матриц Y, унитарно подобных матрице Z, являющейся решением уравнения $Z^{p/q} = I$, удовлетворяет уравнению $Y^{p/q} = I$.

Сегодня появляется возможность геометрических построений с метрикой нового типа, когда в качестве метрического тензора используется метрика, удовлетворяющая уравнению

$$U \cdot U = I.$$

Действительно, для любых ненулевых векторов x, y выполнены аксиомы метрики:

1. Коммутативность $(x^i U_{ij} y^j) = (y^i U_{ij} x^j)$;

2. Дистрибутивность $((x^i + y^i) U_{ij} z^j) = (x^i U_{ij} z^j) + (y^i U_{ij} z^j)$;

3. Выполнен распределительный закон умножения $((a \cdot x^i + b \cdot y^i) U_{ij} z^j) = a \cdot (x^i U_{ij} z^j) + b \cdot (y^i U_{ij} z^j)$.

Приложение 1.

Уравнения стационарного движения Лагранжевой системы.

Рассматриваются стационарные движения Лагранжевых систем. Система уравнений разрешена относительно скоростей $\dot{x}_k$.

Рассмотрим уравнение движения некоторого объекта

$$g_{ik}\ddot{x}^k + G_{i,jk}\dot{x}^j\dot{x}^k = f_i \tag{П.1}$$

Оно может быть разрешено относительно произведения $\dot{x}^j\dot{x}^k$.

Обозначим X^{jk} произведение $\dot{x}^j\dot{x}^k$. Матрица X для любых ненулевых векторов x^j имеет ранг 1.

Введем в рассмотрение математический объект $A^{i,jk}$, обратный объекту $G_{i,jk}$, так что выполнены соотношения

$$G_{i,jk}A^{p,jk} = \delta_i^p, \qquad G_{i,jk}A^{i,pq} = \delta_{jk}^{pq} \tag{П.2}$$

для невырожденных в этом смысле объектов $G_{i,jk}$, $A^{i,pq}$.

Для вырожденного случая аналогично имеем

$$G_{i,jk}A^{p,jk} = P_i^p \qquad G_{i,jk}A^{i,pq} = P_{jk}^{pq}, \tag{П.3}$$

где P_i^p и P_{jk}^{pq} – проекционные операторы.

Стационарный случай

Пусть теперь

$$\ddot{x}^k = 0. \tag{П.4}$$

Тогда из уравнения (П.1) следует

$$G_{i,jk}\dot{x}^j\dot{x}^k = f_i. \tag{П.5}$$

Далее получаем

$$X^{pq} = \dot{x}^p \dot{x}^q = A^{i,pq} f_i \tag{П.6}$$

Теперь для получения уравнений стационарного движения, разрешенных относительно скоростей, достаточно разложить матрицу X^{pq} ранга 1 по базису. Выберем максимальную по длине строку матрицы X^{pq}, пусть это X^{1q}. Нормируем ее. Тогда вектор $\dot{x}^p$ вычислится как

$$\begin{gathered} \phi^p = X^{1q}/norma_2(X^{1q}) \\ (norma_2(\dot{x}^p))^2 = X^{pq} \cdot \phi^p \cdot \phi^p \\ \dot{x^p} = (norma_2(\dot{x}^p)) \cdot \phi^p. \end{gathered} \tag{П.7}$$

Приложение 2.

Анализ гарантированных оценок точности алгоритмов авторского пакета программ Алгебра©.

Сравнения проведены с наиболее распространенными алгоритмами решения линейных систем.

Обозначения:

K_A – спектральное число обусловленности матрицы A,

$\|.\|_2$ – спектральная норма матрицы.

$$C_2(n) = \begin{cases} 1.01n & \text{– для вычислений с двойной точностью} \\ n^2 & \text{– для вычислений с простой точностью.} \end{cases}$$

При проведении численных расчетов, связанных с матричными вычислениями, граничной оценкой, по существу ограничивающей возможности алгоритмов, является оценка точности умножения матриц

$$\|AB - A \cdot B\|_2 \le 2^{-p} \, \|A\|_2 \, \|B\|_2 C_2(n) \tag{ПП 1}$$

$(\cdot)$ – численное умножение матриц.

При $B^{-1} = A$ оценка (1) принимает вид

$$\|A \cdot A^{-1} - I\|_2 / K_A \le 2^{-p} C_2(n). \tag{ПП 2}$$

Именно с такой точностью и удалось **(впервые)** гарантировать точность обращения матриц и решения линейных систем алгоритмами авторского пакета программ (SOLV, SQRoot, SPEC). Конкретно было получено

$$\|A \cdot A^{-1} - I\|_2 / K_A \le 2^{-p} C_2(n) \cdot k, \tag{ПП 3}$$

где

$k = 1$ для симметричных положительно определенных матриц,

$k = 2$ для матриц общего вида.

Оценка (3) применительно к линейным системам $Ax = b$ эквивалентна следующей

$$\|Ax - b\|_2 / K_A \le 2^{-p} C_2(n) k \, \|b\|_2. \tag{ПП 4}$$

Для сравнения приведем оценки точности для алгоритма Гаусса и для алгоритмов, построенных на ортогональных отражениях Хаусхолдера.

Для алгоритма Гаусса с выбором главного элемента[1] было получено $K_A = (n^3+3n^2)$.

---

[1] См. монографию Уилкинсона, а также работы Дж. Форсайта.

Для алгоритмов, построенных на ортогональных отражениях Хаусхолдера[2], было получено $K_A = (40 \cdot n^{5/2} + O(n^2))$.

Для извлечения квадратных корней из симметричных положительно определенных матриц решение уравнения

$$S = X^2 \tag{ПП 5}$$

точность гарантируется оценкой

$$\|S - X^2\| \leq 2^{-p+3} C_2(n) \, \|S\|_2 \tag{ПП 6}$$

В случае, когда при решении уравнения

$$S = Z^2 \tag{ПП 7}$$

матрица S симметрична, возможно вырождена и знако-неопределена, решение уже не может быть получено в действительных матрицах и записывается в виде $Z = X + iY$. В этом случае точность гарантируется оценками

$$\begin{gathered} \|S - (X + iY) \cdot (X + iY)\| \leq 20 \cdot 2^{-p} \, C_2(n) \, \|S\|_2, \\ \|XY - X \cdot Y\| \leq 2^{-p+3} \, C_2(n) \, \|S\|_2. \end{gathered} \tag{ПП 8}$$

Таким образом и в этом случае достигнута почти предельная точность решения уравнения (7). При тестировании алгоритма, использованного для решения уравнения (7), в качестве тест матриц использовались матрицы следующего вида

$$S_{ij} = 1/(i + j - 1) - 1/(2n - i - j + 1); \quad i, j = 1, 2, ..., n.$$

Эти матрицы имеют равные по модулю и противоположные по знаку действительные собственные значения, причем все матрицы нечетного порядка вырождены. Полученные результаты тестирования представлены в таблице 1.

Таблица 1.

n	$\|XY\|_2/\|A\|_2$	$\|S - (X + iY) \cdot (X + iY)\|_2/\|A\|_2$	$2^{-p}n^2$
7	$1.3 \cdot 10^{-13}$	$6.51 \cdot 10^{-11}$	$9.8 \cdot 10^{-11}$
9	$1.3 \cdot 10^{-13}$	$1.13 \cdot 10^{-11}$	$1.62 \cdot 10^{-10}$
11	$1.3 \cdot 10^{-13}$	$1.41 \cdot 10^{-11}$	$2.42 \cdot 10^{-10}$
13	$1.3 \cdot 10^{-13}$	$5.18 \cdot 10^{-11}$	$3.38 \cdot 10^{-10}$
15	$1.3 \cdot 10^{-13}$	$2.57 \cdot 10^{-11}$	$4.50 \cdot 10^{-10}$

Вычисления проведены в арифметике с простой точностью при представлении числа с точностью 10^{-12}.

Для обращения вырожденных матриц размера $m \times n$ и ранга $r < min(m, n)$ программами пакета Алгебра(SPEC) – Special Programs for Exect Calculations оценка точности аналогична оценке (3). В этом случае под K_A надо понимать спектральную обусловленность вырожденного матричного оператора. Соответствующая оценка принимает вид

$$\|A \cdot A^+ - P\|_2/K_A \leq 2^{-p+1} C_2(n) \tag{ПП 9}$$

где P – проектор на собственное подпространство матрицы А.

---

[2] См. Уилкинсон, С. К. Годунов, Малышев.

Литература

1. Д. Г. Павлов. Обобщение аксиом скалярного произведения. Москва, Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **1**, 2004.

2. С. А. Шишкин. Об одном алгоритме обращения матриц с гарантированной точностью. Ж. Вычисл. Матем и Матем. Физ. 1991, Т. 31, № 6, с. 783–789.

3. С. А. Шишкин. Сингулярная фильтрация матричных и сеточных операторов с гарантированной точностью. Ж. Вычисл. Матем и Матем. Физ. 1994, Т. 34, № 4, с. 636–639. Полный текст депонирован в ВИНИТИ, 1993, N 2283 - В93, 27 с.

4. С. А. Шишкин. К вопросу об извлечении квадратных корней из симметричных знаконеопределенных матриц. Вариант полярного разложения. Ж. Вычисл. Матем и Матем. Физ. 1994, Т. 34, № 2, с. 315–317. Полный текст депонирован в ВИНИТИ, 1993, N 2282 - В93, 27 с.

5. А. С. Шишкин, И. С. Шишкин. Новое в треугольнике. // Педагогічна думка. Науково-практичний журнал № 1. 2003. Директор школи ліцею гімназіі.

6. А. С. Шишкин, И. С. Шишкин. Новое в треугольнике. Материалы конференции "Старт в науку", МФТИ, май 2004.

Scalar products. Solvability

S. A. Shyskin, I. S. Shyskin

We study the multilinear scalar form, which is function of n vectors. According to D.G. Pavlov, we propose these forms for constructing poly-scalar products. To an ordinary vector, we associate an object of a complex structure. For associated vectors, we build a metric tensor. We determine non-trivial solutions of the matrix equation $X^{p/q} = I$. We solve the equation of stationary motion described by a Lagrangian system.

Key-words: multilinear form, metric tensor, Lagrangian system.
MSC: 15A69, 53B40, 70S05, 51F99.

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА СКАЛЯРНЫХ «КВАТЕРНИОНОВ»

А. В. Смирнов

DULY Research Inc., USA

Рассмотрена коммутативная алгебра бикомплексных чисел с метрикой $(+--+)$. Подобно обычным комплексным числам, эта алгебра 4-го ранга обладает свойствами деления, сопряжения, извлечения корня и факторизации наряду с прямым аналогом формулы Эйлера. Показано, что вращения представимы в этой алгебре без нарушения коммутативности. Наличие делителей нуля неразрывно связано с релятивистским интервалом.

Ключевые слова: бикомплексные числа, ассоциативно-коммутативные алгебры, сопряжение, формула Эйлера.

I. Введение

Объекты типа кватернионов были предложены ещё в 18 веке Эйлером и Гауссом, а классическое оформление кватернионы получили в 1843 г. благодаря У. Р. Гамильтону как векторное расширение над полем комплексных чисел [1, 2, 3, 4]. Их векторная часть представляет из себя обобщённую мнимую часть и образует трёхмерное кватернион-векторное пространство. Д. К. Максвелл сформулировал электродинамику именно на языке кватернионов, но они так и не вошли в стандартный математический аппарат XX-го века. Лишь теперь они включены в основные математические пакеты MathCAD^{TM} и Mathematica^{TM}, обнаружив интересные применения в вычислительной математике (например, обработка изображений) и многих областях физики, включая механику и специальную теорию относительности [4], теории элементарных частиц и астрофизику, теорию поля и оптику. В физике пучков заряженных частиц кватернионы эффективны, например, в решении проблемы транспортировки спина [5, 6]. Очевидно, что несмотря на изящность дифференциальной геометрии кватернионов, отсутствие коммутативности не допускает обобщения их в область теории функций гиперкомплексных переменных. Для рассматриваемых здесь чисел попытка такого расширения впервые была сделана в Теории функций пространственного комплексного переменного (ТФПКП, см. [7, 22]).

В аналитических исследованиях и моделях мы сталкиваемся нередко с выражениями, содержащими как комплексные числа, так и 2×2 матрицы. Матричное представление, однако, может иметь и более удобные альтернативы. Квантовая механика, к примеру, может быть элегантно сформулирована с помощью геометрической алгебры. В других ситуациях нередко более удобно иметь дело с преобразованиями полностью скалярных выражений, чем с традиционными кватернионами – носителями векторных свойств. Особенно это актуально в сочетании с функциями комплексного переменного. Соответствующие практические случаи включают, например, анализ собственных мод некоторых граничных задач [8, 9], транспортировку пучка заряженных частиц и его динамику в ускорителях [10] и электронных приборах [11, 12]. Можно предположить, что пространство скалярных или псевдоскалярных чисел может неявно включать (инкапсулировать) и элементарные матричные преобразования через расширенные свойства "скалярных кватернионов". Это пространство суть объединение двух независимых полей обычных комплексных чисел (ассоциированных, как правило, с временной и пространственными координатами).

Л. Левин одним из первых [9] практически применил скалярные бикомплексные объекты для анализа электромагнитных волн, распространяющихся в различных волноводных структурах: с диэлектриком и намагниченным ферритом, поверхностной анизотропией и гофрами. Он ввёл феноменологически дополнительную мнимую единицу (см. (1.1)), чтобы различить комплексные числа, отвечающие за разные свойства временной переменной (и/либо продольной, фазовой координаты) – с одной стороны, и пространственных (либо поперечных/угловых) переменных – с другой стороны. Соответствующие мнимые единицы образуют коммутативную группу:

$$i^2 = -1,\ j^2 = -1,\ \ ij = ji \neq -1 \text{ или } \sqrt{-1}. \tag{1.1}$$

Используя этот подход, Левин получил компактное скалярное дисперсионное уравнение для нормальных мод с четырёх-компонентными комплексными числами. Дальнейшее развитие этого метода [13, 14, 15] позволило строго охарактеризовать самосогласованную систему, в которой пучок взаимодействует с замедляющей структурой и соленоидальным полем. Было показано [13], что обычный матричный подход даёт эквивалентное решение системы дисперсионных уравнений и приводит в конечном итоге к точно тем же значениям инкремента и порогового тока регенеративной поперечной неустойчивости "обрыва пучка". Однако использование скалярных кватернионов значительно упрощает выкладки и даёт гораздо более прозрачное физическое решение. Например, коллективная частота $\widetilde{\nu}$, найденная алгебраически из единственного гиперкомплексного дисперсионного уравнения, имеет чёткий смысл своих компонентов: $Re_iRe_j\widetilde{\nu}$ – расстройка коллективной частоты по отношению собственной частоте; $Im_iIm_j\widetilde{\nu}$ – угловая скорость вращения вырожденной коллективной дипольной моды; а $Im_iRe_j\widetilde{\nu} \pm Im_jRe_i\widetilde{\nu}$ дают инкременты право- и левополяризованных коллективных мод гиромагнитной неустойчивости. Заметим, в работе [10] отсутствие дополнительной мнимой единицы привело к некорректному смешиванию между различными степенями свободы и ошибочному результату для порогового тока поперечной неустойчивости.

Коммутативная алгебра для соответствующих гиперкомплексных чисел была введена в [13] для частных приложений физики пучков в ускорителях и в [7, 22] для более широкого круга физических задач. Она была определена как замкнутое обобщение над различными i- и j- полями комплексных чисел, которые образуют коммутативную алгебру 4-го ранга с делением и основными атрибутами обычных комплексных чисел. В этой статье мы приводим основные свойства и простейшее аналитическое продолжение. В рамках данного изложения (и только) подразумеваем эквивалентными такие термины как: «четырёх-компонентное», «гиперкомплексное», «бикомплексное» число и «скалярный кватернион». В алгебре многообразий рассматриваемые числа можно отнести к бикомплексной разновидности поличисел.

II. Элементарные свойства коммутативной алгебры четырёх-компонентных чисел

Выпишем четырёх-компонентное комплексное число, которое выглядит как обычный кватернион (но не является им):

$$\widetilde{a} = \alpha_0 + i\alpha_1 + j\alpha_2 + ij\alpha_3, \tag{2.1}$$

где компоненты $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ вещественны; i, j – независимые мнимые единицы, и ij – гиперкомплексная (составная) единица из (1.1).

Мы рассматриваем в данной работе гиперкомплексные числа (2.1) как обладающие коммутативностью и ассоциативностью, дистрибутивностью и замкнутостью по отношению к умножению и делению.

В частности, произведение двух простых комплексных чисел из различных i- и j- пространств образует "скалярный кватернион", представляющий трёхмерное пространство как частный случай четырёхмерного гиперпространства $\left(\text{при} \begin{Vmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 \\ \alpha_2 & \alpha_3 \end{Vmatrix} = 0\right)$:

$$(a+ib)\cdot(c+jd) = \alpha_0 + i\alpha_1 + j\alpha_2 + ij\alpha_3, \quad \text{где } \alpha_0 = ac,\ \alpha_1 = bc,\ \alpha_2 = ad,\ \alpha_3 = bd. \tag{2.2}$$

Можно рассматривать пространства обычных комплексных чисел как двухмерные проекции пространства гиперкомплексных чисел. Поэтому естественно переопределить операторы реальной и мнимой частей следующим образом:

$$Re_i\,\widetilde{a} = \alpha_0 + j\alpha_2, \quad Im_i\,\widetilde{a} = \alpha_1 + j\alpha_3, \tag{2.3}$$

где индексы i и j обозначают соответствующее пространство-проекцию как область действия соответствующей операции.

Рассмотрим теперь матрицы Паули $\hat{\sigma}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\hat{\sigma}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -j \\ j & 0 \end{pmatrix}$, $\hat{\sigma}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ как операторы, действующие, например, только в j-пространстве. Тогда, полагая $\widetilde{a}$ есть матрица-столбец $\begin{pmatrix} Re_j\,\widetilde{a} \\ Im_j\,\widetilde{a} \end{pmatrix}$, мы можем перейти к алгебраической форме, используя следующие правила подстановки:

$$\hat{\sigma}_1\widetilde{a} \to j\widetilde{a}^{*j}, \quad \hat{\sigma}_2\widetilde{a} \to -\widetilde{a} \qquad \text{и} \quad \hat{\sigma}_3\widetilde{a} \to \widetilde{a}^{*j}, \tag{2.4}$$

т. е. матричные операторы могут быть представлены формально как $\hat{\sigma}_1 \to j()^{*j}$, $\hat{\sigma}_2 \to -1$, и $\hat{\sigma}_3 \to ()^{*j}$.

Подобно алгебре спиновых матриц из (2.4) мы имеем аналогичное соотношение:

$$\hat{\sigma}_1\hat{\sigma}_2\hat{\sigma}_3\hat{\sigma}_3\widetilde{a} = \hat{\sigma}_1\hat{\sigma}_2\widetilde{a} = -j\hat{\sigma}_3\widetilde{a}; \quad \hat{\sigma}_2\hat{\sigma}_3\widetilde{a} = -j\hat{\sigma}_1\widetilde{a}; \quad \hat{\sigma}_3\hat{\sigma}_1\widetilde{a} = -j\hat{\sigma}_2\widetilde{a}.$$

Удобство заключается в том, что операторы в такой записи коммутативны. Таким образом, произвольный матричный 2×2 оператор $\hat{U}$ в комплексном (j-) пространстве может быть представлен, например, в таком виде:

$$\hat{U} \equiv \rho\hat{E} - j(\lambda\hat{\sigma}_1 + \mu\hat{\sigma}_2 + \nu\hat{\sigma}_3) \to \rho + j\mu + (\lambda - j\nu)()^{*j},$$

где $\hat{E}$ – единичная 2×2 матрица, $\rho^2 + \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = \det\hat{U}$, и ρ, λ, μ, ν – вещественные числа, описывающие связанный с j-пространством оператор $\hat{U}$.

Остаётся обобщить действие матричного 2×2 оператора вместе с соответствующим представлением вращений на всё i j- гиперпространство. Мы можем заменить формально комплексную единицу j на i в $\hat{U}$ и $\hat{\sigma}_2$ (т. е. $\hat{\sigma}_2 \to ij$):

$$\hat{U} = \rho\hat{E} - i\left(\lambda\hat{\sigma}_1 + \mu\hat{\sigma}_2 + \nu\hat{\sigma}_3\right) \to \rho + j\mu - \left(ij\lambda + i\nu\right)()^{*J}. \tag{2.5}$$

Если $\hat{U}$ – унимодулярная матрица и $\rho^2 + \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1$, то (2.5) представляет вращения в четырёхмерном i, j- пространстве.

Перед тем, как перейти к определению полной длины в этом гиперпространстве, определим частичный детерминант в каждом из пространств-проекций:

$$\det_i \tilde{a} = \left(\mathrm{Re}_i\tilde{a}\right)^2 + \left(\mathrm{Im}_i\tilde{a}\right)^2 = \tilde{a}\cdot\tilde{a}^{i*} \equiv |\tilde{a}|_i^2 = \alpha_0^2 + \alpha_1^2 - \alpha_2^2 - \alpha_3^2 + 2j\left(\alpha_0\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3\right). \tag{2.6}$$

Из правила коммутативности (1.1) и определений (2.1, 2.3, 2.6) вытекают следующие очевидные тождества:

$$\begin{aligned}
&\tilde a \cdot \tilde b = \tilde b \cdot \tilde a,\\
&\mathrm{Re}_i\mathrm{Re}_j\tilde a = \mathrm{Re}_j\mathrm{Re}_i\tilde a = \alpha_0 \equiv \mathrm{Re}_{ij}\tilde a = \mathrm{Re}_{ji}\tilde a \equiv \mathrm{Re}\,\tilde a,\\
&\mathrm{Im}_i\mathrm{Re}_j\tilde a = \mathrm{Re}_j\mathrm{Im}_i\tilde a = \alpha_1,\\
&\mathrm{Im}_i\mathrm{Im}_j\tilde a = \mathrm{Im}_j\mathrm{Im}_i\tilde a = \alpha_3 \equiv \mathrm{Im}_{ij}\tilde a = \mathrm{Im}_{ji}\tilde a \equiv \mathrm{Im}\,\tilde a,\\
&(\tilde a^{*i})^{*j} \equiv \tilde a^{*i*j} = \tilde a^{*j*i} \equiv (\tilde a^{*j})^{*i} = \alpha_0 - i\alpha_1 - j\alpha_2 + ij\alpha_3,\\
&\tilde a + \tilde a^{*i} = 2\mathrm{Re}_i\tilde a, \tilde a - \tilde a^{*i} = 2i\mathrm{Im}_i\mathrm{Re}_j\tilde a + 2j\mathrm{Re}_i\mathrm{Im}_j\mathrm{Re}_i\tilde a,\\
&(\tilde a + \tilde a^{*i*j}) + C.C._i = (\tilde a + \tilde a^{*i*j}) + C.C._j = 4\mathrm{Re}_i\mathrm{Re}_j\tilde a \equiv 4\mathrm{Re}\,\tilde a,\\
&\det_i \det_j \tilde a \equiv \left| |\tilde a|_j^2 \right|_i^2 = \left| |\tilde a|_i^2 \right|_j^2 \equiv \det_j \det_i \tilde a \equiv \|\tilde a\|^4 .
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Приведённые до сих пор правила и соотношения описывают простое скалярное объединение-суперпозицию двух полей комплексных чисел. Эти соотношения могут оказаться полезными в некоторых приложениях, где нужна удобная алгебраическая форма волноводов [9], кильватерных полей [8], поляриметрии и аналитическом представлении магнитостатических полей [16]). Однако, чтобы работать с такими формами, надо построить полную алгебру гиперкомплексного пространства, замкнутую по отношению к операциям умножения и деления, возведения в степень и извлечения корня.

Для этого мы постулируем дополнительные к (1.1) правила, которые в совокупности дают следующую таблицу умножения базовых единиц:

1	i	j	k
i	-1	k	$-j$
j	k	-1	$-i$
k	$-j$	$-i$	1

Здесь $k \equiv ij$ есть гиперкомплексная единица, и, как легко видеть, метрика есть $(+--+)$.

Остальные свойства «скалярных кватернионов» и соответствующие функциональные аналитические продолжения могут быть выведены подобно теории комплексных чисел. Например, нетрудно видеть, что:

$$1/ij = ij; \quad \sqrt{1} = \pm 1,\ \pm ij; \quad ij = \exp\bigl(\pm(i+j)\pi/2\bigr) \tag{2.9}$$

Т. о. в этой алгебре 4-го ранга квадратный корень имеет четыре значения. Другой пример – правило умножения гиперкомплексных чисел $\widetilde a = \alpha_0 + i\alpha_1 + j\alpha_2 + ij\alpha_3$ и $\widetilde b = \beta_0 + i\beta_1 + j\beta_2 + ij\beta_3$:

$$\begin{aligned}
\widetilde a \cdot \widetilde b = {}& \alpha_0\beta_0 + \alpha_3\beta_3 - \alpha_1\beta_1 - \alpha_2\beta_2 + i(\alpha_1\beta_0 + \alpha_0\beta_1 - \alpha_3\beta_2 - \alpha_2\beta_3)\\
&+ j(\alpha_2\beta_0 + \alpha_0\beta_2 - \alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3) + ij(\alpha_3\beta_0 + \alpha_2\beta_1 + \alpha_1\beta_2 + \alpha_0\beta_3).
\end{aligned}$$

III. Сопряжение и абсолютное значение, делители нуля и интервал

Полное сопряжение можно определить через частичные сопряжения:

$$\tilde a^* = \tilde a^{*i}\tilde a^{*j}\tilde a^{*i*j} \tag{3.1}$$

Приведём несколько полезных свойств сопряжения, вытекающих из (2.8):

$$\begin{aligned} &\tilde{a} + \tilde{a}^{*i}\tilde{a}^{*j} + \tilde{a}^{*i*j} = 4\mathrm{Re}_i\mathrm{Re}_j\tilde{a} \\ &\tilde{a}^{*i*j}\tilde{a} = \alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + 2ij(\alpha_3\alpha_3 - \alpha_1\alpha_2) \end{aligned} \tag{3.2}$$

и, в общем случае,

$$\tilde{a} + \tilde{a}^{*i*j} \neq 2\mathrm{Re}\,\tilde{a}, \quad \tilde{a} + \tilde{a}^{*} \neq 2\mathrm{Re}\,\tilde{a}.$$

Естественный способ определить полный детерминант (определитель) через частичные детерминанты (2.6):

$$\begin{aligned} \det\tilde{a} = \det{}_i\det{}_j\,\tilde{a} \equiv \left|\,|\tilde{a}|_j^2\right|_i^2 \equiv \tilde{a}\tilde{a}^{*i}\tilde{a}^{*j}\tilde{a}^{*i*j} = \\ = \tilde{a}\cdot\tilde{a}^{*} = \left(\alpha_0^2 + \alpha_1^2 - \alpha_2^2 - \alpha_3^2\right)^2 + 4\left(\alpha_0\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3\right)^2. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Можно заметить, что определитель (3.3) может обращаться в ноль для некоторых ненулевых компонент α_n. Соответствующие числа являются делителями нуля. Мы имеем дело с такими числами, например, когда $|\alpha_0| = |\alpha_3| \neq 0$ при $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, либо когда $|\alpha_1| = |\alpha_2| \neq 0$ при $\alpha_0 = \alpha_3 = 0$.

В отличие от частичных детерминантов, полные детерминанты вещественны и неотрицательны. Поэтому мы определяем абсолютную величину (или через арифметический корень 4-го порядка:

$$\|\tilde{a}\| \equiv N(\tilde{a}) = \sqrt[4]{\det\tilde{a}} \equiv \sqrt[4]{\tilde{a}\tilde{a}^{*i}\tilde{a}^{*j}\tilde{a}^{*i*j}} = \sqrt[4]{\left|\,|\tilde{a}|_j^2\right|_i^2}. \tag{3.4}$$

Заметим, числа $i \pm j$, $1 \pm ij$ имеют нулевую норму (или гипердлину). Как мы увидим ниже, числа $2\pi(i \pm j)$ и $\pi(i \pm j)$ являются гиперпериодами для гиперболических функций $\cosh(\widetilde{x}), \sinh(\widetilde{x})$ и $\tanh(\widetilde{x})$, $\mathrm{cotanh}\,(\widetilde{x})$, так же как $2\pi(1 \pm ij)$ и $\pi(1 \pm ij)$ являются гиперпериодами для тригонометрических функций $\cos(\widetilde{x}), \sin(\widetilde{x})$ и $\tan(\widetilde{x})$, $\mathrm{cotan}(\widetilde{x})$ соответственно.

Легко видеть, что (3.4, 3.3) совпадает с выражениями для нормы, полученными в [7, 22], как для полиномиального, так и для би-экспоненциального представления бикомплекса (в полярных системах координат для каждого из пространств-проекций). Интересно, что для «трёхмерного» бикомплекса (2.2) мы имеем длину: $\|\widetilde{a}\| = \sqrt{\alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}$, которая сводится к евклидовой форме благодаря соотношению $\alpha_0\alpha_3 = \alpha_1\alpha_2$. Действительно, чтобы для обычного вектора $\{x,\ y,\ z\}$ получить $x^2 + y^2 + z^2 = \alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2$, соответствующие компоненты бикомплекса можно найти, например, так:

$$\alpha_0 = x,\ \alpha_1 = y,\ \alpha_2 = xz/\sqrt{x^2 + y^2},\ \alpha_3 = yz/\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Полный детерминант, введённый выше, можно использовать непосредственно для отыскания обратной величины бикомплексного числа с ненулевой нормой:

$$\tilde{a}^{-1} \equiv \frac{1}{\tilde{a}} = \frac{\tilde{a}^{*}}{\det\tilde{a}}. \tag{3.5}$$

Можно получить (3.5) и через последовательные преобразования в пространствах-проекциях, применяя соответствующие правила, приведённые выше:

$$\frac{1}{\tilde{a}} = \frac{\tilde{a}^{*j}}{|\tilde{a}|_j^2} \equiv \frac{\tilde{a}^{*i}}{|\tilde{a}|_i^2} \equiv \frac{\tilde{a}^{*i}}{\tilde{a}\cdot\tilde{a}^{*i}} = \frac{\tilde{a}^{*i}\cdot\left(\tilde{a}\tilde{a}^{*i}\right)^{*j}}{\tilde{a}\tilde{a}^{*i}\cdot\left(\tilde{a}\tilde{a}^{*i}\right)^{*j}} = \frac{\tilde{a}^{*i}\tilde{a}^{*j}\tilde{a}^{*i*j}}{\tilde{a}\tilde{a}^{*i}\tilde{a}^{*j}\tilde{a}^{*i*j}} = \frac{\tilde{a}^{*}}{\|\tilde{a}\|^4}.$$

Обращённые делители нуля (гипернули) можно интерпретировать как гипербесконечности ij-алгебры.

Нетрудно проверить, что норма (определитель) произведения равна произведению норм (определителей):

$$\left\|\tilde{a}\cdot\tilde{b}\right\| = \|\tilde{a}\|\cdot\left\|\tilde{b}\right\|, \qquad \det_{i,j}\tilde{a}\tilde{b} = \det_{i,j}\tilde{a}\det_{i,j}\tilde{b}.$$

В отличие от комплексных чисел и обычных модуль гиперкомплексного числа может быть, однако, и меньше одной из его компонент. Наряду с наличием делителей нуля это суть те особенности, которые делают неприменимой теорему Фробениуса [[17], [22]] для данной метрики.

Покажем, что интервал между двумя событиями подобен норме бикомплекса. Для биквадрата интервала имеем: $dS^4 = c^4dt^4 + dl^4 - 2c^2dt^2dl^2$. С другой стороны, детерминант (3.3) имеет вид:

$$\det\tilde{a} = \left(\alpha_0^2+\alpha_1^2\right)^2 + \left(\alpha_2^2+\alpha_3^2\right)^2 + 4\left(\alpha_0\alpha_2+\alpha_1\alpha_3\right)^2 - 2\left(\alpha_0^2+\alpha_1^2\right)\left(\alpha_2^2+\alpha_3^2\right).$$

Доопределим равенство $\det\widetilde{a} = dS^4$ с помощью дополнительного условия:

$$c^2dt^2dl^2 = \left(\alpha_0^2+\alpha_1^2\right)\left(\alpha_2^2+\alpha_3^2\right). \tag{3.6}$$

Система этих двух уравнений сводится к обычному квадратному уравнению в области действительных чисел:

$$T^2 - \left(\left(\alpha_0^2+\alpha_1^2\right)^2 + \left(\alpha_2^2+\alpha_3^2\right)^2 + 4\left(\alpha_0\alpha_2+\alpha_1\alpha_3\right)^2\right)T + \left(\alpha_0^2+\alpha_1^2\right)^2\left(\alpha_2^2+\alpha_3^2\right)^2 = 0,$$

решения которого всегда существуют и равны $T_1 = c^4dt^4$, $T_2 = dl^4$, так как детерминант уравнения

$$D = \left(\left(\alpha_0^2+\alpha_1^2\right)^2 - \left(\alpha_2^2+\alpha_3^2\right)^2\right)^2 + 4\left(\alpha_0\alpha_2+\alpha_1\alpha_3\right)^2\left(\left(\alpha_0^2+\alpha_1^2\right)^2 + \left(\alpha_2^2+\alpha_3^2\right)^2 + 4\left(\alpha_0\alpha_2+\alpha_1\alpha_3\right)^2\right)$$

всегда положителен.

Таким образом, норму бикомплексного числа всегда можно представить в виде модуля релятивистского интервала. В важном частном случае, когда $\alpha_2 = 0 = \alpha_1$, имеем

$$|cdt| = |\alpha_0|, \quad |dl| = |\alpha_3| \qquad \text{(см. ниже (4.3))}.$$

IV. Формула Эйлера, факторизация и извлечение корня

Перед тем, как определить извлечение корня для произвольного бикомплекса, рассмотрим два частных случая.

Первый случай относится к произведению двух комплексных чисел $a + ib$ и $c + jd$ (см. (2.2)). Этот простой случай соответствует матричному 2×2 оператору (либо вращению), применённому к «плоскому» вектору (т. е. обычному комплексному числу), принадлежащему к i-пространству ($Im_j = 0$). Действительно, из (3.3) и (2.2) мы имеем $\|\widetilde{a}\| = \sqrt{a^2c^2+b^2c^2+a^2d^2+b^2d^2}$, а из (2.5): $\hat{U} \to \rho - i\nu + j\mu - ij\lambda$, полагая «скалярный кватернион» $\{\alpha_0,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3\}$ пропорциональным $\{\rho,\ -\nu,\ \mu,\ -\lambda\}$.

Очевидно, в этом случае корень n-го порядка извлекается тривиально:

$$\sqrt[n]{\tilde{a}} = \sqrt[n]{(a+ib)\cdot(c+jd)} = \sqrt[n]{\|\tilde{a}\|}\exp\left[\left(i\arctan b/a + j\arctan d/c + 2\pi(ki+lj)\right)/n\right], \tag{4.1}$$

где $k, l = \{0, 1..., n-1\}$ – натуральные числа.

Таким образом, период экспоненциальной функции в нашем гиперпространстве есть $2\pi(ki + lj)$. В общем случае это даёт n^2 значений для $\sqrt[n]{\tilde{a}}$.

Другой интересный случай есть гиперкомплексное число, представленное лишь двумя компонентами: $\widetilde{A} = a + ijd$. Из (2.8) и разложения Тейлора можно получить получить основную формулу такого числа:

$$\exp(ij\varphi) = \cosh\varphi + ij\sinh\varphi. \tag{4.2}$$

При $|d/a| \neq 1$ имеет место следующее представление:

$$\tilde{A} = a + ijd = \sqrt{|a^2 - d^2|}\exp\left(ij\,\mathrm{arctanh}\,\frac{d}{a}\right) \tag{4.3}$$

Заметим, $\mathrm{arctanh}\, d/a$ вещественно при $|d/a| < 1$, в противном случае оно комплексно либо в i-, либо в j- пространстве. Аналогично, при $|d/a| > 1$ существует и дополнительное, «симметричное» представление в i, j-пространстве

$$\begin{aligned} \tilde{A} = ij\,(d + ija) = ij\sqrt{|a^2 - d^2|}\exp\left(ij\,\mathrm{arctanh}\, a/d\right) = \\ = \sqrt{|a^2 - d^2|}\exp\left((i + j)\,\pi/2 + ij\,\mathrm{arctanh}\, a/d\right) \end{aligned} \tag{4.4}$$

Из сравнения (4.4) и (4.3) получаем гиперрасширение известной формулы $\arctan x = (\pi/2)\, sgn x - \arctan(1/x)$:

$$\mathrm{arctanh}\, x = -\,(i + j)\,\frac{\pi}{2} sgn\,(|x| - 1) + \mathrm{arctanh}\,\frac{1}{x}. \tag{4.5}$$

Таким образом, область значений обратного гиперболического тангенса расширяется естественным образом в гиперпространство при расширении области определения на всю действительную ось.

Используя (4.3), мы можем извлечь корень из простого двух-компонентного числа $\tilde{B} = \tilde{A}^2 = b + ijc$:

$$\sqrt[n]{\tilde{B}} = \sqrt[n]{\left\|\tilde{B}\right\|}\exp\left(\frac{2\pi(ki + lj)}{n} + \frac{1}{n}ij\,\mathrm{arctanh}\,\left(\frac{c}{b}\right)\right) \tag{4.6}$$

где $|c/b| \neq 1$, и $k, l = \{0, 1..., n-1\}$.

Предположив, что $\widetilde{B} = \widetilde{A}^2$, можно провести проверочное сравнение для $\tilde{A} \equiv a + ijd$ и $\sqrt{\widetilde{B}}$. Подставляя в (4.6) $b = a^2 + d^2$ и $c = 2ad$ мы имеем:

$$\sqrt{\tilde{B}} = \pm\left|a^2 - d^2\right|\cdot\left(\cosh\frac{\varphi}{2} + ij\sinh\frac{\varphi}{2}\right), \qquad \text{где} \quad \varphi = \mathrm{arctanh}\,\left(\frac{2ad}{a^2 + d^2}\right). \tag{4.7}$$

Простые преобразования гиперболических функций в (4.7) дают:

$$\sqrt{(a + ijd)^2} = \begin{pmatrix} \pm a \pm ijd \\ \pm d \pm ija \end{pmatrix}, \tag{4.8}$$

где различные комбинации знаков дают восемь значений для радикала $\sqrt{\widetilde{B}}$. Однако, только четыре из них линейно независимы в смысле (2.9), в то время как остальные получены путём умножения на ij.

В общем случае, когда $\left\|\widetilde{A}\right\| \neq 0$, мы можем обобщить формулу Эйлера следующим образом:

$$\tilde{A} \equiv a + ib + jc + ijd = \exp\left(\alpha_0 + i\alpha_1 + j\alpha_2 + ij\alpha_3\right) \equiv \exp(\tilde{a}) \tag{4.9}$$

где соотношение между $\widetilde{A}$ и $\widetilde{a}$ может быть найдено из системы:

$$\begin{array}{l} \alpha_0 = \ln\left\|\tilde{A}\right\|, \qquad \text{и} \\ \begin{cases} b_N = \sin\alpha_1\cos\alpha_2\cosh\alpha_3 - \cos\alpha_1\sin\alpha_2\sinh\alpha_3 \\ c_N = \cos\alpha_1\sin\alpha_2\cosh\alpha_3 - \sin\alpha_1\cos\alpha_2\sinh\alpha_3 \\ d_N = \sin\alpha_1\sin\alpha_2\cosh\alpha_3 \end{cases}, \end{array} \tag{4.10}$$

где $b_N = b/\left\|\widetilde{A}\right\|$, $c_N = c/\left\|\widetilde{A}\right\|$, и $d_N = d/\left\|\widetilde{A}\right\|$ являются нормализованными компонентами.

Подобно трёхмерному вращению, представленному обычным кватернионом [1], (4.9–4.10) представляют вращение α_1, α_2, α_3 в рассматриваемом гиперпространстве. Вырожденный случай (2.2, 4.1) можно интерпретировать по аналогии с подвесом Кардана (когда $\alpha_3 = 0$ в (4.9)).

Заметим, в отличие от обычных комплексных чисел и случаев (2.2, 2.5, 4.1), нормализованные компоненты b_N, c_N, d_N в общем случае могут изменяться по всей вещественной области от $-\infty$ до $+\infty$.

Можно привести (4.10) к алгебраической системе двух неизвестных $\tan\alpha_1$ и $\tan\alpha_2$:

$$\begin{cases} \tan^2\alpha_1 - \tan^2\alpha_2 = (b_N^2 - c_N^2)\left(1+\tan^2\alpha_1\right)\left(1+\tan^2\alpha_2\right) \\ \left(b_N\tan^2\alpha_1\tan\alpha_2 + c_N\tan\alpha_1\tan^2\alpha_2 = d_N\right)\left(\tan^2\alpha_1 - \tan^2\alpha_2\right) \end{cases} \tag{4.11}$$

и

$$\alpha_3 = \ln\left(\sin\left(\alpha_1+\alpha_2\right)/\left(c_N + b_N\right)\right). \tag{4.12}$$

Система (4.11) может быть решена в явном виде, однако полученные нами выражения символьными методами оказались чрезвычайно громоздкими, чтобы привести их здесь.

Чтобы обеспечить в (4.12) $\sin\left(\alpha_1+\alpha_2\right)/\left(c_N+b_N\right) > 0$, можно всегда выбрать подходящие решения (4.11) в виде $\alpha_{1,2} + \pi m$ благодаря периодичности тангенса. При $b = -c$ формально мы имеем особенность в (4.12). Однако эта особенность устранима путём комплексного сопряжения (4.9–4.12) (в i- или j- пространстве) и применяя сопряжение снова (в том же пространстве) к результату, полученному в правой части.

Для извлечения корня можно предложить и другой способ разложения «скалярного кватерниона» (2.2) на сомножители:

$$\alpha_0 + i\alpha_1 + j\alpha_2 + ij\alpha_3 = (a+ib)\cdot(c+jd)\cdot(e+ijf), \tag{4.13}$$

где a, b, c, d, e, f вещественны. Положим в (4.13) для простоты, что $\alpha_0 = 1 = a = c = e$. Тогда (4.13) приводит к следующей алгебраической системе:

$$\begin{cases} \alpha_3 = bd(1-bdf) + f \\ \alpha_2 = d(1-bdf) - bf \\ \alpha_1 = b(1-bdf) - df \end{cases} \tag{4.14}$$

Решение b, d, f системы (4.14) выражаются в явном виде гораздо более компактно, чем решение системы (4.11). Можно показать, что решения (4.14) существуют всегда и они вещественны. Для одного из решений существует особенность (напр., при

$\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 = 0$), которая является устранимой. Таким образом, ненулевой ($\left\|\widetilde{A}\right\| \neq 0$) «скалярный кватернион» представим элементарными (двумя комплексными и одним гиперкомплексным) сомножителями и из него можно извлечь корень в соответствии с (4.13), (4.9), либо (4.1), или (4.6).

V. Дифференцируемость

Возьмём гиперкомплексную функцию аргумента $\tilde{z} = x + iy + js + ijt$ в общем виде: $\tilde{f}(\tilde{z}) = u(x,y,s,t) + iv(x,y,s,t) + jw(x,y,s,t) + ijq(x,y,s,t)$. Условия Коши-Римана выражаются, как известно, $n(n-1)$ числом числом уравнений, где n – размерность пространства. Функция $\tilde{f}(\tilde{z})$ дифференцируема, если выполняются следующие двенадцать соотношений:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial q}{\partial t}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial s} = -\frac{\partial w}{\partial t},$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial s} = -\frac{\partial v}{\partial t}, \quad \frac{\partial q}{\partial x} = -\frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial t} \tag{5.1}$$

В работе [18] сделана попытка нетривиального обобщения понятия аналитической функции, для которой число условий, аналогичных Коши-Римана, не превышало бы числа функций-компонент. В работе [22] дана изящная и компактная запись условий Коши-Римана в более знакомом виде, где в качестве переменных взяты обобщённые, т. е. не одномерные, а двумерные (обычные комплексные) аргументы из пространств-проекций. В случае, когда эти аргументы представимы в трёхмерном виде (2.2), условия Коши-Римана приобретают наглядный и простой вид, а в четырёхмерном гиперпространстве аргументов условия (5.1) можно свести к шести комплексным уравнениям, используя комплексные экспоненты и комплексные проекции бикомплексных функций [22].

VI. Обсуждение

Среди многообразия ассоциативных алгебр (см., например, [19, 20, 21]) данная ассоциативно-коммутативная алгебра обладает полным наследованием свойств комплексных чисел. Ключевой является возможность построения соответствующей теории функции гиперкомплексного переменного [22]. Делители нуля, обычно понимаемые как мировые линии [20], совпали в этой алгебре с обобщёнными функций, что указывает на фундаментальное значение этих объектов. Делители нуля неразрывно связаны и с релятивистским интервалом, который, в свою очередь, оказывается абсолютно подобен норме гиперкомплексного числа в полном согласии с классическим выводами СТО.

Таким образом, сделаны серьёзные шаги в разработке бикомплексных чисел, построены основы их дифференциального и интегрального исчисления, отображения по типу конформных, «гиперповерхности» и некоторые аналитические продолжения [22], обобщённо-аналитические функции гиперкомплексного переменного [18].

Применение этого гиперпространства показало эффективность в задачах с выделенным направлением пространственно-временного взаимодействия (особенно квазипериодического), распространения или энергообмена.

Можно ожидать дальнейшего развития и новых приложений этой ij-алгебры и соответствующей ТФПКП в фундаментальной, математической и прикладной физике, вычислительной математике, биофизике и молекулярной химии.

Благодарности

Автор выражает признательность проф. Г. В. Воскресенскому и Э. С. Масунову за критические обсуждения оригинальной работы [13]. Недавние дискуссии с В. И. Елисеевым и Д. Г. Павловым были чрезвычайно плодотворными и полезными.

Литература

[1] W. R. Hamilton. Lectures in quaternions, Dublin, Hodges & Smith (1853); Elements of quaternions, Chesley Publ. Co. N.Y. (1969).

[2] Г. Корн и Т. Корн, Справочник по математике. Пер. с англ. под общ. ред. И. Г. Арамановича, Изд-во "Наука", Москва (1974) 832 стр.; Е. А. Каратаев. Кватернионы и трёхмерные повороты, http://karataev.nm.ru/quat3rot.pdf

[3] Hamaker J. P., Understanding radio polarimetry. Astron. Astrophys. Suppl. Ser. 143, (2000) 515-534 ; http://aanda.u-strasbg.fr:2002/ articles/aas/ps/2000/09/h1201.ps.gz

[4] А. П. Ефремов. Кватернионы: алгебра, геометрия и физические теории. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, № 1, с. 119, http://hypercomplex.ru

[5] G. H. Hoffstaetter, Successive approximations for charged particle motion, in arXiv: physics/0006008 V 1, 5 Jun 2000

[6] K. Heinemann and G. H. Hoffstatter, in Phys. Rev. E, 54 (1996) 4240; Official DESY Report 96-078.

[7] В. И. Елисеев, А. С. Фохт. Методы теории функций пространственного комплексного переменного. Киев, 1984, 57 с. (Препринт/АН УССР, Ин-т математики: 84.61).

[8] A. V. Smirnov, in Nucl. Instrum. & Meth. in Phys. Res., NIM A, 469 (1) (2001) 21

[9] Л. Левин. Теория волноводов. Пер. с англ. под ред. Вольмана В.И., "Радио и связь", Москва (1981) 312 стр.

[10] Э. Л. Бурштейн, Г. В. Воскресенский. Ускорители электронов с интенсивными пучками, "Атомиздат", Москва, (1970) 192 стр

[11] Л. А. Вайнштейн, В. А. Солнцев. Лекции по сверхвысокочастотной электронике, Изд-во "Советское радио", Москва, (1973) 400 стр.

[12] Л. А. Вайнштейн, Д. Е. Вакман, Разделение частот в теории колебаний и волн, Изд-во "Наука", Москва, (1983) 288 стр.

[13] А. В. Смирнов. "Исследование эффектов взаимодействия пучка с полями основной и несимметричных волн в неоднородных секциях ЛУЭ на бегущей волне", Диссертация, Московский инженерно-физический институт, МИФИ, Москва (1985) 171 стр.

[14] A. V. Smirnov et al, in Proc. of Particle Accelerator Conf. (PAC2001), IL., Chicago, 18-22 June(2001) 2293; http://accelconf.web.cern.ch/AccelConf/p01/PAPERS/WPAH087.PDF

[15] А. В. Смирнов. Коммутативная алгебра скалярных кватернионов. Владикавказский математический журнал, т. 6, Вып. 2 (2004), http://www.vmj.ru/articles/2004_2_6.pdf (attn.: опечатки!)

[16] A. V. Smirnov, in Proc. of Particle Accelerator Conference (PAC‘97), Vancouver, B.C., Canada, 12–16 May (1997) 894; Nucl. Instrum. and Meth. NIM A349 (1994) 295

[17] Л. С. Понтрягин. Обобщение чисел, М., Наука, 1986, 120 с

[18] Г. И. Гаранько. Обобщённо-аналитические функции поличисловой переменной. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, № 1, с. 83, http://hypercomplex.ru

[19] А. Н. Аверкин. Об аналитической электродинамике. http://ephir.narod.ru/11..htm

[20] Д. Г. Павлов. Всё о коммутативно-ассоциативных числах, http://hypercomplex.ru

[21] И. Л. Кантор, А. С. Солодовников. "Гиперкомплексные числа". М., 1973 г.

[22] В. И. Елисеев. Введение в методы теории функций пространственного комплексного переменного. Издано Центром научно-технического творчества молодежи Алгоритм. - М.:, НИАТ. 1990, http://www.maths.ru/

Several properties of scalar quaternions

A. V. Smirnov

DULY Research Inc., USA

It is investigated the commutative algebra of bi-complex numbers endowed with the metric $(+--+)$. Like in he case of usual complex numbers, this algebra of 4-th rank has properties as: division, conjugation, root-extraction, factorization and the straight analogue of the Euler formula. It is shown that rotations can be represented in this algebra, without loss of commutativity. The presence of zero-divisors is closely related to the relativistic arc-length.

Key-words: bi-complex numbers, associative-commutative algebra, conjugation, Euler formula.
MSC: 81R05, 47L90, 11R52.

БИНАРНАЯ СИСТЕМА ЧИСЕЛ И ФИНСЛЕРОВА ГЕОМЕТРИЯ ЛОКАЛЬНОГО АНИЗОТРОПНОГО ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ

Р. Г. Зарипов

Институт механики и машиностроения КазНЦ РАН, Казань, Россия
zaripov@mail.knc.ru

Рассматривается система бинарных чисел и их преобразования, которые допускают отображения на преобразования временного интервала и пространственного расстояния локального пространства-времени. Установлены четыре принципиально различных типа двумерных локальных анизотропных финслеровых геометрий и находятся новые преобразования. Исследуются групповые свойства закона композиции одинаково направленных анизотропных скоростей. Новым результатом является взаимосвязь элемента финслерова пространства с полунормой в вероятностном подходе к исследованию локальной геометрии.

Ключевые слова: финслеровы пространства, анизотропия, бинарные числовые системы, скорости.

Введение

Известно, что базисом современной физической теории (в случае специальной теории относительности) является локальное изотропное четырехмерное псевдоевклидово пространство-время Минковского. На одном из методов расширения псевдоевклидовой геометрии основывается финслерова геометрия, характерным свойством которой является наличие в локальном пространстве-времени анизотропии. Отметим лишь монографии [1–8], где приводятся подробные обзоры исследований в этом направлении. При этом считается, что в предельном случае $c \to \infty$ (c – "средняя" скорость света в вакууме вдоль замкнутого пути) релятивистские законы механики переходят в соответствующие законы классической механики. Однако такой переход носит формальный характер, что показано в данной работе при отображении преобразований Галилея на преобразования дуальных чисел. Целью настоящей работы является более глубокое изучение вопросов одновременности разноместных событий в локальном финслеровом пространстве-времени, что позволяет строго физически обосновать финслерову структуру геометрии и найти преобразования временных интервалов и пространственных расстояний между инерциальными системами отсчета. Здесь используется случай двумерного пространства-времени, что проясняет взаимосвязь с системой бинарных чисел. Дальнейшее развитие финслерового обобщения специальной теории относительности видится в использовании вероятностных подходов в исследованиях локальных геометрий.

1. Отношение одновременности разноместных событий и анизотропия скорости света.

Рассмотрим три события, взаимосвязанные световым сигналом и происходящие в пространственных точках A и B элемента твердого тела с физической длиной, равной пространственному расстоянию dL_{AB}. Показания часов в точках A и B есть физические времена T_A и T_B. Пусть из точки A через интервал времени dT_1^A отправляется сигнал, который через интервал времени dT_2^B прибудет в точку B. Далее сигнал, отраженный от точки B, через интервал времени dT_3^A прибудет в точку A. События происходят в локальной системе отсчета пространственно-временного континуума. Согласно А. Пуанкаре [9] для стандартной синхронизации часов необходимо определить отношение метрической одновременности события в точке A с событием в точке B, происходящим в середине временного интервала $dT_3^A - dT_1^A$. Таким образом, имеем соотношение

$$dT_2^B - dT_1^A = dT_3^A - dT_2^B, \tag{1.1}$$

которое дает равенство физических скоростей света $c_{AB} = c_{BA} = c_0$ вдоль твердого тела. При этом выполняется постулат о равенстве масштабов расстояния, измеряющих длину твердого тела в прямом и обратном направлениях, и используется опытный факт постоянства "средней" скорости света вдоль замкнутого пути, то есть имеем соотношения

$$dL_{AB} = dL_{BA}, \qquad c_0 = \frac{dL_{AB} + dL_{BA}}{dT_3^A - dT_1^A} = \frac{2dL_{AB}}{dT_3^A - dT_1^A}. \tag{1.2}$$

Согласно Г. Рейхенбаху и А. Грюнбауму [10, 11] события, происходящие во временном интервале $dT_3^A - dT_1^A$, есть топологически одновременные события к событию в точке B. Отношение метрической одновременности определяется конвенционально выбором произвольного события из топологически одновременных событий.

Сигнальный метод синхронизации часов, предложенный впервые А. Пуанкаре, дает наблюдаемые интервалы времени в точке A

$$dT_1^A = dT_2^B - dL_{AB}/c_0, \quad dT_3^A = dT_2^B + dL_{AB}/c_0\,\cdot \tag{1.3}$$

Различаем несколько случаев. В первом случае интервал собственного времени в точке B определяется выражением

$$dT_0^B = \frac{1}{2}\sqrt{\left(dT_1^A + dT_3^A\right)^2 - \left(dT_1^A - dT_3^A\right)^2} = \\ = \sqrt{dT_1^A dT_3^A} = \sqrt{\left(dT - dL/c_0\right)\left(dT + dL/c_0\right)}, \tag{1.4}$$

где опущены используемые индексы. Запишем квадратичную дифференциальную форму

$$ds^2 = c_0^2 dT_0^2 = c_0^2 dT^2 - dL^2, \tag{1.5}$$

которая представляет собой элемент длины в т. н. локальной майкельсоновой системе отсчета пространственно-временного континуума. Форма задана в координатной сетке (x_0, x_1, x_2, x_3) с $x_0 = c_0 t$. Для риманового многообразия с квадратичной формой

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j \tag{1.6}$$

и сигнатурой $(+---)$ имеем

$$dT = \sqrt{g_{00}}\left(dx^0 + \frac{g_{0\alpha} dx^\alpha}{g_{00}}\right), \tag{1.7}$$

$$dL^2 = \left(-g_{\alpha\beta} + \frac{g_{0\alpha} g_{0\beta}}{g_{00}}\right) dx^\alpha dx^\beta, \tag{1.8}$$

где $dL = |dL| = \sqrt{dL^2}$ и значения индексов $i = (0, 1, 2, 3)$, $\alpha = (1, 2, 3)$. В полугеодезических координатах имеем $g_{0\alpha} = 0, g_{00} = \pm 1$. Для определителя справедливо неравенство $|g_{ij}| < 0$.

Для пространства-времени Минковского в галилеевых координатах получим

$$dT = dt, \quad dL^2 = (d\vec{r})^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2. \tag{1.9}$$

Здесь интервал физического времени совпадает с интервалом координатного времени и физическая длина есть длина локального радиуса-вектора $(d\vec{r})^2$ с координатами (dx, dy, dz). Физические скорости произвольных сигналов равняются координатным. В случае (1.7) и (1.8) эти равенства не выполняются.

Во втором случае рассмотрим риманово многообразие с квадратичной формой (1.6), имеющей сигнатуру $(+ + ++)$. Тогда имеем соотношения

$$dT_0^B = \frac{1}{2}\sqrt{(dT_1^A + dT_3^A)^2 + (dT_1^A - dT_3^A)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}\left[(dT_1^A)^2 + (dT_3^A)^2\right]} = \sqrt{dT^2 + dL^2/c_0^2}, \tag{1.10}$$

$$ds^2 = c_0^2 dT_0^2 = c_0^2 dT^2 + dL^2, \tag{1.11}$$

$$dL^2 = \left(g_{\alpha\beta} - \frac{g_{0\alpha}g_{0\beta}}{g_{00}}\right) dx^\alpha dx^\beta \tag{1.12}$$

и для определителя справедливо неравенство $|g_{ij}| > 0$.

В третьем вырожденном случае положим $dT_1^A = dT_3^A = dT_2^B$ и получим

$$dT_0^B = dT, \quad ds^2 = c_0^2 dT_0^2 = c_0^2 dT^2 = c_0^2 \left[g_{00}\left(dx^0 + \frac{g_{0\alpha}dx^\alpha}{g_{00}}\right)\right]^2. \tag{1.13}$$

Риманово многообразие с определителем $|g_{ij}| = 0$ имеет сигнатуру с некоторыми нулевыми значениями.

Требует отдельного рассмотрения ещё один невырожденный случай риманова многообразия с сигнатурой $(+ + --)$.

Наиболее общая связь между временными интервалами запишется так

$$\varepsilon_{12} dT_3^A + \varepsilon_{23} dT_1^A + \varepsilon_{31} dT_2^B = 0, \tag{1.14}$$

где $\varepsilon_{12}, \varepsilon_{23}$ и ε_{31} есть постоянные элементы антисимметричной временной матрицы перехода между событиями. При стремлении точки к точке интервалы времен dT_3^A и dT_2^B приближаются к dT_1^A, поэтому в пределе получим соотношение

$$\lim_{A\to B}\left(\varepsilon_{12} dT_3^A + \varepsilon_{23} dT_1^A + \varepsilon_{31} dT_2^B\right) = \left(\varepsilon_{12} + \varepsilon_{23} + \varepsilon_{31}\right) dT_1^A = 0. \tag{1.15}$$

Поскольку dT_1^A есть произвольная величина, то вытекает условие

$$\varepsilon_{12} + \varepsilon_{23} + \varepsilon_{31} = 0, \tag{1.16}$$

накладываемое на коэффициенты и, следовательно, имеем два независимых параметра.

Из соотношений (1.14) и (1.16) находим следующее равенство

$$\frac{dT_2^B - dT_1^A}{\varepsilon_{12}} = \frac{dT_3^A - dT_2^B}{\varepsilon_{23}} = \frac{dT_1^A - dT_3^A}{\varepsilon_{13}} = \frac{dL_{AB}}{c_0}, \tag{1.17}$$

из которого получим значения анизотропных физических и "средней" скорости света

$$c_{AB} = c_+ = \frac{c_0}{\varepsilon_{12}} c_{BA} = c_- = \frac{c_0}{\varepsilon_{23}} c = \gamma c_0 = \frac{2c_0}{\varepsilon_{13}} \tag{1.18}$$

$$\frac{1}{c_+}-\frac{1}{c_-}=\frac{2\varepsilon}{c},\quad \frac{1}{c_+}+\frac{1}{c_-}=\frac{2}{c},\quad \varepsilon=\frac{\varepsilon_{12}-\varepsilon_{23}}{\varepsilon_{13}},\tag{1.19}$$

где ε есть скалярный параметр временной анизотропии и γ – скалярный параметр, характеризующий "показатель преломления" для света. Для "средних" скоростей вдоль замкнутого пути должен выполняться следующий предел $\lim\limits_{c_0\to\infty} c/c_0 = 1$. Случай с $\varepsilon_{12}=\varepsilon_{23}=0$ соответствует абсолютной одновременности классической физики, в которой сигнальный метод Пуанкаре отсутствует.

Наблюдаемые временные интервалы в точке равняются

$$dT_1^A = dT_2^B - dL_{AB}/c_+,\qquad dT_3^A = dT_2^B + dL_{AB}/c_-\tag{1.20}$$

Значение $c_{AB}=c_+$ определяет скорость света, отправленного из точки A в точку B, а $c_{AB}=c_+$ – скорость света, отправленного из точки B в точку A твердого тела. Это означает, что в точке A не определяется скорость света, отправленного из точки A в противоположное от точки B направление. Аналогично, в точке B не определяется скорость света, отправленного из точки A в противоположное от точки A направление. При $\varepsilon_{13}=2$ и $\varepsilon_{12}=\varepsilon_{23}=1$ из рассматриваемой общей синхронизации часов получим стандартную синхронизацию по Пуанкаре. Преобразования координатной сетки не устраняют физическую анизотропию скорости света. Координатная анизотропия скорости dx^α/dx^0 в римановом многообразии с (1.6) для изотропных геодезических устраняется преобразованиями координатной сетки, если dT есть полный дифференциал. В отличие от работ [12, 13], где приводятся впервые соотношение вида (1.10) для моментов времени, здесь имеем соотношение (1.10) для временных интервалов.

2. Типы финслеровых геометрий

Рассмотрим преобразования временного интервала и пространственного расстояния при переходах между движущимися локальными системами (K) и (K'). В системе (K') имеем скорости светового сигнала

$$c'_+=\frac{c_0}{\varepsilon'_{12}},\quad c'_-=\frac{c_0}{\varepsilon'_{23}},\quad c'=\gamma' c_0=\frac{2c_0}{\varepsilon'_{13}},\tag{2.1}$$

$$\frac{1}{c'_+}-\frac{1}{c'_-}=\frac{2\varepsilon'}{c'},\quad \frac{1}{c'_+}+\frac{1}{c'_-}=\frac{2}{c'},\quad \varepsilon'=\frac{\varepsilon'_{12}-\varepsilon'_{23}}{\varepsilon'_{13}}.\tag{2.2}$$

Для наглядности примем, что элемент твердого тела расположен вдоль положительного направления dx^1 $(dx^2=dx^3=0)$. Он начинает движение от начала координатной сетки системы (K). Физическая длина элемента твердого тела, расположенного вдоль положительного направления $dx^{1'}$, равняется $dX'=|dX'|$ и является, согласно (1.8), абсолютной величиной. Направление $dx^{1'}$ совпадает с направлением dx^1.

Рассмотрим первый случай. Воспользуемся методом коэффициента "k" для света, идущего от A к B и от B к A, и запишем соотношения

$$\left(c'/c_0\right)^{1/2}\left(dT'-dX'/c'_+\right)=k_+\left(c/c_0\right)^{1/2}\left(dT-dX/c_+\right),\tag{2.3}$$

$$\left(c'/c_0\right)^{1/2}k'_-\left(dT'+dX'/c'_-\right)=\left(c/c_0\right)^{1/2}\left(dT+dX/c_-\right).\tag{2.4}$$

В других случаях расположения элемента твердого тела в системах (K) и (K') имеют место соотношения, отличные от (2.3) и (2.4) с другими значениями скорости света.

Коэффициенты $k_+ (c/c')^{1/2}$ и $k'_- (c'/c)^{1/2}$ описывают эффект Допплера в прямом и обратном направлениях. Согласно (2.3) и (2.4) получим равенства

$$k'_- \frac{c'}{c_{0\,-}} \left[dT'^2 - \left(\frac{1}{c'_+} - \frac{1}{c'_-} \right) dT'dX' - \left(\frac{1}{c'_+ c'_-} \right) dX'^2 \right] =$$

$$= k_+ \frac{c}{c_0} \left[dT^2 - \left(\frac{1}{c_+} - \frac{1}{c_-} \right) dTdX - \left(\frac{1}{c_+ c_-} \right) dX^2 \right], \tag{2.5}$$

$$k_+ k'_- \frac{dT' + dX'/c'_-}{dT' - dX'/c'_+} = \frac{dT + dX/c_-}{dT - dX/c_+}. \tag{2.6}$$

При $dX' = 0$ и $dX = 0$ имеем, соответственно, $dX = v_+ dT$ и $dX' = -v'_- dT'$, где v_+ и v'_- есть относительные скорости систем. Из (2.6) вытекает выражение

$$k_+ k'_- = k^2 = \frac{1 + v_+/c_-}{1 - v_+/c_+} = \frac{1 + v'_-/c'_+}{1 - v'_-/c'_-}, \tag{2.7}$$

из которого находим взаимосвязь между скоростями

$$c \left[\frac{1}{v_+} - \frac{1}{c_+} \right] = c' \left[\frac{1}{v'_-} - \frac{1}{c'_-} \right]. \tag{2.8}$$

При $dX/dT = u_+$ и $dX'/dT' = u'_+$, а также с учетом (2.7), равенство (2.6) для одинаково направленных скоростей преобразуется следующим образом

$$\frac{1 - v_+/c_+}{1 + v_+/c_-} \frac{1 - u'_+/c'_+}{1 + u'_+/c'_-} = \frac{1 - u_+/c_+}{1 + u_+/c_-}. \tag{2.9}$$

Из него, в частности, при $\varepsilon = \varepsilon'$, вытекает закон композиции безразмерных одинаково направленных анизотропных скоростей

$$\left(\frac{u_+}{c} \right) = \left(\frac{u'_+}{c'} \right) \circ \left(\frac{v_+}{c} \right) = \frac{u'_+/c' + v_+/c - 2\varepsilon u'_+ v_+/c'c}{1 + (1 - \varepsilon^2)\, u'_+ v_+/c'c}, \tag{2.10}$$

множество которых образует абелевую группу.

Определители прямых и обратных преобразований, вытекаемых из соотношений (2.3) и (2.4), равняются $A = k_+/k'_-$ и $A' = k'_-/k$ $(AA' = 1)$. Учитывая (2.7), получим значения

$$k_+ = \sqrt{A} k, \quad k'_- = \sqrt{A'} k, \tag{2.11}$$

где $A = A(v_+)$, как и $A' = A\left(v'_-\right)$, обладает групповым свойством

$$A(u_+) = A\left(u'_+\right) A(v_+). \tag{2.12}$$

Используя закон композиции в виде (2.9) и равенство (2.12), получим уравнение

$$(1 - v_+/c_+)(1 + v_+/c_-) \frac{d \ln A}{dv_+} = -2r \tag{2.13}$$

имеющее одинаковый вид и для скоростей u_+, u'_+. Инвариантный параметр r может зависеть от инвариантных значений c_+ и c_-. Интегрируя (2.13) при условии $A(0) = 1$, получим выражение $A(v_+)$, преобразования и квадрат форм-инвариантной метрической функции в следующих типах локальных финслеровых геометрий.

Тип I ($\varepsilon_{12} \neq \varepsilon_{23}$).

$$A\left(v_+\right) = \left(\frac{1 + v_+/c_-}{1 - v_+/c_+}\right)^{-r} \tag{2.14}$$

$$\frac{dX'}{\sqrt{c'}} = \sqrt{\frac{A\left(v_+\right)}{c}}\frac{dX - v_+dT}{\alpha_+}, \qquad \alpha_+ = \left[\left(1 - \frac{v_+}{c_+}\right)\left(1 + \frac{v_+}{c_-}\right)\right]^{1/2} \tag{2.15}$$

$$\sqrt{c'}dT' = \frac{\sqrt{A\left(v_+\right)c}}{\alpha_+}\left\{dT\left[1 - \frac{\left(\varepsilon + \varepsilon'\right)v_+}{c}\right] - dX\left[\frac{v_+}{c_+c_-} + \frac{\varepsilon - \varepsilon'}{c}\right]\right\} \tag{2.16}$$

$$\begin{aligned} F^2 &= cc_0\left(\frac{dT - dX/c_+}{dT + dX/c_-}\right)^r\left(dT - dX/c_+\right)\left(dT + dX/c_-\right) = \\ &= cc_0\left(\frac{dT - \left(1 + \varepsilon\right)dX/c}{dT + \left(1 - \varepsilon\right)dX/c}\right)^r\left[dT^2 - \frac{2\varepsilon dTdX}{c} - \frac{\left(1 - \varepsilon^2\right)dX^2}{c^2}\right]. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Тип II ($\varepsilon_{12} + \varepsilon_{23} = \varepsilon'_{12} + \varepsilon'_{23} = 0$).

$$A\left(v_+\right) = \exp\left(-\frac{2rv_+}{1 - v_+/c_+}\right) \tag{2.18}$$

$$dX' = \sqrt{A\left(v_+\right)}(dX - v_+dT)/\alpha_+, \quad \alpha_+ = 1 - v_+/c_+ \tag{2.19}$$

$$dT' = \frac{\sqrt{A\left(v_+\right)}}{\alpha_+}\left\{dT\left[1 - v_+\left(\frac{1}{c_+} + \frac{1}{c'_+}\right)\right] - dX\left[-\frac{v_+}{c_+^2} + \left(\frac{1}{c_+} - \frac{1}{c'_+}\right)\right]\right\} \tag{2.20}$$

$$F^2 = c_0^2\exp\left(\frac{2rdX}{dT - dX/c_+}\right)\left(dT - dX/c_+\right)^2. \tag{2.21}$$

Значение $A\left(v_+\right)$ и преобразования в типе II вытекают из формул (2.13), (2.15)–(2.17) в типе I формально при $c_+ = -c_-$.

Тип III ($\varepsilon_{12} \neq \varepsilon_{23}$).

$$A\left(v_+\right) = \exp\left(-2r \cdot arctg\frac{v_+/c}{1 - \varepsilon v_+/c}\right), \tag{2.22}$$

$$\frac{dX'}{\sqrt{c'}} = \sqrt{\frac{A\left(v_+\right)}{c}}\frac{dX - v_+dT}{\alpha_+}, \quad \alpha_+ = \left[1 - \frac{2\varepsilon v_+}{c} + \frac{\left(1 + \varepsilon^2\right)v_+^2}{c^2}\right]^{1/2} \tag{2.23}$$

$$\sqrt{c'}dT' = \frac{\sqrt{A\left(v_+\right)c}}{\alpha_+}\left\{dT\left[1 - \frac{\left(\varepsilon + \varepsilon'\right)v_+}{c}\right] - dX\left[-\frac{v_+\left(1 + \varepsilon^2\right)}{c^2} + \frac{\varepsilon - \varepsilon'}{c}\right]\right\} \tag{2.24}$$

$$\begin{aligned} F^2 &= \frac{1}{2}cc_0\left\{\exp\left[2rarctg\frac{\left(dT + dX/c_-\right) - \left(dT - dX/c_+\right)}{\left(dT + dX/c_-\right) + \left(dT - dX/c_+\right)}\right]\right\} \times \\ &\times\left[\left(dT - dX/c_+\right)^2 + \left(dT + dX/c_-\right)^2\right] = \\ &= cc_0\left[\exp\left(-2rarctg\frac{dX}{cdT - \varepsilon dX}\right)\right]\left[dT^2 - \frac{2\varepsilon dTdX}{c} + \frac{\left(1 + \varepsilon^2\right)dX^2}{c^2}\right]. \end{aligned} \tag{2.25}$$

Тип IV ($\varepsilon_{12} = \varepsilon_{23} = \varepsilon'_{12} = \varepsilon'_{23} = 0$).

$$A\left(v\right) = \exp\left(-2rv\right) \tag{2.26}$$

$$dX' = \sqrt{A\left(v\right)}\left(dX - vdT\right), \quad dT' = \sqrt{A\left(v\right)}dT \tag{2.27}$$

$$F^2 = c_0^2 \left[\exp\left(2rdX/dT \right) \right] dT^2. \tag{2.28}$$

Формулы для типа III получены на основании результатов работы [14]. Формулы для типа IV получены из соотношений (2.18)–(2.21) в типе II при $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{23} = 0$. При $\varepsilon' = \varepsilon$ и $c' = c$ первые три типа соответствуют для определенных значений r и c трём типам локальных финслеровых геометрий с индикатрисой постоянной кривизны, рассмотренных в работе [15].

Рассмотрим случай с $r = r\left(c_+, c_-\right)$ и запишем интервал собственного времени в типе I так

$$dT_0 = \left(dT - dX/c_+ \right)^{\frac{1+r}{2}} \left(dT + dX/c_- \right)^{\frac{1-r}{2}}. \tag{2.29}$$

Равенство $dT_0 = dT$ соответствует геометрии Галилея и имеет место при $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{23} = 0$, если выполняются соотношения

$$\frac{1+r}{2} = \frac{c_+}{c_+ + c_-} = \frac{c}{2c_-}, \frac{1-r}{2} = \frac{c_-}{c_+ + c_-} = \frac{c}{2c_+}. \tag{2.30}$$

Из (2.30) получим инвариантное значение параметра

$$r = \frac{c_+ - c_-}{c_+ + c_-} = -\varepsilon \tag{2.31}$$

и, следовательно, интервал собственного времени примет вид

$$dT_0 = \left(\frac{dT - dX/c_+}{dT + dX/c_-} \right)^{(c_+ - c_-)/2(c_+ + c_-)} \sqrt{\left(dT - dX/c_+ \right)\left(dT + dX/c_- \right)} =$$

$$= \left(dT - dX/c_+ \right)^{c_+/(c_+ + c_-)} \left(dT + dX/c_- \right)^{c_-/(c_+ + c_-)}. \tag{2.32}$$

Квадрат финслеровой метрической функции запишется так

$$F^2 = \frac{2c_0^2}{\varepsilon_{13}} \left(dT_1 \right)^{2c_+/(c_+ + c_-)} \left(dT_3 \right)^{2c_-/(c_+ + c_-)} = cc_0 dT_0^2 = \frac{2c_+ c_-}{c_+ + c_-} c_0 dT_0^2. \tag{2.33}$$

В работах [8], [15] и [16] рассматривается анизотропия физической скорости света ($c_+ \neq c_- \neq c_0$, $c_+ c_- = c_0^2$, $r = -\varepsilon$) для квадрата финслеровой метрической функции (2.33) без коэффициента $2/\varepsilon_{13}$. Там же приводятся соответствующие нелинейные и линейные преобразования для случая двумерного и четырехмерного финслерового пространства-времени с одним скалярным параметром.

Для случая $r = 0$ в типе I имеем

$$F^2 = \frac{2c_0^2}{\varepsilon_{13}} \left(dT_1 \right) \left(dT_3 \right) = cc_0 dT_0^2 = \frac{2c_+ c_-}{c_+ + c_-} c_0 \left(dT - dX/c_+ \right) \left(dT + dX/c_- \right). \tag{2.34}$$

В случае $r \neq 0$ и $c_+ = c_- = c_0$ получим

$$F^2 = \left[\frac{\left(c_0 dT - dX \right)^2}{c_0^2 dT^2 - dX^2} \right]^r \left(c_0^2 dT^2 - dX^2 \right). \tag{2.35}$$

Обобщением выражения (2.35) с учетом (1.6)–(1.8) для четырехмерного пространства-времени является

$$F^2 = \left[\frac{\left(c_0 dT - dL \right)^2}{c_0^2 dT^2 - dL^2} \right]^r \left(c_0^2 dT^2 - dL^2 \right) = \left[\frac{\left(c_0 dT - dL \right)^2}{g_{ij} dx^i dx^j} \right]^r g_{ij} dx^i dx^j. \tag{2.36}$$

В отличие от работы [17] в (2.36) отсутствует четырехмерный вектор ν_i с $\nu_i\nu^i=0$, указывающей локально выделенные направления. Обобщение результатов работы [17] на случай анизотропии координатной скорости света дается в [31]. Следует отметить, что добавление к рассмотренным преобразованиям ещё двух $y'/\sqrt{c'}=y\sqrt{A\left(v_+\right)/c}$ и $z'/\sqrt{c'}=z\sqrt{A\left(v_+\right)/c}$ не приводят к замене $dX\to dL$ в приведенных метрических функциях.

В галилеевых координатах имеем квадрат финслеровой метрической функции

$$F^2=\left[\frac{\left(c_0dt-\sqrt{d\vec{r}^2}\right)^2}{c_0^2dt^2-d\vec{r}^2}\right]^r\left(c_0^2dt^2-d\vec{r}^2\right),\tag{2.37}$$

требующей отдельного рассмотрения.

3. Закон композиции одинаково направленных анизотропных скоростей

Пусть в системах выполняется одинаковая анизотропия скоростей светового сигнала, т. е. имеем равенства $\varepsilon_{12}=\varepsilon'_{12}$, $\varepsilon_{23}=\varepsilon'_{23}$ и $\varepsilon_{13}=\varepsilon'_{13}$. Тогда прямые и обратные преобразования в типе I запишутся так

$$dX'=\left(\frac{1+v_+/c_-}{1-v_+/c_+}\right)^{-r/2}\frac{dX-v_+dT}{\alpha_+},\quad \alpha_+=\left[\left(1-\frac{v_+}{c_+}\right)\left(1+\frac{v_+}{c_-}\right)\right]^{-1/2},\tag{3.1}$$

$$dT'=\left(\frac{1+v_+/c_-}{1-v_+/c_+}\right)^{-r/2}\frac{1}{\alpha_+}\left\{dT\left[1-\frac{2\varepsilon v_+}{c}\right]-dX\frac{v_+}{c_+c_-}\right\},\tag{3.2}$$

$$dX=\left(\frac{1-v'_-/c_-}{1+v'_-/c_+}\right)^{-r/2}\frac{dX'+v'_-dT'}{\alpha'_-},\quad \alpha'_-=\left[\left(1+\frac{v'_-}{c_+}\right)\left(1-\frac{v'_-}{c_-}\right)\right]^{1/2},\tag{3.3}$$

$$dT=\left(\frac{1-v'_-/c_-}{1+v'_-/c_+}\right)^{-r/2}\frac{1}{\alpha'_-}\left\{dT'\left[1+\frac{2\varepsilon v'_-}{c'}\right]+dX'\frac{v'_-}{c_+c_-}\right\},\tag{3.4}$$

где относительные скорости удовлетворяют равенству

$$\frac{1}{v_+}-\frac{1}{v'_-}=\frac{1}{c_+}-\frac{1}{c_-}.\tag{3.5}$$

Закон композиции одинаково направленных абсолютных анизотропных скоростей имеет вид

$$u_+=u'_+\circ v_+=\frac{u'_++v_+-2\varepsilon u'_+v_+/c}{1+\left(1-\varepsilon^2\right)u'_+v_+/c^2}.\tag{3.6}$$

Рассмотрим третью систему (K''), которая движется вдоль положительного направления со скоростью w_+ и z'_+ относительно систем (K) и (K'), соответственно. Тогда, используя преобразования между (K'') и (K'), окончательно получим закон композиции относительных одинаково направленных анизотропных скоростей

$$w_+=z'_+\circ v_+=\frac{z'_++v_++z'_+v_+\left(1/c_--1/c_+\right)}{1+z'_+v_+/c_+c_-}=\frac{z'_++v_+-2\varepsilon z'_+v_+/c}{1+\left(1-\varepsilon^2\right)z'_+v_+/c^2}.\tag{3.7}$$

Множество абсолютных скоростей образует абелеву группу с коммутативным законом композиции элементов группы $z'_+\circ v_+=v_+\circ z'_+$.

Для закона выполняется свойство ассоциативности

$$r''_+ \circ z'_+ \circ v_+ = \left(r''_+ \circ z'_+\right) \circ v_+ = r''_+ \circ \left(z'_+ \circ v_+\right) =$$
$$= \frac{r''_+ + z'_+ + v_+ - 2\varepsilon\left(r''_+ z'_+ + z'_+ v_+ + v_+ r''_+\right)/c + 4\varepsilon^2 r''_+ z' v_+/c^2}{1 - (1-\varepsilon^2)\left(r''_+ z'_+ + z'_+ v_+ + v_+ r''_+\right)/c^2 - 2\varepsilon\left(1-\varepsilon^2\right) r''_+ z' v_+/c^3}. \tag{3.8}$$

Единичный элемент группы находим из формулы

$$E \circ v_+ = \frac{E + v_+ + \left(1/c_- - 1/c_+\right) E v_+}{1 + E v_+/\left(c_+ c_-\right)} = v_+. \tag{3.9}$$

Таким образом, единичный элемент соответствует значению $v_+ = 0$.

Из закона композиции

$$v_+ \circ v_+^{-1} = \frac{v_+ + v_+^{-1} - 2\varepsilon v_+ v_+^{-1}/c}{1 + (1-\varepsilon^2)\, v_+ v_+^{-1}/c^2} = E, \quad \left(1 + \left(1-\varepsilon^2\right) v_+ v_+^{-1}/c^2 \neq 0\right) \tag{3.10}$$

следует выражение обратного элемента

$$v_+^{-1} = -\frac{v_+}{1 - 2\varepsilon v_+/c}. \tag{3.11}$$

Выпишем некоторые равенства

$$\frac{1}{(-v_+)} - \frac{1}{\left(v_+^{-1}\right)} = \frac{1}{c_-} - \frac{1}{c_+}, \left[1 - \frac{2\varepsilon v_+}{c}\right]\left[1 + \frac{2\varepsilon\left(v_+^{-1}\right)}{c}\right] = 1, \tag{3.12}$$

$$\frac{1}{1 + (1-\varepsilon^2)\, v_+ v_+^{-1}/c^2} = \frac{1 - 2\varepsilon v_+/c}{1 - 2\varepsilon v_+/c + (1-\varepsilon^2)\left(v_+\right)^2/c^2} =$$
$$= \frac{1 - 2\varepsilon\left(v_+^{-1}\right)/c}{1 - 2\varepsilon\left(v_+^{-1}\right)/c + (1-\varepsilon^2)\left(v_+^{-1}\right)^2\Big/c^2}, \tag{3.13}$$

$$(-c_-) \circ v_+ = (-c_-)\,, \quad c_+ \circ v_+ = c_+, \tag{3.14}$$

$$1 - 2\varepsilon w_+/c - \left(1-\varepsilon^2\right) w_+^2/c^2 =$$
$$= \frac{\left[1 - 2\varepsilon z'_+/c - (1-\varepsilon^2)\left(z'_+\right)^2\Big/c^2\right]\left[1 - 2\varepsilon v_+/c - (1-\varepsilon^2)\left(v_+\right)^2/c^2\right]}{\left[1 + (1-\varepsilon^2)\, z'_+ v_+/c^2\right]^2}. \tag{3.15}$$

Параметр анизотропии ε отражает отличие обратного элемента v_+^{-1} от противоположного $(-v_+)$. Скорости света c_+ и c_- не имеют обратных элементов c_+^{-1} и c_-^{-1} в силу нарушения дополнительного условия в (3.10). Поэтому они не входят в множество скоростей, а (3.14) есть формальное равенство. Закон композиции имеет вид

$$u'_+ = u_+ \circ v_+^{-1} = \frac{u_+ - v_+}{1 - 2\varepsilon v_+/c - (1-\varepsilon^2)\, u_+ v_+/c^2} \tag{3.16}$$

и представляется в прямых преобразованиях через скорости u_+ и v_-. Причем в обратных преобразованиях, согласно (2.15), справедливо равенство $v_+^{-1} = -v'_-$. Из (3.16) получим $u_+ = u'_+ \circ v_+$, что в итоге приводит к соотношениям

$$\left(1 + \frac{u_+}{c_-}\right) = \frac{\left(1 + u'_+/c_-\right)\left(1 + v_+/c_-\right)}{1 + u'_+ v_+/\left(c_+ c_-\right)}, \quad \left(1 - \frac{u_+}{c_+}\right) = \frac{\left(1 - u'_+/c_+\right)\left(1 - v_+/c_+\right)}{1 + u'_+ v_+/\left(c_+ c_-\right)}. \tag{3.17}$$

Отметим некоторые работы [16, 18-20], в которых рассматривался закон композиции вида (3.7) с различных точек зрения.

Закон композиции анизотропных скоростей (3.7) для типа I вытекает из равенства (2.9). В случае типов II и III имеем, согласно преобразований, соответствующие равенства

$$\frac{u'_+}{1-u'_+/c_+}+\frac{v_+}{1-v_+/c_+}=\frac{u_+}{1-u_+/c_+}, \tag{3.18}$$

$$\frac{\frac{u'_+}{1-\varepsilon u'_+/c}+\frac{v_+}{1-\varepsilon v_+/c}}{1-\frac{u'_+}{\left(1-\varepsilon u'_+/c\right)}\frac{v_+}{\left(1-\varepsilon v_+/c\right)}}=\frac{u_+}{1-\varepsilon u_+/c}, \tag{3.19}$$

из которых вытекают следующие законы композиций

$$u_+=u'_+\circ v_+=\frac{u'_++v_+-2u'_+v_+/c_+}{1-u'_+v_+/c_+^2}, \tag{3.20}$$

$$u_+=u'_+\circ v_+=\frac{u'_++v_+-2\varepsilon u'_+v_+/c}{1+\left(1-\varepsilon^2\right)u'_+v_+/c^2}. \tag{3.21}$$

Для типа IV имеем обычный закон сложения скоростей в классической физике

$$u=u'+v. \tag{3.22}$$

4. Отображение преобразований в системе бинарных чисел

Рассмотрим геометрию с $\varepsilon_{12}=\varepsilon_{23}=1$ и $\varepsilon_{13}=2$, и сопоставим событию с dT и dX дифференциал бинарного числа $d\xi=dT+edX/c_0$. Система бинарных чисел есть одна из трех

$$1)\ e^2=1,\quad 2)\ e^2=0,\quad 3)\ e^2=-1. \tag{4.1}$$

В них определено значение e^2. Свойства системы бинарных чисел известны [21]. Преобразования временного интервала и пространственного расстояния отображаются преобразованиями $d\xi$

$$d\xi'=Ad\xi,\quad d\xi'=dT'+edX'/c_0,\quad A=a+eb \tag{4.2}$$

и его сопряженной величиной

$$d\bar{\xi}'=\bar{A}d\bar{\xi},\quad d\bar{\xi}'=dT'-edX'/c_0,\quad \bar{A}=a-eb. \tag{4.3}$$

Рассмотрим преобразования дифференциала бинарного числа, которые оставляют инвариантным модуль

$$\sqrt{d\xi d\bar{\xi}}=\sqrt{d\xi' d\bar{\xi}'},\quad \left(dT^2-dX^2/c_0^2=dT'^2-dX'^2/c_0^2\right). \tag{4.4}$$

Тогда из (4.4) получим равенство

$$A\bar{A}=1,\quad \left(a^2-e^2b=1\right) \tag{4.5}$$

и обратные преобразования

$$d\xi=A^{-1}d\xi',\quad A^{-1}=\bar{A}=a-eb. \tag{4.6}$$

Для определения величин a и b рассмотрим отношение

$$\frac{d\xi'}{d\bar{\xi}'} = \frac{A}{\bar{A}}\frac{d\xi}{d\bar{\xi}}, \tag{4.7}$$

которые перепишем в виде

$$\frac{dT' + edX'}{dT' - edX'} = \frac{a + eb}{a - eb}\frac{dT + edX}{dT - edX}. \tag{4.8}$$

Используем равенство $dX = vdT$ при dX' (или $dX' = -vdT'$ при $dX = 0$). Тогда, согласно (4.5) и (4.8), получим значения $b/a = -v/c_0$ и $a = (1 - e^2v^2/c_0^2)^{-1/2}$. Число A имеет выражение

$$A\,(v) = \frac{1 - ev/c_0}{\sqrt{1 - e^2v^2/c_0^2}} \tag{4.9}$$

и групповое свойство

$$A\,(v'') = A\,(v')\,A\,(v)\,, \tag{4.10}$$

из которого следует закон композиции скоростей

$$v'' = v' \circ v = \frac{v' + v}{1 + e^2vv'/c_0^2}. \tag{4.11}$$

Подставляя (4.9) в (4.2), получим преобразования

$$dX' = \frac{dX - vdT}{\sqrt{1 - e^2v^2/c_0^2}}, \quad dT' = \frac{dT - e^2vdX/c_0^2}{\sqrt{1 - e^2v^2/c_0^2}}, \tag{4.12}$$

и форм-инвариантную квадратичную дифференциальную форму

$$ds^2 = c_0^2d\xi d\bar{\xi} = c_0^2dT^2 - e^2dX^2. \tag{4.13}$$

При $e^2 = 1$ имеем преобразования Лоренца

$$dX' = \frac{dX - vdT}{\sqrt{1 - v^2/c_0^2}}, \quad dT' = \frac{dT - vdX/c_0^2}{\sqrt{1 - v^2/c_0^2}}, \tag{4.14}$$

в геометрии Минковского с индефинитной метрикой

$$ds^2 = c_0^2dT^2 - dX^2, \quad v/c = \operatorname{th}\beta. \tag{4.15}$$

При $e^2 = 0$ имеем преобразования Галилея

$$dX' = dX - vdT, \quad dT' = dT, \tag{4.16}$$

в геометрии Галилея

$$ds^2 = c_0^2dT^2, \quad v/c_0 = \beta. \tag{4.17}$$

При $e^2 = -1$ имеем преобразования Евклида

$$dX' = \frac{dX - vdT}{\sqrt{1 + v^2/c_0^2}}, \quad dT' = \frac{dT + vdX/c_0^2}{\sqrt{1 + v^2/c_0^2}}. \tag{4.18}$$

в геометрии Евклида с дефинитной метрикой

$$ds^2 = c_0^2dT^2 + dX^2, \quad v/c_0 = \operatorname{tg}\beta, \tag{4.19}$$

В этих плоских геометриях аксиома параллельных сохраняется [22]. Угол β в локальном пространстве-времени обладает групповым законом композиции $\beta'' = \beta' \circ \beta = \beta' + \beta$. Обобщение полученных результатов на случай с $\varepsilon_{12} \neq \varepsilon_{23}$ требует отдельного рассмотрения.

5. Вероятностная трактовка

Запишем финслерову метрическую функцию (2.17) в виде

$$F = \gamma d\eta_1^{p_1} d\eta_2^{p_2} = \gamma \left[\exp\left(\sum_i^2 p_i \ln \dot{\eta}_i\right)\right] d\tau, \tag{5.1}$$

где $p_1 = (1+r)/2$, $p_2 = (1-r)/2$, $\dot{\eta}_i = d\eta_i/d\tau$, τ – скалярный параметр, а $d\eta_1 = c_0 dT_1$ и $d\eta_2 = c_0 dT_3$ есть характеристики светового сигнала. Тогда p_1 и p_2 можно интерпретировать как вероятности для величин $d\eta_1$ и $d\eta_2$. В случае n-мерного пространства выражение

$$N_0(\dot{\eta}) = \prod_i^n (\dot{\eta}_i)^{p_i} = \exp\left(\sum_i^n p_i \ln \dot{\eta}_i\right) \tag{5.2}$$

есть взвешенное среднее геометрическое величины $\dot{\eta} = (\dot{\eta}_1, ..., \dot{\eta}_n)$ с вероятностями $p = (p_1, ..., p_n)$. Формула (5.2) является частным случаем полунормы [23, 24]

$$N_q(\dot{\eta}) = \left[\sum_i^n (\dot{\eta}_i)^q p_i\right]^{1/q}, \quad \sum_i^n p_i = 1, \tag{5.3}$$

при $q = 0$. Вероятностная трактовка финслеровой геометрии дается метрической функцией

$$F = \gamma \left[d\eta_1^q p_1 + d\eta_2^q p_2 + ... + d\eta_n^q p_n\right]^{1/q} = \gamma N_q(\dot{\eta})\, d\tau. \tag{5.4}$$

При равновероятном распределении $p_i = 1/n$ из (5.4) при $q = 0$ следует метрическая функция Бервальда-Моора [1]

$$F = \gamma \sqrt[n]{d\xi_1 d\xi_2 ... d\xi_n} = \gamma \sqrt[n]{\dot{\xi}_1 \dot{\xi}_2 ... \dot{\xi}_n}\, d\tau, \tag{5.5}$$

которая является одной из перспективных в обобщениях псевдоевклидовой геометрии Минковского [25]. Финслеровы метрические функции вида (5.2) и (5.3) с переменным значением изучаются в [4].

6. Заключение

В работе рассматривается локально анизотропная финслерова геометрия с двумя скалярными параметрами $\varepsilon c_0/c = (\varepsilon_{12} - \varepsilon_{23})/2$ и $c_0/c = (\varepsilon_{12} + \varepsilon_{23})/2$, зависящими от элементов матрицы перехода между событиями, а также от инварианта r. Найдены четыре принципиально различных типа двумерного финслерова пространства-времени. Исследуются свойства композиции одинаково направленных анизотропных скоростей произвольных сигналов. Анизотропия физических скоростей света не устраняется какими-либо преобразованиями координатной сетки, чем отличаются полученные преобразования временного интервала и пространственного расстояния от некоторых известных преобразований [20, 26–31]. Следует также отметить и попытку экспериментального обнаружения относительной анизотропии одно-направленных скоростей света и нейтронов [32]. В случае отсутствия анизотропии в двумерном пространстве-времени полученные преобразования допускают отображения на преобразования бинарных чисел. Вероятностная трактовка метрических функций финслеровых геометрий и, в частности, взаимосвязь их с гиперкомплексными системами чисел требует детального изложения. Здесь из-за ограниченности рамок работы приводится лишь идейная сторона вопроса.

Автор благодарит Г. С. Асанова об информации [8, 15, 16] по локальной анизотропии финслерового пространства-времени, без чего работа в данном виде не имела бы места, а также Д. Г. Павлова об информации [25] о квадрачислах, открывающей простор для новых подходов к физической сущности пространства-времени.

Список литературы

[1] Rund H. The Differential Geometric of Finsler Spaces. Berlin: Springer-Verlag, 1959. 396 p.

[2] Busemann H. Metric Methods in Finsler Spaces and in Foundations of Geometric. Princeton: Princeton University Press, 1942. 241 p.

[3] Pimenov R. I. Kinematics Spaces (Mathematical Theory of Space-time. New-York: Plenum Press, 1970. 93 p.

[4] Asanov G. S. Finsler Geometry, Relativity and Gange Theories. Dordrecht: D.Reidel Publ. Comp. 1985. 370 p.

[5] Matsumoto M. Foundations of Finsler Geometry and Special Finsler Spaces. Otsu, Japan: Kai-seisha Press, 1986.

[6] Пименов Р. И. Анизотропное финслерово обобщение теории относительности как структуры порядка. Сыктывкар: Изд-во Коми филиала АН СССР, 1987. 184 с.

[7] Богословский Г. Ю. Теория локального анизотропного пространства-времени. Москва: Изд-во МГУ, 1992. 271 с.

[8] Асанов Г. С. Финслероидная геометрия. Москва: Изд-во МГУ, 2004. 160 с.

[9] Poincare H. La mesure du temps // Rev. Metaphys. Mordle, 1898. V. 6. P. 1–13.

[10] Reichenbach H. Axiomatik der relativistischen Raum-Zeit-Lehre. Braunschweig: F. Vieweg & Sons, 1924. 302 s.

[11] Grunbaum A. Philosophical Problem of Space and Time. New York: Alfred A.Knopf, 1963.

[12] Зарипов Р. Г. К определению одновременности в специальной теории относительности //Гравитация и теория относительности. Казань: Изд-во КГУ, 1978. Вып. 14–15. с. 60–69.

[13] Зарипов Р. Г. О физическом понятии отношения одновременности //Гравитация и теория относительности. Казань: Изд-во КГУ, 1980. Вып. 17. с. 47–51.

[14] Zaripov R. G. Convention in the Definition of Geometry of Space-Time //Galilean Electrodynamics. 2000. V. 11. N 4. P. 63–68.

[15] Асанов Г. С. Класс сферически симметричных финслеровых метрических функций с индикатрисой постоянной кривизны // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1994. № 1. с. 19–20.

[16] Asanov G. S. Finslerian Extension of Lorentz Transformations //Rep. Math. Phys., 1998. V. 42. № 3. P. 273–296.

[17] Bogoslovsky G. Yu. A Special Relativistic Theory of the Locally Anisotropic Space-Time, I: The Metric and Group of Motion of the Anisotropic Space of Events // Nuovo Cimento, 1977. V. 40B. P. 99–115.

[18] Petryszyn H. On a certain group-kinematical method of generalization Lorentz transformations in two-dimensional space-time //Wroclaw: Instytut Mathematyki i Fizyki Theoretyczney Politechniki Wroclawskiey Kamunikaty, 1973. № 12. P. 1–26.

[19] Болтянский В. Г. Анизотропный релятивизм // Дифференциальные уравнения. 1974. Т. 10. С. 2101–2110.

[20] Стрельцов В. И. Об определении одновременности в специальной теории относительности // Препринт ОИЯИ. P2-6928. 1973. 10 с.

[21] Кантор И. Л., Солодовников А. С. Гиперкомплексные числа. Москва: Наука, 1973. 143 с.

[22] Клейн Ф. Неевклидова геометрия. Москва-Ленинград: ОНТИ, 1936. 101 с.

[23] Хартли Г. Г., Литтльвуд Д. Е., Полиа Г. Неравенства. Москва: Изд-во ИЛ, 1948. 456 с.

[24] Бурбаки Н. Интегрирование (меры, интегрирование мер). Москва: Наука, 1967. 396 с.

[25] Павлов Д. Г. Четырехмерное время // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. 2004. № 1 (1). с. 33–42.

[26] Edwards W. F. Special relativity in anisotropic space // Am. J. Phys., 1963. V. 31. N 7. P. 482-489.

[27] Podlaha M. Lorentz Theory, Palacios Theory and Interferometrical Experiments // Nuovo Ci-mento. 1969. V. 64B. N 1. P. 181–187.

[28] Winnie J.A. Special relativity without one-way velocity assumptions // Phyl. Sci. 1970. V. 37. N1. P. 81–99; 1970. V. 37. N2. P. 223–238.

[29] Mansouri R., Sexl R.U. A test theory of special relativity // Gen. Rel. Grav. 1977. V. 8. N 7. P. 497–513, P. 515–524; V. 8. N 10. P. 809–814.

[30] Sjodin T. Synchronization in special relativity and related theories // Nuovo Cimento. 1979. V. 51. N 2. P. 229–246.

[31] Зарипов Р. Г. Отношение одновременности и финслерова структура плоского анизотропного пространства-времени // Гравитация и теория относительности. Казань: Изд-во КГУ. 1992. Вып. 29. с. 64–71.

[32] Николенко В. Г., Попов А. Б., Самосват Г. С. Поиски относительной анизотропии скорости света и скорости нейтронов // ЖЭТФ. 1979. Т. 79. Вып. 2. с. 393–401.

The binary numbering system and the Finslerian geometry of the local anisotropic Space-Time

R. G. Zaripov

Institute of mechanics and mechanical engineering RAS, Kazan, Russia
zaripov@mail.knc.ru

We examine he binary numbering system and its transformations, which allow mappings to time-interval transformations and to spatial distance of the local Space-Time. We establish four essentially distinct types of 2-dimensional locally anisotropic Finsler Geometries and we obtain new transformations. We investigate the group properties of the composition law of similarly oriented anisotropic velocities. A new result is the relation between the element of the Finsler space endowed with a semi-norm - in the relativistic approach, and the study of the local geometry.

Key-words: Finsler spaces, anisotropy, binary numbering system, velocities.
MSC: 53B40.

О НЕКОТОРЫХ ГИПЕРАЛГЕБРАХ, НЕПОСРЕДСТВЕННО СВЯЗАННЫХ С АССОЦИАТИВНЫМИ ТЕЛАМИ, ЕВКЛИДОВЫМИ ВЕКТОРНЫМИ ПРОСТРАНСТВАМИ, АЛГЕБРАМИ И ГИПЕРАЛГЕБРАМИ

Соловей Л. Г.

lgsolovey@gmail.com

В статье [1] рассматривались гипертела, гиперполя, гиперкольца, гиперaлгебры – множества, представляющие собой несколько аддитивных групп, объединенных в один мультипликативный группоид, причем соблюдаются дистрибутивные законы. В [1], по определению, все аддитивные группы пересекаются только в одной (нулевой) точке. Однако такое ограничение является слишком жестким. В настоящей заметке это требование снимается: предполагается возможность нескольких нулей (но пересечение аддитивных групп в ненулевых точках по-прежнему запрещено). Это позволяет установить связи между алгебрами, телами, векторными евклидовыми пространствами, и соответствующими гиперaлгебрами, что и сделано в настоящей статье. Далее, дается определение фактор-гиперкольца, фактор-гипертела и фактор-гиперполя. Приведены два примера, показывающие, что в отличие от небольшого числа ассоциативных алгебр конечного ранга с делением над полем действительных чисел, количество ассоциативных гиперaлгебр конечного ранга с делением над полем действительных чисел бесконечно. Вводится понятие вырожденных гиперколец. Установлено однозначное соответствие между невырожденными гиперкольцами и обобщенными (в частности, стандартными) градуированными кольцами. Рассмотрен класс гиперколец, ближайших к кольцам (кольцеобразных гиперколец).

Ключевые слова: гиперaлгебры, гиперкольца.

Введение

В статье [1] были даны определения гипертела, гиперполя, гиперкольца и гиперaлгебры. В настоящей заметке будет установлена связь евклидовых векторных пространств над полем действительных чисел, алгебр над полем P, ассоциативных тел, гиперaлгебр, с соответствующими гиперaлгебрами. Следует, однако, отметить, что данные в [1] определения слишком жестки. Поэтому мы вернемся к основным определениям с целью их расширения, во многом повторяя изложение в [1].

Гипертелом (гиперкольцом) k-го порядка по аддитивным группам назовем множество M, обладающее следующими свойствами:

1) Оно представляет собой k аддитивных групп, единственными точками пересечения которых являются, возможно, нули аддитивных групп (в [1] рассматривались только ненулевые аддитивные группы; при этом требовалось, чтобы все аддитивные группы имели один общий нуль); иными словами, аддитивные группы без нулей, принадлежащих более чем одной аддитивной группе, а также эти нули, определяют собой непересекающиеся классы некоторого разбиения π множества M [2].

2) Оно составляет, в случае гипертела, кроме нулей, входящих в ненулевые аддитивные группы, мультипликативную группу или лупу [2], а в общем случае гиперкольца группоид, включая нули.

3) Требование, содержащееся в [1], чтобы среди произведений элементов A_i, A_k из фиксированных аддитивных групп $\widetilde{A}_i$ и $\widetilde{A}_k$ обязательно были отличные от нуля, принадлежащего более чем одной аддитивной группе для любых i и k, снимается (в общем случае); при выполнении этого требования назовем гиперкольцо невырожденным, а при невыполнении – вырожденным. Легко видеть, что гипертело является частным случаем невырожденного гиперкольца.

4) Выполняются левый и правый дистрибутивные законы по сложению в аддитивных группах и умножению.

5) Из предыдущего пункта следует (см. приложение), что два элемента из каких-либо двух (возможно, и совпадающих) аддитивных групп, будучи умножены друг на друга, дают или некоторый фиксированный нуль, принадлежащий более чем одной аддитивной группе, или элемент из фиксированной аддитивной группы, в обоих случаях определяемые только аддитивными группами, к которым принадлежат сомножители, и, возможно, порядком расположения сомножителей.

Следовательно, аддитивные группы $\widetilde{A}_i$ и $\widetilde{A}_k$ суть элементы группоида, причем для невырожденных гиперколец

$$\widetilde{A}_i \cdot \widetilde{A}_k = \widetilde{A}_l \tag{a}$$

((а) выполняется всегда для гипертел); назовем этот группоид фактор-группоидом множества M по аддитивным группам.

Из сказанного следует, что если элементы множества M, не являющиеся общими нулями аддитивных групп, не являются делителями этих нулей, то разбиение π множества M как мультипликативного группоида представляет собой конгруэнцию в M по умножению [2], причем аддитивные группы (без таких нулей), а также эти нули, представляют собой элементы мультипликативного группоида, называемого фактор-группоидом; при этом аддитивные группы без указанных нулей составляют его подгруппоид, а если множество отличных от нулей элементов M представляет собой мультипликативную группу, то аддитивные группы (без нулей), как непересекающиеся классы разбиения π', являются элементами мультипликативной группы, называемой фактор-группой [2]; при этом фактор-группоид или фактор-группа, элементами которых являются аддитивные группы без указанных нулей, изоморфны фактор-группоиду (фактор-группе) по целым аддитивным группам.

Отметим также, что если аддитивные группы гиперкольца или гипертела не имеют общих нулей, то они составляют конгруэнцию по разбиению π гиперкольца (гипертела) на эти аддитивные группы как по умножению, так и по сложению.

Гипертело с коммутативным и ассоциативным умножением назовем гиперполем k-го порядка по аддитивным группам. Гиперкольца, аддитивные группы которых являются векторными пространствами над полем P размерностей $n_1, n_2, \ldots n_k$, назовем гипералгебрами k-го порядка ранга $(n_1, n_2, \ldots n_k)$ (при выполнении дополнительных условий [3]

$$(\alpha \cdot A_i) \cdot B_k = \alpha \cdot (A_i \cdot B_k) = A_i \cdot (\alpha \cdot B_k), \tag{1}$$

где α – элемент поля P, A_i, B_k – элементы множества M). В [1] рассматривались только векторные пространства одинаковой размерности n. Назовем их, согласно [1], гипералгебрами ранга n; это – гипералгебры ранга $(n, n, \ldots)$.

Гипералгебры, элементы которых, кроме нулей, входящих в ненулевые аддитивные группы, составляют мультипликативную группу (или лупу), назовем гипералгебрами k-го порядка ранга $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ с однозначным делением и единицей. Рассматриваемые в [1] гипертела, гиперполя, гиперкольца, гипералгебры с одним нулем являются часто встречающимися гипертелами, гиперполями, гиперкольцами и гипералгебрами (гипералгебры с одним нулем состоят из векторных пространств одинаковой размерности). Обычные тела (поля, кольца, алгебры) являются гипертелами, гиперполями, гиперкольцами, гипералгебрами первого порядка по всему множеству M, являющемуся в данном случае единственной аддитивной группой.

Понятия гипертела, гиперполя, гиперкольца, гипералгебры являются непосредственным обобщением понятий тела, поля, кольца, алгебры, где определены две бинарные операции – сложение и умножение, связанные левым и правым дистрибутивными законами.

Расширение определений, данных в [1], позволяет привести дополнительный пример гипералгебры. Рассмотрим совокупность тензоров любого ранга в n-мерном пространстве. Определим произведение двух тензоров как совокупность произведений их составляющих в каком-либо установленном порядке (прямое произведение). В результате получается тензор, ранг которого равен сумме рангов сомножителей. Аддитивными группами являются совокупности тензоров заданного ранга. Поскольку складываются только тензоры заданного ранга, указанное множество не является кольцом. Оно представляет собой, однако, гиперкольцо – гипералгебру бесконечного порядка ранга $(1, n, n^2, \ldots)$ (1 – размерность скалярного поля).

§1. Некоторые свойства гипертел и гиперколец

В [1] были рассмотрены свойства невырожденных гипертел и гиперколец с одним нулем. В настоящем параграфе полученные в [1] результаты будут повторены, однако при необходимости будут сделаны оговорки, связанные с расширением основных определений.

1. Среди аддитивных групп гипертела может быть не более одного тела (поля), та как единица, согласно пункту 1 определений, может принадлежать не более чем одной аддитивной группе.

2. Если рассматриваемое множество является гипертелом или гиперполем, то аддитивная ненулевая группа с единицей сама является телом или полем. Действительно, произведение единицы e на элемент этой аддитивной группы представляет собой тот же элемент и принадлежит, следовательно, той же аддитивной группе. Это же верно для элементов A, B из этой аддитивной группы. Пусть теперь

$$A \cdot X = B, \tag{1'}$$

где A и B – элементы, принадлежащие рассматриваемой аддитивной группе. Но тогда X принадлежит той же аддитивной группе. В самом деле, если X принадлежал бы другой аддитивной группе, то eX принадлежал бы этой другой аддитивной группе, а, следовательно, и $B = AX$ принадлежал бы этой же аддитивной группе. Таким образом, X действительно принадлежит аддитивной группе, содержащей единицу, и является единственным решением уравнения (1′). Точно так же доказывается, что уравнение

$$Y \cdot A = B, \tag{1''}$$

где A и B принадлежат аддитивной группе с единицей, имеет единственное решение Y, принадлежащее аддитивной группе с единицей. Утверждение доказано.

Таким образом, если аддитивная группа гипертела или гиперполя, содержащая единицу, сама не является нулевой, то она является его единственной аддитивной группой, представляющей собой тело или поле. Легко также видеть, что для гиперкольца с единицей аддитивная группа, содержащая единицу, является кольцом, телом или полем.

3. В случае ассоциативного гипертела, как показано в [1], аддитивная группа, содержащая единицу, является (без нуля) нормальным делителем мультипликативной группы гипертела.

4. Без изменения остается утверждение, что любая аддитивная группа ассоциативного гипертела (гиперполя), кроме нулей, не входящих в мультипликативную группу гипертела или гиперполя, является смежным классом по нормальному делителю.

Отметим еще некоторые свойства гиперколец, гипертел и гиперполей.

5. Покажем, что для невырожденного гиперкольца

$$0_i \cdot B_k = O_l, \tag{2}$$

$$A_i \cdot O_k = O_l, \tag{3}$$

где $0_i, 0_k, 0_l$ – нули i-ой, k-ой и l-ой аддитивных групп, A_i и B_k – элементы i-ой и k-ой аддитивных групп, причем

$$A_i \cdot B_k = C_l, \tag{3$'$}$$

где C_l – элемент l-ой аддитивной группы. Действительно,

$$0_i \cdot B_k = (A_i - A_i) \cdot B_k = C_l - C_l = 0_l,$$

$$A_i \cdot 0_k = A_i \cdot (B_k - B_k) = C_l - C_l = 0_l.$$

В случае вырожденных гиперколец наряду с соотношениями (2) и (3) для некоторых аддитивных групп $\widetilde{A_{i'}}, \widetilde{B_{k'}}, \ldots$ выполняются соотношения

$$0_{i'} \cdot B_{k'} = 0_{l',\, m',\, \ldots}, \tag{2$''$}$$

$$A_{i'} \cdot 0_{k'} = 0_{l',\, m',\, \ldots}, \tag{3$''$}$$

где $0_{l',\, m',\, \ldots}$ – общий нуль аддитивных групп $\widetilde{A_{l'}}, \widetilde{A_{m'}}, \ldots$ (когда $A_{i'} \cdot B_{k'} = 0_{l',\, m',\, \ldots}$).

6. Для невырожденных гиперколец, как уже отмечалось, аддитивные группы гиперкольца составляют мультипликативный группоид – его фактор-группоид по этим аддитивным группам. Легко также видеть, что аддитивные группы $\widetilde{A_i}$ сами являются единственными элементами аддитивных групп с законом сложения

$$\widetilde{A_i} + \widetilde{A_i} = \widetilde{A_i}, \tag{4}$$

причем $\widetilde{A_i}$ является как нулем $\widetilde{0_i}$ этой i-ой аддитивной группы, так и, следовательно, ее противоположным элементом. Поскольку в настоящей заметке расширено понятие гиперкольца, можно теперь утверждать (в [1] такое утверждение было невозможно), что множество аддитивных групп невырожденного гиперкольца само является гиперкольцом, которое назовем *фактор-гиперкольцом* гиперкольца по его аддитивным группам. Легко показать, что такое фактор-гиперкольцо гипертела (гиперполя) само является гипертелом (гиперполем), единицей которого является аддитивная группа, содержащая единицу. Назовем его фактор-гипертелом (фактор-гиперполем) по аддитивным группам гипертела (гиперполя). Единица фактор-гипертела (фактор-гиперполя), являющаяся нулевым кольцом, как таковое не считается телом или полем[1]. Формула (4) подсказывает, что любой группоид может быть мультипликативным группоидом

---

[1] Если и для фактор-гипертела (фактор-гиперполя) принять, что тело (поле) является гипертелом (гиперполем) первого порядка, то единицу фактор-гипертела или фактор-гиперполя (нулевое подкольцо) следует считать полем. При таком подходе любое гипертело (гиперполе) обладало бы единственной аддитивной группой, являющейся телом или полем.

гиперкольца, для элементов A_i которого определяется сложение согласно этой формуле. Точно так же любая группа k-го порядка ($k > 1$) становится мультипликативной группой гипертела, если для ее элементов определить сложение согласно формуле (4).

Отметим еще одно обстоятельство. Пусть какая-нибудь аддитивная группа гипертела является нулевой – 0_l. Если при этом имеется хотя бы одна ненулевая аддитивная группа $\widetilde{A_i}$, то при $\widetilde{A_i} \cdot \widetilde{A_k} = 0_l$ произведение всех ее элементов на элемент A_k равно этому (одному и тому же) нулевому элементу 0_l – деление неоднозначно. Поэтому такое гипертело невозможно. Следовательно, аддитивные группы гипертела либо все ненулевые, либо все нулевые. Фактор-гипертело как раз и является гипертелом с нулевыми аддитивными группами.

§2. Гипералгебры, непосредственно связанные с евклидовым векторным пространством

I. Рассмотрим векторное n-мерное пространство L над полем P действительных чисел, в котором определено скалярное произведение [4] (евклидово пространство). Как известно, такое векторное пространство не является алгеброй над полем P, так как скалярное произведение $\beta = (A, B)$ двух векторов является скаляром из поля P и, следовательно, не принадлежит векторному пространству. Скалярное поле P совместно с векторным пространством является, однако, гипералгеброй над полем P второго порядка ранга $(1, n)$, если определить умножение $\circ$ в этом множестве следующим образом:

$$1) \qquad \alpha \circ A = A \circ \alpha = \alpha \cdot A; \tag{5}$$

(если P – поле комплексных чисел, положим

$$\alpha \circ A = A \circ \alpha^* = \alpha \cdot A), \tag{5$'$}$$

где α – скаляр, A – вектор, $\alpha \cdot A$ – произведение скаляра α на вектор A согласно определению векторного пространства;

$$2) \qquad \alpha \circ \beta = \alpha \cdot \beta, \tag{6}$$

где α и β – скаляры (действительные числа), $\alpha \cdot \beta$ – произведение действительных чисел α и β;

$$3) \qquad A \circ B = (A, B), \tag{7}$$

где A и B – векторы, (A, B) – их скалярное произведение.

Утверждение, что рассматриваемое множество является гипералгеброй над полем P, непосредственно следует из формул (5) – (7) и из выполнения условий (1), если P – поле действительных чисел. Полученная гипералгебра неассоциативна[2], поскольку $(A, B) \cdot C \neq A \cdot (B, C)$.

Она, однако, обладает единицей, которой является единица поля действительных чисел, поскольку в определение векторного пространства входит условие $1 \cdot A = A$. Пусть теперь рассматриваемое векторное пространство является алгеброй над полем P действительных чисел с единицей e. Тогда поле $\widetilde{P}$, полученное из поля P отображением

$$\alpha \to \alpha \cdot e, \tag{8}$$

---

[2] Она йорданова вследствие коммутативности и выполнения для любых ее элементов X, Y соотношений $((XX)Y)X = (XX)(YX)$.

$$\alpha e = \widetilde{\alpha}, \tag{8a}$$

где α – произвольный элемент поля P, изоморфно полю P, но является подалгеброй рассматриваемой алгебры [3]. Пусть также

$$(e, e) = 1. \tag{8$'$}$$

Определим произведение

$$\widetilde{(A, B)} = (A, B) \cdot e, \tag{9}$$

и назовем его внутренним скалярным произведением векторов A и B. Оно является элементом поля $\widetilde{P}$. В частности,

$$\widetilde{(e, e)} = e. \tag{9$'$}$$

Легко видеть, что указанная алгебра с единицей e над полем P действительных чисел является также множеством с алгеброй над полем P, умножение в которой определяется внутренним скалярным произведением (9). Поле $\widetilde{P}$ является ее идеалом. С учетом (8a), (8$'$) имеем для действительных чисел $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}$:

$$\widetilde{(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta})} = \widetilde{\alpha}\widetilde{\beta} \qquad (9'') \qquad \text{(имеем также} \quad (\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}) = \alpha\beta). \qquad (9''')$$

Аналогично, если наше векторное пространство над полем P действительных чисел является подмножеством некоторого мультипликативного группоида с единицей e, и если e принадлежит векторному пространству L, то поле $\widetilde{P} = \alpha \cdot e$ (α – любой элемент поля P) также принадлежит векторному пространству L, и внутреннее скалярное произведение (9) генерирует мультипликативный группоид алгебры с аддитивной группой L. Потребуем, как и в предыдущем случае, также выполнения условия (8$'$) и вытекающего из него условия (9$'$).

Векторное пространство над полем P комплексных чисел с определенным в этом пространстве скалярным произведением вместе с полем P также является гиперкольцом относительно умножения, определенного формулами (5$'$) – (7), но не является гипералгеброй, поскольку не выполняются все условия (1). В рассмотренной в настоящем параграфе гипералгебре над полем P действительных чисел это поле принадлежит гипералгебре. Такие совокупности назовем гипералгебрами второго рода.

II. Матрицы A и векторы X в n-мерном комплексном евклидовом пространстве как гиперкольцо.

Это – гиперкольцо второго порядка по аддитивным группам матриц A и векторовX.

Законы умножения:

$$Y = AX \quad \text{– вектор}, \tag{10}$$

$$Z = XA \quad \text{– вектор}, \tag{11}$$

$$B = A_1 \cdot A_2 \quad \text{– матрица}, \tag{12}$$

$$a = (X_1, X_2) \quad \text{– скаляр},$$

т. е. диагональная матрица

$$A_d = \begin{pmatrix} a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}. \tag{13}$$

§3. Гипералгебры, непосредственно связанные с алгебрами над полем P

а). Определим умножение $\circ$ в множестве M, содержащем поле P и алгебру N ранга n над этим полем:

$$1) \qquad \alpha \circ \beta = \alpha \cdot \beta, \tag{6}$$

α, β – элементы поля P, где точка $\cdot$ – знак умножения элементов в поле P;

$$2) \qquad \alpha \circ A = \alpha \cdot A, \qquad A \circ \alpha = \alpha \cdot A, \qquad (5) \text{ и } (5'')$$

α – элемент поля P, A – элемент векторного пространства; $\cdot$ – знак умножения элемента поля P на элемент векторного пространства, согласно определению векторного пространства над полем P;

$$3) \qquad A \circ B = A \cdot B, \tag{14}$$

A, B – элементы алгебры N, точка $\cdot$ – знак умножения алгебры N.

Легко видеть, что относительно законов умножения $(5), (5''), (6), (14)$ вследствие соблюдения условий (1) множество $P \cup N$ является гипералгеброй над полем P второго рода по аддитивным группоидам P и N второго порядка ранга $(1, n)$. Рассматриваемая гипералгебра ассоциативна при ассоциативности алгебры N, что следует из ассоциативности поля P и условий (1). Легко видеть, что алгебра N является идеалом рассматриваемой гипералгебры, при определении идеала гиперкольца обычным образом как аддитивной группы, умножение на элементы которой не выводит за пределы этой группы; отметим также, что единица поля P является единицей рассматриваемой гипералгебры[3]. Как уже говорилось, если алгебра N – совокупность элементов, обладающих единицей e, то, как известно,

$$\widetilde{\alpha} = \alpha \circ e = \alpha \cdot e,$$

где α – любой элемент поля P, образует поле $\widetilde{P}$, изоморфное полю P, являющееся подалгеброй алгебры N [3].

Отметим также, что если $\widetilde{N}$ – гипералгебра над полем P, то поле P и гипералгебра $\widetilde{N}$ составляют гипералгебру над полем P второго рода, аддитивными группами которой являются аддитивные группы гипералгебры $\widetilde{N}$ и поля P, а умножение определяется формулами $(5), (5''), (6), (14)$.

б). Пусть дана алгебра N без делителей нуля над полем P. Рассмотрим в ней совокупность прямых, проходящих через нуль. Пусть A_0 и B_0 – два ненулевых элемента алгебры без делителей нуля, и пусть

$$C_0 = A_0 \cdot B_0, \tag{15}$$

где C_0 – элемент алгебры, а $\cdot$ – знак умножения в ней. Векторы A_0, B_0, C_0 лежат на прямых $\alpha \cdot A_0$, $\beta \cdot B_0$, $\gamma \cdot C_0$, проходящих через нуль, где α, β, γ – произвольные элементы поля P. Согласно условию (1) имеем:

$$(\alpha \cdot A_0) \cdot (\beta \cdot B_0) = \alpha\beta \cdot (A_0 \cdot B_0), \qquad \text{или}$$

$$(\alpha \cdot A_0) \cdot (\beta \cdot B_0) = \gamma \cdot C_0, \qquad \gamma = \alpha\beta. \tag{16}$$

---

[3] Рассмотренные объединения поля P и векторного пространства L в настоящем и предыдущем параграфе не являются гиперкольцами, если не вводить умножения $A \circ \alpha$.

Из формулы (16) следует, что произведение элементов прямых $\alpha \cdot A_0$ и $\beta \cdot B_0$ есть элемент, лежащий на прямой $\gamma \cdot C_0$. Отсюда следует, что совокупность прямых, проходящих через нуль алгебры N без делителей нуля, образует невырожденную гипералгебру над полем P по этим прямым бесконечного порядка ранга $(1, 1, \ldots)$, или, согласно [1], первого ранга. (Дистрибутивные законы легко доказываются.) Если N – ассоциативная алгебра с делением, то рассматриваемая совокупность прямых – ассоциативная гипералгебра с делением бесконечного порядка первого ранга над полем P по этим прямым. Поле $\widetilde{P}$, элементы которого равны элементам поля P, умноженным на единицу алгебры N, является (без нуля) нормальным делителем мультипликативной группы этой гипералгебры, а все прямые, проходящие через нуль (кроме нуля) – смежными классами.

При наличии делителей нуля могут быть C_0, равные нулю. В этих случаях произведение элементов прямых $\alpha A_0, \beta B_0$ тождественно равно нулю – вырожденная гипералгебра. Все выводы пункта б) остаются в силе, если N – гипералгебра с общим нулем без делителей нуля. Примером вырожденной гипералгебры является совокупность прямых, проходящих через нуль, в гипералгебре, аддитивными группами которой являются трехмерные векторные пространства полярных и аксиальных векторов, а умножение определяется векторным умножением векторов [1]. Вырожденный характер гипералгебры следует из факта равенства нулю векторного произведения всех векторов, лежащих на одной прямой.

в). Пусть множество M состоит из точек прямых над полем P, пересекающихся только в нулевой точке, и является мультипликативным группоидом. Следовательно, задан закон умножения элементов поля P на элементы множества M:

$$B = \alpha \cdot A, \tag{17}$$

где α – элемент поля P, A – элемент множества M.

Пусть при этом выполняются условия

$$E = (\beta \cdot C) \cdot D = C \cdot (\beta \cdot D) = \beta \cdot (C \cdot D), \tag{18}$$

где β – элемент поля P; C, D, E – элементы множества M.

В частности, множество M может быть алгеброй ненулевого ранга или гипералгеброй с одним нулем. Пусть элементы A, B лежат на прямых

$$A = \alpha \cdot A_0, \tag{19}$$

$$B = \beta \cdot B_0, \tag{20}$$

где A_0, B_0 – ненулевые элементы M, α, β – произвольные элементы P. Имеем:

$$\widetilde{C} = A \cdot B = (\alpha \cdot A_0) \cdot (\beta \cdot B_0) = \alpha\beta \cdot \widetilde{C_0} = \gamma \cdot \widetilde{C_0}, \tag{21}$$

где

$$\widetilde{C_0} = A_0 \cdot B_0, \qquad (\gamma = \alpha\beta). \tag{22}$$

При $\widetilde{C_0} = A_0 \cdot B_0 \neq 0$ имеем прямую; при $\widetilde{C_0} = 0$ мы также имеем $AB = 0$. Далее, если A и B лежат на одной прямой, и $C = \gamma' \cdot C_0$ – элемент другой прямой, то

$$\begin{aligned} &(A + B) \cdot C = (\alpha \cdot A_0 + \beta \cdot A_0) \cdot \gamma' \cdot C_0 = (\alpha + \beta) \cdot A_0 \cdot (\gamma' \cdot C_0) = \\ &= (\alpha + \beta) \cdot \gamma' \cdot (A_0 \cdot C_0) = (\alpha + \beta) \cdot \gamma' \cdot D_0; \qquad (D_0 = A_0 \cdot C_0); \\ &A \cdot C + B \cdot C = \alpha\gamma' \cdot D_0 + \beta\gamma' \cdot D_0 = (\alpha + \beta)\gamma' \cdot D_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &C \cdot (A + B) = \gamma' \cdot C_0(\alpha \cdot A_0 + \beta \cdot A_0) = \\ &= \gamma'(\alpha + \beta) \cdot (C_0 \cdot A_0) = \gamma'(\alpha + \beta) \cdot D_0' \qquad (D_0' = C_0 \cdot A_0); \end{aligned}$$

$$C \cdot A + C \cdot B = (\gamma' \cdot C_0) \cdot \alpha \cdot A_0 + (\gamma' \cdot C_0) \cdot \beta \cdot A_0 =$$
$$= \gamma'\alpha \cdot (C_0 \cdot A_0) + \gamma'\beta \cdot (C_0 \cdot A_0) = \gamma'\alpha \cdot D_0' + \gamma'\beta \cdot D_0' = \gamma'(\alpha + \beta) \cdot D_0'.$$

Итак, соблюдаются левый и правый дистрибутивные законы. Следовательно, множество M является гипералгеброй первого ранга. Если указанный группоид, за исключением нуля, является группой, то мы имеем ассоциативную гипералгебру с делением по входящим в нее прямым первого ранга.

Рассмотрим два примера.

1). Пусть элементы множества M – квазиунитарные матрицы n-го порядка над полем комплексных чисел, т. е. матрицы A, для которых $A \cdot A^+ = A^+ \cdot A = a$, причем $a \geq 0$ [1]. Они, за исключением нуля, составляют мультипликативную группу, которую мы обозначим как $QU(n)$ [1]. Пусть A_0 – элемент M, $\alpha \cdot A_0$ – прямая, проходящая через нуль, если α – произвольное комплексное число. Согласно сказанному выше,$QU(n)$ и нуль – ассоциативная гипералгебра бесконечного порядка первого ранга с делением по прямым, проходящим через нуль. Прямые здесь – одномерные векторные пространства над полем комплексных чисел.

2). Квазиортогональные матрицы n-го порядка с вещественными матричными элементами, т. е. вещественные матрицы A, для которых $A \cdot \widetilde{A} = \widetilde{A} \cdot A = a$, $a \geq 0$, ($\widetilde{A}$ – транспонированная матрица). Множество M состоит их точек вещественных прямых, проходящих через общий нуль. Они образуют (кроме нуля) группу, которую мы обозначим как $QO(n)$ [1]. Как и в примере 1, убеждаемся, что $QO(n)$ и нуль – ассоциативная гипералгебра бесконечного порядка первого ранга с делением по вещественным прямым, проходящим через нуль.

Уже из этих примеров видно, что в отличие от небольшого числа (трех) ассоциативных алгебр конечного ранга с делением над полем действительных чисел, число ассоциативных гипералгебр с делением конечного ранга над полем действительных, а также комплексных, чисел бесконечно. В данном примере, однако, порядок гипералгебры бесконечен. Ниже мы увидим, что этот вывод верен и для ассоциативных гипералгебр с делением над полем действительных чисел конечных порядка и ранга.

§4. Гипертела, связанные с ассоциативным телом или непростым полем

Рассмотрим ассоциативное тело или поле, обладающие подтелом или подполем $\widetilde{P}$, мультипликативная группа которых является нормальным делителем мультипликативной группы тела или поля. Это, например, центр тела [2] или любое подполе непростого поля. Пусть A_i и B_i – элементы какого-нибудь класса смежности $\widetilde{A_i}$, а P', P'', P''' – такие элементы нормального делителя – ненулевые элементы рассматриваемого подтела, что

$$A_i = A_i' \cdot P', \quad B_i = A_i' \cdot P'', \tag{23}$$

где A_i' – некоторый элемент класса $\widetilde{A_i}$,

$$A_i + B_i = A_i'(P' + P'') = A_i'P''', \tag{24}$$

$$-A_i = A_i'(-P') = -A_i'P', \tag{24$'$}$$

$$P''' = P' + P''.$$

Мы видим, что $A_i + B_i$ – элемент класса $\widetilde{A_i}$. Следовательно, каждый смежный класс вместе с нулем является аддитивной группой. Но поскольку произведение элементов двух классов смежности по нормальному делителю – снова элемент какого-нибудь определенного класса смежности, мы видим, что наше тело или поле является гипертелом или гиперполем по классам смежности (вместе с нулем) по нормальному делителю – мультипликативной группе рассматриваемого подтела или подполя $\widetilde{P}$. Это гипертело или гиперполе является, если $\widetilde{P}$ – центр тела или подполе центра, даже гипералгеброй второго рода с делением первого ранга над $\widetilde{P}$. Поле $\widetilde{P}$ (без нуля) является нормальным делителем мультипликативной группы гипералгебры и (вместе с нулем) одной из прямых, проходящих через нуль, а остальные классы смежности вместе с нулем – также прямыми над $\widetilde{P}$, проходящими через нуль. В качестве примера рассмотрим совокупность прямых комплексной плоскости, проходящих через нуль. Действительная ось – подполе поля комплексных чисел и (без нуля) нормальный делитель мультипликативной группы. Рассматриваемые прямые (без нуля) – смежные классы мультипликативной группы по нормальному делителю. Рассматриваемому полю, согласно сказанному выше, соответствует гипералгебра бесконечного порядка первого ранга с делением над полем действительных чисел по прямым, проходящим через нуль. Ее подгипералгебрами, не будучи полями, являются совокупности n прямых (включая действительную ось), проходящих через нуль и делящих комплексную плоскость на $2n$ равных углов. Это – гипералгебры с делением по этим прямым первого ранга n-го порядка. Из этого примера снова видно, что число ассоциативных гипералгебр с делением конечного ранга над полем действительных чисел бесконечно, причем в данном случае не только ранг, но и порядок гипералгебр конечен.

Еще одним примером является поле действительных чисел, рассматриваемое как гиперполе, аддитивными группами которого являются аддитивная группа поля рациональных чисел и остальные классы смежности по мультипликативной группе поля рациональных чисел (вместе с нулем). Это – гипералгебра бесконечного порядка первого ранга с делением над полем рациональных чисел.

Отметим еще, что гипертелом является подмножество N некоторого кольца, включающее нуль, являющееся, кроме нуля, группой по умножению и имеющее подмножество, являющееся телом, мультипликативная группа которого – нормальный делитель мультипликативной группы множества N. Аддитивными группами этого гипертела являются все классы смежности по нормальному делителю вместе с нулем. Доказательство совершенно аналогично приведенному для ассоциативного тела. Примерами таких множеств являются рассмотренные выше совокупности прямых комплексной плоскости, проходящих через нуль и делящих комплексную плоскость на $2n$ равных углов; совокупность квазиунитарных матриц второго порядка, рассмотренная в [1], с подтелом кватернионов, а также квазиунитарные матрицы n-го порядка как гипералгебры с делением над полем комплексных чисел по прямым, проходящим через нуль.

В дополнение к вышесказанному отметим, что аддитивные группы ассоциативного гипертела, содержащего тело – аддитивную группу с единицей, представляют собой одномерные векторные пространства (прямые) над этим телом.

§5. Гиперкольца и градуированные кольца

I. Каждому невырожденному гиперкольцу соответствует некоторое кольцо, которое мы назовем *обобщенным градуированным кольцом.* Построим его так: возьмем прямую сумму аддитивных групп $\widetilde{A_i}$ гиперкольца [2], [5].

$$\widetilde{A} = \coprod_i \widetilde{A_i}, \tag{25}$$

а умножение в этой прямой сумме проводится почленно и покомпонентно с учетом дистрибутивных законов, правил умножения в гиперкольце и формулы

$$\widetilde{A_i}\widetilde{A_k} = \widetilde{A}_l. \tag{a}$$

Рассмотрим специальный случай, когда: 1) умножение по формуле (а) ассоциативно и коммутативно, но умножение элементов $A_i A_k = A_l$ не обязательно ассоциативно и коммутативно; 2) множество $\{\widetilde{A_i}\}$, как мультипликативный группоид, и множество индексов $\mathcal{J}(i, k, l, \ldots)$ – изоморфные полугруппы, но композиция в $\mathcal{J}$ аддитивна, а в $\{\widetilde{A_i}\}$ мультипликативна. Тогда при

$$l = i + k, \qquad \text{имеем} \tag{26}$$

$$\widetilde{A_i}\widetilde{A_k} = \widetilde{A_{i+k}} \tag{27}$$

и мы получаем стандартное градуированное кольцо [5]. (Гиперкольца, для которых выполняется соотношение (27), назовем *стандартными градуированными.*) В тех случаях, когда все $\widetilde{A_i}$ – аддитивные подгруппы группы $\widetilde{A}$, причем верна однозначная запись

$$A = A_1 + \ldots + A_n, \tag{28}$$

прямая сумма изоморфна обычной [5].

II. Обратно, градуированному кольцу соответствует гиперкольцо, поскольку в нем для слагаемых $\widetilde{A_i}$ выполняются условия (а), а для рассмотренного специального случая – условия (26), (27).

Поскольку в градуированном кольце аддитивные подгруппы $\widetilde{A_{iGR}}$ обладают общим нулем [5], совокупность всех входящих в них элементов составляет гиперкольцо с одним общим нулем, тогда как гиперкольцо, составленное из элементов групп $\widetilde{A_i}$, может содержать нули 0_i этих групп, вообще говоря несовпадающие. В этом случае гиперкольца, составленные из элементов групп $\widetilde{A_i}$ и элементов соответствующих групп $\widetilde{A_{iGR}}$, не изоморфны, а лишь гомоморфны.

Рассмотрим примеры. Легко показать. что:

1a) Кольцо действительных матриц второго порядка $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ является градуированным кольцом, соответствующим гиперкольцу (гиперполю) всех квазиортогональных матриц второго порядка [1]

$$B = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} z & t \\ t & -z \end{pmatrix}, \tag{29'}$$

поскольку

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a+d}{2} & \frac{b-c}{2} \\ -\frac{b-c}{2} & \frac{a+d}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{a-d}{2} & \frac{b+c}{2} \\ \frac{b+c}{2} & -\frac{a-d}{2} \end{pmatrix}. \tag{29}$$

Отметим, что это гиперкольцо представляет собой одномерное евклидово пространство векторов $A = \begin{pmatrix} z & t \\ t & -z \end{pmatrix}$ над полем P комплексных чисел $B = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$ совместно с этим полем, причем $B \cdot A = A \cdot B^+$ – произведение элемента B поля P на вектор A, а $A_1 \cdot A_2 = (A_1, A_2)$ – скалярное произведение векторов A_1 и A_2.

1b) Действительные антикватернионы (действительные матрицы второго порядка) [6] как градуированная алгебра, и соответствующая ей гипералгебра.

Антикватернион (действительные матрицы второго порядка) имеет вид [6]:

$$C = x1 + yi + zj + tk, \tag{30}$$

I – единица, x, y, z, t – действительные числа; i, j, k – мнимые единицы, причем

$$i^2 = -1, \quad j^2 = k^2 = I, ji = -ij = k, \quad ik = -ki = j, \quad kj = -jk = -i. \tag{31}$$

Антикватернионы, как легко видеть, представляют собой градуированную алгебру, которой соответствует гипералгебра над действительным полем с делением по действительной и трем мнимым осям как аддитивным группам. Действительная и мнимые единицы могут быть получены из формул (29′) для квазиунитарных матриц B и A:

$$I = B|_{x=1,y=0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad i = B|_{x=0,y=1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$
$$j = A|_{z=1,t=0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad k = A|_{z=0,t=1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{32}$$

Матрицы B и A теперь принимают вид:

$$B = x + yi, \quad A = zj + tk. \tag{33}$$

Прямая сумма аддитивных групп $\widetilde{B}$ и $\widetilde{A}$ с элементами B и A приводит к формуле (30).

2a) Кольцо комплексных матриц второго порядка $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ является градуированным кольцом, соответствующим гиперкольцу (гиперполю) квазиунитарных матриц второго порядка вида

$$\widetilde{B} = \begin{pmatrix} x & y \\ -y^* & x^* \end{pmatrix}, \qquad \widetilde{A} = \begin{pmatrix} z & t \\ t^* & -z^* \end{pmatrix}, \tag{34}$$

поскольку

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a+d^*}{2} & \frac{b-c^*}{2} \\ -\frac{(b-c^*)^*}{2} & \frac{(a+d^*)^*}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{a-d^*}{2} & \frac{b+c^*}{2} \\ \frac{(b+c^*)^*}{2} & -\frac{(a-d^*)^*}{2} \end{pmatrix}. \tag{35}$$

2b). Комплексные матрицы второго порядка как комплексные антикватернионы и как градуированное кольцо, и соответствующее ему гипертело.

Нетрудно показать, что комплексные матрицы $\widetilde{B}$ и $\widetilde{A}$ (см. (34)) имеют вид:

$$\widetilde{B} = \begin{pmatrix} x & y \\ -y^* & x^* \end{pmatrix} = \widetilde{x}I + \widetilde{y}i = I\widetilde{x} + i\widetilde{y}^+, \tag{36}$$

$$\widetilde{A} = \widetilde{z}j + \widetilde{t}k = j\widetilde{z} + k\widetilde{t}^+, \qquad \text{где} \tag{37}$$

$$\widetilde{x} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x^* \end{pmatrix}, \ \widetilde{y} = \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & y^* \end{pmatrix}, \ \widetilde{z} = \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z^* \end{pmatrix}, \ \widetilde{t} = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^* \end{pmatrix}, \tag{38}$$

$\widetilde{x}, \widetilde{y}, \widetilde{z}, \widetilde{t}$ – комплексные матрицы типа $\widetilde{w}$:

$$\widetilde{w} = \begin{pmatrix} w & 0 \\ 0 & w^* \end{pmatrix}. \tag{39}$$

Прямая сумма аддитивных групп $\widehat{B}$ и $\widehat{A}$ с элементами $\widetilde{B}$ и $\widetilde{A}$ приводит к кольцу комплексных матриц второго порядка $\widetilde{C}$ с элементами:

$$\widetilde{C} = \widetilde{x}I + \widetilde{y}i + \widetilde{z}j + \widetilde{t}k = I\widetilde{x} + i\widetilde{y}^{+} + j\widetilde{z} + k\widetilde{t}^{+}. \tag{40}$$

Матрицы C, записанные в виде (40), могут рассматриваться как антикватернионы над матрицами $\widetilde{w}$, которые, как легко показать, в совокупности изоморфны комплексным числам w. Нетрудно показать, что аддитивные группы элементов $\widetilde{x}I, \widetilde{y}i, \widetilde{z}j, \widetilde{t}k$ составляют гипертело четвертого порядка.

3) Кольцо (поле) комплексных чисел является градуированным кольцом, соответствующим гиперкольцу (гиперполю) действительной и мнимой осей.

Следует отметить, что не для всех гиперколец переход от них к соответствующим градуированным кольцам, сводящийся к составлению прямых сумм входящих в гиперкольцо аддитивных групп, целесообразен. Так, вряд ли имеет смысл составлять прямые суммы пространств полярных и аксиальных векторов, или прямые суммы физических величин, имеющих разные размерности.

§6. Кольцеобразные гиперкольца

Среди гиперколец следует выделить такие, которые в определенном смысле ближе других к кольцам. Пусть:

1) Имеется одноозначное соответствие между элементами различных аддитивных групп, предполагаемых равномощными

$$a_i \leftrightarrows a_k \leftrightarrows a_l \leftrightarrows \dots, \quad b_i \leftrightarrows b_k \leftrightarrows b_l \leftrightarrows \dots, \quad c_i \leftrightarrows c_k \leftrightarrows c_l \leftrightarrows \dots, \tag{41}$$

причем для каждой r-й аддитивной группы

$$a_r + b_r = d_r, \qquad d_i \leftrightarrows d_k \leftrightarrows d_l \leftrightarrows \dots . \tag{42}$$

Далее,

$$a_i \cdot b_k = e_l, \qquad e_i \leftrightarrows e_k \leftrightarrows e_l \leftrightarrows \dots . \tag{43}$$

2) Имеется единственная аддитивная группа A_0, являющаяся кольцом, так что, согласно пункту 1,

$$a_0 \leftrightarrows a_1 \leftrightarrows a_2 \leftrightarrows \dots, \quad b_0 \leftrightarrows b_1 \leftrightarrows b_2 \leftrightarrows \dots, \quad e_0 \leftrightarrows e_1 \leftrightarrows e_2 \leftrightarrows \dots, \tag{44}$$

$$a_0 b_0 = e_0, \tag{45}$$

где a_0, b_0, e_0 – элементы кольца A_0.

3) Гиперкольцо имеет единственный нуль.

Такое гиперкольцо назовем кольцеобразным.

Можно, вместо формул (41)–(45), записать такое гиперкольцо в виде (вообще говоря, прямоугольной) матрицы с элементами $A_{\alpha i}$, причем столбцы этой матрицы (i фиксирован) образуют аддитивную группу, а ее строки – рассмотренные выше находящиеся в одноозначном соответствии элементы. Индексы α, i могут быть непрерывными (часто; в примерах, приводимых ниже, индекс α непрерывен).

Согласно изложенному выше:

1) имеется единственное кольцо $A_0, A_{\alpha 0}$ – элементы кольца;

2) гиперкольцо имеет единственный нуль, причем пусть

$$A_{00} = 0; \tag{46}$$

3) справедливо

$$A_{\alpha i} + A_{\beta i} = A_{\gamma(\alpha,\beta)i} \tag{47}$$

(γ не зависит от i); в частности,

$$A_{\alpha 0} + A_{\beta 0} = A_{\gamma 0}; \tag{48}$$

4)

$$A_{\alpha i} \cdot A_{\beta k} = A_{\delta(\alpha,\beta)l(i,k)}, \tag{49}$$

δ не зависит от i, k; l не зависит от α, β.

Можно говорить об умножении и сложении строк, которые образуют кольцо, изоморфное кольцу A_0.

Из формул (46), (47) следует

$$A_{00} + A_{\beta 0} = A_{\beta 0}, \qquad A_{0i} + A_{\beta i} = A_{\gamma(0,\beta)i}. \tag{50}$$

Но поскольку γ не зависит от i, то

$$A_{0i} + A_{\beta i} = A_{\beta i}, \qquad \text{откуда} \tag{51}$$

$$A_{0i} = 0i.$$

Но вследствие единственности нуля

$$A_{0i} = 0. \tag{52}$$

Приведем три примера кольцеобразных гиперколец.

1). Размерные действительные числа $A_{\beta i}$, индекс i характеризует размерность, $A_{\beta 0}$ – элементы кольца безразмерных чисел, строки $A_{\beta i}$ (β фиксирован) численно равны.

2). Гиперкольцо аксиальных и полярных векторов по векторному умножению $\overrightarrow{A}_{\beta i}(i = 0, 1)$, причем $\overrightarrow{A}_{\beta 0}$ – элементы кольца аксиальных векторов, $\overrightarrow{A}_{\beta 1}$ – элементы аддитивной группы полярных векторов, причем имеется два варианта: или $\overrightarrow{A}_{\beta 1}$ и $\overrightarrow{A}_{\beta 0}$ численно равны, или $\overrightarrow{A}_{\beta 1}$ и $-\overrightarrow{A}_{\beta 0}$ численно равны.

3). Действительная и мнимая оси двойных чисел, т. е. чисел $a + ib$, причем $i^2 = 1$.

а) Действительная ось

$$A_{a0} = a. \tag{53}$$

б) Мнимая ось. Имеется два варианта:

$$\text{или} \quad A_{a1} = ai, \qquad \text{или} \quad A_{a1} = -ai. \tag{54}$$

Приложение

Пятое свойство, входящее в определение гиперкольца, как следствие дистрибутивности по сложению в гиперкольце и умножению

Рассмотрим $\widetilde{A_i}$-ю и $\widetilde{A_k}$-ю аддитивные группы гиперкольца. Тогда: либо

$$\widetilde{A_i} \cdot \widetilde{A_k} = 0_{l',m',\dots}\,, \tag{$D1$}$$

либо

$$\widetilde{A_i} \cdot \widetilde{A_k} \neq 0_{l',m',\dots}\,, \tag{$D2$}$$

где $0_{l',m',\ldots}$ – некоторый нуль, принадлежащий аддитивным группам $l', m', \ldots$, т. е. более чем одной аддитивной группе. В первом случае

$$A_i \cdot A_k = 0_{l',m',\ldots} \qquad \text{для всех} \quad A_i \text{и} A_k \tag{$D3$}$$

(A_i, A_k – элементы аддитивных групп $\widetilde{A_i}$ и $\widetilde{A_k}$).

Перейдем ко второму случаю. Пусть, например, $A_i \cdot A_k \neq 0_{l',m',\ldots}$ и A_i, B_i; A_k, B_k – элементы аддитивных групп $\widetilde{A_i}$ и $\widetilde{A_k}$ соответственно. Рассмотрим произведение $(A_i + B_i) \cdot (A_k + B_k)$. Используя дистрибутивные законы, получим:

$$(A_i + B_i) \cdot (A_k + B_k) = A_i \cdot A_k + B_i \cdot A_k + A_i \cdot B_k + B_i \cdot B_k. \tag{$D4$}$$

Поскольку все произведения в правой части (D4) соединены знаком "+", они принадлежат одной и той же, скажем, l-й аддитивной группе.

Таким образом, любые $B_i \cdot B_k$ принадлежат одной и той же аддитивной группе (той же, что $A_i \cdot A_k$). Следовательно, дистрибутивные законы (по сложению в гиперкольце и умножению) приводят к результатам:
либо верно (D3), либо все $A_i \cdot A_k$ принадлежат одной и той же аддитивной группе.

Литература

[1] Соловей Л. Г. "О некоторых дистрибутивных универсальных алгебрах". Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **2**, 2004
[2] Курош А. Г. "Лекции по общей алгебре", ГИФМЛ, М., 1962.
[3] Курош А. Г. "Курс высшей алгебры", 2-е изд., ГИТТЛ, М.-Л., 1949.
[4] Гельфанд И. М. "Лекции по линейной алгебре". 4-е изд. "Наука", ГРФМЛ, М., 1971.
[5] Ленг С. "Алгебра". Пер. с англ. под ред. А. И. Кострикина. "Мир", М., 1968.
[6] Розенфельд Б. А. "Многомерные пространства", "Наука", М., 1966.

On some hyper-algebras which are directly connected to associative structures, Euclidean vector spaces, algebras and hyper-algebras

L. G. Solovey

lgsolovey@gmail.com

In the paper [1] are examined hyper-structures, hyper-fields, hyper-rings, hyper-algebras - sets which consist of several additive groups unified in a multiplicative grupoid, which satisfies certain distributivity conditions. In [1], by definition, all the additive groups intersect only at one (the zero) point. However, this limitation is too strong. In the present note, we remove this condition: we assume the possibility of several existing zeros (but the intersection of the additive groups at non-zero elements is, as previously, not allowed). This permits to appear links between algebras, structures, Euclidean vector spaces and the corresponding hyper-algebras, which are actually studied in the present paper. Further, we define the factor hyper-ring, factor-hyperstructure, and factor-hyperfield. We provide two examples which show that, unlike the case of the small number of associative algebras of finite rank with division over the field of real numbers, the amount of associative hyper-algebras of finite rank with division over the field of real numbers is infinite. We introduce the notion of degenerate hyper-rings. It is established a one-to-one relation between non-degenerate hyper-rings and the generalized (in particular, the standard) graded rings. We study the class of hyper-rings which are closest to rings (ring-type hyper-rings).

Key-words: hyper-algebras, hyper-rings.
MSC: 11R54, 16S99, 13A02.

КВАТЕРНИОНЫ И НЕКОТОРЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ТОЖДЕСТВА

В. Н. Кутрунов, З. С. Кутрунова

Тюменский государственный университет
vkutrunov@utmn.ru

Для кватернионных аналитических функций построены специальные интегральные тождества, позволившие изучить спектральные свойства ряда интегральных операторов теории потенциала и теории упругости, сконструировать новые интегральные уравнения для классической задачи восстановления векторного поля, разработать технику регуляризации некоторых сингулярных интегральных уравнений.

Ключевые слова: интегральные тождества, кватернионные аналитические функции, спектральная теория, регуляризация.

Известно, какую роль сыграли числа в современной цивилизации. На них базируется все современное логическое мышление, современная техника. Числа проникли во все сферы человеческой деятельности, привели к компактным формам рассуждений и к многим открытиям как в гуманитарной, так и в естественной сферах человеческой жизни. Развитие чисел насчитывает много тысяч лет и понятно, что человечество стало интересоваться, нельзя ли придумать объекты более сложной, чем числа, природы, но сохраняющие в основном их свойства. Цель в том, чтобы научиться мыслить с помощью более крупных структур, опуская мелкие детали. Удалось получить множество видов обобщений чисел, которые действительно оказались плодотворными. Среди них комплексные числа, на основе которых была построена теория функций комплексного переменного и, в частности, теория аналитических функций. На аналитические функции можно было смотреть, как на функции одного комплексного переменного, что позволяло сначала эвристически переносить, а затем и доказывать многие свойства, характерные для функций одной действительной переменной. Теория функций комплексного переменного была разработана для функций, заданных на плоскости и оказалась очень плодотворной. Было желательно построить аналогичные подходы к трехмерному пространству. Процесс был начат У. Р. Гамильтоном, который ввел понятие кватернионов. Из этой теории позже было выделено понятие скалярного и векторного произведений, которые сами по себе оказались интересными, и кватернионы на некоторое время были забыты.

Однако, при изучении свойств трехмерного физического пространства исследователи замечали, что его свойства делятся на скалярные и векторные. Оказалось, что эти свойства не целесообразно и даже затруднительно изучать отдельно. Вновь возникла необходимость в объектах более сложной природы, чем комплексные числа, произошел возврат к кватернионам и к другим, еще более сложным структурам. Кватернионы и кватернионные функции развивались по схеме теории функций комплексного переменного с естественными поправками на трехмерность пространства. К настоящему времени по соответствующей тематике опубликовано большое количество работ физиков, математиков, механиков, философов. Кватернионы и кватернионные функции используются для описания электромагнитных полей, для решения задач ориентации космических аппаратов, в задачах геофизики и сейсморазведки, в механике деформируемого тела, в теории фракталов и многих других науках. Нет никакого сомнения в том, что использование кватернионных функций в теоретических и практических исследованиях является сегодня актуальной задачей. В данной заметке вводятся кватернионные аналитические функции и предлагаются некоторые их применения для исследования свойств интегральных операторов.

Будем считать, что известны как свойства, так и операции над кватернионами. Определим кватернионные аналитические функции (К-аналитические функции). Пусть $\{x_1, x_2, x_3\}$ – радиус-вектор некоторой точки в евклидовом пространстве E_3. Поставим ему в соответствие мнимый кватернион $x = x_i e_i$. Здесь по индексу i осуществляется суммирование до трёх и e_i – мнимые единицы кватерниона. По аналогии с вектор-функциями введем кватернион-функции: $q(x) = p_0\,(x_1, x_2, x_3) + p_i\,(x_1, x_2, x_3)\,e_i = p_0 + p$ и символический мнимый кватернион, оператор дифференцирования Гамильтона: $\nabla = e_i \frac{\partial}{\partial x_i}$. Правило действия оператора ∇ на функцию q в соответствии с распределительным законом будет следующим $\nabla q = \nabla p_0 + \nabla p$. Здесь

$$\nabla p_0 = e_i \frac{\partial p_0}{\partial x_i} \tag{1}$$

и произведение ∇p двух мнимых кватернионов может быть представлено через скалярное и векторное произведение

$$\nabla p = -\nabla \bullet p + \nabla \times p, \tag{2}$$

где $\nabla \bullet p$ – скалярная функция-дивергенция вектора p, а $\nabla \times p$ – векторная функция-ротор вектора p. Справа операции выполняются в соответствии с векторным исчислением, а результат интерпретируется как кватернионная функция. То есть, величины e_i интерпретируются как орты ортогональной декартовой системы координат везде, где присутствуют операции векторного исчисления и как мнимые единицы кватерниона в других случаях. Выражения (1) и (2) позволяют записать произведение ∇q в форме

$$\nabla q = -\nabla \bullet p + \nabla p_0 + \nabla \times p. \tag{3}$$

Из формулы (3) следует, что результатом произведения ∇q является кватернион, действительная часть которого равна $-\nabla \bullet p + \nabla p_0$, а мнимая $\nabla \times p$. Рассмотрим множество кватернион-функций q, удовлетворяющих условию

$$\nabla q = 0 \tag{4}$$

В этом равенстве должна равняться нулю отдельно действительная и мнимая части кватерниона ∇q, то есть

$$\begin{cases} \nabla \bullet p = 0 \\ \nabla p_0 + \nabla \times p = 0 \end{cases} \tag{5}$$

Более детальная запись равенств (5) с учетом скалярного и векторного произведений дает:

$$\frac{\partial p_1}{\partial x_1} + \frac{\partial p_2}{\partial x_2} + \frac{\partial p_3}{\partial x_3} = 0 \tag{6}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p_0}{\partial x_1} + \dfrac{\partial p_3}{\partial x_2} - \dfrac{\partial p_2}{\partial x_3} = 0 \\ \dfrac{\partial p_0}{\partial x_2} + \dfrac{\partial p_1}{\partial x_3} - \dfrac{\partial p_3}{\partial x_1} = 0 \\ \dfrac{\partial p_0}{\partial x_3} + \dfrac{\partial p_2}{\partial x_1} - \dfrac{\partial p_1}{\partial x_2} = 0 \end{cases} \tag{7}$$

Пусть, в частности, $p_1 = p_2 = 0$, $p_3 = p_3(x, y)$, $p_0 = p_0(x, y)$. В этом случае кватернион имеет вид комплексной функции

$$q(x, y) = p_0(x, y) + e_3 p_3(x, y) \tag{8}$$

с мнимой единицей e_3. Соотношение (6) удовлетворяется тождественно, а из (7) получается

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p_0}{\partial x_1} + \dfrac{\partial p_3}{\partial x_2} = 0 \\ \dfrac{\partial p_0}{\partial x_2} - \dfrac{\partial p_3}{\partial x_1} = 0 \end{cases} \tag{9}$$

Уравнения (9) являются известными условиями Коши-Римана для комплексной функции q. Следовательно, в данном случае она является аналитической функцией. Рассмотренный частный случай показывает, что множество кватернион-функций q, удовлетворяющих условию (4), включает в себя множество аналитических функций.

Определение 1. *Множество кватернион-функций, удовлетворяющих условию* (4), *называется кватернион-аналитическими (К-аналитическими) функциями.*

Для К-аналитических функций справедлива следующая почти очевидная теорема:

Теорема 1. *Пусть кватернион-функция q является К-аналитической в области $D^+(D^-)$, тогда каждая компонента этой функции является гармонической функцией.*

Из теоремы следует, что К-аналитические функции включают в себя гармонические функции. К-аналитические функции обладают многими свойствами, похожими на свойства аналитических функций в теории функций комплексного переменного. В частности, для них может быть построен аналог интеграла Коши и типа Коши. Аналог интеграла Коши имеет вид:

$$\int\limits_S \nabla \frac{1}{|r|} n q\left(x\right) d_x S = \begin{cases} 0, \quad y \in D^- \\ 2\pi q\left(y\right), \quad y \in S \\ 4\pi q\left(y\right), y \quad \in D^+ \end{cases} \tag{10}$$

Напомним, что все операции в этой формуле выполняются по правилам операций кватернионов. Под n здесь понимается мнимый кватернион, компонентами которого являются направляющие косинусы нормали в точке $x \in S$. Для $y \in S$ интеграл понимается в смысле главного значения по Коши, причём в этом случае предполагается, что поверхность S является ляпуновской, а кватернионная плотность q удовлетворяет условию Гёльдера. Аналог интеграла типа Коши в поле произвольных (уже не К-аналитических) кватернионных функций q имеет вид:

$$Q\left(y\right) = \int\limits_S \nabla \frac{1}{|r|} n q\left(x\right) d_x S, \quad y \in D^{\pm}. \tag{11}$$

Функция Q является К-аналитической. Поэтому её предельные граничные значения $Q^{\pm}$ должны удовлетворять соотношениям Коши:

$$\int\limits_S \nabla \frac{1}{|r|} n Q^+\left(x\right) d_x S = 2\pi Q^+(y), \quad y \in S, \tag{12}$$

$$\int\limits_S \nabla \frac{1}{|r|} n Q^-\left(x\right) d_x S = 2\pi Q^-(y), \quad y \in S \tag{13}$$

Вводя оператор

$$Aq = \frac{1}{2\pi}\int\limits_S \nabla\frac{1}{|r|}nq\,(x)\,d_xS, \tag{14}$$

формулы (12) и (13) запишем в виде

$$AQ^+ = Q^+, \quad AQ^- = -Q^-. \tag{15}$$

С помощью предельного перехода и оператора A граничные значения $Q^\pm$ можно записать в виде

$$Q^\pm = \pm 2\pi q + 2\pi Aq.$$

Подставляя эти значения в граничный интеграл Коши (12) или (13) и проводя необходимые сокращения, получим одинаковый результат:

$$A^2q = q. \tag{16}$$

Равенство (16) – фундаментальное тождество кватернионной теории аналитических функций. Заметим, что на основе кватернионных подходов оно практически в одно и то же время и независимо было получено [4], [8]. Однако позже было установлено, что в матричной форме оно было получено и исследовалось Бицадзе А. В. [11]. Обозначим $Aq = p$, тогда из (16) следует $Ap = q$. В интегральной форме эта пара кватернионных преобразований имеет вид:

$$\begin{aligned} q\,(y) &= \tfrac{1}{2\pi}\int\limits_S \nabla\tfrac{1}{|r|}np\,(x)\,d_xS, \\ p\,(y) &= \tfrac{1}{2\pi}\int\limits_S \nabla\tfrac{1}{|r|}nq\,(x)\ d_xS. \end{aligned} \tag{17}$$

Пользуясь векторной интерпретацией, эти кватернионные равенства можно представить в действительном виде. Приравнивая действительные и мнимые части левых и правых частей первого равенства, найдем

$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{2\pi}\int\limits_S \left[-\nabla\tfrac{1}{|r|}\bullet np_0 - \left(\nabla\tfrac{1}{|r|}\times n\right)\bullet p\right]d_xS = q_0 \\ &\tfrac{1}{2\pi}\int\limits_S \left[\nabla\tfrac{1}{|r|}\times np_0 - \left(\nabla\tfrac{1}{|r|}\bullet n\right)p + \left(\nabla\tfrac{1}{|r|}\times n\right)\times p\right]d_xS = q \end{aligned} \tag{18}$$

Здесь под p, q понимаются мнимые части кватернионов $p(x)$, $q(x)$, которые теперь интерпретируются как вектора (т. е. мнимые части кватернионов обозначены теми же буквами, что и сами кватернионы). Аналогичные соотношения для второго уравнения (17) получается из (18) переменой местами букв $p \leftrightarrow q, p_0 \leftrightarrow q_0$.

Введем интегральные операторы B, C, F, D, среди которых только первый будет несобственным, если интеграл рассматривается на ляпуновской поверхности, а прочие будут сингулярными:

$$\begin{aligned} Bp_0 &= \tfrac{1}{2\pi}\int\limits_S \nabla\tfrac{1}{|r|}\bullet np_0d_xS \\ Cp_0 &= \tfrac{1}{2\pi}\int\limits_S \nabla\tfrac{1}{|r|}\times np_0d_xS \\ Fp &= \tfrac{1}{2\pi}\int\limits_S \left(\nabla\tfrac{1}{|r|}\times n\right)\bullet pd_xS \\ Dp &= \tfrac{1}{2\pi}\int\limits_S \left[-\nabla\tfrac{1}{|r|}\bullet np + \left(\nabla\tfrac{1}{|r|}\times n\right)\times p\right]d_xS \end{aligned} \tag{19}$$

тогда равенства (18) примут вид

$$\begin{aligned} -\ Bp_0 - Fp &= q_0 \\ Cp_0 + Dp &= q \end{aligned} \tag{20}$$

Аналогично, вторая группа равенств получается из (20) заменой букв:

$$\begin{aligned} -\ Bq_0 - Fq &= p_0 \\ Cq_0 + Dq &= p \end{aligned} \tag{21}$$

Подставим q и q_0 из (20) в (21)

$$\begin{aligned} -\ B\left[-Bp_0 - Fp\right] - F\left(Cp_0 + Dp\right) &= p_0 \\ C\left[-Bp_0 - Fp\right] + D\left(Cp_0 + Dp\right) &= p \end{aligned} \tag{22}$$

Пусть $p(x)$ – произвольный кватернион. Тогда произвольны его скалярная и векторная части. Полагая равными нулю последовательно действительную и мнимую части кватерниона p, получим

$$\begin{aligned} B^2p_0 - FCp_0 &= p_0 \\ -\ CBp_0 + DCp_0 &= 0 \end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned} BFp - FDp &= 0 \\ -\ CFp + D^2p &= p \end{aligned} \tag{24}$$

Получены интегральные тождества для скалярной функции (23) и векторной функции (24). Эти тождества, полученные в работе [8], являются векторным представлением кватернионного тождества (16). Ниже будут продемонстрированы некоторые приложения этих тождеств, которые, следовательно, являются приложениями кватернионного тождества (16). Покажем сейчас некоторые приложения аналога интеграла Коши из теории кватернионных функций. Одно приложение фундаментального кватернионного тождества кватернионных аналитических функций, полученное в работах [16], [17], связано с доказательством операции коммутирования интегральных операторов потенциалов простого и двойного слоёв. Для этого введём кватернионный потенциал простого слоя:

$$\psi(y) = Bb = \frac{1}{4\pi}\int_S \frac{1}{r} n_x b(x) dS_x, \quad r = |x - y|, \quad y \in R^3. \tag{25}$$

Этот потенциал отличается от классического наличием нормали под интегралом и тем, что n, b – кватернионные функции. При определённых требованиях к гладкости границы S и к функции $b(x)$ этот потенциал является непрерывным в R^3 и гармоничным в каждой из областей $D^{\pm}$. Из непрерывности следует, что предельные граничные значения функции изнутри и извне области D^+ равны прямому значению этого потенциала при $y \in S$. Для этого оператора и оператора A доказана теорема

Теорема 2. *Для ляпуновской поверхности S и произвольной кватернионной функции $b(x)$, удовлетворяющей условию Гёльдера на границе, кватернионные интегральные операторы A, B простого и двойного слоёв (анти)коммутируют между собой по правилу $ABb = -BAb$.*

Укажем на один факт, характерный для получения различных формул в кватернионном представлении. Внешне записи выглядят обычным (знакомым) образом, например, мы видим, что в последнем тождестве при перестановке операторов меняется знак. Однако, если теперь перейти к действительным записям, то получится четыре равенства, в которых исчезнет всякое внешнее сходство с операцией коммутирования. В каждом из равенств будут фигурировать различные операторы и трудно придумать метод для доказательства каждого из них. В этом одно из достоинств применения техники кватернионов в изучении свойств трёхмерного пространства. Эти свойства исследуются некоторым коллективным образом и не надо изобретать доказательств для отдельных свойств. Такие доказательства могут оказаться очень неуклюжими или очень сложными.

Доказательство теоремы связано с решением уравнения Лапласа $\Delta u = 0$, преобразованного в факторизованное кватернионное дифференциальное уравнение $\nabla\nabla u = 0$. Факторизация происходит с помощью кватернионного оператора Гамильтона и легко проверяется вычислением символического кватерниона $\nabla\nabla$. Действительно, $\bigtriangledown\bigtriangledown = -\bigtriangledown\bullet\bigtriangledown+\bigtriangledown\times\bigtriangledown$. Теперь уравнение можно дважды последовательно проинтегрировать как обыкновенное дифференциальное уравнение. Для этого используется аналог интеграла Коши в кватернионных функциях. Последовательное интегрирование этого уравнения по кватернионной схеме приводит к следующему решению (кватернионный аналог интеграла Коши, в кватернионной теории гармонических функций):

$$\nabla u\,(y) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_S \nabla\frac{1}{|r|}n_x \nabla u\,(x)^+\,dS_x, \quad y \in D^+$$

$$u(y) + \frac{1}{4\pi}\int\limits_S \frac{1}{|y-x|}n_x \nabla u\,(x)^+\,dS_x =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int\limits_S \nabla_z\frac{1}{|z-y|}n_z[u(z) + \frac{1}{4\pi}\int\limits_S \frac{1}{|x-z|}n_x\nabla_x u\,(x)^+\,dS_x]\,dS_z; \quad y \in D^+$$

Если бы были известны граничные значения $u(z), \nabla u(z)^+$, то по этим формулам вычислялись бы эти же значения в области D^+. Но эта информация для решения уравнения Лапласа является переопределённой, и при произвольном ее задании уравнение не будет иметь решения. Поэтому, последние равенства могут рассматриваться на границе области S как уравнения для определения части этих данных по другой известной части. Известная часть граничных данных кватернионов $u(z), \nabla u(z)^+$ (или их комбинация) не должна быть переопределённой, достаточной для существования, по крайней мере, одного решения. Граничные равенства, соответствующие общему решению кватернионного уравнения Лапласа, получаются из последних равенств предельным переходом на границу области и выписываются из теории кватернионных аналитических функций:

$$\nabla u\,(y)^+ = \frac{1}{2\pi}\int\limits_S \nabla\frac{1}{|r|}n_x \nabla u\,(x)^+\,dS_x, \quad y \in S$$

$$u(y) + \frac{1}{4\pi}\int\limits_S \frac{1}{|y-x|}n_x \nabla u\,(x)^+\,dS_x =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_S \nabla_z\frac{1}{|z-y|}n_z[u(z) + \frac{1}{4\pi}\int\limits_S \frac{1}{|x-z|}n_x\nabla_x u\,(x)^+\,dS_x]dS_z; \quad y \in S$$

Используя предыдущую теорему, полученные граничные интегральные равенства кватернионной теории гармонических функций могут быть преобразованы. Результат формулируется в виде теоремы:

Теорема 3. *Граничные значения кватернионной гармонической функции* u *и её кватернионного градиента* ∇u^+ *удовлетворяют тождествам*

$$A\nabla u^+ = \nabla u^+, \qquad B\nabla u^+ = \frac{1}{2}(Au - u).$$

Если имеются условия, связывающие на границе некоторые компоненты функции u и её кватернионного градиента, обеспечивающие существование решения, то тождества, рассматриваемые теперь как интегральные уравнения, позволяют доопределить оставшиеся компоненты этих величин и, следовательно, найти решение задачи. Если дополнительные граничные связи избыточны, то последние уравнения не будут иметь решения, следовательно, и краевая задача не имеет решений. Однако все же можно находить решение таких задач, пользуясь подходами теории некорректных задач, а именно, переопределенные граничные условия могли быть известны из опыта и по этой причине не точны. Поэтому, вместо строгих равенств в таких задачах можно потребовать близости левых и правых частей уравнений в некотором определённом смысле. В случае недостаточности граничных условий, краевая задача для кватернионного уравнения Лапласа будет иметь неединственное решение.

Для иллюстрации сказанного, кватернионные равенства применяются для исследования некоторых классических задач математической физики. В частности, повторён известный результат, что задача Дирихле для кватернионного уравнения Лапласа имеет единственное решение. В качестве второго примера рассматривается решение кватернионного уравнения Лапласа $\triangle u = 0$ в области D^+ при условии, что на границе задан кватернионный градиент, то есть $\bigtriangledown u = f$. В этом случае граничные интегральные равенства имеют следующий вид: $Af = f, \quad Bf = \frac{1}{2}(Au - u)$. Отсюда следует, что задание на границе кватернионного градиента избыточно. Действительно, если заданная функция f такова, что не выполняется первое равенство, то поставленная задача не имеет решения. Если первое равенство выполняется, тогда доказывается, что второе уравнение служит для определения граничного значения функции u с точностью до граничного значения произвольной кватернионной аналитической функции. Решение в области также находится с точностью до произвольной кватернионной аналитической функции.

Предыдущий подход, связанный с факторизацией дифференциального оператора Лапласа и последующим применением кватернионного аналога интеграла Коши, может быть применён в других задачах. Например, могут быть построены интегральные уравнения теории упругости. Для такого построения, прежде всего, понадобилась запись дифференциальных уравнений теории упругости (уравнений Ламе) в кватернионной форме:

$$\nabla((\lambda - \mu)\nabla u + (\lambda + \mu)u\nabla) = 0.$$

Здесь вектор перемещения u понимается как мнимая кватернионная функция, а λ, μ – физические константы Ламе. Выражение в скобках, являющееся кватернионной аналитической функцией, может быть представлено через ротор и дивергенцию вектора перемещений:

$$\nabla\left[\frac{\lambda + 2\mu}{2\mu}(\nabla \bullet u) - \frac{1}{2}(\nabla \times u)\right] = 0.$$

Использование векторных операций символическое, временно, на момент выполнения векторных операций, мнимые единицы кватерниона рассматриваются как орты декартова базиса, а после их выполнения эти орты вновь рассматриваются как мнимые единицы. Пользуясь представлением кватернионных аналитических функций, это кватернионное уравнение можно один раз проинтегрировать, в полученном решении перейти к пределу на границу области. Разделяя скалярную и векторную части, это предельное равенство может быть представлено в виде:

$$\nabla \bullet u = -\frac{1}{2\pi C}\int\limits_S \left[C(\nabla \bullet u)n - n \times \frac{1}{2}(\nabla \times u)\right] \bullet \nabla \frac{1}{|r|}\, d_x S;$$

$$\frac{1}{2}(\nabla \times u) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_S \left[C(\nabla \bullet u)n - n \times \frac{1}{2}(\nabla \times u)\right] \times \nabla \frac{1}{|r|}\, d_x S -$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_S \nabla \frac{1}{|r|}\left(n \bullet \frac{1}{2}(\nabla \times u)\right) d_x S, \qquad \text{где} \quad C = \frac{2\mu + \lambda}{2\mu}.$$

Данные равенства удовлетворяются для ротора и дивергенции вектора перемещений u, являющегося решением уравнений Ламе. Если известны лишь некоторые компоненты ротора и дивергенция, или их комбинации, то на данные уравнения можно смотреть как на граничные интегральные уравнения для доопределения недостающих компонент. Заданных величин для этого может не хватать, быть достаточно, либо быть с избытком. Соответственно будет возникать неединственннсть решения задачи, решение будет единственным, либо задача будет некорректной. Различных вариантов таких уравнений может быть много. Например, на эти уравнения можно смотреть как на задачу восстановления вектора перемещения по его нормальной составляющей, заданной на поверхности. Особый интерес могут представлять именно некорректные постановки, что сейчас и наблюдается, например, при решении задач геофизики [18].

Заметим, также, что факторизации уравнений Ламе с помощью оператора Гамильтона недостаточно, чтобы эти уравнения проинтегрировать дважды, как это было сделано выше для уравнения Лапласа. Уравнения Ламе удалось проинтегрировать только один раз. Для устранения этого здесь может быть эффективным подход, опирающийся не на кватернионные аналитические функции, а на некоторое их обобщение, позволяющее получить другой класс аналогов интеграла Коши в кватернионных функциях [5]. Результаты интегрирования уравнений Лапласа и теории упругости с помощью аналогов интеграла Коши из теории кватернионных функций сами могут рассматриваться как аналоги интегралов Коши для соответствующих функций. Действительно, интеграл Коши в теории аналитических функций и теории кватернионных аналитических функций выражает аналитическую функцию через её граничное значение. Эти функции удовлетворяют дифференциальным уравнениям первого порядка. Дифференциальные уравнения Лапласа и теории упругости Ламе являются дифференциальными уравнениями второго порядка. Соответственно, интегральные представления их решений оказываются выраженными не только через граничные значения этих решений, но и через граничные значения некоторых комбинаций первых производных. Для техники построения тождеств это оказывается не принципиальным. Поэтому на их основе, как и в теории кватернионных функций, строятся аналоги интегралов типа Коши и далее, также по аналогии, некоторые кватернионные (и не только) интегральные тождества для достаточно произвольных функций. Полученные группы тождеств применены для исследования спектральных свойств некоторых операторов кватернионной теории аналитических функций, классической теории потенциала, интегральных операторов теории упругости [3], [16]. Для примера, приведём результаты, непосредственно следующие из действительной формы записи фундаментального кватернионного тождества (23), (24):

Теорема 4. *За исключением точек* $\lambda = \pm 1$ *собственные числа операторов потенциала двойного слоя* B *и оператора* D *совпадают вместе с их кратностью, а соответствующие собственные функции* φ *и* ψ *взаимно-однозначно пересчитываются с помощью операторов* C *и* F *по следующей последовательности:* $B\varphi = \lambda\varphi$, $C\varphi = \psi$, $D\psi = \lambda\psi$, $F\psi = (\lambda^2 - 1)\,\varphi$.

Цепочка пересчёта позволяет сделать некоторые выводы о спектре операторов, получающихся суперпозицией. Действительно, из второго и четвёртого равенств цепочки следует: $FC\varphi = (\lambda^2 - 1)\varphi$, $\quad CF\psi = (\lambda^2 - 1)\psi$. То есть собственные числа операторов FC, CF совпадают, а собственные функции φ, ψ являются собственными функциями соответственно операторов B, D. Отметим также, что спектры этих операторов расположены на интервале $(-1, 0)$.

Теорема 5. *Точки* $\lambda = \pm 1$ *являются точками непрерывного спектра оператора* D *бесконечной кратности. Точка* $\lambda = 0$ *может быть точкой сгущения спектра. Других точек непрерывного спектра у оператора* D *нет.*

По аналогии с предыдущим строится теория кватернионных функций двух переменных. Наличие трёх мнимых единиц отличает её от теории функций комплексного переменного. В ней получается как бы дополнительная степень свободы, возможность выхода в третье измерение. В результате, даже простое повторение исследований по аналогии с предыдущим приводит к некоторым неожиданным результатам. Например, спектр оператора потенциала двойного слоя в плоском случае оказывается симметричным [10]. Заметим, что проверить этот результат численно не удаётся, так как приближённая замена оператора нарушает это свойство. В частном случае кривой интегрирования, совпадающей с окружностью, указанный факт проверяется аналитически.

Вторая группа приложений получается применением полученных выше результатов и кватернионной техники исследования к изучению различных интегральных операторов или уравнений. Здесь нет кватернионных функций непосредственно, есть отдалённые следствия их исследований. Мы излагаем эти приложения, так как, если бы результаты, полученные с использованием кватернионов, не применялись в других исследованиях, то эти результаты были бы просто не нужны. Одним из первых приложений такого рода может служить непосредственное повторение схемы получения тождеств к функциям, удовлетворяющим дифференциальным уравнениям, отличным от (4) и не являющимся кватернионными. Эти уравнения должны иметь аналоги интегралов Коши и типа Коши. Здесь кватернионы послужили толчком к размышлениям по аналогии. Например, по той же схеме на основе интегральных представлений функций класса C^2 демонстрируется аналогичный предыдущему подход к построению тождеств для некоторых уравнений эллиптического типа. В представление входят значения функций и их различные производные на границе области. Классическим примером является представление функций класса C^2, записанное на основе формул Грина. На его основе строится аналог формулы Коши в теории гармонических функций, являющийся интегральным представлением гармонической функции через её граничное значение и граничное значение нормальной производной [2]. Полученные интегральные представления можно продифференцировать и, используя предельный переход на границу области, получить столько граничных производных, сколько их содержалось в исходном интегральном представлении. Использование граничных интегральных равенств по схеме, изложенной выше, приводит к группам интегральных тождеств, включающих в себя значительный произвол. По аналогии вводятся граничные интегральные операторы

$$V\psi = \frac{1}{2\pi}\int\limits_S \frac{1}{|r|}\psi\, d_xS, \quad |r| = |x-z|\,,\ z\in S; \quad B\varphi = \frac{1}{2\pi}\int\limits_S \varphi\frac{\partial}{\partial n_x}\frac{1}{|r|}\, d_xS;$$

$$G\psi = \frac{1}{2\pi}\int\limits_S \psi\frac{\partial}{\partial n_y}\frac{1}{|r|}\, d_xS; \quad M\psi = \lim_{y\in D^+,\ y\to z\in S}\frac{\partial}{\partial n_y}\Big(\frac{1}{2\pi}\int\limits_S \varphi\frac{\partial}{\partial n_x}\frac{1}{|r|}\, d_xS\Big)$$

Два из этих операторов хорошо известны в классической теории потенциала, это операторы V потенциала простого слоя и B – потенциала двойного слоя. В результате получим тождества, верные для достаточно произвольных функций φ и ψ. От функций φ и ψ, а также от поверхности S требуется степень гладкости, достаточная для существования предыдущих сингулярных и несобственных интегралов. Интегральные тождества для этих функций имеют вид [3]:

$$VG\psi = BV\psi; \quad \psi = G^2\psi - MV\psi;$$
$$\varphi = B^2\varphi - VM\varphi; \quad MB\varphi = GM\varphi.$$

По аналогии с исследованием тождеств для кватернионных функций и здесь устанавливаются некоторые факты для спектра и собственных функций интегральных операторов. Легко устанавливается известный факт о том, что спектры операторов потенциала двойного слоя B и нормальной производной потенциала простого слоя G совпадают. Кроме того, из записанных тождеств вытекает также, что собственные функции этих операторов взаимно пересчитываются с помощью операторов классической теории потенциала V и M. То есть одним из операторов пересчета собственных функций является оператор потенциала простого слоя. Цепочка, устанавливающая связь между собственными функциями и собственными числами операторов B, G, а также формулы взаимного пересчёта похожи на соответствующие формулы пересчета в кватернионной теории потенциала и имеют следующий вид: $B\varphi = \lambda\varphi, \quad M\varphi = \psi, \quad G\psi = \lambda\psi, \quad V\psi = (\lambda^2-1)\varphi.$

Устанавливаются также спектральные свойства суперпозиций некоторых операторов. Именно, спектры операторов VM и MV дискретны, совпадают между собой и выражаются через спектр оператора потенциала двойного слоя, а собственные функции взаимно пересчитываются и связаны с собственными функциями оператора потенциала двойного слоя. Подход можно применить и к другим дифференциальным уравнениям эллиптического типа. Например, на основе интегрального представления решений уравнений Ламе теории упругости (аналог интеграла Коши в теории упругости [14])

$$\delta(y)\,u(y) = \int\limits_S f(x)\bullet U(x,y)\, d_xS - \int\limits_S u(x)\bullet \Phi(x,y)\, d_xS,$$

построены интегральные тождества [3] для уравнений теории упругости. Здесь $f(x)$ – граничное значение вектора напряжения, $u(x)$ – граничное значение вектора перемещения точек упругого тела, занимающего трёхмерную область D^+ с границей S, $U(x,y)$ – тензор второго ранга Кельвина-Сомильяна, а $\Phi(x,y)$ – силовой тензор влияния второго ранга. Кроме того, $\delta(y)$ – характеристическая функция области, равна 1, если $y\in D^+$ и 0, если $y\in D^-$. Отметим, что если S – ляпуновская поверхность и функция $u(y)$ на границе области удовлетворяет условию Гёльдера с некоторым показателем β, то предыдущее представление верно и для $y\in S$ и в этом случае $\delta(y) = 0,5$. Граничный вектор напряжения вычисляется по вектору перемещения с помощью оператора дифференцирования

$$T_n u\left(x\right)=2\mu\frac{\partial u}{\partial n}+\lambda n\left(\nabla\bullet u\right)+\mu\left(n\times\left(\nabla\times u\right)\right)=f\left(x\right)$$

и последующего предельного перехода на границу области. Здесь λ,μ – физические константы, n – нормаль в точке к площадке, на которой вычисляется вектор напряжения. Применение оператора дифференцирования к интегральному представлению и последующий предельный переход на границу области приводит к результату:

$$u^{+}\left(z\right)=2\int\limits_{S}f\left(x\right)\bullet U\left(x,z\right)d_xS-\lim_{y\in D^{+},\ y\to z\in S}\Bigl(2\int\limits_{S}u\left(x\right)\bullet\Phi\left(x,y\right)d_xS\Bigr)$$

$$\left[T_{n_z}u\left(z\right)\right]^{+}=2\int\limits_{S}\Phi\left(z,x\right)\bullet f\left(x\right)d_xS-\lim_{y\in D^{+},\ y\to z\in S}T_{n_z}\Bigl(2\int\limits_{S}u\left(x\right)\bullet\Phi\left(x,y\right)d_xS\Bigr)$$

В этом случае $u^{+}(z)=u(z),\ [T_{n_x}u(z)]^{+}=f(z),\quad z\in S$. Используем их для получения других тождеств, содержащих произвол. Аналоги интегралов типа Коши могут быть построены из аналога интеграла Коши в теории упругости. Опуская выкладки и предельные переходы, введём операторы

$$H\varphi=2\int\limits_{S}\varphi\left(x\right)\bullet U\left(x,z\right)d_xS;\quad K^{*}\varphi=2\int\limits_{S}\varphi\left(x\right)\bullet\Phi\left(x,z\right)d_xS;$$

$$K\varphi=2\int\limits_{S}\Phi\left(z,x\right)\bullet\varphi\left(x\right)d_xS;\quad L\varphi=\lim_{y\in D^{+},\ y\to z\in S}T_{n_y}\Bigl(2\int\limits_{S}\varphi\left(x\right)\bullet\Phi\left(x,y\right)d_xS\Bigr).$$

Первый из этих операторов известен в теории упругости как прямое значение обобщенного потенциала простого слоя, второй – прямое значение обобщенного потенциала двойного слоя. С помощью техники, аналогичной технике, продемонстрированной выше, получим четыре тождества, содержащие две произвольные вектор-функции φ и $\psi:$

$$HK\varphi=K^{*}H\varphi;\quad LH\varphi=K^{2}\varphi-\varphi;$$

$$HL\psi=-\psi+\left(K^{*}\right)^{2}\psi;\quad KL\psi=LK^{*}\psi.$$

На основе этих тождеств также по аналогии с предыдущим доказан классический результат: совпадение спектров сопряжённых операторов K и K^{*}. Цепочка последовательных вычислений и пересчётов собственных функций имеет вид:

$$K\varphi=\lambda\varphi,\quad H\varphi=\psi,\quad K^{*}\psi=\lambda\psi,\quad L\psi=(\lambda^{2}-1)\varphi.$$

В классических исследованиях интегральных уравнений теории упругости не упоминается, что оператор обобщённого потенциала простого слоя оказывается оператором пересчёта собственных функций оператора K^{*} в собственные функции сопряжённого ему оператора K. Другое применение полученных интегральных тождеств в теории упругости было указано в [12]. Именно, можно искать решение первой задачи теории упругости с помощью обобщенного потенциала простого слоя $u=H\varphi$, где u – искомый вектор перемещения, поиск которого сведён к поиску плотности потенциала φ. Как и в классической теории потенциала, если решение задачи Дирихле искать в виде потенциала простого слоя, получится интегральное уравнение, относящееся к классу интегральных уравнений первого рода, являющихся некорректными. Тождества для обобщенных потенциалов теории упругости позволяют достаточно просто преобразовать задачу к корректным граничным интегральным уравнениям второго рода, что обеспечивает возможность устойчивого численного счёта и использования теорем существования и единственности.

Полученные тождества относятся к теории упругости только по той причине, что в них содержится произвольная константа, коэффициент Пуассона ν. Из последних тождеств можно получить множество других, которые уже будут иметь общий характер, не относящийся к теории упругости, если этому коэффициенту придавать различные числовые значения. Конкретное задание этого числового параметра приводит к конкретному виду ядер интегральных операторов, входящих в тождества. Конечно, представляют интерес не все, получающиеся таким образом варианты тождеств. Как именно меняются ядра, можно видеть на примере распадения интеграла, имеющего смысл интеграла Гаусса в теории упругости. Этот интеграл называется обобщённым интегралом Гаусса и в случае ляпуновской поверхности имеет вид:

$$\int_S \Phi\left(x,y\right)\ dS_x = \begin{cases} -I, & y\in D^{+}, \\ -\frac{1}{2}I, & y\in S, \\ 0, & y\in D^{-}. \end{cases}$$

Входящее сюда ядро является одним из двух ядер интегралов записанных тождеств и в диадном представлении эти ядра имеют вид

$$U\left(x,y\right) = \frac{1}{16\pi\mu\left(1-\nu\right)\left|r\right|}\left[\left(3-4\nu\right)I + \frac{rr}{\left|r\right|^2}\right];$$

$$\Phi\left(x,y\right) = \frac{1}{8\pi\left(1-\nu\right)\left|r\right|^3}\left[\left(1-2\nu\right)\left(nr - rn - n\bullet rI\right) - 3\frac{n\bullet r}{\left|r\right|^2}rr\right],$$

Здесь $r = x - y$ – вектор, rr – диадное произведение векторов, I – единичный тензор. Так как равенство верно для произвольного коэффициента Пуассона ν, то, полагая $\nu = 0,5$, получим следующий вид тензора:

$$\Phi\left(x,y\right) = \frac{-3}{4\pi}\frac{n\bullet r}{\left|r\right|^5}rr,$$

и интеграл Гаусса примет вид, не зависящий от теории упругости:

$$\int\limits_S \frac{-3}{4\pi}\frac{n\bullet r}{\left|r\right|^5}rr\, d_xS = \begin{cases} -I, & y\in D^{+}, \\ -\frac{1}{2}I, & y\in S, \\ 0, & y\in D^{-}. \end{cases}$$

С учётом этого равенства, переходя к пределу $\nu\rightarrow\infty$, получим другое независимое от теории упругости равенство

$$\int\limits_S \frac{1}{4\pi\left|r\right|^3}\left(nr - rn - n\bullet rI\right) d_xS = \begin{cases} -I, & y\in D^{+}, \\ -\frac{1}{2}I, & y\in S, \\ 0, & y\in D^{-}. \end{cases}$$

С учетом классического интеграла Гаусса из теории потенциала, можно записать:

$$\int\limits_S \frac{n \bullet r}{4\pi \left|r\right|^3} I \, d_x S = \begin{cases} -I, & y \in D^+, \\ -\frac{1}{2} I, & y \in S, \\ 0, & y \in D^-. \end{cases}$$

Сравнивая это равенство с предыдущим, запишем ещё один не зависящий от теории упругости интеграл:

$$\int\limits_S \frac{1}{4\pi \left|r\right|^3} (nr - rn) \, d_x S = \begin{cases} 0, y \in D^+ \\ 0, y \in S \\ 0, y \in D^- \end{cases}$$

Последний интеграл является сингулярным и непрерывным при переходе переменной y через границу области интегрирования S. Записанные интегралы могут иметь самостоятельный интерес, например, последний применён нами для регуляризации сингулярных интегральных уравнений теории упругости.

Тождества кватернионной теории аналитических функций представляют два варианта явной регуляризации сингулярных интегральных уравнений теории упругости. Оба варианта опираются на то, что интегральные операторы теории упругости K, K^* представляются в виде суммы $K = \beta D + T_1, K^* = \beta D + T_2$, где β – константа, выражающаяся через коэффициент Пуассона, $D-$ сингулярный интегральный оператор из теории кватернионных аналитических функций (19), который является замкнутым линейным ограниченным интегральным оператором, а операторы T_1, T_2 для ляпуновских поверхностей вполне непрерывными интегральными операторами со слабой особенностью. Один вариант регуляризации связан со спектральными свойствами оператора D и обобщением теоремы Вейля о вполне непрерывных возмущениях, сформулированном, например, в [15]: Прибавление к замкнутому линейному оператору произвольного вполне непрерывного оператора не изменяет непрерывной части спектра. Следовательно,

Теорема 6. *Спектры интегральных операторов теории упругости имеют три точки непрерывного спектра:* $0, \pm\beta$, *других точек непрерывного спектра нет.*

Учитывая доказанный грузинской школой математиков во главе с В. Д. Купрадзе факт о том, что для интегральных уравнений теории упругости верны теоремы Фредгольма, [11], остаётся заключить, что эти точки могут быть только точками сгущения спектра. Они не могут быть точками спектра бесконечной кратности, так как как их конечная кратность вытекает из теорем Фредгольма.

Если мы хотим теперь трансформировать интегральные уравнения теории упругости к уравнениям с вполне непрерывным оператором (а в этом и заключается смысл регуляризации), то должны заметить, что у вполне непрерывного оператора спектр дискретный, может иметь только нуль в качестве точки сгущения и собственные числа имеют конечную кратность. Отсюда, на основании теоремы о отображении спектров, возникает идея регуляризации: Надо умножить интегральное уравнение на операторный полином некоторой степени n от интегрального оператора, входящего в интегральное уравнение. При этом в уравнении степень полинома повысится на единицу. Исходную степень и коэффициенты полинома надо подобрать так, чтобы трансформированное уравнение было во-первых, интегральным уравнением второго рода и, во-вторых, интегральный оператор (полином степени $n+1$), входящий в уравнение, имел в качестве точки сгущения спектра только нулевую точку. Наконец, эта трансформация должна быть эквивалентной, то есть, не увеличивающей и не уменьшающей число решений исходного уравнения. Так как надо отобразить три точки спектра в одну точку, то в трансформированном уравнении полином должен быть минимально операторным полиномом третьей степени, следовательно, регуляризирующим оператором будет операторный полином второй степени. Эта идея реализована в [8]. Косвенно правильность подхода (а значит и кватернионных исследований, а также теоремы 6.) подтверждается совпадением результата с результатом [13] полученным, применением к построению регуляризатора теории символа С. Г. Михлина.

Однако спектральный подход позволяет построить целый класс регуляризаторов, а также становится прозрачной причина, почему надо регуляризовать сингулярные интегральные уравнения, прежде чем применять к ним некоторый численный метод решения. Любой численный метод редуцирует интегральный оператор к конечномерному оператору, спектр которого, как известно, состоит из конечного числа собственных чисел конечной кратности. Следовательно, наибольший ущерб наносится именно в спектральных свойствах. Оказывается, только в одном случае этот ущерб можно сделать сколь угодно малым: если спектр дискретен и может иметь единственную точку сгущения, равную нулю. Прозрачно понять это можно, если представить решение разложенным по собственным функциям оператора и посмотреть, что произойдёт, если в решении оставить конечное число слагаемых, а затем отбрасывать слагаемые с собственными функциями, соответствующими собственным числам, входящим в круг некоторого радиуса, с центром в нуле. То-есть, отбрасываются все собственные функции, соответствующие мало отличающимся от нуля собственным числам. Последующее уменьшение этого радиуса приведёт к улучшению аппроксимации интегрального оператора и к увеличению точности приближённого решения. Однако можно воспользоваться и известным из функционального анализа утверждением: вполне непрерывный оператор всегда можно заменить конечномерным с любой наперёд заданной точностью.

Другой вариант регуляризации заключается в таком умножении исходного интегрального уравнения на некоторый операторный полином, чтобы в результате умножения из сингулярного оператора D образовалась вполне непрерывная комбинация, полученная при исследовании фундаментального кватернионного тождества (16). Подчеркнём ещё раз, что изложенные идеи регуляризации оказались следствием исследования в кватернионных аналитических функциях, поэтому уместны в данной публикации.

Следующие приложения кватернионных аналитических функций связаны с конструированием различных интегральных уравнений. В частности, по новому сконструированы интегральные уравнения восстановления векторного поля по известным ротору и дивергенции. Сначала уравнения для ротора и дивергенции заменяются одним кватернионным дифференциальным уравнением, затем это уравнение решается с помощью техники кватернионного интегрального представления функций через граничные значения этих функций и через кватернионные характеристики поля в объеме. Так как интегральное представление кватернионной функции эквивалентно четырем скалярным уравнениям, то возникла необходимость уменьшения их количества. Используя кватернионные интегральные тождества (16), с помощью серии теорем, доказывающих эквивалентность преобразований при переходе к меньшему числу уравнений, удалось показать, что для решения задачи потребуется решить два граничных интегральных уравнения относительно двух компонент векторного поля. Третья недостающая компонента определяется методами аналитической геометрии и далее по граничному значению вектора векторного поля оно восстанавливается в области. Прямое вычисление компонент векторного поля избавляет от необходимости численного дифференцирования так называемого потенциала векторного поля, к поиску которого обычно сводится эта классическая задача. Детально это приложение кватернионов дано в работе [6].

Для построения интегральных тождеств теории упругости на основе техники кватернионов понадобилась прежде всего, запись дифференциальных уравнений теории упругости (уравнений Ламе) в кватернионной форме:

$$\nabla((\lambda-\mu)\nabla u+(\lambda+\mu)u\nabla)=0$$

Здесь λ,μ являются физическими постоянными Ламе. Выражение в скобках, являющееся кватернионной аналитической функцией. Оно может быть вычислено с помощью аналога интеграла Коши (10) из теории кватернионных аналитических функций, в котором следует положить :

$$q=(\lambda-\mu)\nabla u+(\lambda+\mu)u\nabla.$$

Действительная запись кватернионного равенства приводит к выражению ротора и дивергенции вектора перемещения через их граничные значения, а предельный переход на границу к кватернионным интегральным тождествам относительно граничных значений этих величин:

$$\begin{aligned}\nabla\bullet u&=-\frac{1}{2\pi C}\int\limits_S\left[C(\nabla\bullet u)n-n\times\frac{1}{2}(\nabla\times u)\right]\bullet\nabla\frac{1}{|r|}d_xS;\\ \frac{1}{2}(\nabla\times u)&=\frac{1}{2\pi}\int\limits_S\left[C(\nabla\bullet u)n-n\times\frac{1}{2}(\nabla\times u)\right]\times\nabla\frac{1}{|r|}d_xS\\ &-\frac{1}{2\pi}\int\limits_S\nabla\frac{1}{|r|}\left(n\bullet\frac{1}{2}(\nabla\times u)\right)d_xS,\qquad\text{где}\quad C=\frac{2\mu+\lambda}{2\mu}.\end{aligned}$$

Данные равенства удовлетворяются для граничных значений ротора и дивергенции вектора u, являющегося решением уравнений Ламе. Если известны лишь некоторые компоненты ротора и дивергенция или их комбинации, то на данные уравнения можно смотреть как на граничные интегральные уравнения для доопределения недостающих компонент ротора и дивергенции. Известных величин может быть достаточно, либо не хватать, либо быть с избытком для определения решения. Соответственно будет возникать возможность единственного или неединственного решения задачи, либо задача будет некорректной. Различных вариантов таких уравнений может быть много. Например, на эти уравнения можно смотреть как на задачу восстановления векторного поля. С механической точки зрения в этой задаче речь будет идти о восстановлении вектора перемещения по его нормальной составляющей, заданной на поверхности. Эта задача имеет не единственное решение. Следует обратить внимание на простоту, с которой благодаря кватернионам были получены данные равенства. Известны попытки их получения с помощью тензорного аппарата на двумерном многообразии. Техника была довольно сложной, вследствие чего возникали ошибки выкладок.

Итак, в кватернионной теории аналитических функций построены интегральные тождества. Они оказались полезными в нескольких отношениях: непосредственно с их использованием удалось исследовать спектры некоторых интегральных операторов и построить вполне непрерывные комбинации одного сингулярного интегрального оператора. С использованием этих свойств в приложениях удалось исследовать спектры интегральных операторов теории упругости и предложить два способа регуляризации соответствующих сингулярных интегральных уравнений. Исследовался спектр потенциала двойного слоя в плоском случае. Кватернионные тождества привели к аналогии, по которой были построены интегральные тождества для решений некоторых других дифференциальных уравнений. Эти тождества оказались полезными для анализа спектров соответствующих операторов.

Литература

[1] Кантор И. Л. Солодовников А. С. Гиперкомплексные числа. М.: Наука, 1973. 144 с.

[2] Михлин С. Г. Курс математической физики. М.: Наука, 1968. 575 с.

[3] Кутрунов В. Н. Курята З. С. Некоторые интегральные тождества математической физики //Вестник ТюмГУ, 1998. № 2. с. 34–41.

[4] Василевский Н. Л., Жданов М. С., Шапиро М. В. Пространственные аналоги интеграла типа Коши и теория кватернионов//Препр. АН УССР, Ин-т земного магнетизма, ионосферы и распростанения радио волн; 1987. №8 (737). 23 с.

[5] M. Shapiro, N. L. Vasilevski, Quaternionic ψ-hyperholomorphic function, singular integral operators and boundary value problems. 1. ψ-hyperholomorphic function theory. Complex variables, Theory and applications, 1995, v. 27, 17–46

[6] Кутрунов В. Н. Курята З. С. Интегральные уравнения векторного поля// Известия вузов, сер. математика, 1999. № 6. с. 33–36.

[7] Кутрунов В. Н., Курята З. С. Кватернионы и интегральные уравнения теории упругости// Сборник докладов межд. науч. симпозиума по проблемам механики деформируемых тел, посвященного 90-летию со дня рождения А. А. Ильюшина (Москва, 22–23 января 2001года)/ под. ред. проф. И. А. Кийко, проф. М. Ш. Исраилова, проф. Г. Л. Бровко. М.: Изд-во Моск.ун-та, 2001, с. 303–305.

[8] Кутрунов В. Н. Спектральная регуляризация интегральных уравнений теории упругости// ПММ. 1991. т. 2. с. 348–350.

[9] Кутрунов В. Н. Кватернионный метод регуляризации интегральных уравнений теории упругости.// ПММ, 1992. т. 56. Вып. 5. с. 864–868.

[10] Кутрунов В. Н. Симметрия спектра оператора потенциала двойного слоя // Труды средневолжского математического общества, 1999. т 2. № 1, с. 57–65.

[11] Купрадзе В. Д., Гегелиа Т. Г., Башелейшвили М. О., Бурчуладзе Т. В., Трехмерные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1976.

[12] Натрошвили Д. Г. Об одном интегральном уравнении первого рода// Сообщения академии наук Грузинской ССР. 1981. 102, № 3. с. 501–504. 5.

[13] Мазья В. Г. Сапожникова В. Д. Замечание о регуляризации сингулярной системы изотропной теории упругости // Вест. ЛГУ, сер. математика, механика, астрономия, 1964. № 7. с. 165–167.

[14] Лурье А. И. Теория упругости. М.: Наука, 1970. 939 с.

[15] Глазман И. М. Прямые методы качественного спектрального анализа сингулярных дифференциальных операторов. М.: Физматгиз, 1963. 339 с.

[16] Кутрунов В. Н., Кутрунова З. С. Интегрирование кватернионного уравнения Лапласа// Математическое и информационное моделирование: сборник научных трудов. Вып. 6. Тюмень: Издательство "Вектор Бук", 2004. с. 97–111.

[17] Kutrunov V. N., Kutrunova Z. S. Quaternionian integral identities and Laplace equation integration// Number, Time, Relativity: Proceedings of International Meeting. Moscow, 10–13 August 2004. Moscov, 2004. p. 27–31.

[18] Шваб А. А. Существенно переопределенная задача теории упругости// Сибирский журнал индустриальной математики. 2001. т. 4. №1. с. 204–207.

[19] Кутрунова З. С. Кватернионная факторизация некоторых дифференциальных уравнений и интегральные тождества// Труды 36-ой Региональной молодежной конференции "Проблемы теоретической и прикладной математики". Екатеринбург: УрО РАН, 2005. с. 169–173.

[20] Кутрунова З. С. Кватернионы и факторизация некоторых дифференциальных операторов// Сборник докладов межрегиональной конференции, посвященной 30-летию факультета математики и компьютерных наук ТюмГУ. Тюмень. 2005. с. 33–34.

Quaternions and several integral identities

V. N. Kutrunov, E. S. Kutrunova

Tyumen state university
vkutrunov@utmn.ru

By means of special integral identities constructed for quaternionic analytic functions, are studied spectral properties for several integral operators from the potential and elasticity theories. As well, new integral equations are determined for the classical problem of the vector field reconstruction, and the regularization technique for certain singular integral equations, is developed.

Key-words: integral identities, quaternionic analytic functions, spectral theory, regularization.
MSC: 81Q40, 65R20, 46S10, 47S10.

ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЕ ФУНКЦИИ ЧИСЕЛ КЭЛИ-ДИКСОНА

С. В. Людковский

Открытый Университет г. Брюсселя, Факультет Естественных Наук
sludkowski@mail.ru

Мы исследуем супердифференцируемость функций, определенных на областях в вещественной октонионной (Кэли) алгебре, и получаем некоммутативную версию условий Коши-Римана. Далее мы изучаем некоммутативный аналог интеграла Коши, а также критерии, при которых функции октонионных переменных являются аналитичными. В частности, рассматриваются октонионные экспоненциальные и логарифмические функции. Более того, исследуются функции переменных, принадлежащих конечно и бесконечномерным алгебрам Кэли-Диксона (содержащим октонионную алгебру в качестве собственной подалгебры). Среди главных результатов имеются аналоги теорем Коши, Гурвица, принципа аргумента, Миттаг-Леффлера, Руше и Вейерштрасса для супердифференцируемых функций чисел Кэли-Диксона.

Ключевые слова: дифференцируемость, алгебры Кэли-Диксона, октонионные функции, интеграл Коши.

1. Введение

Функции действительных переменных со значениями в алгебрах Клиффорда были исследованы, например, [5]. В данной статье продолжены исследования функций переменных, принадлежащих некоммутативным супералгебрам [27]. Здесь рассматриваются функции октонионных переменных и также более общие алгебры Кэли-Диксона $\mathcal{A}_r$, $r \geq 4$, содержащие алгебру октонионов в качестве собственной подалгебры. Алгебра октонионов является альтернативной, что дает возможность определить вычеты функций разумным образом. Алгебры Кэли-Диксона большей размерности уже не являются альтернативными и обращаться с ними труднее. Тем не менее, используя их ассоциативность со степенями и дистрибутивность, можно определить дифференцируемость функций переменных, принадлежащих алгебрам Кэли-Диксона, так что дифференциал имеет достаточно хорошие свойства, чтобы определить последовательно интегралы вдоль путей над такими переменными. Этот интеграл продолжен на пространство непрерывных функций вдоль спрямляемых путей. Необходимо отметить, что градуированная структура алгебр Кэли-Диксона $\mathcal{A}_r$ над $\mathbf{R}$ и её некоммутативность для действительной размерности не меньше, чем 4 приводит к хорошим свойствам супердифференцируемых функций $f : U \to \mathcal{A}_r$, где U открыто в $\mathcal{A}_r^n$. В отличии от комплексного случая производная f' функции $f \in C^1(U, \mathcal{A}_r)$ является оператором и в общем это не число даже при $U \subset \mathcal{A}_r$, $n = 1$.

Теория $\mathcal{A}_r$-голоморфных функций, данная ниже, не может быть сведена к теории голоморфных функций нескольких комплексных переменных. Более того, $\mathcal{A}_r$-голоморфные функции имеют много специфических особенностей по сравнению с действительными локально аналитическими функциями, такие как, например, принцип аргумента, теорема о гомотопии 2.15, теорема о представлении функций с соответствующими множителями в виде интегралов вдоль петель (замкнутых путей) и т. д.

Дирак использовал бикватернионы (комплексифицированные кватернионы) в своих исследованиях квантовой механики. Уравнения Дирака $D_z f_1 - D_{\tilde{z}} f_2 = m(f_1 + f_2)$

и $D_{\tilde{z}}f_1 + D_z f_2 = m(f_1 - f_2)$ на пространстве право суперлинейно $(z, \tilde{z})$-супердифференцируемых функций кватернионных переменных может быть продолжено на пространство $(z, \tilde{z})$-супердифференцируемых функций $f_1(z, \tilde{z})$ и $f_2(z, \tilde{z})$ (см. определение в §2.2 ниже и в [27]) дает очевидную физическую интерпретацию решения (f_1, f_2), $r \geq 2$, как спинора, где m – это масса элементарной частицы. Мы продолжим оператор $(D_z^2 + D_{\tilde{z}}^2)$ с пространства право суперлинейно $(z, \tilde{z})$-супердифференцируемых функций на пространство $(z, \tilde{z})$-супердифференцируемых функций f, следовательно, мы получим уравнение Клейна-Гордона $(D_z^2 + D_{\tilde{z}}^2)f = 2m^2 f$ в частном случае кватернионов и $\mathcal{A}_r$-алгебр, $r \geq 3$.

Необходимо отметить, что предыдущие авторы использовали правую (или левую) суперлинейную супердифференцируемость функций, что не формирует алгебры функций и что они использовали кратные и итерированные интегралы и формулу Гаусса-Остроградского-Грина, но не использовали интегралы вдоль путей над $\mathcal{A}_r$ (см., например, [11] и ссылки там). Во время развития своей теории Янг и Миллс активно работали с кватернионами, но они испытывали недостаток в имевшейся тогда теории функций. Янг также выдвинул идею, что возможно в квантовой теории поля целесообразно использовать кватернионное время (см. стр. 198 в [11]). Известно также использование комплексного времени путем поворота Вика в квантовой механике, где мнимое время используется для интерпретаций вероятностей туннелирования под энергетическими барьерами (стенами). Использование специальной унитарной группы, вложенной в тело кватернионов (некоммутативное поле) $\mathbf{H}$, приводит к эквивалентности путем изоморфизма с $SO(3)$ всех пространственных осей. С другой стороны, главным инструментом для измерения является спектр. Когда имеются глубокие энергетические ямы или высокие энергетические барьеры, это создает препятствия для проникновения электромагнитных волн и радиации, что также хорошо известно в астрономии, в которой активно изучаются черные дыры (см. страницу 199 и §3.b в [11] и ссылки там).

У. Гамильтон в своих лекциях о кватернионах также затрагивал вопрос о событиях со значениями в $\mathbf{H}$ и думал об использовании кватернионов в астрономии и небесной механике (см. [12, 30] и ссылки там). В общем, для сравнения последовательности событий может быть необходимо в определенных ситуациях иметь пространство времени той же размерности, что и координатное пространство. С другой стороны, пространственная изотропность по крайней мере локально в определенных областях делает из каждой оси при вращениях и дилатациях $SU(2) \times \mathbf{R}$ изоморфное с $\mathbf{H}$. Поэтому оказывается, что в определенных ситуациях было бы достаточно использовать $\mathbf{H}^4$ вместо пространства-времени Минковского $\mathbf{R}^{1,3}$, где $\mathbf{R}^{1,3}$ имеет вложение в $\mathbf{H}$. Поскольку $\mathbf{H}$ как $\mathbf{R}$-линейное пространство изоморфно $\mathbf{R^4}$, то существует вложение ζ пространства $\mathbf{R^{1,3}}$ в $\mathbf{H}$, так что $\zeta(x_1, x_i, x_j, x_k) = x_1 + x_i i + x_j j + x_k k$, где $\mathbf{R^{1,3}}$-норма дается уравнением $|x|_{1,3} = (x^2 + \tilde{x}^2)/2 = Re(x^2) = x_1^2 - x_i^2 - x_j^2 - x_k^2$ и $\mathbf{R^{1,3}}$ скалярное произведение дается равенством $(x, y)_{1,3} := (xy + \tilde{y}\tilde{x})/2 = Re(xy) = x_1 y_1 - x_i y_i - x_j y_j - x_k y_k$, где $x = x_1 + x_i i + x_j j + x_k k$, $x_1, ..., x_k \in \mathbf{R}$ (см. §2.1). Это также может быть использовано для вложений гиперболических многообразий в кватернионные многообразия. Тогда $\mathbf{H}^4$ может быть вложено в алгебру $\mathcal{A}_4$ седенионов (sedenions). Это также естественно для описания систем со спином, изоспином, ароматом, цветом и их взаимодействиями. Расширение пространства-времени также диктуется в некоторых ситуациях свойствами симметрии дифференциальных уравнений или множества операторов, описывающих систему. Например, специальная унитарная группа $SU(n)$, для $n = 3, 5 - 8, 11$ и т.д., исключительные группы Ли, активно используются в теории элементарных частиц [11], но эти группы могут быть вложены в соответствующие алгебры Кэли-Диксона $\mathcal{A}_r$ [1]. В самом деле, $U(m) \subset GL(n, \mathbf{C}) \subset \mathbf{C}^{n^2}$ в то время как $\mathbf{C}^m$ имеет вложение в $\mathcal{A}_r$, где $m = 2^{r-1}$, так что $\mathbf{C}^m \ni (x^1 + iy^1, ..., x^m + iy^m) =: \xi \mapsto z := (x^1 + i_1 y^1) + i_2(x^2 + i_2^* i_3 y^2) +$

$... + i_{2m-2}(x^m + i^*_{2m-2}i_{2m-1}y^m) \in \mathcal{A}_r$, так как $(i^*_l i_k)^2 = -1$ для любого $l \neq k \geq 1$, где $\{i_0, i_1, ..., i_{2m-1}\}$ – это базис генераторов $\mathcal{A}_r$, $i_0 = 1$, $i_k^2 = -1$, $i_0 i_k = i_k i_0$, $i_l i_k = -i_k i_l$ для любых $k \neq l \geq 1$, $i = (-1)^{1/2}$, $z^* = x^1 - i_1 y^1 - i_2 x^2 - i_3 y^2 - ... - i_{2m-2}x^m - i_{2m-1}y^m$, норма $(zz^*)^{1/2} =: |z| = (\sum_{k=1}^m |x^k + iy^k|^2)^{1/2} =: |\xi|$ удовлетворяет тождеству параллелограмма и индуцирует скалярное произведение.

Данная статья, как и предыдущая [27], посвящена решению проблемы У. Гамильтона развития интегрирования вдоль путей и теории голоморфных функций кватернионных переменных, но теперь рассматривается общий случай переменных алгебр Кэли-Диксона.

В данной работе исследуется дифференцируемость функций на областях действительной октонионной (Кэли) алгебры. Для этого далее рассматривается специфическое определение супердифференцируемости и получены некоммутативная версия супердифференцируемости и условий Коши-Римана в частном случае правосуперлинейной супердифференцируемости. Также изучается некоммутативный аналог интеграла Коши, а также критерии того, чтобы функции октонионных переменных были локально аналитическими. В частности, рассмотрены октонионные экспоненциальные и логарифмические функции. Более того, исследуются супердифференцируемые функции от переменных, принадлежащих конечно и бесконечномерным алгебрам Кэли-Диксона (содержащим алгебру октонионов в качестве собственной подалгебры). Среди главных результатов имеются аналоги для алгебр Кэли-Диксона теорем Коши, Гурвица, принципа аргумента, Миттаг-Леффлера, Руше и Вейерштрасса.

Результаты данной статьи могут служить для последующих исследований специальных функций переменных из алгебр Кэли-Диксона, некоммутативной теории пучков, многообразий некоммутативной геометрии над алгебрами Кэли-Диксона, их групп петель и диффеоморфизмов (см. также [23, 24, 25, 26, 29]).

2. Дифференцируемость функций октонионных переменных

Во избежание недоразумений сначала приведены обозначения и определения.

2.1. Тело кватернионов над действительным полем $\mathbf{R}$ обозначается $\mathbf{H}$ с классическим кватернионным базисом 1, i, j, k, удовлетворяющим соотношениям для $\mathcal{A}_2$ (см. введение). Тело кватернионов $\mathbf{H}$ имеет антиизоморфизм η порядка два $\eta : z \mapsto \tilde{z}$, где $\tilde{z} = w_1 - w_i i - w_j j - w_k k$, $z = w_1 + w_i i + w_j j + w_k k$; $w_1, ..., w_k \in \mathbf{R}$. Иммется норма в $\mathbf{H}$ такая, что $|z| = |z\tilde{z}|^{1/2}$, следовательно, $\tilde{z} = |z|^2 z^{-1}$.

Алгебра $\mathbf{K}$ октонионов (октав, алгебры Кэли) определяется как восьмимерная алгебра над $\mathbf{R}$ с базисом, например,

(1) $\mathbf{b}_3 := \mathbf{b} := \{1, i, j, k, l, il, jl, kl\}$, так что

(2) $i^2 = j^2 = k^2 = l^2 = -1$, $ij = k$, $ji = -k$, $jk = i$, $kj = -i$, $ki = j$, $ik = -j$, $li = -il$, $jl = -lj$, $kl = -lk$;

(3) $(\alpha + \beta l)(\gamma + \delta l) = (\alpha\gamma - \tilde{\delta}\beta) + (\delta\alpha + \beta\tilde{\gamma})l$

– это закон умножения в $\mathbf{K}$ для любых α, β, γ, $\delta \in \mathbf{H}$, $\xi := \alpha + \beta l \in \mathbf{K}$, $\eta := \gamma + \delta l \in \mathbf{K}$, $\tilde{z} := v - wi - xj - yk$ для кватерниона $z = v + wi + xj + yk \in \mathbf{H}$ с $v, w, x, y \in \mathbf{R}$.

Алгебра октонионов не является ни коммутативной, ни ассоциативной, так как $(ij)l = kl$, $i(jl) = -kl$, но она дистрибутивна и $\mathbf{R}1$ является ее центром. Если $\xi := \alpha + \beta l \in \mathbf{K}$, то

(4) $\tilde{\xi} := \tilde{\alpha} - \beta l$ называется сопряженным элементом для ξ, где $\alpha, \beta \in \mathbf{H}$. Тогда

(5) $(\xi\eta)\tilde{} = \tilde{\eta}\tilde{\xi}$, $\tilde{\xi} + \tilde{\eta} = (\xi + \eta)\tilde{}$ и $\xi\tilde{\xi} = |\alpha|^2 + |\beta|^2$,

где $|\alpha|^2 = \alpha\tilde{\alpha}$, так что

(6) $\xi\tilde{\xi} =: |\xi|^2$ и $|\xi|$ – это норма в $\mathbf{K}$. Поэтому,

(7) $|\xi\eta| = |\xi||\eta|$,
следовательно, $\mathbf{K}$ не содержит делителей нуля (см. также [17, 21, 35]). Умножение октонионов удовлетворяет уравнениям:

(8) $(\xi\eta)\eta = \xi(\eta\eta)$,

(9) $\xi(\xi\eta) = (\xi\xi)\eta$,
которые определяют свойство альтернативности алгебры. В частности, $(\xi\xi)\xi = \xi(\xi\xi)$. Положим $\tilde{\xi} = 2a - \xi$, где $a = Re(\xi) := (\xi + \tilde{\xi})/2 \in \mathbf{R}$. Поскольку $\mathbf{R}1$ является центром в $\mathbf{K}$ и $\tilde{\xi}\xi = \xi\tilde{\xi} = |\xi|^2$, тогда из уравнений $(8, 9)$ по индукции следует, что для любого $\xi \in \mathbf{K}$ и любого n-кратного произведения, $n \in \mathbf{N}$, $\xi(\xi(...\xi\xi)...) = (...(\xi\xi)\xi...)\xi$ и результат не зависит от порядка скобок (порядка последовательных умножений), следовательно, определение $\xi^n := \xi(\xi(...\xi\xi)...)$ не зависит от порядка скобок. Это также показывает, что $\xi^m\xi^n = \xi^n\xi^m$, $\xi^m\tilde{\xi}^m = \tilde{\xi}^m\xi^n$ для любых $n, m \in \mathbf{N}$ и $\xi \in \mathbf{K}$. В отличии от кватернионов, октонионная алгебра не может быть реализована как подалгебра алгебры $\mathbf{M}_8(\mathbf{R})$ всех 8×8-матриц над $\mathbf{R}$, так как $\mathbf{K}$ неассоциативна, но $\mathbf{M}_8(\mathbf{R})$ ассоциативна. Некоммутативная неассоциативная алгебра октонионов $\mathbf{K}$ является $\mathbf{Z_2}$-градуированной $\mathbf{R}$-алгеброй $\mathbf{K} = \mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_1$, где элементы $\mathbf{K}_0$ являются *четными* и элементы в $\mathbf{K}_1$ являются *нечетными* (смотри, например, [20, 21, 34]). Существуют естественные вложения $\mathbf{C} \hookrightarrow \mathbf{K}$ и $\mathbf{H} \hookrightarrow \mathbf{K}$, но ни $\mathbf{K}$ над $\mathbf{C}$, ни $\mathbf{K}$ над $\mathbf{H}$, ни $\mathbf{H}$ над $\mathbf{C}$ являются алгебрами, так как их центры таковы: $Z(\mathbf{H}) = Z(\mathbf{K}) = \mathbf{R}$.

Рассмотрим также алгебры Кэли-Диксона $\mathcal{A}_n$ над $\mathbf{R}$, где 2^n – это её размерность над $\mathbf{R}$. Они строятся по индукции стартуя с $\mathbf{R}$, так что $\mathcal{A}_{n+1}$ получается из $\mathcal{A}_n$ с помощью процедуры удвоения, в частности, $\mathcal{A}_0 := \mathbf{R}$, $\mathcal{A}_1 = \mathbf{C}$, $\mathcal{A}_2 = \mathbf{H}$, $\mathcal{A}_3 = \mathbf{K}$ и $\mathcal{A}_4$ известна как алгебра седенионов [1]. Алгебры Кэли-Диксона являются $*$-алгебрами, то есть, существует действительно-линейное отображение $\mathcal{A}_n \ni a \mapsto a^* \in \mathcal{A}_n$, так что

(10) $a^{**} = a$,

(11) $(ab)^* = b^*a^*$ для любых $a, b \in \mathcal{A}_n$. Тогда они хорошо нормированы, то есть,

(12) $a + a^* =: 2Re(a) \in \mathbf{R}$ и

(13) $aa^* = a^*a > 0$ для любого $0 \ne a \in \mathcal{A}_n$. Норма в ней определена путем

(14) $|a|^2 := aa^*$. Мы также обозначим a^* через $\tilde{a}$. Каждое $0 \ne a \in \mathcal{A}_n$ имеет мультипликативный обратный даваемый формулой $a^{-1} = a^*/|a|^2$.

Процедура удвоения состоит в следующем. Каждое $z \in \mathcal{A}_{n+1}$ записывается в виде $z = a + bl$, где $l^2 = -1$, $l \notin \mathcal{A}_n$, $a, b \in \mathcal{A}_n$. Сложение является покомпонентным. Сопряженным является

(15) $z^* := a^* - bl$.
Умножение дается уравнением (3).

Базис $\mathcal{A}_n$ над $\mathbf{R}$ обозначается через $\mathbf{b}_n := \mathbf{b} := \{1, i_1, ..., i_{2^n-1}\}$, где $i_s^2 = -1$ для любого $1 \le s \le 2^n - 1$, $i_{2^{n-1}} := l$ является дополнительным элементом процедуры удвоения $\mathcal{A}_n$ из $\mathcal{A}_{n-1}$, выберем $i_{2^{n-1}+m} = i_m l$ для любого $m = 1, ..., 2^{n-1} - 1$, $i_0 := 1$.

Алгебра называется альтернативной, если каждая подалгебра порожденная двумя элементами ассоциативна. Алгебра называется ассоциативной со степенями (power-associative), если её каждая подалгебра порожденная одним элементом ассоциативна. Только при $n = 0, ..., 3$ алгебры Кэли-Диксона $\mathcal{A}_n$ являются альтернативными алгебрами с делением. При $n \ge 4$ алгебры Кэли-Диксона $\mathcal{A}_n$ не являются алгебрами с делением, но они являются ассоциативными со степенями. Для проверки последнего свойства рассмотрим $z \in \mathcal{A}_n$ записанное в виде $z = v + M$, где $v = Re(z)$, $M := (z - z^*)/2 =: Im(z)$. Тогда v и M коммутируют и они ортогональны, $M^* = -M$. Поэтому, подалгебра, порожденная z ассоциативна тогда и только тогда, когда алгебра порожденная M ассоциативна. Поскольку $M^*M = MM^* = |M|^2$ и $M^* = -M$, тогда подалгебра порожденная M ассоциативна.

Проверим, что z и $\tilde{z}$ в $\mathcal{A}_r$ являются независимыми переменными. Предположим напротив, что существует $\gamma \in \mathcal{A}_r$ такое, что $z + \gamma\tilde{z} = 0$ для любых $z \in \mathcal{A}_r$. Запишем $z = a+bl$, $\gamma = \alpha+\beta l$, где $a, b, \alpha, \beta \in \mathcal{A}_{r-1}$. Тогда $z+\gamma\tilde{z} = 0$ эквивалентно $\alpha a^* + b^*\beta = -a$ и $-b\alpha + \beta a = -b$. Рассмотрим z с $a \neq 0$ и $b \neq 0$. Тогда из последних двух уравнений следует, что: $\alpha = -(a + b^*\beta)a|a|^{-2} = 1 + b^*\beta a|b|^{-2}$, так как $a^{-1} = a^*|a|^{-2}$. Это дает $\beta = -2bRe(a)|z|^{-2}$ и $\alpha = 1 - 2aRe(a)|z|^{-2}$. Беря в частности, $|z| = 1$ и $Re(a) \neq 0$ и варьируя z, мы приходим к противоречию, так как γ не постоянна. Поэтому, z и z^* – две переменные в $\mathcal{A}_r$ леволинейно (или праволинейно) независимы над $\mathcal{A}_r$.

Для любой алгебры $\mathcal{A}_r$ с $r \geq 2$, $r \in \mathbf{N}$, имеются два тождества: $z + z^* = 2w_1$, $s(zs^*) = z^* + 2w_s s$ для любого $s \in \hat{b}$, где $z = \sum_{s\in\mathbf{b}} w_s s$, $w_s \in \mathbf{R}$ для любого $s \in \mathbf{b} := \{1, i_1, ..., i_{2^r-1}\}$, $\hat{b} := \mathbf{b}\setminus\{1\}$, следовательно, $z^* = (2^r-2)^{-1}\{-z+\sum_{s\in\hat{b}} s(zs^*)\}$ для любого $r \geq 2$, $r \in \mathbf{N}$. Поэтому, z^* не играет такой специальной роли в $\mathcal{A}_r$, $r \geq 2$, как для $\mathbf{C}$.

В силу некоммутативности $\mathcal{A}_r$, $r \geq 3$, и тождеств вызванных сопряжением (15), умножения (3) и аксиом аддитивности, например, уравнения $(7, 8, 9)$ для октонионов, также уравнения $(10, 11, 14)$ и условия $(12, 13)$ в общем случае $\mathcal{A}_r$ полиномиальная функция $P : U \to \mathcal{A}_r$ переменной z и z^{-1} могут иметь несколько различных представлений

$$\check{\mathrm{P}}(z) = \sum_{k,q(m)} \{b_{k,1}z^{k_1}...b_{k,m}z^{k_m}\}_{q(m)},$$

где $b_{k,j} \in \mathcal{A}_r$ – это постоянные, $k = (k_1, ..., k_m)$, $m \in \mathbf{N}$, $k_j = (k_{j,1}, ..., k_{j,n})$, $k_{j,l} \in \mathbf{Z}$, $z^{k_j} := {}^1z^{k_{j,1}}... {}^nz^{k_{j,n}}$, ${}^lz^0 := 1$, U – открытое подмножество в $\mathcal{A}_r^n$. Конечно, мы можем рассматривать $z - z_0$ вместо z в формуле $\check{\mathrm{P}}(z)$ с правой стороны, когда задана отмеченная точка z_0. В силу неассоциативности $\mathcal{A}_r$ здесь используется обозначение $\{a_1...a_m\}_{q(m)}$ для произведения элементов $a_1, ..., a_m \in \mathcal{A}_r$ соответствующих порядку произведений в этом члене определяемым расположением скобок $q(m) := (q_m, ..., q_3)$, где $a_v := (b_{k,v}z^{k_v})$ для любых $v = 1, ..., m$, $q_m \in \mathbf{N}$ означает, что первая (наиболее внутренняя скобка) соответствует умножению $a_{q_m}a_{q_m+1}$, так что ситуация $(a_1...(a_ta_{t+1})...(a_wa_{w+1})...a_m)$ с формально двумя одновременно независимыми умножениями, но с $t < w$ по нашему определению упорядочения соответствует $q_m = t$. После первого умножения мы получим произведение $a'_1, ..., a'_{m-1} \in \mathcal{A}_r$, где не менее, чем $m-2$ из этих элементов те же, что и в предыдущем члене, тогда q_{m-1} соответствует первому умножению в новом члене. Мы опустим q_2 и q_1, так как они единственны. Каждый член $\{b_{k,1}z^{k_1}...b_{k,m}z^{k_m}\}_{q(m)} =: \omega(b_k, z) \neq 0$ мы рассмотрим как слово длины $\xi(\omega) = \sum_{j,l} \delta(k_{j,l}) + \sum_j \kappa(b_{k,j})$, где $\delta(k_{j,l}) = 0$ для $k_{j,l} = 0$ и $\delta(k_{j,l}) = 1$ для $k_{j,l} \neq 0$, $\kappa(b_{k,j}) = j$ для $b_{k,j} = 1$, $\kappa(b_{k,j}) = j + 1$ для $b_{k,j} \in \mathcal{A}_r \setminus \{0, 1\}$. Полином P рассматривается как фразу $\check{\mathrm{P}}$ длины $\xi(\check{\mathrm{P}}) := \sum_k \xi(\omega(b_k, z))$. Используя умножение постоянных в $\mathcal{A}_r$, коммутативность $v \in \mathbf{R}$ с каждым ${}^lz$ и ${}^l\tilde{z}$, а ${}^lz^a\,{}^lz^b = {}^lz^{a+b}$ и ${}^l\tilde{z}^a\,{}^l\tilde{z}^b = {}^l\tilde{z}^{a+b}$, ${}^lz\,{}^l\tilde{z} = {}^l\tilde{z}\,{}^lz$, можно рассмотреть представление P как фразы $\check{\mathrm{P}}$ минимальной длины $\xi(\check{\mathrm{P}})$, Тогда упорядочим их лексикографически векторами $q(m)$. Выберем одну такую фразу $\check{\mathrm{P}}$ минимальной длины и тогда минимальной относительно лексикографического упорядочения $q(m)$. В силу коммутативности сложения для членов $\{a_1...a_m\}_{q(m)}$ и $\{a'_1...a'_m\}_{q'(m)}$ равной длины и имеющих различные векторы $q(m)$ и $q'(m)$ порядок $q(m)$ и $q'(m)$ для $\check{\mathrm{P}}$ не важен, так что минимальность тестируется по всем упорядочениям $q(m)$ среди всех членов данной длины в $\check{\mathrm{P}}$.

Если $f : U \to \mathcal{A}_r$ – это функция представленная сходящимся по z рядом $f(z) = \sum_n P_n(z)$, где $P_n(vz) = v^nP_n(z)$ для любого $v \in \mathbf{R}$ является $\mathbf{R}$-гомогенным полиномом, $n \in \mathbf{Z}$, тогда рассмотрим среди всех представлений f такие, для которых $\xi(\check{\mathrm{P}}_n)$ минимально для любого $n \in \mathbf{Z}$. Это служит для отыскания представлений классов эквивалентных элементов $\mathbf{R}$-алгебры всех полиномов на U и z-аналитических функций. Соответствующее семейство локально z-аналитических функций на U обозначается $C^\omega_z(U,\mathcal{A}_r)$ или $C^\omega(U,\mathcal{A}_r)$. Каждый элемент из $C^\omega_z(U,\mathcal{A}_r)$ по нашему определению является единственной фразой, которая может быть бесконечной. Мы не исключаем возможности, что две различные фразы f и g могут иметь один и тот же теоретико-множественный график $\Gamma_f := \{(z,f(z)) : z \in U\}$ как отображения из U в $\mathcal{A}_r$, например, где класс эквивалентности определенный графиком имеет неединственный элемент минимальной длины. Если каждый P_n для f имеет разложение частного левого типа

$$\check{\mathrm{P}}(z) = \sum_k b_k(z^k),$$

где $0 \le k \in \mathbf{Z}$, $b_k \in \mathcal{A}_r$, тогда пространство всех таких локально аналитических функций на U обозначается через ${}_lC^\omega(U,\mathcal{A}_r)$. Пространство локально аналитических функций f имеющих разложение правого типа для любого P_n

$$\check{\mathrm{P}}(z) = \sum_k (z^k)b_k$$

обозначается ${}_rC^\omega(U,\mathcal{A}_r)$. Соответствующее пространство по переменным $(z,\tilde{z})$ обозначается через $C^\omega_{z,\tilde{z}}(U,\mathcal{A}_r)$ и по переменной $\tilde{z}$ посредством $C^\omega_{\tilde{z}}(U,\mathcal{A}_r)$, где $C^\omega_{z,\tilde{z}} := C^\omega_{{}_1z,\ {}_2z}(U^2,\mathcal{A}_r)|_{\ {}_1z=z,\ {}_2z=\tilde{z}}$, ${}_1z$ и ${}_2z \in U$. По нашему определению каждый элемент $C^\omega_{z,\tilde{z}}(U,\mathcal{A}_r)$ является единственной фразой, которая может быть бесконечной.

$\mathbf{R}$-линейное пространство $C^\omega_{z,\tilde{z}}(U,\mathcal{A}_r)$ плотно в $\mathbf{R}$-линейном пространстве $C^0(U,\mathcal{A}_r)$ всех непрерывных функций $f : U \to \mathcal{A}_r$. Обозначим через $C^0_z(U,\mathcal{A}_r)$ $\mathbf{R}$-линейное пространство всех классов эквивалентности последовательностей Коши из $C^\omega_z(U,\mathcal{A}_r)$ сходящихся относительно C^0-равномерности. Аналогично мы определим $C^0_{\tilde{z}}(U,\mathcal{A}_r)$ и $C^0_{z,\tilde{z}}(U,\mathcal{A}_r)$.

2.1.1. Определение. Если $\mathcal{G} \in C^0_z(U,\mathcal{A}_r)$, то мы скажем, что $\mathcal{G}$ является z-представленным. Элементы в $C^0_{\tilde{z}}$ (или $C^0_{z,\tilde{z}}$) мы назовем $\tilde{z}$- (или $(z,\tilde{z})$– соответственно) представленными функциями. Если $f : U \to \mathcal{A}_r$ является (теоретико-множественно) непрерывной функцией с $\mathcal{G} \subset \mathcal{F} \in C^0_{z,\tilde{z}}(U,\mathcal{A}_r)$, так что каждая последовательность Коши $\{\zeta_n : n \in \mathbf{N}\}$ из семейства $\mathcal{G}$ (сходящихся последовательностей Коши) сходится к f относительно C^0-равномерности, то мы назовем каждое $g \in \mathcal{G} = \mathcal{G}(f)$ алгебраической непрерывной функцией g. (Поскольку $\mathcal{F}$ является классом эквивалентности, то каждое $\{\zeta_n : n\} \in \mathcal{G}$ сходится к тому же пределу f).

Мы скажем, что $\mathcal{G}$ обладает свойством A, если каждое $\{\zeta_n : n\} \in \mathcal{G}$ обладает свойством A. Мы скажем, что f обладает свойством A, если существует $\mathcal{G}(f)$ обладающее свойством A и такое, что $\mathcal{G}(f) = \mathcal{H}$, где или $\mathcal{H} \in C^0_z(U,\mathcal{A}_r)$ или $\mathcal{H} \in C^0_{\tilde{z}}(U,\mathcal{A}_r)$, или $\mathcal{H} \in C^0_{z,\tilde{z}}(U,\mathcal{A}_r)$. Если $\mathcal{G} \ne \emptyset$, $\mathcal{G} \subset \mathcal{H}$ и $\mathcal{G} \ne \mathcal{H}$, то мы будем говорить о $(A,\mathcal{G})$ свойстве. Если f имеет больший класс гладкости C^n, C^∞ или C^ω и т.д., то мы возьмем пересечения $\mathcal{G}(f)$ и $\mathcal{H}$ с C^n или C^∞, или C^ω и т.д., предполагая сходимость относительно соответствующей равномерности и так что $\mathcal{G}(f) \cap C^n$ или $\mathcal{G}(f) \cap C^\infty$, или $\mathcal{G}(f) \cap C^\omega$ и т.д. непусто. Записывая аргументы $({}_1z, ..., {}_nz)$ функции f мы выясним ситуацию в каждом случае укзывая в каждом случае подмножество переменных по которым выполнено свойство A. Мы можем писать кратко $f(z)$ или f вместо $f(z,\tilde{z})$ в ситуациях, в которых это не может вызвать неясности. Наше общее предположение состоит в том, что непрерывная функция имеет $(z,\tilde{z})$-представление, если не предполагается иное.

2.1.2. Предложение. *Пусть A является $\mathcal{A}_r$-аддитивным, $\mathbf{R}$-гомогенным оператором $A : \mathcal{A}_r^n \to \mathcal{A}_r^n$, $r \ge 2$, $n \ge 1$, тогда A является $\mathbf{R}$-линейным и существует конечное семейство A_j право-$\mathcal{A}_r$-линейных и B_j лево-$\mathcal{A}_r$-линейных операторов*

$j \in \{1, 2, ..., 2^r\}$ *независимых от* $h \in \mathcal{A}_r^n$*, так что* $A(h) = \sum_j A_j(hB_j)$ *для любого* $h \in \mathcal{A}_r^n$*, где мы пишем* $A_j(h) =: A_j h$ *и* $B_j(h) =: hB_j$.

Доказательство. Первое утверждение очевидно. Для доказательства второго отметим, что $A(h) = \sum_{j=0}^{2^r-1} A(i_j)h_j$, где $h_j \in \mathbf{R^{n2^r}}$, $h = \sum_{j=0}^{2^r-1} h_j i_j$, $A(i_j)$ является $\mathbf{R}$-линейным оператором независимым от h_j. С другой стороны,
$h_j = (-hi_j + i_j(2^r-2)^{-1}\{-h + \sum_{j=1}^{2^r-1} i_j(hi_j^*)\})/2$ для любого $j = 1, 2, ..., 2^r - 1$,
$h_0 = (h + (2^r-2)^{-1}\{-h + \sum_{j=1}^{2^r-1} i_j(hi_j^*)\})/2$.
Подставляя эти выражения h_j, $j = 0, 1, ..., 2^r - 1$, в каждый член $A(i_j)h_j$, мы получим второе утверждение.

2.2. Определение. Рассмотрим открытую область U в $\mathcal{A}_r^n$, $r \geq 3$, n-кратное произведение копий $\mathcal{A}_r$, и пусть $f : U \to \mathcal{A}_r$ является функцией. Тогда будем говорить, что f является z-супердифференцируемой в точке $(\ {}^1z, ..., {}^nz) = z \in U$, ${}^1z, ..., {}^nz \in \mathcal{A}_r$, если она удовлетворяет условиям $(2-7)$ ниже и если она может быть записана в виде

$$(1) \quad f(z+h) = f(z) + \sum_{j=1}^{n} A_j\, {}^jh + \epsilon(h)|h|$$

для любого $h \in \mathcal{A}_r^n$, так что $z + h \in U$, где A_j является $\mathcal{A}_r$-значным $\mathcal{A}_r$-аддитивным $\mathbf{R}$-гомогенным оператором h-переменных, в общем он нелинеен для любого $j = 1, ..., n$ и A_j обозначается $(Df(z)).e_j$ и существует производная $f'(z)$, так что дифференциал дается уравнением

$$(2) \quad Df(z).h := f'(z).h := \sum_{j=1}^{n} (\partial f(z)/\partial\, {}^jz)\, {}^jh,$$

где $\epsilon(h)$, $\epsilon : \mathcal{A}_r^n \to \mathcal{A}_r$, является функцией непрерывной в нуле, так что $\epsilon(0) = 0$, $e_j = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$ -это вектор в $\mathcal{A}_r^n$ с 1 на j-th месте,

$$(3) \quad Df(z).h =: (Df)(z; h)$$

так что $(Df)(z; h)$ аддитивен на h и $\mathbf{R}$-гомогенен, то есть,

$$(4) \quad (Df)(z; h_1 + h_2) = (Df)(h_1) + (Df)(h_2) \text{ и } (Df)(z; vh) = v(Df)(z; h)$$

для любых h_1, h_2 и $h \in \mathcal{A}_r^n$, $v \in \mathbf{R}$. Также наложены условия:

$$(5) \quad (\partial_z z).h = h, \quad \partial_z 1 = 0, \quad \partial_z \tilde{z} = 0, \quad \partial_{\tilde{z}} z = 0, \quad (\partial_{\tilde{z}} \tilde{z}).h = \tilde{h}$$

$$\text{также } D = \partial_z + \partial_{\tilde{z}}, \quad (D(fg)).h = ((Df).h)g + f(Dg).h$$

для произведения двух супердифференцируемых функций f и g и любого $h \in \mathcal{A}_r^n$, где обозначение ∂_z соответствует $\partial/\partial z$ и $\partial_{\tilde{z}}$ соответствует $\partial/\partial\tilde{z}$. Мы также имеет законы дистрибутивности относительно умножения справа на элементы $\lambda \in \mathcal{A}_r$:

$$(6) \quad (D(f+g))(z; h\lambda) = (Df)(z; h\lambda) + (Dg)(z; h\lambda),$$

$$(Df)(z; h(\lambda_1 + \lambda_2)) = (Df)(z; h\lambda_1) + (Df)(z; h\lambda_2)$$

для любых супердифференцируемых функций f и g в точке z и любых λ, λ_1 и $\lambda_2 \in \mathcal{A}_r$. Имеются ещё законы дистрибутивности слева:

$$(7) \quad (D\lambda(f+g))(z; h) = \lambda(Df)(z; h) + \lambda(Dg)(z; h),$$

$$(D(\lambda_1 + \lambda_2)f)(z;h) = \lambda_1(Df)(z;h) + \lambda_2(Df)(z;h).$$

Если использовать $(z, \tilde{z})$-представление полиномов и функций, то мы определим $(z, \tilde{z})$-супердифференцируемость по паре $(z, \tilde{z})$, по z и по $\tilde{z}$, так что
(8) $D_z\tilde{z} = 0$, $D_{\tilde{z}}z = 0$, $(D_z z).h = h$, $(D_{\tilde{z}}\tilde{z}).h = \tilde{h}$,
$(D_{z,\tilde{z}}(fg)).h = ((D_{z,\tilde{z}}f).h)g + f(D_{z,\tilde{z}}g).h$ и $(D_{z,\tilde{z}}f).h = (D_z f).h + (D_{\tilde{z}}f).h$
для любых двух $(z, \tilde{z})$-супердифференцируемых функций f и g, любого $h \in \mathcal{A}_r^n$ (см. также [27]). Мы возьмем функцию $g(\,_1z,\ _2z)$ в z-представлении по $\,_1z$ и $\,_2z$, затем рассмотрим оператор D по переменной $(\,_1z,\ _2z)$ и в выражении $(Dg(\,_1z,\ _2z)).h$, положим для компонент $\,_1z = z$, $\,_2z = \tilde{z}$, $\,_1h = \,_2h =: \alpha \in \mathcal{A}_r^n$ и рассмотрим функцию $g(z, \tilde{z}) =: f$, где $z = (\,^1z, ..., \,^nz) \in U \subset \mathcal{A}_r^n$, $\tilde{z} = (\,^1\tilde{z}, ..., \,^n\tilde{z})$, $az := (a\,^1z, ..., a\,^nz)$, $zb := (\,^1zb, ..., \,^nzb)$ для любых $a, b \in \mathcal{A}_r$.

Если существует функция $g(\,_1z,\ _2z)$ на открытом подмножестве W в $\mathcal{A}_r^{2n}$ со значениями в $\mathcal{A}_r$ $(\,_1z,\ _2z)$-супердифференцируемая в точке $(\,_1z,\ _2z)$, $\,_1z$ и $\,_2z \in \mathcal{A}_r^n$, также
$g(\,_1z,\ _2z)|_{\,_1z=z,\ _2z=\tilde{z}} =: f(z, \tilde{z})$, $z = \xi$,
Тогда мы скажем, что f является $(z, \tilde{z})$-супердифференцируемой в точке ξ и
(9) $(D_z f(z, \tilde{z})).h = (\partial f(z, \tilde{z})/\partial z).h := \{(Dg(\,_1z,\ _2z)).(h, 0)\}|_{\,_1z=z,\ _2z=\tilde{z}}$,
$(D_{\tilde{z}} f(z, \tilde{z})).h = (\partial f(z, \tilde{z})/\partial \tilde{z}).h := \{(Dg(\,_1z,\ _2z)).(0, h)\}|_{\,_1z=z,\ _2z=\tilde{z}}$,
где $h \in \mathcal{A}_r^n$ и f предоплагается определенной g и его ограничением на $\{(\,_1z,\ _2z) \in W :$ $\,_2z = (\,_1z)\tilde{}\}$,
(10) $D_{\,_1z}g(\,_1z,\ _2z).h := D_{(\,_1z,\ _2z)}g(\,_1z,\ _2z).(h, 0)$,
$D_{\,_2z}g(\,_1z,\ _2z).h := D_{(\,_1z,\ _2z)}g(\,_1z,\ _2z).(0, h)$,
$(D_z f(z, \tilde{z})).e_j =: \partial f(z, \tilde{z})/\partial\,^jz$, $(D_{\tilde{z}} f(z, \tilde{z})).e_j =: \partial f(z, \tilde{z})/\partial\,^j\tilde{z}$.
Поскольку алгебры Кэли-Диксона над $\mathbf{R}$ и дифференциалы Фреше единственны, то для функций $g : W \to \mathcal{A}_r$ и $f : U \to \mathcal{A}_r$, их супердифференциалы $(Dg).h$ и $(D_{(z,\tilde{z})}f).\alpha$ единственны, поэтому мы имеем $D_z = D_{\,_1z}|_{\,_1z=z}$, $D_{\tilde{z}} = D_{\,_2z=\tilde{z}}$ в $(z, \tilde{z})$-представлении, где U открыто в $\mathcal{A}_r^n$ так что $\{(\,_1z = z,\ _2z = \tilde{z}) : z \in U\} \subset W$. В частности, если существуют функции f_1, f_2, f_3 такие, что $f_3 = f_1(z, \tilde{z})f_2(z, \tilde{z})$, $f_j = g_j(\,_1z,\ _2z)|_{\,_1z=z,\ _2z=\tilde{z}}$, $j = 1, 2, 3$, где или g_j для любого j представлено минимизированным рядом §2.1, или при умножении $(f_1, f_2) \mapsto f_1f_2$ не производится реорганизация ряда, например, по минимальности (это имеет место в случае определения данного выше), тогда
(11) $(D_z f_1f_2).h = ((D_z f_1).h)f_2 + f_1(D_z f_2).h$ и
$(D_{\tilde{z}} f_1f_2).h = ((D_{\tilde{z}} f_1).h)f_2 + f_1(D_{\tilde{z}} f_2).h$
для любого $h \in \mathcal{A}_r^n$, так как $D_{z,\tilde{z}} = D_z + D_{\tilde{z}}$.
В общем случае, $(D_{z,\tilde{z}}f_1f_2).h = ((D_{z,\tilde{z}}f_1).h)f_2 + f_1(D_{z,\tilde{z}}f_2).h$ для любых $(z, \tilde{z})$-супердифференцируемых функций f_1 и f_2 на U и любого $h \in \mathcal{A}_r^n$.

Функция $f : U \to \mathcal{A}_r$ называется $\tilde{z}$-супердифференцируемой в точке ξ, если существует функция $g : U \to \mathcal{A}_r$ такая, что $g(\tilde{z}) = f(z)$ и $g(z)$ является z-супердифференцируемой в ξ.

Обозначения. Мы можем записывать функцию $f(z)$ с $z \in \mathcal{A}_r$, $r \geq 2$, в переменных $((\,^jw_s : s \in \mathbf{b}) : j = 1, ..., n)$, $\mathbf{b} := \mathbf{b}_r$, как

$$F((\,^jw_s : s \in \mathbf{b}) : j = 1, ..., n) = f \circ \sigma((\,^jw_s : s \in \mathbf{b}) : j = 1, ..., n),$$

где $\sigma((\,^jw_s : s \in \mathbf{b}) : j = 1, ..., n) = (\,^jz : j = 1, ..., n)$ – это биективное отображение. Для U открытого в $\mathcal{A}_r^n$ и $F : U \to \mathcal{A}_r$ мы можем записать F в виде $F = \sum_{s \in \mathbf{b}} F_s s$, где $F_s \in \mathbf{R}$ для любого $s \in \mathbf{b}$, $F_{vs} := vF_s$ для любого $v \in \mathbf{R}$.

2.2.1. Предложение. *Пусть $g : U \to \mathcal{A}_r^m$, $r \geq 3$, и $f : W \to \mathcal{A}_r^n$ – это две супердифференцируемые функции на U и W соответственно, так что $g(U) \supset W$, U открыто в $\mathcal{A}_r^k$, W открыто в $\mathcal{A}_r^m$, $k, n, m \in \mathbf{N}$. Тогда сложная функция $f \circ g(z) := f(g(z))$ супердифференцируема на $V := g^{-1}(W)$ и*

$(Df \circ g(z)).h = (Df(g)).((Dg(z)).h)$
для любого $z \in V$ *и любого* $h \in \mathcal{A}_r^k$, *где* f *и* g *являются одновременно* $(z, \tilde{z})$, *или* z, *или* $\tilde{z}$-*супердифференцируемыми и, следовательно,* $f \circ g$ *имеет тот же тип супердифференцируемости.*

Доказательство. Поскольку g супердифференцируема, то g непрерывна и $g^{-1}(W)$ открыто в $\mathcal{A}_r^k$. Тогда $f \circ g(z+h) - f \circ g(z) = (Df(g))|_{g=g(z)}.(g(z+h) - g(z)) + \epsilon_f(\eta)|\eta|$, где $\eta = g(z+h) - g(z)$, $g(z+h) - g(z) = (Dg(z)).h + \epsilon_g(h)|h|$ (см. §2.2). Поскольку Df является $\mathcal{A}_r^m$-аддитивным и $\mathbf{R}$-гомогенным (и непрерывным) оператором на $\mathcal{A}_r^m$, то
$f \circ g(z+h) - f \circ g(z) = (Df(g))|_{g=g(z)}.((Dg(z)).h) + \epsilon_{f \circ g}(h)|h|$, где
$\epsilon_{f \circ g}(h)|h| := \epsilon_f((Dg(z)).h + \epsilon_g(h)|h|)|(Dg(z)).h + \epsilon_g(h)|h||$
$+[(Df(g))|_{g=g(z)}.(\epsilon_g(h))]|h|)$,
$|(Dg(z)).h + \epsilon_g(h)|h|| \le [\|Dg(z)\| + |\epsilon_g(h)|]|h|$, следовательно,
$|\epsilon_{f \circ g}(h)| \le |\epsilon_f((Dg(z)).h + \epsilon_g(h)|h|)|[\|Dg(z)\| + |\epsilon_g(h)|] + \|(Df(g))|_{g=g(z)}\||\epsilon_g(h)|$
и неизбежно $\lim_{h \to 0} \epsilon_{f \circ g}(h) = 0$. Более того, $\epsilon_{f \circ g}(h)$ непрерывна по h, так как ϵ_g и ϵ_f – это непрерывные функции, Df и Dg являются непрерывными операторами. Очевидно, если $\partial_{\tilde{z}} f = 0$ и $\partial_{\tilde{z}} g = 0$ на областях определений f и g соответственно, то $\partial_{\tilde{z}} f \circ g = 0$ на V, так как $D = \partial_z + \partial_{\tilde{z}}$.

2.3. Предложение. *Функция* $f : U \to \mathcal{A}_r$ *является* z-*супердифференцируемой в точке* $a \in U$ *тогда и только тогда, когда* F *является дифференцируемой по Фреше в* a *и* $\partial_{\tilde{z}} f(z)|_{z=a} = 0$. *Если* f *является* z-*супердифференцируемой на* U, *то* f *является* z-*представленной на* U. *Если* $f'(a)$ *является право суперлинейной на супералгебре* $\mathcal{A}_r^n$, *то* f *является* z-*супердифференцируемой в* $a \in U$ *тогда и только тогда, когда* F *является дифференцируемой по Фреше в* $a \in U$ *и удовлетворяет следующим уравнениям:*

$$(1) \quad (\partial F_{ps} / \partial\, ^j w_p) = ((ps)p^*)^*((qs)q^*)(\partial F_{qs} / \partial\, ^j w_q), \quad \text{для любых } p, q, s \in \mathbf{b}$$

или коротко:

$$(2) \quad \partial F / \partial\, ^j w_1 = (\partial F / \partial\, ^j w_q) q^*$$

для любого $q \in \hat{b}_r$ *и любого* $j = 1, ..., n$. $(z, \tilde{z})$-*супердифференцируемая функция* f *в* $a \in U$ *является* z-*супердифференцируемой в* $a \in U$ *тогда и только тогда, когда* $D_{\tilde{z}} f(z, \tilde{z})|_{z=a} = 0$.

Доказательство. Для любого канонического замкнутого компактного подмножества U в $\mathcal{A}_r$ множество всех полиномиальных по z функций плотно в пространстве всех непрерывных на U дифференцируемых по Фреше функций на $Int(U)$.

Как обычно множество A имеющее структуру аддитивной группы и имеющее дистрибутивное умножение его элементов на числа Кэли-Диксона $z \in \mathcal{A}_v$ слева и справа называется векторным пространством над $\mathcal{A}_v$. В таком смысле оно является $\mathbf{R}$-линейным пространством, а также левым и правым модулем над $\mathcal{A}_v$. Для двух векторных пространств A и B над $\mathcal{A}_v$ рассмотрим их упорядоченное тензорное произведение $A \otimes B$ над $\mathcal{A}_v$ состоящее из элементов $a \otimes b := (a, b)$, так что $a \in A$ и $b \in B$, $\alpha(a, b) = (\alpha a, b)$ и $(a, b)\beta = (a, b\beta)$ для любых $\alpha, \beta \in \mathcal{A}_v$, $(a_1 \otimes b_1)(a_2 \otimes b_2) = a_1 a_2 \otimes b_1 b_2$ для любых $a_1, a_2 \in A$ и $b_1, b_2 \in B$. В вышеупомянутом отношении $A \otimes B$ является $\mathbf{R}$-линейным пространством и в тоже время левым и правым модулем над $\mathcal{A}_v$. Тогда $A \otimes B$ имеет структуру векторного пространства над $\mathcal{A}_v$. По индукции рассмотрим тензорные произведения $\{C_1 \otimes C_2 \otimes ... \otimes C_n\}_{q(n)}$, где $C_1, ..., C_n \in \{A, B\}$, $q(n)$ указывает на порядок тензорного умножения в $\{*\}$. Для двух $\mathcal{A}_v$-векторных пространств V и W их прямая сумма $V \oplus W$ является $\mathcal{A}_v$-векторным пространством состоящим из всех элементов (a, b) с $a \in V$ и $b \in W$, так что $\alpha(a, b) = (\alpha a, \alpha b)$ и $(a, b)\beta = (a\beta, b\beta)$ для любых α и $\beta \in \mathcal{A}_v$. Поэтому, прямая сумма всех различных тензорных произведений

$\{C_1 \otimes C_2 \otimes ... \otimes C_n\}_{q(n)}$, которые являются $\mathbf{R}$-линейными пространствами и правыми и левыми модулями над $\mathcal{A}_v$, поставляет минимальное тензорное пространство $T(A, B)$ порожденное A и B.

Операторы ∂_z и $\partial_{\tilde{z}}$ определены на $C^\omega_z(U, \mathcal{A}_r)$ и $C^\omega_{\tilde{z}}(U, \mathcal{A}_r)$, следовательно, они единственны на тензорном пространстве $T(C^\omega_z(U, \mathcal{A}_r), C^\omega_{\tilde{z}}(U, \mathcal{A}_r))$, которое плотно в $C^\omega_{z,\tilde{z}}(U, \mathcal{A}_r)$, так как $C^\omega_{z,\tilde{z}}(U, \mathcal{A}_r) := C^\omega_{\ _1z, \ _2z}(U^2, \mathcal{A}_r)|_{\ _1z=z, \ _2z=\tilde{z}}$. Поэтому, операторы ∂_z и $\partial_{\tilde{z}}$ определены единственным образом на $C^\omega_{z,\tilde{z}}(U, \mathcal{A}_r)$.

Если имеется произведение fg двух фраз f и g из $C^\omega_{z,\tilde{z}}(U, \mathcal{A}_r)$, тогда если оно приведено к минимальной фразе ξ, тогда это делается с помощью формул $z^n z^m = z^{n+m}$, и $\tilde{z}^n \tilde{z}^m = \tilde{z}^{n+m}$, и тождеств для констант в $\mathcal{A}_r$, так как никакое сокращение связанное с их перестановкой $z\tilde{z} = \tilde{z}z$, или заменой z на $\tilde{z}$, или $\tilde{z}$ на z, например, используя тождество $\tilde{z} = l(zl^*)$ не разрешается в $C^\omega_{z,\tilde{z}}(U, \mathcal{A}_r)$ в соответствии с нашим соглашением в §2.1, так как $C^\omega_{z,\tilde{z}}(U, \mathcal{A}_r) := C^\omega_{\ _1z, \ _2z}(U^2, \mathcal{A}_r)|_{\ _1z=z, \ _2z=\tilde{z}}$ и в $C^\omega_{\ _1z, \ _2z}(U^2, \mathcal{A}_r)$ переменные $\ _1z$ and $\ _2z$ не коммутируют, $\ _1z$ и $\ _2z$ являются различными переменными, которые не связаны между собой. Поэтому, $\partial_z \xi.h = (\partial_z f.h)g + f(\partial_z g.h)$ и $\partial_{\tilde{z}} \xi.h = (\partial_{\tilde{z}} f.h)g + f(\partial_{\tilde{z}} g.h)$, следовательно, ∂_z и $\partial_{\tilde{z}}$ корректно определены. В частности, семейство всех функций вида ряда $f = \sum\{\ _{l_1}f ... \ _{l_t}f\}_{q(t)}$ сходящегося на U вместе со своим супердифференциалом на $Int(U)$, так что каждая $\ _lf$ суперлинейно z-супердифференцируема на $Int(U)$ относительно суперадгебры $\mathcal{A}_r$, плотно в $\mathbf{R}$-линейном пространстве всех z-супердифференцируемых функций g на U, так как $(Dg(z)).h$ непрерывно по (z, h). Мы можем использовать δ-приближение для любого $\delta > 0$ для $Dg(z).h$ на достаточно малом открытом подмножестве V в U, так что $z \in V$ функциями ζ_n полиномиальными в z и $\mathbf{R}$-гомогенными $\mathcal{A}^n_r$-аддитивными в h и разложением единицы в U по C^ω_z-функциям на, и тогда рассмотрим функции ξ_n с ${\xi_n}'$ соответствующими ζ_n, так как $\epsilon(h)$ непрерывно в 0 для любого $z \in U$ и любого канонического замкнутого компактного подмножества W в U из каждого открытого покрытия мы можем выбрать конечное подпокрытие множества W.

Из условий 2.2.$(2-7)$ следует, что условия z-супердифференцируемости определены единственным образом на пространстве полиномов. В силу условий 2.2.$(1-7)$ z-супердифференцируемость полинома или сходящегося ряда P на U означает, что он выражается через сумму сходящегося ряда с членами состоящими из произведений $\ ^jz$ и постоянных из $\mathcal{A}_r$. Поэтому, каждая z-супердифференцируемая функция f на U является классом эквивалентности всех последовательностей Коши из $C^\omega_z(U, \mathcal{A}_r)$ сходящихся к f относительно C^1-равномерности, так как $(D*).h : C^1 \to C^0$ непрерывно для любого $h \in \mathcal{A}^n_r$.

Предположим, что f z-супердифференцируема в точке a. Каждой $f'(z)$ соответствует $\mathbf{R}$-линейный оператор на Евклидовом пространстве $\mathbf{R^{2^r n}}$. Более того, мы имеем аксиомы дистрибутивности и ассоциативности для $(Df)(z; h)$ относительно правого умножения на элементы $\lambda \in \mathcal{A}_r$ (см. §2.1, 2.2). Тогда $f(a+h) - f(a) = \partial_a f(a).h + \epsilon(h)|h|$ и $\partial_{\tilde{z}} f(z)|_{z=a} = 0$, так как в общем случае $f(a+h) - f(a) = (\partial_a f(a)).h + (\partial_{\tilde{a}} f(a)).h + \epsilon(h)|h|$, где $\epsilon(h)$ непрерывно по h и $\epsilon(0) = 0$. Обратно, если F является дифференцируемой по Фреше и $\partial_{\tilde{z}} f(z)|_{z=a} = 0$, то выражая $w_s s$ для любого $s \in \mathbf{b}_r$ через линейные комбинации z (с умножением на постоянные из $\mathcal{A}_r$ слева и справа) с постоянными коэффициентами, мы получим f как выше.

Рассмотрим теперь частный случай, когда f' является право суперлинейной на супералгебре $\mathcal{A}^n_r$ и $\partial_{\tilde{z}} f(z)|_{z=a} = 0$. В этом случае $f'(a)$ является $\mathcal{A}_r$-линейной. Используя определение z-суперпроизводной и то, что существует биективное соответствие между z и $((\ ^jw_s : s \in \mathbf{b}_r) : j = 1, ..., n)$, $\ ^jw_s \in \mathbf{R}$ для любого $s \in \mathbf{b}_r$, $j = 1, ..., n$, мы рассмотрим функции $f = f(z)$ и $F((\ ^jw_s : s \in \mathbf{b}_r) : j = 1, ..., n) = f \circ \sigma$, где f является z-супердифференцируемой по z, следовательно, F является дифференцируемой по Фреше $((\ ^jw_s : s \in$

$\mathbf{b}_r) : j = 1, ..., n)$ и мы получаем выражения:

$$\partial F/\partial\, {}^j w_s = (\partial F/\partial\, {}^j z).(\partial\, {}^j z/\partial\, {}^j w_s),$$

так как $\partial\, {}^j z/\partial\, {}^k w_s = 0$ и $\partial\, {}^j \tilde{z}/\partial\, {}^k w_s = 0$ и $\partial f(z)/\partial\, {}^j \tilde{z}|_{z=a} = 0$ для любого $k \neq j$. Из $\partial\, {}^j z/\partial\, {}^j w_s = s$ для любого $s \in \mathbf{b}_r$ мы получим уравнения (2), так как $ps = -sp$, $F_{ps} = -F_{sp}$ и $pp^* = 1$ для любого $p \neq s \in \hat{b}$. Используя равенство $F = \sum_{s \in \mathbf{b}} F_s s$, мы получим уравнения (1) из последних уравнений, так как qf является право суперлинейно супердифференцируемой вместе с f для любого $q \in \mathbf{b}$, $((ps)p^*)^*((qs)q^*) \in \{-1, 1\} \subset \mathbf{R}$ для любых $p, q, s \in \mathbf{b}$.

Пусть теперь F является дифференцируемой по Фреше в точке a и пусть F удовлетворяет условиям (1). Тогда

$$f(z) - f(a) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{s \in \mathbf{b}} (\partial F/\partial\, {}^j w_s) \Delta\, {}^j w_s + \epsilon(z-a)|z-a|,$$

где $\Delta(\, {}^j w_s : s \in \mathbf{b}) = \sigma^{-1}(\, {}^j z) - \sigma(\, {}^j a)$ для любого $j = 1, ..., n$. Из условий (2) эквивалентных (1), мы получим

$$f(z) - f(a) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{s \in \mathbf{b}} (\partial F/\partial^j w_1) s \Delta\, {}^j w_s + \epsilon(z-a)|z-a| =$$
$$= \sum_{j=1}^{n} (\partial F/\partial\, {}^j w_1) \Delta\, {}^j z + \epsilon(z-a)|z-a|,$$

где ϵ – это функция непрерывная в 0 и $\epsilon(0) = 0$. Поэтому, f является супердифференцируемой по z в a, так что $f'(a)$ является правосуперлинейной, так как $\partial F/\partial\, {}^j w_s$ – действительные матрицы и, следовательно, $f'(a).(\, {}_1 h \lambda_1 + \, {}_2 h \lambda_2) = (f'(a)\, {}_1 h)\lambda_1 + (f'(a)\, {}_2 h)\lambda_2$ для любых λ_1 и $\lambda_2 \in \mathcal{A}_r$ и любых $\, {}_1 h$ и $\, {}_2 h \in \mathcal{A}_r^n$.

Последнее утверждение этого предложения следует из определения 2.2.

2.3.1. Обозначения. Если $f : U \to \mathcal{A}_r$ является либо z-супердифференцируемой, либо $\tilde{z}$-супердифференцируемой в точке $a \in U$ или на U, то мы можем также записать $D_{\tilde{z}}$ вместо $\partial_{\tilde{z}}$ и D_z вместо ∂_z в точке $a \in U$ или на U соответственно в ситуациях, когда это не может вызвать неопределенности, где U открыто в $\mathcal{A}_r^n$.

2.4. Следствие. *Пусть f является непрерывно супердифференцируемой функцией по z с право суперлинейным супердифференциалом на суперaлгебре $\mathcal{A}_r^n$, $r \geq 3$, на открытом подмножестве U в $\mathcal{A}_r^n$ и пусть F является дважды непрерывно дифференцируемой по $((\, {}^j w_s : s \in \mathbf{b}_r) : j = 1, ..., n)$ на U, тогда каждая компонента F_s функции F является гармонической функцией по парам переменных $(\, {}^j w_p, \, {}^j w_q)$ для любых $p \neq q \in \mathbf{b}_r$, а именно:*

$$(1) \quad \triangle_{\, {}^j w_p, \, {}^j w_q} F_s = 0,$$

для любых $j = 1, .., n$, где $\triangle_{\, {}^j w_p, \, {}^j w_q} F_s := \partial^2 F_s/\partial\, {}^j w_p^2 + \partial^2 F_s/\partial\, {}^j w_q^2$.

Доказательство. Из уравнений 2.3.(1) и в силу дважды непрерывной дифференцируемости F следует, что $(\partial^2 F_s/\partial\, {}^j w_p^2) = (\partial^2 F_{(sp^*)q}/\partial\, {}^j w_p \partial\, {}^j w_q) = \partial^2 F_{(((sp^*)q)p^*)q}/\partial\, {}^j w_q^2) = -(\partial^2 F_s/\partial\, {}^j w_q^2)$, так как $F_{vs} = vF_s$ для любого $v \in \mathbf{R}$ и любого $s \in \mathbf{b}_r$, $p \neq q \in \mathbf{b}_r$ и, следовательно, $p^* q \in \hat{b}_r$, $t^2 = -1$ для любого $t \in \hat{b}_r$, $p^* = -p$ для любого $p \in \hat{b}_r$, $pq = -qp$ для любого $p \neq q \in \hat{b}_r$.

2.5. Замечание и определение. Пусть U является открытым подмножеством в $\mathcal{A}_r$ и пусть $f : U \to \mathcal{A}_r$, $r \geq 3$, является функцией определенной на U, так что

$$(i) \quad f(z,\tilde{z}) = \{f^1(z,\tilde{z})...f^j(z,\tilde{z})\}_{q(j)},$$

где каждая функция $f^s(z,\tilde{z})$ представляется рядом Лорана

$$(ii) \quad f^s(z,\tilde{z}) = \sum_{n=n_0}^{\infty} \sum_{m=m_0}^{\infty} (f^s_{n,m}(z-\zeta)^n)(\tilde{z}-\tilde{\zeta})^m$$

сходящимся на U, где $f^s_{n,m} \in \mathcal{A}_r$, $z \in U$, $\zeta \in \mathcal{A}_r$ является отмеченной точкой, n и $m \in \mathbf{Z}$, если $n_0 < 0$ или $m_0 < 0$, тогда $\zeta \notin U$. Рассмотрим случай $f^s_{-1,m} = 0$ для любых s и m. Случай с членами $f^s_{-1,m} \neq 0$ будет рассмотрен позже.

Пусть $[a,b]$ – это сегмент в $\mathbf{R}$ и $\gamma : [a,b] \to \mathcal{A}_r$ – непрерывная функция. Рассмотрим разбиение P отрезка $[a,b]$, то есть, P является конечным подмножеством в $[a,b]$, состоящим из возрастающей последовательности точек $a = c_0 < ... < c_k < c_{k+1} < ... < c_t = b$, тогда норма P определена так: $|P| := \max_k(x_{k+1} - x_k)$ и P-вариация γ как $v(\gamma;P) := \sum_{k=0}^{t-1} |\gamma(c_{k+1}) - \gamma(c_k)|$, где $t = t(P) \in \mathbf{N}$. Полная вариация (или длина) кривой γ определена как $V(\gamma) = \sup_P v(\gamma;P)$. Предположим, что γ спрямляема, то есть, $V(\gamma) < \infty$. Для f имеющей разложение $(2.5.i, ii)$ с $f^s_{-1,m} = 0$ для любых s и m, и спрямляемого пути $\gamma : [a,b] \to U$ мы определим интеграл вдоль пути над (некоммутативной) алгеброй Кэли-Диксона. Рассмотрим более общий случай.

Пусть $f : U \to \mathcal{A}_r$ является непрерывной функцией, где U открыто в $\mathcal{A}_r$, f определена непрерывной функцией $\xi : U^2 \to \mathcal{A}_r$, так что

(1) $\xi(\,_1z,\,_2z)|_{\,_1z=z,\,_2z=\tilde{z}} = f(z,\tilde{z})$

или коротко $f(z)$ вместо $f(z,\tilde{z})$, где $\,_1z$ и $\,_2z \in U$. Пусть также $g : U^2 \to \mathcal{A}_r$ является непрерывной функцией, которая является $\,_1z$-супердифференцируемой, так что

(2) $(\partial g(\,_1z,\,_2z)/\partial\,_1z).1 = \xi(\,_1z,\,_2z)$ on U^2. Тогда положим

(3) $\hat{f}(z,\tilde{z}).h := \hat{f}_z(z,\tilde{z}).h := [(\partial g(\,_1z,\,_2z)/\partial\,_1z).h]|_{\,_1z=z,\,_2z=\tilde{z}}$ для любого $h \in \mathcal{A}_r$. Коротко мы можем это записать в виде $(\partial g(z,\tilde{z})/\partial z).1 = f(z,\tilde{z})$ и $\hat{f}_z(z,\tilde{z}).h := \hat{f}(z).h := (\partial g(z,\tilde{z})/\partial z).h$. Если существует следующий предел

$$(4) \quad \int_\gamma f(z,\tilde{z})dz := \lim_P I(f,\gamma;P), \text{ где}$$

$$(5) \quad I(f,\gamma;P) := \sum_{k=0}^{t-1} \hat{f}(z_{k+1},\tilde{z}_{k+1}).(\Delta z_k),$$

где $\Delta z_k := z_{k+1} - z_k$, $z_k := \gamma(c_k)$ для любого $k = 0,...,t$, тогда мы скажем, что f является интегрируемой вдоль пути γ по переменной z. Аналогично мы определим $\int_\gamma f(z,\tilde{z})d\tilde{z}$ с $(\partial g(z,\tilde{z})/\partial\tilde{z}).1 = f(z,\tilde{z})$, $\hat{f}_{\tilde{z}}(z,\tilde{z}) := (\partial g(z,\tilde{z})/\partial\tilde{z}).h$, где $g(\,_1z,\,_2z)$ является $\,_2z$-супердифференцируемой.

Замечание. В силу определений $2.1, 2.2$ и предложения 2.3 условия $2.5.(1-3)$ корректны, например, достаточно взять функции ξ и g в $(\,_1z,\,_2z)$-представлении.

Это определение оправдано следующей леммой и предложением.

2.5.1. Лемма. *Пусть* $f : U \to \mathcal{A}_r$ *удовлетворяет условиям* $2.2.(1,2,5)$, *где* U – *открытое подмножество в* $\mathcal{A}_r$. *Тогда условия*

(1) $\partial f(z)/\partial\tilde{z}_{2j,2j+1} = 0$ *для любого* $j = 0,1,...,2^{r-1}-1$ *и* $z \in U$,

где $z_{2j,2j+1} := w_s + w_p s^* p$ *with* $s = i_{2j}$, $p = i_{2j+1}$, *эквивалентны с* $\partial_{\tilde{z}} f(z) = 0$ *для любого* $z \in U$.

Доказательство. Поскольку $(z+h)^*-z^* = h^*$, $((\lambda h)^*)^* = \lambda h$ для любого z и $h \in \mathcal{A}_r^n$ и любого $\lambda \in \mathcal{A}_r$, $(h_1+h_p p)^* = h_1-h_p p$ для любого $p \in \hat{b}$, $(s(h_s+h_p s^* p))^* = (h_s-h_p s^* p)s^*$ для любого $s \neq p \in \hat{b}$, $(\partial z/\partial z).h = h$, $(\partial \tilde{z}/\partial \tilde{z}).h = \tilde{h}$, $\partial z/\partial \tilde{z} = 0$ и $\partial \tilde{z}/\partial z = 0$, где $h_p \in \mathbf{R}$ для любого $p \in \mathbf{b}$, следовательно,
$(\partial f(z)/\partial z_{2j,2j+1}).h = (\partial f(z)/\partial z).(sh)|_{h \in \mathbf{R} \oplus s^* p\mathbf{R}}$ и
$(\partial f(z)/\partial \bar{z}_{2j,2j+1}).h = (\partial f(z)/\partial \tilde{z}).(sh)|_{h \in \mathbf{R} \oplus s^* p\mathbf{R}}$, где $s = i_{2j}$ и $p = i_{2j+1}$, тогда
$\partial z/\partial \bar{z}_{2j,2j+1} = 0$, $\partial \tilde{z}/\partial z_{2j,2j+1} = 0$ и
$(\partial \bar{z}_{2j,2j+1}/\partial \bar{z}_{2j,2j+1}).h = \tilde{h}$, $(\partial z_{2j,2j+1}/\partial z_{2j,2j+1}).h = h$ для любого $h \in \mathbf{R} \oplus s^* p\mathbf{R}$. В силу предложения 2.2.1 из $\partial_{\tilde{z}} f(z) = 0$ на U и условий 2.2.$(1, 2, 5)$ следует, что для любого j:
$\partial f(z)/\partial \bar{z}_{2j,2j+1} = (\partial f(z)/\partial \tilde{z}).(\partial \tilde{z}/\partial \bar{z}_{2j,2j+1}) + (\partial f(z)/\partial z).(\partial z/\partial \bar{z}_{2j,2j+1}) = 0$,
так как $\partial_{\tilde{z}} f(z) = 0$ и $\partial z/\partial \bar{z}_{2j,2j+1} = 0$. В общем для f ее производная $f'(z)$ не обязательно является право (или лево) суперлинейной на $\mathcal{A}_r$. Тогда $\partial f(z)/\partial \bar{z}_{2j,2j+1}$ являются $\mathbf{R}$-однородными аддитивными операторами на $\mathbf{R}$-линейном подпространстве $(\mathbf{R} \oplus s^* p\mathbf{R})$ в $\mathcal{A}_r$.

Пусть f удовлетворяет 2.2.$(1, 2, 5)$ и (1), тогда
$(Df(z)).h = \sum_{s \in \mathbf{b}} (Df(z)).h_s s = \sum_{s \in \mathbf{b}} (\partial f(z)/\partial w_s)h_s$,
так как $\partial z/\partial w_s = s$ для любого $s \in \mathbf{b}$, где $h = \sum_{s \in \mathbf{b}} h_s s \in \mathcal{A}_r$, $h_s \in \mathbf{R}\ \forall\ s \in \mathbf{b}$. Из
$(\partial f(z)/\partial w_s)h_s + (\partial f(z)/\partial w_p)h_p = (\partial f(z)/\partial z_{2j,2j+1}).(h_s + s^* p h_p)$
для любых $s = i_{2p}$ и $p = i_{2j+1}$, так как
$(\partial f(z)/\partial w_s) = (\partial f(z)/\partial z_{2j,2j+1}).1 + (\partial f(z)/\partial \bar{z}_{2j,2j+1}).1$,
$(\partial f(z)/\partial w_p) = (\partial f(z)/\partial z_{2j,2j+1} - \partial f(z)/\partial \bar{z}_{2j,2j+1}).(s^* p)$
и $\partial f(z)/\partial \bar{z}_{2j,2j+1} = 0$, следует, что $(Df(z)).h = (\partial f(z)/\partial z).h$, так как в силу предложения 2.2.1 и условий (1)
$(\partial f(z)/\partial \tilde{z}).(h_s s + h_p p) = (\partial f(z)/\partial \bar{z}_{2j,2j+1}).(h_s + h_p s^* p) = 0$ для любого j
и $(\partial f/\partial \tilde{z}).h = \sum_{j=0}^{2^{r-1}-1} (\partial f/\partial \tilde{z}).(i_{2j}(h_{2j} + h_{2j+1} i_{2j}^* i_{2j+1}))$, так как $h_s \in \mathbf{R}$ для любого $s \in \mathbf{b}$.

2.6. Предложение. *Пусть f является функцией как в §2.5 и предположим, что имеются две постоянные r и R такие, что ряд Лорана $(2.5.i, ii)$ сходится на множестве $B(a, r, R, \mathcal{A}_m) := \{z \in \mathcal{A}_m : r \le |z-a| \le R\}$ для любого $s = 1, ..., j$, пусть также γ является спрямляемым путем содержащимся в $U \cap B(a, r', R', \mathbf{H})$, где $r < r' < R' < R$, $m \ge 3$. Тогда существует интеграл вдоль пути над алгеброй Кэли-Диксона.*

Доказательство. Сначала отметим, что $\mathcal{A}_m$ является нормированной алгеброй, так что $|\xi\eta| \le |\xi||\eta|$ для любого ξ и $\eta \in \mathcal{A}_m$. Это можно доказать по индукции начиная с $\mathbf{C}$ и используя процедуру удвоения. Предположим, что $m \ge 2$ и $\mathcal{A}_{m-1}$ является нормированной алгеброй, тогда $|(a, b)(c, d)| = (|ac - d^* b|^2 + |da + bc^*|^2)^{1/2} \le (|ac|^2 + |d^* b|^2 + |da|^2 + |bc^*|^2)^{1/2} \le (|a|^2 + |b|^2)^{1/2}(|c|^2 + |d|^2)^{1/2} = |(a, b)||(c, d)|$, где $a, b, c, d \in \mathcal{A}_{m-1}$, (a, b) и $(c, d) \in \mathcal{A}_m$. Поскольку каждая f^s сходится в $B(a, r, R, \mathcal{A}_m)$, то

$$\overline{\lim}_{n+m>0} |f^s_{n,m}|^{1/(n+m)} R \le 1, \text{ следовательно,}$$

$$\|f\|_\omega := \prod_{s=1}^{j} (\sup_{n+m<0} |f^s_{n,m}| r^{n+m}, \sup_{n+m \ge 0} |f^s_{n,m}| R^{n+m}) < \infty$$

и неизбежно

$$\|f\|_{1,\omega,B(a,r',R',\mathcal{A}_m)} := \prod_{s=1}^{j} [(\sum_{n+m<0} |f^s_{n,m}| r'^{n+m}) + (\sum_{n+m>0} |f^s_{n,m}| R'^{n+m})] < \infty.$$

Для любой локально z-аналитической функции f на U и любого z_0 в U существует шар радиуса $r > 0$ с центром z_0, так что f имеет разложение аналогичное $(2.5.i, ii)$ в этом шаре со всеми n неотрицательными. Рассмотрим две z-локально аналитические функции f и q на U, так что f и q не коммутируют. Пусть $f^0 := f$, $q^0 := q$, $q^{-n} := q^{(n)}$, $(\partial(q^n)/\partial z).1 =: q^{n-1}$ и $q^{-k-1} = 0$ для некоторого $k \in \mathbf{N}$, тогда

(i) $(fq)^1 = f^1q - f^2q^{-1} + f^3q^{-2} + ... + (-1)^k f^{k+1}q^{-k}$. В частности, если $f = az^n$, $q = bz^k$, с $n > 0$, $k > 0$, $b \in \mathcal{A}_m \setminus \mathbf{R}I$, тогда $f^p = [(n+1)...(n+p)]^{-1}az^{n+p}$ для любого $p \in \mathbf{N}$, $q^{-s} = k(k-1)...(k-s+1)bz^{k-s}$ для любого $s \in \mathbf{N}$. Также

(ii) $(fq)^1 = fq^1 - f^{-1}q^2 + f^{-2}q^3 + ... + (-1)^n f^{-n}q^{n+1}$, когда $f^{-n-1} = 0$ для некоторого $n \in \mathbf{N}$. Применим (i) для $n \geq m$ и (ii) для $n < k$ для решения уравнения $(\partial g(z,\tilde{z})/\partial z).1 = f(z,\tilde{z})$ для любого $z \in U$. Если f и q имеют ряды сходящиеся в $Int(B(z_0, r, \mathcal{A}_m))$, то эти формулы показывают, что существует z-аналитическая функция $(fq)^1$ с рядом сходящимся в $Int(B(0, r, \mathcal{A}_m))$, так как $\lim_{n\to\infty}(nr^n)^{1/n} = r$, где $0 < r < \infty$. Применяя эту формулу по индукции к произведениям полиномов $\{P_1...p_n\}_{q(n)}$ и сходящимся рядам, мы получим g. Поскольку f является локально аналитической, то g также локально аналитична. Поэтому, для любой локально z-аналитической функции f существует оператор $\hat{f}$. Рассмотрение функции G действительной переменной соответствующей g дает в силу леммы 2.5.1, что все решения g отличаются на постоянные в $\mathcal{A}_m$, так как $\partial g/\partial w_s + (\partial g/\partial w_p).(s^*p) = 0$ для любых $s = i_{2j}$, $p = i_{2j+1}$, $j = 0, 1, ..., 2^{r-1} - 1$ и $\partial g/\partial w_1$ единственна, следовательно, $\hat{f}$ единственно для f. Поэтому,

$$(1) \quad |\{f^s_{n,m}(z_{j+1} - a)^k(\Delta z_j)(z_{j+1} - a)^{n-k}(\tilde{z}_{j+1} - \tilde{a})^m\}_{q(n+m+1)}| \leq$$

$$|f^s_{n,m}||(z_{j+1} - a)^n(\tilde{z}_{j+1} - \tilde{a})^m||\Delta z_j|.$$

Из уравнения (1) следует, что $|I(f,\gamma;P)| \leq \|f\|_{1,\omega,B(a,r',R',\mathbf{H})}v(\gamma;P)$, для любого P, и неизбежно

$$(2) \quad |I(f,\gamma;P) - I(f,\gamma;Q)| \leq w(\hat{f};P)V(\gamma)$$

для любого $Q \supset P$, где

$$(3) \quad w(\hat{f};P) := \max_{(z,\zeta\in\gamma([c_j,c_{j+1}]))}\{\|\hat{f}(z) - \hat{f}(\zeta)\| : \quad z_j = \gamma(c_j), c_j \in P\},$$

$\|\hat{f}(z) - \hat{f}(\zeta)\| := \sup_{h\neq 0}|\hat{f}(z).h - \hat{f}(\zeta).h|/|h|$. Поскольку $\lim_{n\to\infty}(n)^{1/n} = 1$, то $\lim_P \omega(\hat{f}, P) = 0$. Из $\lim_P w(\hat{f};P) = 0$ следует существование $\lim_P I(f,\gamma;P)$.

2.7. Теорема. *Пусть γ – это спрямляемый путь в U, тогда для алгебры Кэли-Диксона $\mathcal{A}_r$, $r \geq 3$, интеграл вдоль пути имеет непрерывное продолжение на пространство $C^0_b(U,\mathcal{A}_r)$ ограниченных непрерывных функций $f : U \to \mathcal{A}_r$. Этот интеграл является $\mathbf{R}$-линейным и лево-$\mathcal{A}_r$-линейным и право-$\mathcal{A}_r$-линейным функционалом на $C^0_b(U,\mathcal{A}_r)$.*

Доказательство. Поскольку γ непрерывна на компактном сегменте $[a,b]$, то существует компактное каноническое замкнутое подмножество V в $\mathcal{A}_r$, то есть, $cl(Int(V)) = V$, так что $\gamma([a,b]) \subset V \subset U$. Пусть $f \in C^0_b(U,\mathcal{A}_r)$, тогда в силу теоремы Стоуна-Вейерштрасса для функции $F(w_s : s \in \mathbf{b}) = f \circ \sigma(w_s : s \in \mathbf{b})$ и любого $\delta > 0$ существует полином T такой, что $\|F - T\|_0 < \delta$, где $\|f\|_0 := \sup_{z\in U}|f(z)|$. Этот полином принимает значения в $\mathcal{A}_r$, следовательно, он имеет вид: $T = \sum_{s\in\mathbf{b}} T_s s$, где $T_s : U \to \mathbf{R}$. Имеются соотношения $zp = \sum_{s\in\mathbf{b}} w_s sp$, $sp = -ps$ для любого $s \neq p \in \hat{b}$, следовательно, $zp = -w_p + \sum_{s\in\mathbf{b};s\neq p} w_s sp$, $(zp)^* = p^*z^* = -w_p + \sum_{s\in\mathbf{b};s\neq p} w_s(sp)^* = -w_p - \sum_{s\in\mathbf{b},s\neq p} w_s sp$, так как $p^* = -p$ для любого $p \in \hat{b}$. Тогда $w_1 = (z+\tilde{z})/2$ и $w_p = (p\tilde{z} - zp)/2$ для любого $p \in \hat{b}$, где используется тождество $\tilde{z} = (2^r - 2)^{-1}\{-z + \sum_{s\in\hat{b}} s(zs^*)\}$ (см. §2.1). Запишем $F = \sum_{s\in\mathbf{b}} F_s s$, где $F_s \in \mathbf{R}$ для любого $s \in \mathbf{b}$, тогда применение теоремы

Стоуна-Вейерштрасса по действительным переменным $(w_s : s \in \mathbf{b})$ выраженным через z и $s \in \mathbf{b}$ с действительными постоянными множителями дает, что $\mathbf{R}$-линейное пространство функций даваемых уравнениями $(2.5.i, ii)$ плотно в $C^0_b(U, \mathcal{A}_r)$.

Рассмотрим функцию $g(z)$ на U. Пусть $g(z)$ супердифференцируема по z. Рассмотрим пространство всех таких g на U, для которых $(Dg(z)).s$ – это ограниченная непрерывная функция на U для любого $s \in \mathbf{b}$, оно обозначается через $C^1_b(U, \mathcal{A}_r)$ и оно снабжено нормой $\|g\|_{C^1_b} := \|g\|_{C^0_b} + \sum_{s\in\mathbf{b}} \|(Dg(z).s\|_{C^0_b}$, где $\|g\|_{C^0_b} := \sup_{z\in U} |g(z)|$, следовательно, $(Dg(z)).h \in C^0_b(U \times B(0,0,1,\mathcal{A}_r), \mathcal{A}_r)$, где $h \in B(0,0,1,\mathcal{A}_r)$. Поэтому, существует положительная постоянная C, так что

$$(1) \quad \sup_{h\neq 0} |(Dg(z)).h|/|h| \leq C \sum_{s\in\mathbf{b}} \|(Dg(z)).s\|_{C^0_b},$$

так как $h = \sum_{s\in\mathbf{b}} h_s s$ для любого $h \in \mathcal{A}_r$ и $Dg(z)$ является $\mathbf{R}$-линейной и $(Dg(z)).(\ ^1h + \ ^2h) = (Dg(z)).\ ^1h + (Dg(z)).\ ^2h$ для любых $\ ^1h$ и $\ ^2h \in \mathcal{A}_r$, где h_s – действительное число для любого $s \in \mathbf{b}$, $G(w_s : s \in \mathbf{b}) := g \circ \sigma(w_s : s \in \mathbf{b})$ является дифференцируемой по Фреше на открытом подмножестве $U_\sigma \subset \mathbf{R}^{\mathbf{2^r}}$, так что $\sigma(U_\sigma) = U$.

В §2.6 было показано, что уравнение $(\partial g(z,\tilde{z})/\partial z).1 = f(z,\tilde{z})$ имеет решение в классе локально z-аналитических функций на U. Подмножество $C^\omega(U, \mathcal{A}_r)$ плотно в равномерном пространстве $C^0_b(U, \mathcal{A}_r)$.

Если $g = \{g^1...g^j\}_{q(j)}$ является произведением функций $g^s \in C^1_b(U, \mathcal{A}_r)$, тогда $(Dg(z)).h = \sum_{v=1}^j \{g^1(z)...g^{v-1}(z)[(Dg^v(z)).h]g^{v+1}(z)...g^j(z)\}_{q(j)}$ для любого $h \in \mathcal{A}_r$. Рассмотрим пространство $\hat{C}^0_b(U, \mathcal{A}_r) := \{(Dg(z)).s : s \in \mathbf{b}\}$. Оно имеет вложение ξ в $C^0_b(U, \mathcal{A}_r)$ и $\|g\|_{C^1_b} \geq \sum_{s\in\mathbf{b}} \|(Dg(z)).s\|_{C^0_b}$. В силу неравенства (1) пополнение $\hat{C}^0_b(U, \mathcal{A}_r)$ относительно $\| * \|_{C^0_b(U,\mathcal{A}_r)}$ совпадает с $C^0_b(U, \mathcal{A}_r)$.

Пусть $\{f^v : \ v \in \mathbf{N}\}$ – это последовательность функций имеющих разложение $(2.5.i, ii)$ и сходящаяся к f в $C^0_b(U, \mathcal{A}_r)$ относительно метрики $\rho(f,q) := \sup_{z\in U} |f(z) - q(z)|$, так что $f^v = \xi((Dg^v(z)).s : s \in \mathbf{b})$ для некоторого $g^v \in C^1_b(U, \mathcal{A}_r)$. Относительно этой метрики $C^0_b(U, \mathcal{A}_r)$ полно. Мы имеем равенство

$$\partial(\int_0^q F(\phi h_s : s \in \mathbf{b}))/\partial q = F(w_s : s \in \mathbf{b})$$

для любой непрерывной функции F на U_σ, где $w_s = w_{0,s} + qh_s$ для любого $s \in \mathbf{b}$, $(w_{0,s} : s \in \mathbf{b}) + \phi(h_s : s \in \mathbf{b}) \in U_\sigma$ для любого $\phi \in \mathbf{R}$ с $0 \leq \phi < q + \epsilon$, $0 < \epsilon < \infty$, $h_s \in \mathbf{R}$ для любого $s \in \mathbf{b}$. Пусть z_0 – это отмеченная точка в V. Существует $R > 0$, так что γ содержится во внутренности параллелепипеда $V := \{z \in \mathcal{A}_r : z = \sum_{s\in\mathbf{b}} w_s s;$ $|w_s - w_{0,s}| \leq R$ для любого $s \in \mathbf{b}\}$.

Если V не содержится в U, то рассмотрим непрерывное продолжение функции F с $V \cap U_0$ на V, где U_0 – это замкнутое подмножество в U, так что $Int(U_0) \supset \gamma$ (о теореме о непрерывном продолжении см. [9]). Поэтому, предположим, что F дана на V. Тогда функция $F_1(w_s : s \in \mathbf{b}) := \int_{w_{0,1}}^{w_1} ... \int_{w_{0,t}}^{w_t} F(w_s : s \in \mathbf{b}) dw_1...dw_t$ принадлежит $C^1(V, \mathcal{A}_r)$ (с односторонними производными на ∂V изнутри V), где $t := i_{2^r-1}$. Рассмотрим фолиацию (foliation) V посредством $(2^r - 1)$-мерными C^0-многообразия Υ_z, так что $\Upsilon_z \cap \Upsilon_{z_1} = \emptyset$ для любого $z \neq z_1$, где $z, z_1 \in \gamma$, $\bigcup_{z\in\gamma} \Upsilon_z = V_1$, V_1 является каноническим замкнутым подмножеством в $\mathcal{A}_r$, так что $\gamma \subset V_1 \subset V$. Рассмотрим эту фолиацию, так чтобы получить разложение меры Лебега dV в произведение мер $d\nu(z)$ вдоль γ и $d\Upsilon_z$ для любого $z \in \gamma$. В силу теоремы Фубини существует $\int_V f(w_s : s \in \mathbf{b}) dV = \int_\gamma (\int_{\Upsilon_z} f(z) d\Upsilon_z) d\nu(z)$. Если γ является отрезком прямой, тогда $\int_\gamma f(z)dz$ принадлежит $L^1(\Upsilon, \mathcal{A}_r)$. Пусть $U_{\mathbf{R}}$ – это действительная область в $\mathbf{R}^{\mathbf{2^r}}$ соответствующая U в $\mathcal{A}_r$.

Рассмотрим пространство Соболева $W^q_2(U_{\mathbf{R}}, \mathbf{R}^{\mathbf{2^r}})$ функций $h : U_{\mathbf{R}} \to \mathbf{R}^{\mathbf{2^r}}$, для которых $D^\alpha h \in L^2(U_{\mathbf{R}}, \mathbf{R}^{\mathbf{2^r}})$ для любого $|\alpha| \le q$, где $0 \le q \in \mathbf{Z}$. В силу теоремы 18.1.24 [14] (см. также обозначения там), если $A \in \Psi^m$ является псевдодифференциальным эллиптическим оператором порядка m с соответствующим носителем с главным символом $a \in S^m(T^*(X))/S^{m-1}(T^*(X))$ имеющим обратный в $S^{-m}(T^*(X))/S^{-m-1}(T^*(X))$, тогда можно найти $B \in \Psi^{-m}$ с соответствующим носителем, так что $BA - I \in \Psi^{-\infty}$, $AB - I \in \Psi^{-\infty}$. Тогда B называется параметриксой (parametrix) для A. В силу предложения 18.1.21 [14] каждое $A \in \Psi^m$ может быть записано в виде суммы $A = A_1 + A_0$, где $A_1 \in \Psi^m$ – это ядро A_0 с соответсвующим носителем и принадлежащее C^∞. В частности, мы можем взять псевдодифференциальный оператор с главным символом $a(x, \xi) = (b + |\xi|^2)^{s/2}$, где $b > 0$ – это постоянная и $s \in \mathbf{Z}$, что соответствует $b + \Delta$ для $s = 1$ с точностью до младших членов, где $\Delta = \nabla^2$ – это Лапласиан (см. также теорему 3.2.13 [10] о его семействе параметрикс). Для оценки решения может быть применена также теорема 3.3.2 и следствие 3.3.3 [10] относящееся к параболическим псевдодифференциальным уравнениям для нашего частного случая соответствующего $(\partial g(z, \tilde{z})/\partial z).1 = f$ переписанного в действительных переменных.

В силу теоремы Соболева (см. [32, 33]) существует вложение пространства Соболева $W^{2^{r-1}+1}_2(V, \mathcal{A}_r)$ в $C^0(V, \mathcal{A}_r)$, так что

(2) $\|g\|_{C^0} \le C\|g\|_{W^{2^{r-1}+1}_2}$ для любого $g \in W^{2^{r-1}+1}_2$, где C – положительная постоянная независимая от g. Если $h \in W^{k+1}_2(V, \mathcal{A}_r)$, тогда $\partial h/\partial w_s \in W^k_2(V, \mathcal{A}_r)$ для любого $k \in \mathbf{N}$ и, в частности, для $k = 2^{r-1}+1$ и любого $s \in \mathbf{b}$ (см. [32]). С другой стороны, $\|h\|_{L^2(V,\mathcal{A}_r)} \le \|h\|_{C^0(V,\mathcal{A}_r)}(2R)^{2^{r-1}}$ для любого $h \in L^2(V, \mathcal{A}_r)$. Поэтому,

(3) $\|A^{-k}h\|_{W^k_2(V,\mathcal{A}_r)} \le C\|h\|_{C^0(V,\mathcal{A}_r)}(2R)^{k+2^{r-1}}$ для любого $k \in \mathbf{N}$, где $C = const > 0$, A – это эллиптический псевдодифференциальный оператор, так что A^2 соответствует $(1+\Delta)$. Для оценки снизу используется лемма Гронуолла (смотри, например, параграф 3.3.1 [3]), которая заключается в следующем. Пусть $\phi(t)$ и $\psi(t)$ – это ограниченные измеримые функции, а $\eta(t)$ – непрерывная неотрицательная функция, так что

$\phi(t) \le X + \psi(t) + \int_0^t \eta(\tau)\phi(\tau)d\tau$. Тогда

$\phi(t) \le X \exp[\int_0^t \eta(\tau)d\tau] + \psi(t) + \int_0^t \exp[\int_\tau^t \eta(v)dv]\psi(\tau)\eta(\tau)d\tau$.

Воспользуемся этой леммой для $\phi(t) := |\int_{z\in\{\gamma(v):a\le v\le t\}}(f(z) - q(z))dz|$, $X := C_1\rho(f, q)V(\gamma)$, $\psi(t) = 0$, $\eta(t) = C'_2R^{2^r+1}$, где $C_1 > 0$ и $C'_2 > 0$ являются подходящими постоянными независимыми от f, q и γ, так как $\|(\hat{f} - \hat{q})(z)\| \le \rho(f, q) + \|Im \circ (\hat{f} - \hat{q})(z)\|$ and $\|Im \circ (\hat{f} - \hat{q})(z)\| \le \|\hat{f} - \hat{q}(z)\|$ и $\hat{f}(z).1 = f$ для любого $z \in \gamma([a, b])$,
$|(\hat{f} - \hat{q})(\gamma(x_{k+1})).(\gamma(x_{k+1}) - \gamma(x_k))| \le \|(\hat{f} - \hat{q})(\gamma(x_{k+1}))\||\gamma(x_{k+1}) - \gamma(x_k)|$
для любого разбиения P: $a = x_0 < ... < x_k < x_{k+1} < ... < x_w = b$, где $Im(z) := (z - l(zl^*))/2$. Из уравнений 2.5.(1, 2) и неравенств $(1 - 3)$ следует, что существует $0 < \epsilon < \infty$, так что

$$(4) \quad |I(f - q, \gamma; P)| \le \rho(f, q)V(\gamma)C_1 \exp(C_2R^{2^r+2})$$

для любого разбиения P нормы $|P|$ меньшей, чем ϵ, где C_1 и C_2 – положительные постоянные независимые от R, f и q. В силу формул 2.6.(1, 2) $\{\int_\gamma f^v(z)dz : v \in \mathbf{N}\}$ – это последовательность Коши в $\mathcal{A}_r$, а последнее пространство полно как метрическое пространство. Поэтому, существует $\lim_v \lim_P I(f^v, \gamma; P) = \lim_v \int_\gamma f^v(z)dz$, который обозначается через $\int_\gamma f(z)dz$. Как и в §2.6 мы получим, что все решения g отличаются на кватернионные постоянные на каждой связной компоненте в U, следовательно, функционал $\int_\gamma$ определен единственным образом на $C^0_b(U, \mathcal{A}_r)$. Функционал $\int_\gamma : C^0_b(U, \mathcal{A}_r) \to \mathcal{A}_r$ непрерывен в силу формулы (4) и очевидно является $\mathbf{R}$-линейным, так как $\lambda z = z\lambda$ для любого $\lambda \in \mathbf{R}$ и любого $z \in \mathcal{A}_r$, то есть,

$\int_\gamma(\lambda_1 f_1(z) + \lambda_2 f_2(z))dz = \int_\gamma(f_1(z)\lambda_1 + f_2(z)\lambda_2)dz = \lambda_1\int_\gamma f_1(z)dz + \lambda_2\int_\gamma f_2(z)dz$ для любых λ_1 и $\lambda_2 \in \mathbf{R}$, f_1 и $f_2 \in C^0_b(U, \mathcal{A}_r)$. Более того, он лево-$\mathcal{A}_r$-линеен, то есть, $\int_\gamma(\lambda_1 f_1(z) + \lambda_2 f_2(z))dz = \lambda_1\int_\gamma f_1(z)dz + \lambda_2\int_\gamma f_2(z)dz$ для любых λ_1 и $\lambda_2 \in \mathcal{A}_r$, f_1 и $f_2 \in C^0_b(U, \mathcal{A}_r)$, так как $I(f, \gamma; P)$ является лево-$\mathcal{A}_r$-линейным. Если $g_k \in C^1(U, \mathcal{A}_r)$, тогда $g_k\lambda \in C^1(U, \mathcal{A}_r)$ для любого $\lambda \in \mathcal{A}_r$, а $(Dg_k(z)\lambda).h = (Dg_k(z).h)\lambda$ для любого $h \in \mathcal{A}_r$, так как $D\lambda = 0$, в частности, для g_k такого, что $(\partial g_k(z, \tilde{z})/\partial z).1 = f_k(z)$ и удовлетворяющего 2.5.1.(1) согласно лемме 2.5.1 на U, $k = 1, 2$, так как $g({}_1z, {}_2z)$ является ${}_1z$-супердифференцируемой. Поэтому, $\int_\gamma(f_1(z)\lambda_1 + f_2(z)\lambda_2)dz = (\int_\gamma f_1(z)dz)\lambda_1 + (\int_\gamma f_2(z)dz)\lambda_2$ для любых констант λ_1 и $\lambda_2 \in \mathcal{A}_r$, следовательно, $(\hat{f}_k(z).h)\lambda = (f_k(z)\lambda)\hat{}.h$ для любого $h \in \mathcal{A}_r$. Но это конечно не означает, что $(\int_\gamma f(z)dz)\lambda$ и $\lambda(\int_\gamma f(z)dz)$ равны.

2.8. Замечание. Пусть η – это дифференциальная форма на открытом подмножестве U Евклидова пространства $\mathbf{R^{2^rm}}$ со значениями в $\mathcal{A}_r$, тогда она может быть записана в виде

$$(1)\quad \eta = \sum_\Upsilon \eta_\Upsilon db^{\wedge\Upsilon},$$

где $b = ({}^1b, ..., {}^mb) \in \mathbf{R^{2^rm}}$, ${}^jb = ({}^jb_1, ..., {}^jb_{2^r})$, ${}^jb_k \in \mathbf{R}$, $\eta_\Upsilon = \eta_\Upsilon(b) : \mathbf{R^{2^rm}} \to \mathcal{A}_r$ являются s раз непрерывно дифференцируемыми $\mathcal{A}_r$-значными функциями с $s \in \mathbf{N}$, $\Upsilon = (\Upsilon(1), ..., \Upsilon(m))$, $\Upsilon(j) = (\Upsilon(j, 1), ..., \Upsilon(j, 2^r)) \in \mathbf{N^{2^r}}$ для любого j, $db^{\wedge\Upsilon} = d\ {}^1b^{\wedge\Upsilon(1)} \wedge ... \wedge d\ {}^mb^{\wedge\Upsilon(m)}$, $d\ {}^jb^{\wedge\Upsilon(j)} = d\ {}^jb_1^{\Upsilon(j,1)} \wedge ... \wedge d\ {}^jb_{2^r}^{\Upsilon(j,2^r)}$, где $d\ {}^jb_k^0 := 1$, $d\ {}^jb_k^1 = d\ {}^jb_k$, $d\ {}^jb_k^v = 0$ для любого $v > 1$. Если $s \geq 1$, тогда определён (внешний) дифференциал

$$d\eta = \sum_{\Upsilon,(j,k)} (\partial\eta_\Upsilon/\partial\ {}^jb_k)(-1)^{\alpha(j,k)} db^{\wedge(\Upsilon+e(j,k))},$$

где $e(j, k) = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$ с 1 на $2^r(j-1)+k$-м месте, $\alpha(j, k) = (\sum_{p=1}^{j-1}\sum_{v=1}^{2^r}\Upsilon(p, v)) + \sum_{v=1}^{k-1}\Upsilon(j, v)$. Теперь воспользуемся соотношениями

(2) ${}^jb_1 = ({}^jz + (2^r-2)^{-1}\{-\ {}^jz + \sum_{s\in\hat{b}} s({}^jzs^*)\})/2$ и

${}^jb_p = (i_p(2^r-2)^{-1}\{-\ {}^jz + \sum_{s\in\hat{b}} s({}^jzs^*)\} -\ {}^jzi_p)/2$ для любого $i_p \in \hat{b}$. Тогда η может быть выражена по переменным z. Рассмотрим базисные элементы $S = ({}^1S, ..., {}^mS)$ и их упорядоченное произведение $S^{\to\Upsilon} := (...({}^1S^{\to\Upsilon(1)}\ {}^2S^{\to\Upsilon(2)})...)\ {}^mS^{\to\Upsilon(m)}$, где ${}^jS = ({}^jS_1, ..., {}^jS_{2^r}) = (1, i_1, i_2, ..., i_{2^r-1})$, ${}^jS^{\to\Upsilon(j)} = (...(i_1^{\Upsilon(j,2)} i_2^{\Upsilon(j,3)})...) i_{2^p-1}^{\Upsilon(j,2^r)}$, $S^0 = 1$. Тогда уравнение (1) может быть записано в виде:

$$(3)\quad \eta = \sum_\Upsilon \xi_\Upsilon d(Sb)^{\wedge\Upsilon},$$

где $Sb = ({}^1S_1\ {}^1b_1, ..., {}^1S_{2^r}\ {}^1b_{2^r}, ..., {}^mS_1\ {}^mb_1, ..., {}^mS_{2^r}\ {}^mb_{2^r}) \in \mathcal{A}_r^{2^rm}$,
$d\ {}^jS_k\ {}^jb_k = {}^jS_k d\ {}^jb_k$,
$d(Sb)^{\wedge\Upsilon} := (...((d\ {}^1S\ {}^1b)^{\wedge\Upsilon(1)} \wedge (d\ {}^2S\ {}^2b)^{\wedge\Upsilon(2)}) \wedge ...) \wedge (d\ {}^mS\ {}^mb)^{\wedge\Upsilon(m)}$,
$(d\ {}^vS\ {}^vb)^{\wedge\Upsilon(v)} := (...((d\ {}^vS_1\ {}^vb_1)^{\Upsilon(v,1)} \wedge (d\ {}^vS_2\ {}^vb_2)^{\Upsilon(v,2)}) \wedge ...) \wedge (d\ {}^vS_{2^r}\ {}^vb_{2^r})^{\Upsilon(v,2^r)}$, $\xi_\Upsilon := \eta_\Upsilon(S^{\to\Upsilon})^*$. Относительно внешнего произведения $d\ {}^jb_1$ антикоммутируют с другими базисными дифференциальными 1-формами ${}^jS_k d\ {}^jb_k$; для $k = 2, ..., 2^r$ эти 1-формы коммутируют друг с другом относительно внешнего произведения. Это означает, что алгебра дифференциальных форм над алгеброй Кэли-Диксона градуирована относительно внешнего произведения.

Из уравнения (2) следует, что

(4) $db_1 = (dz + d(2^r-2)^{-1}\{-z + \sum_{s\in\hat{b}} s(zs^*)\})/2$,

$db_p = (di_p(2^r-2)^{-1}\{-z + \sum_{s\in\hat{b}} s(zs^*)\} - dzi_p)/2$ для любого $i_p \in \hat{b}$. Поэтому, правая часть уравнения (3) может быть переписана с $d\ {}^jzi_p$, $di_p((s\ {}^jz)s^*)$ с правой стороны,

где $i_p \in \{1, i_1, ..., i_{2^r-1}\}$, $s \in \hat{b}$. Здесь также можно воспользоваться $di_p\, {}^j\tilde{z}$ и $d((2^r - 2)^{-1}\{- {}^j\tilde{z} + \sum_{s\in\hat{b}} s({}^j\tilde{z}s^*)\})i_p$ в зависимости от рассматриваемого представления либо z, либо $\tilde{z}$, либо $(z,\tilde{z})$ функций и дифференциальных форм. Эти 1-формы не являются ни коммутирующими, ни антикоммутирующими, так как они не являются чистыми элементами градуированной алгебры. Например,
$d\, {}^jz \wedge d\, {}^jz = 2\sum_{1\le v<k\le 2^r-1} i_v i_k d\, {}^jb_{v+1} \wedge d\, {}^jb_{k+1}$;
$(d\, {}^jz)^{\wedge p} = p!\sum_{1\le v(1)<...<v(p)\le 2^r-1}(...(i_{v(1)}i_{v(2)})...)i_{v(p)} d\, {}^jb_{v(1)+1} \wedge ... \wedge d\, {}^jb_{v(p)+1}$ для любого $3 \le p \le 2^r$. С другой стороны уравнение (1) может быть переписано с использованием тождеств (2). Это показывает, что оператор внешнего дифференцирования ${}_{\mathcal{A}_r}d$ для $\mathcal{A}_r$-значных дифференциальных форм над $\mathcal{A}_r$ и оператор внешнего дифференцирования на дифференциальных формах в их действительной реализации ${}_{\mathbf{R}}d$ совпадают и их общий оператор обозначается d. Рассмотрим равенство

$$(\partial\eta_\Upsilon/\partial\, {}^jb^l)\, {}^jb^l \wedge db^\Upsilon = [(\partial\eta_\Upsilon/\partial\, {}^jz).(\partial\, {}^jz/\partial\, {}^jb^l)]\, {}^jb^l \wedge db^\Upsilon$$

$$+[(\partial\eta_\Upsilon/\partial\, {}^j\tilde{z}).(\partial\, {}^j\tilde{z}/\partial\, {}^jb_l)]\, {}^jb^l \wedge db^\Upsilon.$$

Применяя его к $l = 1, ..., 2^r$ и суммируя левые и правые части этих равенств мы получим $d\eta(z,\tilde{z}) = ((\partial\eta/\partial z).d\, {}^jz) \wedge db^\Upsilon + ((\partial\eta/\partial\tilde{z}).d\, {}^j\tilde{z}) \wedge db^\Upsilon$, следовательно, внешнее дифференцирование может быть представлено в виде

$$(5) \quad d = \partial_z + \partial_{\tilde{z}},$$

где ∂_z и $\partial_{\tilde{z}}$ являются внешними дифференцированиями по переменным z и $\tilde{z}$ соответственно.

Конечно, для внешнего произведения $\eta_1 \wedge \eta_2$ не существует (в общем случае) $\lambda \in \mathcal{A}_r$ такого, что $\lambda\eta_2 \wedge \eta_1 = \eta_1 \wedge \eta_2$, если η_1 и η_2 не являются чистыми элементами (четными или нечетными) градуированной алгебры дифференциальных форм над $\mathcal{A}_r$.

2.9. Определение. Хаусдорфово топологическое пространство X называется n-связным для $n \ge 0$, если каждое непрерывное отображение $f : S^k \to X$ из k-мерной действительной сферы в X имеет непрерывное продолжение на $\mathbf{R^{k+1}}$ для любого $k \le n$. 1-связное пространство также называется просто связным.

2.10. Замечание. В соответствиии с теоремой 1.6.7 [31] пространство X является n-связным тогда и только тогда, когда оно линейно связно и $\pi_k(X,x)$ тривиально для любой базисной точки $x \in X$ и любого k такого, что $1 \le k \le n$.

Обозначим через $Int(U)$ внутренность множества U в топологическом пространстве X, а через $cl(U) = \bar{U}$ замыкание U в X. Для подмножества U в $\mathcal{A}_r$, пусть $\pi_{s,p,t}(U) := \{u : z \in U, z = \sum_{v\in\mathbf{b}} w_v v,\ u = w_s s + w_p p\}$ для любого $s \ne p \in \mathbf{b}$, где $t := \sum_{v\in\mathbf{b}\setminus\{s,p\}} w_v v \in \mathcal{A}_{r,s,p} := \{z \in \mathcal{A}_r : z = \sum_{v\in\mathbf{b}} w_v v,\ w_s = w_p = 0,\ w_v \in \mathbf{R}\ \forall v \in \mathbf{b}\}$. То есть, геометрически $\pi_{s,p,t}(U)$ – это проекция на комплексную плоскость $\mathbf{C}_{s,p}$ пересечения U с плоскостью $\tilde{\pi}_{s,p,t} \ni t$, $\mathbf{C}_{s,p} := \{as + bp : a,b \in \mathbf{R}\}$, так как $sp^* \in \hat{b}$.

2.11. Теорема. *Пусть U – это область в $\mathcal{A}_r$, $r \ge 3$, так что $\emptyset \ne Int(U) \subset U \subset cl(Int(U))$ и U является $(2^r - 1)$-связной; $\pi_{s,p,t}(U)$ является просто связной в $\mathbf{C}$ для любого $k = 0, 1, ..., 2^{r-1} - 1$, $s := i_{2k}$, $p := i_{2k+1}$, $t \in \mathcal{A}_{r,s,p}$ и $u \in \mathbf{C}_{s,p}$ для которого существует $z = u + t \in U$ (см. §2.10). Предположим, что $f \in C^0_b(U, \mathcal{A}_r)$ и f супердифференцируема по $z \in U$ и f имеет непрерывное продолжение на открытую область W, так что $W \supset U$. Тогда для любого спрямляемого замкнутого пути (то есть, петли) γ в U интеграл вдоль пути над алгеброй Кэли-Диксона равен нулю, $\int_\gamma f(z)dz = 0$.*

Доказательство. В силу Предложение 2.3 f является z-представленной и $\partial_{\tilde{z}} f = 0$ на U. Поэтому, $\xi({}_1z, {}_2z)$ независимо от ${}_2z$, где ξ является соответствующей f функцией из §2.5, следовательно, $g({}_1z, {}_2z)$ также независима от ${}_2z$ и мы можем записать коротко $g(z)$. Для пути γ существует компактное каноническое замкнутое подмножество в $\mathcal{A}_r$: $\quad W \subset Int(U)$, так что $\gamma([0,1]) \subset W$, так как γ спрямляем и $\mathcal{A}_r$ локально компактна. В силу теоремы 2.7 для любой последовательности функций $f_n \in C^1(U, \mathcal{A}_r)$ сходящейся к f в $C^0_b(U, \mathcal{A}_r)$, так что $f_n(z) = (\partial g_n(z)/\partial z).1$ с $g_n(z) \in C^2(U, \mathcal{A}_r)$ и удовлетворяющей условиям §2.5, так как ξ независимо от ${}_2z$, а каждая последовательность путей $\gamma_n : [0,1] \to U$ C^3-непрерывно дифференцируема и сходится к γ относительно полной вариации $V(\gamma - \gamma_n)$, то существует $\lim_n \int_{\gamma_n} f_n(z, \tilde{z})dz = \int_\gamma f(z)dz$. Поэтому, достаточно рассмотреть случай $f \in C^1(U, \mathcal{A}_r)$, так что $f(z) = (\partial g(z)/\partial z).1$ on U, and continuously differentiable γ, где $g \in C^2(U, \mathcal{A}_r)$ удовлетворяет условиям §2.5. Обозначим интеграл $\int_\gamma f(z)dz$ by Q. Можно записать этот интеграл в виде $Q = \int_0^1 (\partial g(z)/\partial z).\gamma'(t)dt$. Запишем f в виде:

$f = \sum_{s \in \mathbf{b}} f_s s = \sum_{\beta=0}^{2^{r-1}-1} f_{2\beta, 2\beta+1}$, где $f_{\beta,\nu} := f_{i_\beta} i_\beta + f_{i_\nu} i_\nu$, $f_s \in \mathbf{R}$ для любого $s \in \mathbf{b}$. Поэтому,

$d\gamma(t) = \gamma'(t)dt = \sum_{j=0}^{2^{r-1}-1} \gamma'_{2j,2j+1}(t)dt$. Условие $\gamma(0) = \gamma(1)$ эквивалентно $\gamma_{2j,2j+1}(0) = \gamma_{2j,2j+1}(1)$ для любого $j = 0, 1, ..., 2^{r-1} - 1$. Мы имеем $\gamma_{\beta,\nu} \subset \pi_{\beta,\nu,t}(U)$ для любого $\beta \ne \nu \in \mathbf{b}$. Умножение в $\mathcal{A}_r$ дистрибутивно, следовательно,

$(\partial g(z)/\partial z).(d\gamma(t)) = \sum_{k=0}^{2^{r-1}-1} (\partial g(z)/\partial z).(d\gamma_{2k,2k+1}(t))$.

В силу теоремы Гуревича об изоморфизме (см. §7.5.4 [31]) $H_q(U, x) = 0$ для любого $x \in U$ и любого $q < 2^r$, следовательно, $H^l(U, x) = 0$ для любого $l \geq 1$.

Если $f : Y \to V$ непрерывно, то $r \circ f : Y \to \Omega$ непрерывно, если f отображает на V, тогда $r \circ f$ отображает на Ω, где $r : V \to \Omega$ – это ретракция, V, Y и Ω – это топологические пространства. Топологическое пространство U метризуемо, следовательно, для любого замкнутого подмножества Ω in U существует каноническое замкнутое подмножество $V \subset U$, так что $V \supset \Omega$ и Ω является ретракцией V, то есть, существует непрерывное отображение $r : V \to \Omega$, $r(z) = z$ для любого $z \in \Omega$ (см. [9] и теорему 7.1 [16]). Поэтому, если V является $(2^r - 1)$-связным каноническим замкнутым подмножеством в U и Ω является двумерным C^0-многообразием, так что Ω является ретракцией V, тогда Ω просто связна, так как каждое непрерывное отображение $f : S^k \to \Omega$ с $k \leq 1$ имеет непрерывное продолжение $f : \mathbf{R^{k+1}} \to V$ и $r \circ f : \mathbf{R^{k+1}} \to \Omega$ является также непрерывным продолжением f с S^k на $\mathbf{R^{k+1}}$.

Из $(2^r - 1)$-связности U следует, что существует двумерное действительное дифференцируемое многообразие Ω содержащееся в U, так что $\partial\Omega = \gamma$. Это можно вывести из рассмотрения разбиений Z_n множества U посредством $S^n_{l,k} \cap U$ и беря $n \to \infty$, где $S^n_{l,k}$ – это параллелепипеды в $\mathcal{A}_r$ с ребрами длины n^{-1}, l, k и $n \in \mathbf{N}$, двумерные грани ${}_1S^n_l$ и 2^{r-1}-мерные грани ${}_2S^n_k$ для $S^n_{l,k} = {}_1S^n_l \times {}_2S^n_k$ параллельны $\mathbf{C}_{s,p}$ или $\mathcal{A}_{r,s,p}$ с $s = i_{2k}$ и $p = i_{2k+1}$ соответственно, так что существует последовательность путей γ_n сходящаяся к γ относительно $| * |_{\mathcal{A}_r}$ и последовательность (непрерывных) двумерных C^0-многообразий Ω^n с $\partial\Omega^n = \gamma^n$, $\Omega^n \subset \bigcup_{l,k}[(\partial\, {}_1S^n_l) \times (\partial\, {}_2S^n_k)]$. Выберем Ω ориентируемыми и класса C^3 как Римановы многообразия, так что взятие их проекции на $\mathbf{C}_{s,p}$ дает соответствующие пути $\gamma_{2k,2k+1}$ и области $\Omega_{s,p}$ в $\mathbf{C}_{s,p}$ удовлетворяющие условиям отмеченным выше в данном доказательстве.

К появляющимся интегралам можно применить классическую (обобщенную) теорему Стокса (см. теорему V.1.1 [36]):

$\int_{\Omega_{2k,2k+1}} \eta(v) = \int_0^1 (\partial g(z)/\partial z).\gamma'_{2k,2k+1}(t)dt$,

где $\Omega_{2k,2k+1}$ – это просто связная область в $\mathbf{C}_{i_{2k}, i_{2k+1}}$, так что $\partial\Omega_{2k,2k+1} = \gamma_{2k,2k+1}$ для любого k, $\eta(v) = d[(\partial g(z)/\partial z).dv]$, $v = z_{2k,2k+1} \in \Omega_{2k,2k+1} \subset \mathbf{C}_{i_{2k}, i_{2k+1}}$. Функция g принадлежит $C^2(U,\mathcal{A}_r)$, следовательно, $(D^2g(z)).(h_1,h_2) := (D^2g(z)).(h_2,h_1)$ для любых h_1 и h_2 в $\mathcal{A}_r$. Поэтому, в силу условий §2.5 наложенных на g выполняются равенства

$\int_{\Omega_{2k,2k+1}} \eta(v) = \int_{\Omega_{2k,2k+1}} d[(\partial g(z)/\partial z).dv] = \int_{\Omega_{2k,2k+1}} d^2q(z_{2k,2k+1}) = 0$
для любого $k=0,1,...,2^{r-1}-1$, так как
$(\partial g(z)/\partial z).\gamma'_{2k,2k+1} = (\partial g(z)/\partial z).(s(\gamma'_{2k}+\gamma'_{2k+1}s^*p))$, так что
$(\partial g(z)/\partial z).\gamma'_{2k,2k+1} = (\partial g(z)/\partial w_s).\gamma'_{2k} + (\partial g(z)/\partial w_p).\gamma'_{2k+1}$
$= (\partial g(z)/\partial z_{2k,2k+1}).(\gamma'_{2k}+\gamma'_{2k+1}s^*p)$,
$\partial y(z)/\partial w_s = (\partial y(z)/\partial z_{2k,2k+1} + \partial y(z)/\partial \bar{z}_{2k,2k+1}).1$ and
$\partial y(z)/\partial w_p = (\partial y(z)/\partial z_{2k,2k+1} - \partial y(z)/\partial \bar{z}_{2k,2k+1}).(s^*p)$ для любой z-супердифференцируемой функции y на U и $\partial g(z)/\partial \bar{z}_{2k,2k+1} = 0$, где q соответствует $g|_{\Omega_{2k,2k+1}}$, $s=i_{2k}$, $p=i_{2k+1}$.

2.12. Определения. Непрерывная функция на открытой области U в $\mathcal{A}_r$ такой, что $\emptyset \ne U$ и $\int_\gamma f dz = 0$ для любой спрямляемой петли (то есть, замкнутого пути) γ в U, тогда f называется $\mathcal{A}_r$-интегрально голоморфной на U (см. §2.5).

Если f является z-супердифференцируемой функцией на U, тогда она называется $\mathcal{A}_r$-голоморфной на U.

2.13. Следствие. *Пусть f является $\mathcal{A}_r$-голоморфной функцией на открытой (2^r-1)-связной области U в $\mathcal{A}_r$, так что $\pi_{s,p,t}(U)$ просто связна в $\mathbf{C}_{s,p}$ для любых $t\in\mathcal{A}_{r,s,p}$ и $u\in\mathbf{C}_{s,p}$, $s:=i_{2k}$, $p:=i_{2k+1}$ для которых существует $z=t+u\in U$, тогда f является $\mathcal{A}_r$-интегрально голоморфной.*

Это немедленно следует из теоремы 2.11.

2.14. Определение. Пусть U – это подмножество в $\mathcal{A}_r$, и $\gamma_0:[0,1]\to\mathcal{A}_r$, и $\gamma_1:[0,1]\to\mathcal{A}_r$ – два непрерывных пути. Тогда γ_0 и γ_1 называются гомотопными относительно U, если существует непрерывное отображение $\gamma:[0,1]^2\to U$ такое, что $\gamma([0,1],[0,1])\subset U$, и $\gamma(t,0)=\gamma_0(t)$, и $\gamma(t,1)=\gamma_1(t)$ для любого $t\in[0,1]$.

2.15. Теорема. *Пусть W – открытое подмножество в $\mathcal{A}_r$, $r\ge 3$, и f является $\mathcal{A}_r$-голоморфной функцией на W со значениями в $\mathcal{A}_r$. Предположим, что существуют два спрямляемых пути γ_0 и γ_1 в W с общими начальной и конечной точками ($\gamma_0(0)=\gamma_1(0)$ и $\gamma_0(1)=\gamma_1(1)$) гомотопные относительно U, где U является (2^r-1)-связным подмножеством в W, так что $\pi_{s,p,t}(U)$ просто связно в $\mathbf{C}$ для любых $t\in\mathcal{A}_{r,s,p}$ и $u\in\mathbf{C}_{s,p}$, $s=i_{2k}$, $p=i_{2k+1}$, $k=0,1,...,2^{r-1}-1$, для которых существует $z=u+t\in U$. Тогда $\int_{\gamma_0} f dz = \int_{\gamma_1} f dz$.*

Доказательство. Гомотопия γ_0 с γ_1 относительно U влечет гомотопию $(\gamma_0)_{2j,2j+1}$ с $(\gamma_1)_{2j,2j+1}$ относительно $\pi_{2j,2j+1,t}(U)$ в $\mathbf{C}_{s,p}$ с $s=i_{2j}$ и $p=i_{2j+1}$ для любого $j=0,1,2^{r-1}-1$, для любого $t\in\mathcal{A}_{r,s,p}$ и $u\in\mathbf{C}_{s,p}$, для которого существует $z=t+u\in U$. Рассмотрим путь ζ такой, что $\zeta(t)=\gamma_0(2t)$ для любого $0\le t\le 1/2$ и $\zeta(t)=\gamma_1(2-2t)$ для любого $1/2\le t\le 1$. Тогда ζ является замкнутым путем содержащимся в U. В силу теоремы 2.11 $\int_\zeta f(z)dz=0$. С другой стороны, $\int_\zeta f(z)dz = \int_{\gamma_0} f(z)dz - \int_{\gamma_1} f(z)dz$, следовательно, $\int_{\gamma_0} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz$.

2.15.1. Следствие. *Пусть $f\in C^1$ удовлетворяет условиям теоремы 2.15. Тогда для любого $z\in U$ существует $(\partial(\int_\gamma f(\zeta)d\zeta)/\partial z).h = \hat{f}(z).h$ для любого $h\in\mathcal{A}_r$, где $\gamma(0)=z_0$, $\gamma(1)=z$, z_0 – это отмеченная точка в U.*

2.16. Теорема. *Пусть f является $\mathcal{A}_r$ локально z-аналитической функцией на открытой области U в $\mathcal{A}_r^n$, тогда f является $\mathcal{A}_r$-голоморфной на U.*

Доказательство. Из определения супердифференциала мы получим $(Dz^n).h = \sum_{k=0}^{n-1} z^k h z^{n-k-1}$. Используя формулу супердифференциала для произведения функций, из §2.7 мы получим, что каждая f вида $(2.5.i, ii)$ супердифференцируема (по z), когда $n_0 \geq 0$ в $(2.5.ii)$. Используя сходимость по норме $\| * \|_\omega$ степенного ряда по z для данной $f \in C^\omega(U, \mathcal{A}_r)$, мы получим для любого $a \in U$, что существует её окрестность W, где f является $\mathcal{A}_r$-голоморфной, следовательно, f является $\mathcal{A}_r$-голоморфной на U.

2.17. Замечание. В следующем параграфе показано, что октонион-голоморфная функция бесконечно дифференцируема; более того, при подходящих условиях там доказана эквивалентность между свойствами октонионной голоморфности, октонионной интегральной голоморфности и октонионной локальной z-аналитичности. Интеграл (2.5.4) может быть обобщен для непрерывной функции $q : U \to \mathcal{A}_r$, так что $V(q \circ \gamma) < \infty$. Заменяя Δz_k на $q(z_{k+1}) - q(z_k) =: \Delta q_k$ в формуле (2.5.5), мы получим

$$(1) \quad \int_\gamma f(z, \tilde{z}) dq(z) := \lim_P I(f, q \circ \gamma; P), \text{ где}$$

$$(2) \quad I(f, q \circ \gamma; P) = \sum_{k=0}^{q-1} \hat{f}(z_{k+1}, \tilde{z}_{k+1}).(\Delta q_k).$$

В частности, если $\gamma \in C^1$ и q является $\mathcal{A}_r$-голоморфной на U, а также $f(z, \tilde{z}) = (\partial g(z, \tilde{z})/\partial z).1$, где $g \in C^1(U, \mathcal{A}_r)$, тогда

$$\int_\gamma f(z, \tilde{z}) dq(z) = \int_0^1 (\partial g(z, \tilde{z})/\partial z).((\partial_z q(z)|_{z=\gamma(s)}).\gamma'(s)) ds$$

и $V(\gamma) \leq \int_0^1 |\gamma'(s)| ds$.

Пусть $f : U \to \mathcal{A}_r$ является $\mathcal{A}_r$-голоморфной функцией на U, где U – это открытое подмножество в $\mathcal{A}_r^n$. Если существует $\mathcal{A}_r$-голоморфная функция $g : U \to \mathcal{A}_r$ такая, что $g'(z).1 = f(z)$ для любого $z \in U$, то g называется примитивной функцией для f.

2.18. Предложение. *Пусть U – это открытое связное подмножество $\mathcal{A}_m^n$, $m \geq 3$, а g – это примитивная функция для f на U, тогда множество примитивных функций для f таково: $\{h : h = g + C, C = const \in \mathcal{A}_m\}$.*

Доказательство. В силу леммы 2.5.1 для любых двух примитивных g_1 и g_2 для f и для любого $z \in U$ существует шар $B \subset U$, $z \in U$, так что $(g_1 - g_2)|_U = const \in \mathcal{A}_m$ (см. §2.7). Предположим, что $h'(z) = 0$ для любого $z \in U$, тогда рассмотрим $q(s) := h((1 - s)a + sz)$ для любого $s \in [0, r]$, где a – это отмеченная точка в U и $B(a, r, \mathcal{A}_m)$ – это шар, содержащийся в U, $r > 0$, $z \in B(a, r, \mathcal{A}_m)$. Тогда q корректно определена на $q(0) = q(1)$. Поэтому, множество $V := \{z \in U : h(z) = h(a)\}$ открыто в U, так как с каждой точкой a она содержит окрестность. С другой стороны, она замкнута в силу непрерывности h, следовательно, $V = U$, так как U связна, следовательно, $h = const$ на U.

3. Мероморфные функции и их вычеты.

Сначала мы определим и опишем экспоненциальную и логарифмическую функции октонионных переменных и тогда применим их к исследованию октонионных вычетов. Более того, эти изучения выполнены также для переменных из алгебр Кэли-Диксона $\mathcal{A}_r$ для любого $r \geq 4$.

3.1. Замечание и определение. Для переменной $z \in \mathcal{A}_r$ с $r \geq 3$ положим

$$(3.1.) \quad \exp(z) := \sum_{n=0}^\infty z^n/n!.$$

В силу замечания 2.1 z^n и, следовательно, $\exp(z)$ корректно определены, так как действительные числа коммутируют с каждым элементом из $\mathcal{A}_r$, $n! \in \mathbf{N} \subset \mathbf{R}$. Если $|z| \le R < \infty$, то ряд (3.1) сходится, так как $|exp(z)| \le \sum_{n=0}^{\infty} |z^n/n!| \le \exp(R) < \infty$. Поэтому, $\exp : \mathcal{A}_r \to \mathcal{A}_r$. Ограничение exp на каждое подмножество $\mathbf{Q}_s := \{z : z \in \mathcal{A}_r, z = a + bs,\ a, b \in \mathbf{R}\}$ коммутативно, где $s \in \hat{b}$, $\hat{b}_r := \mathbf{b}_r \setminus \{1\}$, $\mathbf{b} := \mathbf{b}_r$, $\hat{b} := \hat{b}_r$, но в общем два элемента z_1 и $z_2 \in \mathcal{A}_r$ не коммутируют и функция $\exp(z_1 + z_2)$ на $\mathcal{A}_r^2$ не совпадает с $\exp(z_1)\exp(z_2)$.

3.2. Предложение. *Пусть $z \in \mathcal{A}_r$, $r \ge 3$, записано в виде $z = v + M$, где $v \in \mathbf{R}$, $M \in \mathcal{I}_r$, $\mathcal{I}_r := \{\eta \in \mathcal{A}_r : Re(\eta) = 0\}$, тогда*

$$(3.2) \quad \exp(z) = \exp(v)\exp(M), \ \textit{где}$$

$$(3.3) \quad \exp(M) = (\cos|M|) + [(\sin|M|)/|M|]M$$

для $M \ne 0$ и $\exp(0) = 1$.

Доказательство. Рассмотрим $M \in \mathcal{I}_r$ и запишем его в виде $M = a + bl$, где $l = i_{2^{r-1}}$ – это элемент, возникающий в результате процедуры удвоения $\mathcal{A}_r$ из $\mathcal{A}_{r-1}$, $a, b \in \mathcal{A}_{r-1}$, $Re(a) = 0$. Тогда
$M^2 = a^2 + a(bl) + a^*(bl) - (bl)(bl)^* = -(|a|^2 + |b|^2)$,
так как $a^* = -a$, $(bl)(bl)^* = (bl)^*(bl) = (lb^*)(bl^{-1}) = b^*b = bb^*$, следовательно,
$M^{2n} = (-|M|^2)^n$, $M^{2n+1} = (-|M|^2)^n M$ для любого $1 \le n \in \mathbf{Z}$. Поэтому,

$$\exp(M) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-|M|^2)^n/(2n)! + \sum_{n=0}^{\infty}(-|M|^2)^n M/(2n+1)!$$

$$= (\cos|M|) + [(\sin|M|)/|M|]M$$

для любого $M \ne 0$, $\exp(0) = 1$. Поскольку $\lim_{0 \ne \phi \to 0} \sin(\phi)/\phi = 1$, где $\phi \in \mathbf{R}$, то предел взятый в формуле (3.3) при $|M| \ne 0$ стремящемся к 0 дает частный случай $\exp(0) = 1$. Поскольку $v \in \mathbf{R}$ коммутирует с M, $[v, M] = 0$, то $\exp(v + M) = \exp(v)\exp(M)$.

3.3. Следствие. *Если $z \in \mathcal{A}_r$, $r \ge 3$, записано в виде $z = \sum_{s \in \mathbf{b}} w_s s$ с действительными w_s для любого $s \in \mathbf{b}$, то $|\exp(z)| = \exp(v)$.*

Доказательство. Если $\sum_{s \ne 1} w_s^2 = 0$, то это очевидно. Предположим, что $\sum_{s \ne 1} w_s^2 \ne 0$. В силу формул (3.2, 3.3)

$$(3.4) \quad exp(z) = exp(v)A, \text{ где } A = \cos|M| + [(\sin|M|)/|M|]M$$

так как $A \in \mathcal{A}_r$, тогда $A^* = \cos|M| - [(\sin|M|)/|M|]M$, $M^* = -M$ и неизбежно $|\exp(z)| = \exp(v)$.

3.4. Следствие. *Функция $\exp(z)$ на множестве $\mathcal{I}_r := \{z : z \in \mathcal{A}_r, Re(z) = 0\}$ периодична с $(2^r - 1)$ генераторами периодов $s \in \hat{b}_r$, так что $\exp(z(1 + 2\pi n/|z|)) = \exp(z)$ для любого $0 \ne z \in \mathcal{I}_r$ и любого целого числа n. Если $z \in \mathcal{A}_r$ записано в виде $z = 2\pi s M$, где $M \in \mathcal{I}_r$, $|M| = 1$, то $\exp(z) = 1$ тогда и только тогда, когда $s \in \mathbf{Z}$.*

Доказательство. В силу формул (3.2, 3.3) $\exp(sM) = 1$ для данного $z = sM \in \mathcal{I}_r$ с $|M| = 1$ тогда и только тогда, когда $\cos(s|M|) = 1$ и $\sin(s|M|) = 0$, что эквивалентно $s \in \{2\pi n : n \in \mathbf{Z}\}$, так как $|M| = 1$ согласно гипотезе этого следствие. Частные случаи формулы (3.3) таковы: $w_{s_0} \ne 0$ и $w_s = 0$ для любого $s \ne s_0$ из $\hat{b} := \hat{b}_r$, следовательно, $s \in \hat{b}$ являются $(2^r - 1)$ генераторами для периодов exp.

3.5. Следствие. *Функция* exp *– это эпиморфизм с $\mathcal{I}_r$ на $(2^r - 1)$-мерную единичную сферу $S^{2^r - 1}(0, 1, \mathcal{A}_r) := \{z : z \in \mathcal{A}_r, |z| = 1\}$.*

Доказательство. В силу следствия 3.3 образ $\exp(\mathcal{I}_r)$ содержится в $S^{2^r-1}(0,1,\mathcal{A}_r)$. Сферы $S^{2^r-1}(0,1,\mathcal{A}_r)$ характеризуются условием $\sum_{s\in\mathbf{b}} w_s^2 = 1$ или $w_1^2 + |M_1|^2 = 1$, где $M_1 \in \mathcal{I}_r$. Для доказательства $\exp(\mathcal{I}_r) = S^{2^r-1}(0,1,\mathcal{A}_r)$ достаточно найти $z = v + M$, где $v \in \mathbf{R}$, $M \in \mathcal{I}_r$, так что $w_1 = \cos|M|$, $M_1 = [(\sin|M|)/|M|]M$. Для этого возьмем $|M| = \arccos w_1 \in [0,\pi]$, так как $w_1 \in [-1,1]$, а при $|w_1| \ne 1$ положим $M = M_1(1-w_1^2)^{-1/2}\arccos w_1$. В частности, для $w_1 = 1$ возьмем $M = 0$; для $w_1 = -1$ возьмем $M = \pi q$, где $q \in \hat{b}$.

3.6. Следствие. *Каждый элемент алгебры Кэли-Диксона $\mathcal{A}_r$, $r \ge 3$, имеет полярное разложение*

$$(3.5)\qquad z = \rho\exp(2\pi(\sum_{s\in\hat{b}}\phi_s s)),$$

где $\phi_s \in [-1,1]$ для любого $s \in \hat{b}$, $\sum_{s\in\hat{b}}\phi_s^2 = 1$, $\rho := |z|$.

Доказательство. Это следует из формул $(3.2, 3.3)$ и следствия 3.5.

3.6.1. Определение. Пусть $\mathcal{A}_\infty$ обозначает семейство состоящее из всех элементов $z = \sum_{s\in\mathbf{b}} w_s s$ таких, что $\tilde{z} := w_1 - \sum_{s\in\hat{b}} w_s s$, $z\tilde{z} =: |z|^2 = \sum_{s\in\mathbf{b}} w_s^2 < \infty$, где $\mathbf{b} := \mathbf{b}_\infty := \bigcup_{r=2}^\infty \mathbf{b}_r = \{1, i_1, i_2, ..., i_{2^r}, ...\}$, $\hat{b} := \mathbf{b}\setminus\{1\}$, $w_s \in \mathbf{R}$ для любого s.

3.6.2. Теорема. *Семейство $\mathcal{A}_\infty$ имеет структуру нормированной ассоциативной со степенями лево и право дистрибутивной алгебры над $\mathbf{R}$ с внешней инволюцией порядка два.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{I}_\infty := \{z \in \mathcal{A}_\infty : Re(z) = 0\}$. Тогда каждое $M \in \mathcal{I}_\infty$ является пределом последовательности $M_r \in \mathcal{I}_r$, также $|z| =: \rho$ – это предел последовательности $\rho_r := |z_r|$, где $z_r \in \mathcal{A}_r$. Поэтому, $z = \lim_{r\to\infty} z_r = \lim_{r\to\infty}\rho_r\{\cos|M_r| + [(\sin|M_r|)/|M_r|]M_r\} = \rho\{\cos|M| + [(\sin|M|)/|M|]M\} = \rho\exp(M)$. Использование полярных координат (ρ, M) доказывает ассоциативность со степенями. В самом деле, существует естественная проекция P_r из $\mathcal{A}_\infty$ на $\mathcal{A}_r$ для любого $r \ge 2$ даваемая формулами: $M_r := \{\sum_{s\in\hat{b}_r} m_s s\}|M|[\sum_{s\in\hat{b}_r} m_s^2]^{-1/2}$ для $\sum_{s\in\hat{b}_r} m_s^2 \ne 0$ и $M_r = 0$ в противном случае для любого $M = \sum_{s\in\hat{b}} m_s s \in \mathcal{I}_\infty$, где $m_s \in \mathbf{R}$ для любого $s \in \hat{b}$; тогда $z_r := P_r(z) = \rho_r\{\cos|M_r| + [(\sin|M_r|)/|M_r|]M_r\}$, где $\rho_r = (\sum_{s\in\mathbf{b}_r} w_s^2)^{1/2}$, $z = \sum_{s\in\mathbf{b}} w_s s$, $\lim_{0\ne\phi\to 0}\sin(\phi)/\phi = 1$. Итак, $\lim_{r\to\infty} z_r = z$ относительно нормы $|z|$ в $\mathcal{A}_\infty$. Поэтому, для любого $n \in \mathbf{Z}$ существует $\lim_{r\to\infty}(\rho_r)^n\exp(nM_r) = \rho^n\exp(nM) = z^n$, следовательно, $\mathcal{A}_\infty$ ассоциативна со степенями, так как каждая $\mathcal{A}_r$ ассоциативна со степенями, а cos и sin – это непрерывные функции. Очевидно, $\mathcal{A}_\infty$ является $\mathbf{R}$-линейным пространством. Непрерывность умножения относительно нормы $|z|$ следует из неравенств $|\xi_r\eta_r - \psi_r\zeta_r| \le |\xi_r\eta_r - \xi_r\zeta_r| + |\xi_r\zeta_r - \psi_r\zeta_r| \le |\xi||\eta - \zeta| + |\xi - \psi||\zeta|$ и взятия предела при r стремящемся к бесконечности, так как $|\xi_r| \le |\xi|$ и $|\xi_r\eta_r| \le |\xi_r||\eta_r|$ для любого $\xi_r, \eta_r \in \mathcal{A}_r$ и для любого $r \in \mathbf{N}$. Левая и правая дистрибутивность $(\xi+\psi)\zeta = \xi\zeta + \psi\zeta$ и $\zeta(\xi+\psi) = \zeta\xi + \zeta\psi$ следует в результате взятия предела при r стремящемся к бесконечности и такой дистрибутивности в каждой $\mathcal{A}_r$. Инволюция $z \mapsto \tilde{z} =: z^*$ в $\mathcal{A}_r$ имеет порядок два, так как $(z^*)^* = z$. Она является внешней, так как не существует никакого конечного алгебраического соотношения с постоянными в $\mathcal{A}_\infty$ преобразующим переменную $z \in \mathcal{A}_\infty$ в z^*. Соотношение $z^* = \lim_{r\to\infty}(2^r-2)^{-1}\{-z_r + \sum_{s\in\hat{b}_r} s(z_r s^*)\} = \lim_{r\to\infty}(2^r-2)^{-1}\{-z + \sum_{s\in\hat{b}_r} s(zs^*)\}$ имеет бесконечный порядок. Соотношения типа $z_r^* = l_{r+1}(z_r l_{r+1}^*)$ в $\mathcal{A}_r$ используют внешний автоморфизм с $l_{r+1} := i_{2^r} \in \mathcal{A}_{r+1}\setminus\mathcal{A}_r$, более того, последнее соотношение не выполняется для z^* и $z \in \mathcal{A}_\infty$ вместо $z_r \in \mathcal{A}_r$.

Никакое конечное множество ненулевых постоянных $a_1, ..., a_n \in \mathcal{A}_\infty$ не может дать автоморфизм $z \mapsto \tilde{z}$ в $\mathcal{A}_\infty$. Для доказательства этого рассмотрим $\mathbf{R}$-подалгебру $\Upsilon_{M_1,...,M_n}$ в $\mathcal{A}_\infty$ порожденную $\{M_1, ..., M_n\}$, где $a_j = |a_j|e^{M_j}$, $M_j \in \mathcal{I}_\infty$. Поскольку

$a_1a_1^* = |a_1|^2 > 0$, то $\mathbf{R}|a_1|^2 = \mathbf{R} \subset \Upsilon_{M_1,...,M_n}$, следовательно, $1 \in \Upsilon_{M_1,...,M_n}$. Если $\Upsilon_{M_1,...,M_n} = \mathbf{R}$, тогда это конечно не может дать автоморфизм $z \mapsto \tilde{z}$ в $\mathcal{A}_\infty$. Рассмотрим $\Upsilon_{M_1,...,M_n} \ne \mathbf{R}$, без ограничения общности предположим, что $a_1 \notin \mathbf{R}$. Имеется скалярное произведение $Re(z\tilde{y})$ в $\mathcal{A}_\infty$ для любых $z, y \in \mathcal{A}_\infty$. Пусть b_1 – это проекция a_1 на подпространство в $\mathcal{A}_\infty$ ортогональное $\mathbf{R}1$, тогда по нашему предположению $b_1 \ne 0$ и $b_1 \in \mathcal{I}_\infty$. Поэтому, $b_1^2/|b_1|^2 = -1$, следовательно, Υ_{M_1} изоморфно $\mathbf{C}$. Конечно, никакая $\mathcal{A}_r$, $r \in \mathbf{N}$, не может дать автоморфизм $z \mapsto \tilde{z}$ или $\mathcal{A}_\infty$. Поэтому, без ограничения общности предположим, что $\Upsilon_{M_1,...,M_n}$ не изоморфно $\mathbf{C}$ и $a_2 \notin \mathbf{C}$. Если $M, N \in \mathcal{I}_r$ и $Re(MN^*) = 0$, тогда $MN \in \mathcal{I}_r$ и, следовательно, $(MN)^* = NM = -MN$, так как $A^* = -A$ для любого $A \in \mathcal{I}_r$. Пусть b_2 – это проекция M_2 в подпостранство в $\mathcal{A}_\infty$ ортогональное Υ_{M_1} относительно скалярного произведения $Re(z\tilde{y})$. Тогда $b_2 \ne 0$ по нашему предположению и $b_2 \in \mathcal{I}_\infty$, $b_2^2/|b_2|^2 = -1$, следовательно, после процедуры удвоения с $b_2/|b_2|$ мы получим, что Υ_{M_1,M_2} – это подалгебра в $\mathcal{A}_4$. Тогда продолжим по индукции, предположим, что $\Upsilon_{M_1,...,M_k}$ – это подалгебра в $\mathcal{A}_{2^k}$, $k \in \mathbf{N}$, $k < n$. Поскольку $\mathcal{A}_{2^k}$ не может дать автоморфизм $z \mapsto \tilde{z}$ в $\mathcal{A}_\infty$, то предположим без ограничения общности, что $a_{k+1} \notin \Upsilon_{M_1,...,M_k}$ и рассмотрим ортогональную проекцию b_{k+1} вектора M_{k+1} в подпространство $\mathcal{A}_\infty$ ортогональное $\Upsilon_{M_1,...,M_k}$ относительно скалярного произведения $Re(z\tilde{y})$. Тогда $b_{k+1} \ne 0$ и $b_{k+1} \in \mathcal{I}_\infty$, $b_{k+1}^2/|b_{k+1}|^2 = -1$. Итак, процедура удвоения с $b_{k+1}/|b_{k+1}|$ дает алгебру $\Upsilon_{M_1,...,M_{k+1}}$, которая является подалгеброй в $\mathcal{A}_{2^{k+1}}$, и т.д. В результате $\Upsilon_{M_1,...,M_n}$ – это подалгебра в $\mathcal{A}_{2^n}$ и она не может дать автоморфизм $z \mapsto \tilde{z}$ алгебры $\mathcal{A}_\infty$, где $a_1, ..., a_n \in \Upsilon_{M_1,...,M_n}$ в силу формулы полярного разложения (см. (3.2,3)) чисел Кэли-Диксона.

3.6.3. Замечание и определение. Пусть Λ обозначает хаусдорфово топологическое пространство с неотрицательной мерой μ на σ-алгебре борелевских подмножеств, так что для любой точки $x \in \Lambda$ существует открытая окрестность $U \ni x$ с $0 < \mu(U) < \infty$. Рассмотрим множество генераторов вещественной алгебры $\{i_x : x \in \Lambda\}$ такое, что $i_xi_y = -i_yi_x$ для любых $x \ne y \in \Lambda \setminus \{0\}$ и $i_x^2 = -1$ для любого $x \in \Lambda \setminus \{0\}$. К этому множеству присоединим единицу $1 =: i_0$ так, что $ai_x = i_xa$ для любых $a \in \mathbf{R}$ и $x \in \Lambda$. В случае конечного множества Λ алгебра Кэли-Диксона порожденная такими генераторами изоморфна $\mathcal{A}_{N-1}$, где $N = card(\Lambda)$ – мощность множества Λ. Для любого бесконечного счетного подмножества генераторов $\{i_0, i_{x_j} : j \in \mathbf{N}, x_j \in \Lambda\}$ конструкция выше из §3.6.1 дает алгебру изоморфную $\mathcal{A}_\infty$. Поэтому рассмотрим случай $card(\Lambda) > \aleph_0$. Будем считать, что Λ линейно упорядочена и это линейное упорядочение дает интервалы $(a, b) := \{x \in \Lambda : a < x < b\}$ являющиеся μ-измеримыми, например, $\Lambda = \mathbf{R}^n \times (\mathbf{R}/\mathbf{Z})^m$ имеет естественное линейное упорядочение индуцированное линейным упорядочением из $\mathbf{R}$ и лексикографическим упорядочением в произведении, где $n, m \in \mathbf{N}$.

Тогда рассмотрим конечное разбиение Λ в дизъюнктное объединение $\Lambda = \bigcup_{j=1}^p \Lambda_j$, где $x < y$ для любых $x \in \Lambda_j$ и $y \in \Lambda_l$ при $j < l \le p$, $p \in \mathbf{N}$. Семейство таких разбиений обозначим $\mathcal{Z}$. Пусть $T \in \mathcal{Z}$, $x_j \in A_j$ – отмеченные точки. Тогда существует простая функция f_T такая, что $f_T(x) = C_ji_{x_j}$ для любого $x \in A_j$, где $C_j \in \mathbf{R}$. Рассмотрим норму $\|f_T\|_\Lambda^2 := \int_\Lambda f_T(x)\tilde{f}_T(x)\mu(dx)$, где $\tilde{f}_T(x) := C_0\chi_{A_0}(x)\delta_{0,x_0} - \sum_{x_j \ne 0} C_j\chi_{A_j}(x)i_{x_j}$, $\chi_A(x) = 1$ при $x \in A$, $\chi_A(x) = 0$ при $x \notin A$, $\delta_{x,y} = 1$ при $x = y$, $\delta_{x,y} = 0$ при $x \ne y$. Каждой f_T сопоставим элемент $z_{f_T} := \sum_j C_ji_{x_j}\mu(A_j)$. Алгебру являющуюся пополнением по $\| * \|_\Lambda$ минимальной алгебры, порожденной семейством элементов z_{f_T} для f_T из семейства $\mathcal{F}$ всех простых функций и их всевозможных упорядоченных конечных произведений обозначим $\mathcal{A}_\Lambda$.

3.6.4. Теорема. *Множество* $\mathcal{A}_\Lambda$ *является алгеброй над* $\mathbf{R}$ *полной относительно нормы* $\| * \|_\Lambda$ *с центром* $Z(\mathcal{A}_\Lambda) = \mathbf{R}$, *причем имеются вложения* $\mathcal{A}_\infty \hookrightarrow \mathcal{A}_\Lambda$ *при* $card(\Lambda) \geq \aleph_0$. *Множество генераторов алгебры* $\mathcal{A}_\Lambda$ *имеет мощность* $card(\Lambda)$ *при* $card(\Lambda) \geq card(\mathbf{R})$. *Существует функция* $\overrightarrow{\exp}(\int_\Lambda f(x)\mu(dx))$ *упорядоченного интегрального произведения из* $\mathcal{A}_\Lambda$ *на* $\mathcal{A}_\Lambda$.

Доказательство. При $card(\Lambda) \leq \aleph_0$ алгебра $\mathcal{A}_\Lambda$ изоморфна $\mathcal{A}_{N-1}$ или $\mathcal{A}_\infty$. Поэтому остается рассмотреть случай $card(\Lambda) > \aleph_0$. Для любой $f_T \in \mathcal{F}$ можно задать упорядоченное интегральное экспоненциальное произведение
$\overrightarrow{\exp}(\int_\Lambda f_T(x)\mu(dx)) := \{\exp(C_1\mu(A_1)\pi i_{x_1}/2)...\exp(C_p\mu(A_p)\pi i_{x_p}/2)\}_{q(p)}$
с $q(p)$ соответствующим левой расстановке скобок. Поэтому существуют вложения $\mathcal{A}_\infty$ в $\mathcal{A}_\Lambda$. Тогда очевидно $Z(\mathcal{A}_\Lambda) = \mathbf{R}$. Пополнение семейства $\mathcal{F}$ содержит все функции вида $f(x) = \sum_j f_j(x)\chi_{A_j}(x)i_{x_j}$, где $\{A_j : j \in \mathbf{N}\}$ является дизъюнктным объединением Λ, каждое A_j μ-измеримо, $f_j \in L^2(\Lambda, \mu, \mathbf{R})$ и $\lim_{n\to\infty}\sum_{j>n}\|f_j(x)\chi_{A_j}(x)\|^2_{L^2(\Lambda,\mu,\mathbf{R})} = 0$. Поскольку $\exp(M) = \cos(|M|) + M\sin(|M|)/|M|$ для любого $M \in \mathcal{A}_\infty$, а $|\exp(M) - 1| \leq \exp(|M|) - 1$, то для любой $f \in \mathcal{A}_\Lambda$ существует $\lim_{\mathcal{F}\ni f_T\to f}\overrightarrow{\exp}(\ \int_\Lambda f_T(x)\mu(dx)) =: \overrightarrow{\exp}(\int_\Lambda f(x)\mu(dx))$ относительно $\| * \|_\Lambda$. Поскольку $\exp(\pi i_x/2) = i_x$ для любого $x \in \Lambda \setminus \{0\}$, то семейство всех элементов вида $\overrightarrow{\exp}(\int_\Lambda f(x)\mu(dx))$, $f \in \mathcal{F}$ содержит все генераторы вложенной подалгебры $\mathcal{A}_\infty$, порожденной счетным подсемейством $\{i_{x_j} : j \in \mathbf{N}\}$. Пополнение $\tilde{\mathcal{F}}$ семейства $\mathcal{F}$ по норме $\|*\|_\Lambda$ является бесконечномерным линейным подпространством над $\mathbf{R}$ в $\mathcal{A}_\Lambda$. Всевозможные упорядоченные конечные произведения элементов из $\tilde{\mathcal{F}}$ и пополнение их $\mathbf{R}$ линейной оболочки по $\|*\|_\Lambda$ дает $\mathcal{A}_\Lambda$. Тогда для любого элемента из $\mathcal{A}_\Lambda$ существует представление в виде упорядоченного интегрального экспоненциального произведения. Поскольку $\mathcal{A}_\Lambda$ является алгеброй над $\mathbf{R}$ и $card(\Lambda)^{\aleph_0} = card(\Lambda)$, то семейство генераторов алгебры $\mathcal{A}_\Lambda$ имеет мощность $card(\Lambda)$.

3.6.5. Замечание. Из теорем 3.6.2, 4 следует, что $\mathcal{A}_\Lambda$ при $card(\Lambda) > \aleph_0$ вместе с $\mathbf{C} = \mathcal{A}_1$ – это два крайних случая, где сопряжение $z \to z^*$ является внешним автоморфизмом, хотя поле комплексных чисел $\mathbf{C}$ легче использовать благодаря его коммутативности и ассоциативности, чем алгебру $\mathcal{A}_\Lambda$ при $card(\Lambda) \geq \aleph_0$, которая не является ни коммутативной, ни ассоциативной. В силу определения 3.6.1 и теорем 3.6.2, 4 предыдущие результаты можно перенести со случая $\mathcal{A}_r$ с $r \geq 4$ на $\mathcal{A}_\Lambda$. Определения $2.1 - 2.2$ переносятся на $\mathcal{A}_\infty$, более того, в силу алгебраической независимости z и z^* в $\mathcal{A}_\Lambda$ при $card(\Lambda) \geq \aleph_0$, мы получим, что z и z^* являются автоматически независимыми переменными, и имеются проекции $P_r : \mathcal{A}_\Lambda \to \mathcal{A}_r$ для любого $r \geq 2$ оправдывающие определения $C^\omega_{z,\tilde{z}}(U, \mathcal{A}_r)$ и $C^n_{z,\tilde{z}}(U, \mathcal{A}_r)$, также это оправдывает аксиомы супердифференцирования в §2.2. Очевидно, предложения 2.2.1, 2.3, 2.6 и следствие 2.4, лемма 2.5.1 выполняются в случае $\mathcal{A}_\Lambda$ с $\mathbf{b} = \mathbf{b}_\Lambda$ вместо $\mathbf{b} = \mathbf{b}_r$. Определение 2.5 имеет смысл также для $\mathcal{A}_\Lambda$. Теорема 2.7 выполняется также для $\mathcal{A}_\Lambda$, так как для любого $z \in \mathcal{A}_\Lambda$ существует вложенная подалгебра изоморфная $\mathcal{A}_\infty$ содержащая z. Путь γ спрямляем, поэтому он имеет счетное плотное подмножество. Для любого $\epsilon > 0$ существует подалгебра изоморфная $\mathcal{A}_\infty$ проекция $\psi(t)$ на которую пути γ отличается от $\gamma(t)$ не более, чем на ϵ для любого $t \in [a, b]$, где $\gamma : [a, b] \to \mathcal{A}_\Lambda$. Для $\mathcal{A}_\infty$ с помощью проекций P_r мы имеем $\psi = \lim_{r\to\infty} P_r(\psi)$, $P_r(\psi) \subset U_r$, $\{P_r(\gamma) : r \in \mathbf{N}\}$, сходится к ψ равномерно на компактном отрезке $[a, b] \subset \mathbf{R}$, где $U_r = P_r(U)$. Возьмем последовательность таких путей ψ_n с $\sup_{t\in[a,b]} |\psi_n(t) - \gamma(t)| < 1/n$. Тогда $\int_{\psi_n} f(z)dz$ образуют последовательность Коши в $\mathcal{A}_\Lambda$, которая полна. Поэтому существует $\lim_{n\to\infty}\int_{\psi_n} f(z)dz = \int_\gamma f(z)dz)$. Следовательно, интеграл вдоль пути имеет единственное непрерывное продолжение на $C^0_b(U, \mathcal{A}_\Lambda)$.

В замечании 2.8 можно использовать $l_2(\mathbf{R})^m$ вместо $\mathbf{R^{2^rm}}$ и представлять дифференциальные формы η над $\mathcal{A}_\infty$ как поточечные пределы (или равномерную сходимость на компактных подмножествах) дифференциальных форм над $\mathcal{A}_r$ при r стремящемся к бесконечности, так как $z_r \to z$ при r стремящемся к бесконечности, где $z \in \mathcal{A}_\infty$, $z_r := P_r(z)$. В случае $\mathcal{A}_\Lambda$ при $card(\Lambda) > \aleph_0$ можно использовать это поточечно, так как для каждого $z \in \mathcal{A}_\Lambda$ существует подалгебра изоморфная $\mathcal{A}_\infty$ и содержащая z. В общем случае:

$$(i) \quad \eta(z,\tilde{z}) = \sum_{I,J} \eta_{I,J}\{(d^{\,p_1} z^{\wedge I_1}\alpha_1 \wedge ... \wedge d^{\,p_n} z^{\wedge I_n}\alpha_n \wedge d^{\,t_1}\tilde{z}^{\wedge J_1}\beta_1 \wedge ...$$
$$... \wedge d^{\,t_n}\tilde{z}^{\wedge J_n}\beta_n\}_{q(|I|+|J|+2n)}$$

– это дифференциальная форма над $\mathcal{A}_\Lambda$, где каждая $\eta_{I,J}(z,\tilde{z})$ – это непрерывная функция на открытом подмножестве U_n в $\mathcal{A}_\infty^n$ со значениями в $\mathcal{A}_\infty$, $I = (I_1, ..., I_n)$, $J = (J_1, ..., J_n)$, $|I| := I_1 + ... + I_n$, $1 \le p_1 \le p_2 \le ... \le p_n \in \mathbf{N}$, $1 \le t_1 \le t_2 \le ... \le t_n \in \mathbf{N}$, $0 \le I_k \in \mathbf{Z}$, $0 \le J_k \in \mathbf{Z}$, $\alpha_k, \beta_k \in \mathcal{A}_\Lambda$ являются постоянными для любого $k = 1, ..., n$, $d^{\,p} z^0 := 1$, $d^{\,p}\tilde{z}^0 := 1$, $n \in \mathbf{N}$, $\pi^l_n(U_l) \subset U_n$ для любого $l \ge n$, где $\pi^l_n : \mathcal{A}^l_\Lambda \to \mathcal{A}^n_\Lambda$ – естественная проекция для любого $l \ge n$. Сходимость в правой части формулы (i) в случае бесконечного ряда по I или J предполагается относительно $C^0_b(W, \mathcal{A}^{\wedge *}_\infty)$-топологии равномерной сходимости на W, где $W = pr - \lim\{U_n, \pi^l_n, \mathbf{N}\}$, $\mathcal{A}^{\wedge *}_\Lambda$ снабжена топологией нормы наследуемой из сопряженного пространства всех поли $\mathbf{R}$-однородных $\mathcal{A}_\Lambda$-аддитивных функционалов.

В замечании 2.10 определим $\mathcal{A}_{\Lambda,s,p}$ и используем проекции $\pi_{s,p,t}$ для любого $s \ne p \in \mathbf{b}$. Теоремы $2.11, 2.15$ и следствия $2.13, 2.15.1$ переносятся на $\mathcal{A}_\Lambda$ с $card(\Lambda) \ge \aleph_0$ наложением условия $(2^r - 1)$-связности $P_r(U) =: U_r$ для любого $r \ge 3$ и для всевозможных вложений $\mathcal{A}_\infty$ в $\mathcal{A}_\Lambda$ для $card(\Lambda) > \aleph_0$ при соответствующем $\mathcal{A}_r \subset \mathcal{A}_\infty$, рассматривая $\pi_{s,p,t}(U)$ для любых $s = i_{2k}$, $p = i_{2k+1}$, $0 \le k \in \mathbf{Z}$. Тогда определения $2.12, 2.14$ и теорема 2.16, замечания $2.17, 3.1$ выполняются также для $\mathcal{A}_\infty$. Выполнимость следствия 3.3 следует из доказательства теоремы 3.6.2. Мы также имеем вместо 3.4 и 3.5 следующее.

3.4′. Следствие. *Функция* $\exp(z)$ *на множестве* $\mathcal{I}_\Lambda := \{z \in \mathcal{A}_\Lambda : Re(z) = 0\}$ *периодична с бесконечным семейством генераторов периодов* $s \in \hat{b}_\Lambda$*, так что* $\exp(z(1 + 2\pi n/|z|)) = \exp(z)$ *для любого* $0 \ne z \in \mathcal{I}_\Lambda$ *и любого целого числа* n*, где* $card(\Lambda) \ge \aleph_0$*. Если* $z \in \mathcal{A}_\Lambda$ *записано в виде* $z = 2\pi s M$*, где* $M \in \mathcal{I}_\infty$, $|M| = 1$*, то* $\exp(z) = 1$ *тогда и только тогда, когда* $s \in \mathbf{Z}$*.*

3.5′. Следствие. *Функция* $\exp$ *является эпиморфизмом с* $\mathcal{I}_\Lambda$ *при* $card(\Lambda) \ge \aleph_0$ *на бесконечномерную единичную сферу* $S^\Lambda(0,1,\mathcal{A}_\Lambda) := \{z : z \in \mathcal{A}_\Lambda, |z| = 1\}$*.*

3.7. Замечание. В некоммутативном случае $\mathcal{A}_r$, $2 \le r \le \infty$, имеется следующее соотношение для производной функции exp:

$$(3.6) \quad \exp(z)'.h = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n-1}((z^k)h)z^{n-k-1}/n!,$$

где z и $h \in \mathcal{A}_r$. В частности,

$$(3.7) \quad \exp(z)'.v = v\exp(z)$$

для любого $v \in \mathbf{R}$, но в общем случае не для всех $h \in \mathcal{A}_r$. Функция exp периодична на $\mathcal{A}_r$, следовательно, обратная функция обозначаемая Ln определена только локально.

Пусть сначала $2 \leq r \in \mathbf{N}$. Рассмотрим пространство $\mathbf{R^{2^r}}$ всех переменных $(w_s : s \in \mathbf{b})$ для которых exp периодична на $\mathcal{A}_r$. Условие $\sum_{s\in\hat{b}} w_s^2 = 1$ определяет в $\mathbf{R^{2^r}}$ сферу единичного радиуса S^{2^r-2} с центром в нуле. Последняя имеет элемент центральной симметрии C для преобразования $C(w_s : s \in \mathbf{b}) = (-w_s : s \in \mathbf{b})$. Рассмотрим подмножество $P = P_0 \cup \bigcup_{q,j_1,...,j_q} P_{j_1,...,j_q}$ в S^{2^r-2}, где $1 \leq q \leq 2^{r-1}-1$, всех точек характеризуемых условиями:

$P_0 := \{(w_s : s \in \hat{b}) \in S^{2^r-2} : w_s \leq 0, \forall s \in \hat{b}\}$,

$P_{j_1,...,j_q} := \{(w_s : s \in \hat{b}) \in S^{2^r-2} : w_s \leq 0, \forall s \in \hat{b} \setminus \{j_1,...,j_q\},\ w_s \geq 0, \forall s \in \{j_1,...,j_q\}\}$, тогда $P \cup CP = S^{2^r-2}$ и пересечение $P \cap CP$ является (2^r-3)-мерным над $\mathbf{R}$. Эта сфера S^{2^r-2} соответствует вложению $\theta_1 : (w_s : s \in \hat{b}) \hookrightarrow (0, w_s : s \in \hat{b}) \in \mathbf{R^{2^r}}$. Рассмотрим вложение $\mathbf{R^{2^r}}$ в $\mathcal{A}_r$ даваемое формулой $\theta_2 : (w_s : s \in \mathbf{b}) \hookrightarrow \sum_{s\in\mathbf{b}} w_s s \in \mathcal{A}_r$. Это дает вложение $\theta := \theta_2 \circ \theta_1$ сферы S^{2^r-2} в $\mathcal{A}_r$. Каждая окружность единичного радиуса с центром в 0 в $\mathcal{A}_r$ пересекает экватор $\theta(S^{2^r-2})$ сферы $S^{2^r-1}(0,1,\mathcal{A}_r)$. Соединим каждую точку $\sum_{s\in\hat{b}} w_s s$ на $\theta(S^{2^r-2})$ с нулем в $\mathcal{A}_r$ отрезком прямой $\{a\sum_{s\in\hat{b}} w_s s : a \in \bar{\mathbf{R}}_+\}$, где $\bar{\mathbf{R}}_+ := \{a \in \mathbf{R} : a \geq 0\}$. Эта линия пересекает круг вложенный в $S^{2^r-1}(0,1,\mathcal{A}_r)$, который является следом окружности $\{\exp(2\pi aM) : a \in [0,1]\}$ радиуса 1 в $\mathcal{A}_r$, где $M = \sum_{s\in\hat{b}} w_s s$. Поэтому, $\psi(s) := \exp(v + 2\pi aM)$ как функция (v,a) для фиксированного $(w_s : s \in \hat{b}) \in S^{2^r-2}$ определяет биекцию области $X \setminus \{aM : a \in \bar{\mathbf{R}}_+\}$ на свой образ, где X – это $\mathbf{R^2}$ вложенное как $(v,a) \hookrightarrow (v + aM) \in \mathcal{A}_r$, где $v \in \mathbf{R}$. Это означает, что $Ln(z)$ корректно определен на каждом подмножестве $X \setminus \{aM : a \in \bar{\mathbf{R}}_+\}$ in $\mathcal{A}_r$. Объединение $\bigcup_{(w_s : s\in\hat{b})\in P}\{a\sum_{s\in\hat{b}} w_s s : a \in \bar{\mathbf{R}}_+\}$ дает (2^r-1)-мерное (над $\mathbf{R}$) подмножество $Q := Q_0 \cup \bigcup_{q,j_1,...,j_q} Q_{j_1,...,j_q}$, где $Q_0 = \theta(S_0)$, $Q_{j_1,...,j_q} := \theta(S_{j_1,...,j_q})$, $S_0 := \bar{\mathbf{R}}_+ P_0$, $S_{j_1,...,j_q} := \bar{\mathbf{R}}_+ P_{j_1,...,j_q}$, $1 \leq q \leq 2^{r-1}-1$. Тогда, на области $\mathcal{A}_r \setminus Q$, функция $\exp(z)$ определяет биекцию с образом $\exp(\mathcal{A}_r \setminus Q)$ и ее обратная функция $Ln(z)$ корректно определена на $\mathcal{A}_r \setminus \exp(Q)$. Вращением $\mathcal{A}_r \setminus Q$ можно получить другие области на которых Ln может быть определен как функция (с одним значением в каждой точке, то есть, $Ln(z)$ – это одна точка в $\mathcal{A}_r$), но не на всей $\mathcal{A}_r$). Это означает, что $Ln(z)$ – это локально биективная функция. Выполняются элементарные тождества $\cos(2\pi - \phi) = \cos(\phi)$ и $\sin(2\pi - \phi) = -\sin(\phi)$ для любого $\phi \in \mathbf{R}$. Если $0 < \phi < 2\pi$, то $w_1 \sin(\phi)/\phi = w_2 \sin(2\pi - \phi)/(2\pi - \phi)$ тогда и только тогда, когда $w_1 = -\phi w_2/(2\pi - \phi)$. Для исключения этой неопределённости положим в формуле (3.3) $\phi = |M| \geq 0$ и $w_{i_1} \geq 0$. Поэтому, $Ln(\exp(z)) = z$ на $\mathcal{A}_r \setminus Q$, следовательно, используя формулы (3.4, 3.5) получим многозначную функция

$$(3.8) \quad Ln(z) = ln(|z|) + Arg(z), \text{ где } Arg(z) := arg(z) + 2\pi aM$$

на $\mathcal{A}_r \setminus \{0\}$, где ln – это обычный действительный логарифм на $(0,\infty)$, $a \in \mathbf{Z}$,

$$|z|\exp(2\pi arg(z)) = z, \quad arg(z) := \sum_{s\in\hat{b}} w_{s,z} s, \quad (w_{s,z} : s \in \hat{b}) \in \mathbf{R^{2^r-1}},$$

$\sum_{s\in\hat{b}} w_{s,z}^2 \leq 1$, $w_{i_1,z} \geq 0$, $M = \sum_{s\in\hat{b}} w_s s$ – это произвольный вектор единичной длины (то есть, $|M| = 1$) в $\mathcal{I}_r$ коммутирующий с $arg(z) \in \mathcal{A}_r$, $arg(z)$ определён однозначно таким ограничением $(w_s : s \in \hat{b})$, например, $M = \zeta arg(z)$ для любого $\zeta \in \mathbf{R}$, когда $arg(z) \neq 0$.

Для любого фиксированного $M \in \mathcal{I}_r$ $\exp(aM)$ – это однопараметрическое семейство специальных преобразований алгебры $\mathcal{A}_r$, то есть, $\exp(aM)\eta \in \mathcal{A}_r$ для любого $\eta \in \mathcal{A}_r$ и $|\exp(aM)| = 1$, где $\mathcal{A}_r$ как линейное пространство над $\mathbf{R}$ изоморфно $\mathbf{R^{2^r}}$. С другой стороны, существуют специальные преобразования алгебры $\mathcal{A}_r$, для которых $a = \pi/2 + \pi k$, но M – это переменная с $|M| = 1$, где $k \in \mathbf{Z}$, тогда $\exp(z) = (-1)^k M$. Каждой замкнутому пути (петле) γ в $\mathcal{A}_r$ соответствует петля $P_\xi(\gamma)$ в $\mathbf{R}$-линейном подпространстве $\xi \ni 0$, где P_ξ – это проекция на ξ, например,

$P_{\mathbf{R}\oplus\mathbf{R}s}(z) = (z - s(zs))/2 = w_1 + w_s s$ для $\xi = \mathbf{R}\oplus\mathbf{R}s$,
$P_{\mathbf{R}s\oplus\mathbf{R}p}(z) = sP_{\mathbf{R}\oplus\mathbf{R}s^*p}(s^*z) = [z - p(s^*z(s^*p))]/2 = w_s s + w_p p$
для любого $s \neq p \in \hat{b}$. Частные случаи таких специальных преобразований также соответствуют $w_s = 0$ для $s \in \hat{b}$ при $M \neq 0$. Каждой петле γ в $\mathcal{A}_r$ и любым a и b в $\mathcal{A}_r$ с $ab \neq 0$ соответствует петля $(a\gamma)b$ в $\mathcal{A}_r$.

Вместо римановой двумерной поверхности комплексной логарифмической функции мы получим 2^r-мерное многообразие W, то есть, подмножество в $Y^{\aleph_0} := \prod_{i\in\mathbf{Z}} Y_i$, где $Y_i = Y$ для любого i, так что каждое Y является копией $\mathcal{A}_r$ вложенной в $\mathcal{A}_r \times \mathbf{R^{2^r-1}}$ и разрезанной по (2^r-1)-мерному подмногообразию Q и с диффеоморфной деформацией окрестности Q, так что два (2^r-1)-мерных края ${}_1Q$ и ${}_2Q$ для Y диффеоморфные Q не пересекаются вне нуля, ${}_1Q \cap {}_2Q = \{0\}$, то есть, граница ∂Q также разрезана везде вне нуля. Мы имеем $\partial Q = \bigcup_{j\in\hat{b}} \partial Q^j$, где $\partial Q^j := \{\theta(w_s : s \in \hat{b}) : w_j = 0, (w_s : s \in \hat{b}) \in S_0 \cup \bigcup_{q,j_1,\dots,j_q} S_{j_1,\dots,j_q}\}$, для любого $j \in \hat{b}$. Для исключения вращений в каждом подпространстве $v + a\xi$ изоморфном $\mathbf{R^2}$ и вложенном в $\mathbf{R} + \partial Q^j$, где $\xi \in \partial Q^j$, $\xi \neq 0$, мы разрезали ∂Q. Тогда в $\mathcal{A}_r \times \mathbf{R^{2^r-1}}$ две копии Y_i и Y_{i+1} склеены отношением эквивалентности ${}_2Q_i$ с ${}_1Q_{i+1}$ посредством отрезков $\{a_{l,i}M : a_{l,i} \in \bar{\mathbf{R}}_+\}$, так что $a_{1,i+1} = a_{2,i}$ для любого $a_{l,i} \in \bar{\mathbf{R}}_+$ и любых данных $(w_s \in \mathbf{R} : s \in \hat{b}) \in P$ с $M = \sum_{s\in\hat{b}} w_s s$, $|M| = 1$. Это задает 2^r-мерное многообразие W вложенное в $\mathcal{A}_r \times \mathbf{R^{2^r-1}}$ и $Ln : \mathcal{A}_r \setminus \{0\} \to W$ – это однозначная функция, то есть, $Ln(z)$ – это одноточечное подмножество в W для любого $z \in \mathcal{A}_r \setminus \{0\}$.

В случае $\mathcal{A}_\Lambda$ с $card(\Lambda) \geq \aleph_0$ рассмотрим семейство Υ подмножеств в $\hat{b} = \hat{b}_\Lambda$, так что если $A \in \Upsilon$, то $\hat{b} \setminus A \notin \Upsilon$, положим $Q := \{M \in \mathcal{I}_\Lambda : w_s \leq 0\ \forall s \in A,\ w_s \geq 0\ \forall s \in \mathbf{b} \setminus A,\ A \in \Upsilon\}$, где $M = \sum_{s\in\hat{b}} w_s s$, $w_s \in \mathbf{R}$ для любого $s \in \mathbf{b}$. Тогда $\partial Q = \bigcup_{j\in\hat{b}} \partial Q^j$, где $\partial Q^j := \{z \in Q : w_j = 0\}$. Рассмотрим $Y^{\aleph_0} = \prod_{k\in\mathbf{N}} Y_k$, где $Y_k = Y$ – это копия $\mathcal{A}_\Lambda$ вложенная в $\mathcal{A}_\Lambda \times l_2(\mathbf{R})$ разрезанная по бесконечномерному подмногообразию Q и с диффеоморфной деформацией окрестности Q, так что бесконечномерные края ${}_1Q$ и ${}_2Q$ не пересекаются вне нуля, ${}_1Q \cap {}_2Q = \{0\}$. Тогда в $\mathcal{A}_\infty \times l_2(\mathbf{R})$ две копии Y_k и Y_{k+1} склеены отношением эквивалентности ${}_2Q_k$ с ${}_1Q_{k+1}$ по отрезкам $\{a_{l,k}M : a_{l,k} \in \bar{\mathbf{R}}_+\}$, так что $a_{1,k+1} = a_{2,k}$ для любого $a_{l,k} \in \bar{\mathbf{R}}_+$ и любого данного $M = \sum_{s\in\hat{b}} w_s s \in Q \cap S(0,1,\mathcal{I}_\Lambda)$ с $|M| = 1$, где $S(z_0,\rho,\mathcal{I}_\Lambda) := \{z \in \mathcal{I}_\Lambda : |z - z_0| = \rho\}$, $\rho > 0$. Это определяет бесконечномерное многообразие W вложенное в $\mathcal{A}_\Lambda \times l_2(\mathbf{R})$ и $Ln : \mathcal{A}_\Lambda \setminus \{0\} \to W$ – это однозначная функция.

3.8. Замечание. В действительном случае тригонометрические и гиперболические функции различны, но определенные как функции $\mathcal{A}_r$-переменной они связаны. Положим

$\cos(v) := [\exp(vM) + \exp(-vM)]/2$,
$\sin(v) := [\exp(vM) - \exp(-vM)]M^*/2$,
$\cosh(v) := [\exp(v) + \exp(-v)]/2$,
$\sinh(v) := [\exp(v) - \exp(-v)]/2$
для любого $v \in \mathbf{R}$, $M \in \mathcal{I}_r$, $|M| = 1$, $2 \leq r \leq \infty$ или $r = \Lambda$ и
$\cos(z) := [\exp(z) + \exp(-z)]/2$ и
$\sin(z) := [\exp(z) - \exp(-z)](z^* - z)/[2|z - z^*|]$ для любого $z \in \mathcal{A}_r$, где $z \neq z^*$ в последнем случае, тогда
$\cos(v + yM) = \cos(v)\cosh(y) - \sin(v)\sinh(y)M$,
$\sin(v + yM) = \sin(v)\cosh(y) + \cos(v)\sinh(y)M$
для любых $v, y \in \mathbf{R}$ и M как выше.

3.8.1. Предложение. *Пусть предположения предложение* 2.2.1 *выполнены при* $k = n = m$ *и* $f \circ g(z) = z$ *для любого* $z \in U$*, где* $g : U \to W$ *– это биективное сюръективное отображение , то есть, существует обратное отображение* $f = g^{-1}$*. Тогда*

$(Df(g)|_{g=g(z)}).\eta = (Dg(z))^{-1}.\eta$ *для любого* $\eta \in \mathcal{A}_r^n$*,* $2 \le r \le \infty$ *или* $r = \Lambda$*. Если* f *является или* z*, или* $\tilde{z}$*, или* $(z, \tilde{z})$*-супердифференцируемой, тогда* g *является или* z*, или* $\tilde{z}$*, или* $(z, \tilde{z})$*-супердифференцируемой соответственно.*

Доказательство. В силу предложения 2.2.1 $(Df(g).((Dg(z)).h) = h$ для любого $z \in U$ и любого $h \in \mathcal{A}_r^n$. Поскольку $Dg(z)$ является $\mathbf{R}$-однородным и $\mathcal{A}_r^n$-аддитивным, то DG имеет обратный оператор, где $G = g \circ \sigma$ – это диффеоморфизм действительной области P (в $\mathbf{R}^{\mathbf{2^rn}}$ при $r \in \mathbf{N}$ или $l_2(\Lambda, \mathbf{R})$ при бесконечном r) соответствующей U, $\sigma(P) = U$, где $l_2(\Lambda, \mathbf{R})$ – гильбертово пространство над $\mathbf{R}$ с базисом мощности $card(\Lambda)$. Поэтому, существует обратный $\mathbf{R}$-однородный $\mathcal{A}_r^n$-аддитивный оператор $(Dg(z))^{-1}$ на $\mathcal{A}_r^n$. Полагая $\eta = (Dg(z)).h$, мы получим утверждение этого предложения. Последнее утверждение этого предложения следует из предложения 2.3, так как g является или z, или $\tilde{z}$, или $({}_1z,\ {}_2z)|_{{}_1z=z,\ {}_2z=\tilde{z}}$-представленной вместе с f.

3.8.2. Предложение. *Пусть* $g : U \to \mathcal{A}_r$*,* $\infty \ge r \ge 3$ *или* $r = \Lambda$*, является* $\mathcal{A}_r$*-голоморфной функцией на* U*, где* U *открыто в* $\mathcal{A}_r$*. Если* $0 \notin g(U)$*, то существует* $\mathcal{A}_r$*-голоморфная функция* $f = 1/g$ *на* U*, так что*

$(Df(z)).h = [D(1/g)|_{g=g(z)}].((Dg(z)).h)$ *для любого* $h \in \mathcal{A}_r$*.*

В частности, $(Df(z)).h = -\xi[((Dg(z)).h)\xi]$ *для* $r = 3$*,* $\mathcal{A}_3 = \mathbf{K}$*, где* $\xi := 1/g$*.*

Доказательство. В силу формул $(3.2, 3.3)$ существует $f = 1/g$, то есть, $f(z)g(z) = g(z)f(z) = 1$ для любого $z \in U$, но это не означает существование решения уравнения $(ab)z = a$ в общем в $\mathcal{A}_r$ для $r \ge 4$. Используя предложение 2.2.1, получим

$(Df(z)).h = (D(1/g)|_{g=g(z)}).((Dg(z)).h),$

так что $g((D(1/g)).h) = -((Dg).h)/g = -h/g$ для любого $h \in \mathcal{A}_r$. То есть, существует $D(1/g)$. Если $r = 3$, $\mathcal{A}_3 = \mathbf{K}$, то $(D(1/g)).h = -\xi(h\xi)$, где $\xi := 1/g$, так как $\mathbf{K}$ является альтернативной.

3.8.3. Теорема. *Функция* Ln *является* $\mathcal{A}_r$*-голоморфной на любой области* U *в* $\mathcal{A}_r$ *полученной в результате* $\mathcal{A}_r$*-голоморфного диффеоморфизма* $\mathcal{A}_r \setminus Q$ *на* U*, где* $2 \le r \le \infty$ *или* $r = \Lambda$*. Каждый путь* γ *в* $\mathcal{A}_r$ *такой, что* $\gamma(t) = \rho\exp(2\pi t n M)$ *с* $t \in [0, 1]$*,* $n \in \bar{\mathbf{R}}_+$*,* $M \in \mathcal{I}_r$*,* $|M| = 1$ *замкнут в* $\mathcal{A}_r$ *тогда и только тогда, когда* $n \in \mathbf{N}$*, где* $\rho > 0$*. В этом случае*

$$\int_\gamma z^{-1}dz = \int_\gamma d(Lnz) = 2\pi n M. \tag{3.9}$$

Доказательство. В силу формул $(3.2, 3.3)$ каждое $0 \ne z \in \mathcal{A}_r$ имеет z^{-1}. Если U и V – это два открытых подмножества в $\mathcal{A}_r$ и $g : V \to U$ является $\mathcal{A}_r$-голоморфным диффеоморфизмом V на U и f является $\mathcal{A}_r$-голоморфной функцией на V, тогда $f \circ g^{-1}$ является $\mathcal{A}_r$-голоморфной функцией на U, так как $(f \circ g^{-1})'(z).h = (f'(\zeta)|_{\zeta=g^{-1}(z)}.(g^{-1}(z))'.h$ для любого $z \in U$ и любого $h \in \mathcal{A}_r$ (см. предложения 2.2.1 и 3.8.1). Поскольку exp является диффеоморфизмом из $\mathcal{A}_r \setminus Q$ на $\mathcal{A}_r \setminus \exp(Q)$, то Ln является $\mathcal{A}_r$-голоморфным на $\mathcal{A}_r \setminus Q$ в силу предложения 3.8.1 и на каждом его $\mathcal{A}_r$-голоморфном образе после выбора определенной ветви многозначной функции $Ln(z)$ (см. формулу (3.8)).

Путь γ определён для любого $t \in \mathbf{R}$ не только для $t \in [0, 1]$ благодаря существованию exp. В силу формул $(3.2, 3.3)$ путь γ замкнут (то есть, $\gamma(t_0) = \gamma(t_0 + 1)$ для любого $t_0 \in \mathbf{R}$) тогда и только тогда, когда $\cos(2\pi n) = \cos(0) = 1$ и $\sin(2\pi n) = 0$, то есть, $n \in \mathbf{N}$.

Из определения интеграла вдоль пути следует равенство: $\int_\gamma d(Lnz) = \int_0^1 (Lnz)'.(\gamma'(t)dt)$. Рассмотрение интегральных сумм по разбиениям P отрезка $[0,1]$ и взятие предела по семейству всех P с диаметром разбиения стремящемся к нулю дает, что $\int_\gamma d(Lnz) = Arg(\gamma(1)) - Arg(\gamma(0))$ для выбранной ветви функции $Arg(z)$ (см. формулу (3.8)). Поэтому, $\int_\gamma d(Lnz) = 2\pi nM$.

Поскольку $\mathcal{A}_r$ ассоциативная со степенями, то z коммутирует с собой, следовательно, $\exp(z)'.z = \exp(z)z$. Поэтому, $\exp(Ln(z))'.1 = (d\exp(\eta)/d\eta)|_{\eta=Ln(z)}.(Ln(z))'.1 = \exp(Ln(z))(Ln(z))'.1$, следовательно,
$(Ln(z))'.1 = \exp(-Ln(z)) = z^{-1}$ и неизбежно

$$\lim_P I(z^{-1}, \gamma; P) = \lim_P \sum_l \hat{z}_l^{-1} \Delta z_l = \lim_P \Delta Ln(z_l) = \int_\gamma dLn(z),$$

следовательно, $\int_\gamma z^{-1}dz = \int_\gamma dLn(z)$. То есть, $\int_\gamma dLn(z)$ можно рассматривать как определение $\int_\gamma z^{-1}dz$.

3.8.4. Обозначения. Обозначим упорядоченную композицию функций $\{f_1 \circ f_2 \circ ...f_m\}_{q(m)}$, где $q(m) := (q_m, ..., q_3)$, $q_m \in \mathbf{N}$ означает, что первая (наиболее внутренняя скобка) композиции является $f_{q_m} \circ f_{q_{m+1}} = f_{q_m}(f_{q_{m+1}}) =: [f_{q_m} \circ f_{q_{m+1}}]$, так что ситуации $(f_1 \circ ... \circ [f_t \circ f_{t+1}] \circ ... \circ [f_w \circ f_{w+1}] \circ ... \circ f_m)$ с двумя одновременными независимыми композициями, но $t < w$ по нашему определению упорядочения соответствует $q_m = w$ (в отличии от умножения). После первой композиции мы получим композицию $({}'f_1 \circ ... \circ {}'f_{m-1})$, где не менее, чем $(m-2)$ элементов те же, что и в первой композиции, тогда q_{m-1} соответствует первой композиции в новом упорядоченном семействе функций, и так далее по индукции от j до $j-1$, $j = m, m-1, ..., 3$. Поскольку q_2 и q_1 единственны, то мы опустим их. После шагов $q_m, ..., q_{m-j+1}$ пусть соответствующая композиция обозначается
$\{ {}^jg_1 \circ ... \circ {}^jg_{m-j}\}_{q(m-j)}$,
где ${}^jg_1, ..., {}^jg_{m-j}$ – результаты композиций на предыдущих шагах, некоторые из них могут принадлежать множеству $\{f_1, ..., f_m\}$. Если f_l появляется в композиции на $k = k(l)$ шаге, то могут быть два варианта: $f_l \circ {}^lg_p$ или ${}^lg_p \circ f_l$, где $p = p(l)$, $j = j(l) = k(l) - 1$, ${}^0g_p := f_p$. В первом случае предположим, что $dom(f_l) \subset {}^jg_p(dom\, {}^jg_p)$, во втором случае пусть $dom({}^jg_p) \subset f_l(dom(f_l))$ для любого $l = 1, ..., m$.

3.8.5. Предложение. *Пусть* f_1,...,f_m *– семейство* $\mathcal{A}_r$ *супердифференцируемых функций или все по* z, *или все по* $\tilde{z}$, *или все по* $(z, \tilde{z})$, $f_j : U_j \to \mathcal{A}_r^{t(j)}$, U_j *открыто в* $\mathcal{A}_r^{t(j+1)}$, $t(j) \in \mathbf{N}$ *для любого* $j = 1, ..., m$, *так что их области удовлетворяют условиям выше, где* $2 \le r \le \infty$ *или* $r = \Lambda$. *Тогда*

$$(i) \quad (D\{f_1 \circ f_2 \circ ... \circ f_m\}_{q(m)}(z)).h = \{Df_1({}^{j(1)}g_{p(1)}).Df_2({}^{j(2)}g_{p(2)})....(Df_m(z)).h\}_{q(m)}$$

для любого $h \in \mathcal{A}_r^{t(m+1)}$, *где* $Df_l({}^{j(l)}g_{p(l)}).\xi = (Df_l(\eta)|_{\eta= {}^{j(l)}g_{p(l)}(z)}).\xi$ *для любого* $\xi \in \mathcal{A}_r^{t(l+1)}$. *Более того,* $\{f_1 \circ f_2 \circ ... \circ f_m\}_{q(m)}$ *супердифференцируема или по* z, *или по* $\tilde{z}$, *или по* $(z, \tilde{z})$ *соответственно. Если* $r = 2$, $\mathcal{A}_2 = \mathbf{H}$, *то композиция в* (i) *ассоциативна, для любого* $r \ge 3$ *она может быть в общем неассоциативной. В отмеченной точке* $z = a \in U_m$ *она имеет вид:*

$$(ii) \quad (D\{f_1 \circ f_2 \circ ... \circ f_m\}_{q(m)}(z)).h = \{Df_1(\eta_1).Df_2(\eta_2)....(Df_m(z)).h\}_{q(m)},$$

где $\eta_l := f_l(f_{l+1}(...f_{m-1}(f_m(z))...))$ *для любого* $l = 1, ..., m-1$.

Доказательство. Для $m = 2$ это предложение было доказано в §2.2.1. Докажем это предложение по индукции и применим предложение 2.2.1 к парам функций в появляющихся композициях. Сначала отметим, что порядок композиций для дифференциала существен для $\mathcal{A}_r$ с $r \geq 3$. Частный случай всех правосупердифференцируемых функций показывает, что в общем $(Df_1.Df_2).Df_3$ не равно $Df_1.(Df_2.Df_3)$, так как эти операторы правосуперлинейны, но умножение матриц с элементами принадлежащими алгебре Кэли-Диксона $\mathcal{A}_r$ с $r \geq 3$ неассоциативно. Более того, эти выражения могут быть различны, когда Df_j не являются правосуперлинейными, но только $\mathcal{A}_r^{t(j+1)}$-аддитивными.

Пусть предложение доказано для всех $n \leq m$, рассмотрим $\{f_1 \circ ... \circ f_{m+1})_{q(m+1)}$. В нем f_1 участвует в композиции на $k(1)$ шаге с ${}^{j(1)}g_{p(1)}$ вида $f_1 \circ {}^{j(1)}g_{p(1)}$, так как f_1 находится в крайней левой позиции. Если $k(1) = 1$, то ${}^{j(1)}g_{p(1)} = f_2$ и
$\{f_1 \circ ... \circ f_{m+1}\}_{q(m+1)} = \{[f_1 \circ f_2] \circ ... \circ f_{m+1}\}_{q(m)}$.
Применяя предположение индукции к композиции функций $[f_1 \circ f_2]$, f_3,...,f_{m+1} и подставляя в нее выражение $D(f_1 \circ f_2)$ согласно предложению 2.2.1, мы получим утверждение этого предложения в случае $k(1) = 1$. Если $k(1) > 1$, тогда на $k(1)$ шаге рассматривается композиция f_1 и ${}^{j(1)}g_2$,..., ${}^{j(1)}g_{m+1-j(1)}$, где $j(1) = k(1)-1 \geq 1$, следовательно, $m+1-j(1) \leq m$. Применяя предположение индукции к $\{f_1 \circ {}^{j(1)}g_2 \circ ... \circ {}^{j(1)}g_{m+1-j(1)}\}_{q(m+1-j(1))}$ и тогда к каждой ${}^{j(1)}g_p$ для нетривиальной композиции, мы получим утверждение предложения в случае $k(1) > 1$. Последнее утверждение также следует в силу математической индукции рассмотренной выше и из предложения 2.2.1.

Теоретикомножественная композиция функций независима от скобок, но она зависит только от порядка функций: $(f_1 \circ f_2) \circ f_3(z) = (f_1 \circ f_2)(f_3(z)) = f_1(f_2(f_3(z))) = f_1 \circ (f_2 \circ f_3(z))$, и т.д. по индукции. Неассоциативность в общем появляется после супердифференцирования над $\mathcal{A}_r$ с $r \geq 3$. Поскольку $\{f_1 \circ f_2 \circ ... \circ f_m\}_{q(m)}(z) = f_1(f_2(...(f_m(z))...)$, то для отмеченной точки $z = a \in U_m$ формула (i) принимает вид (ii).

В случае $r = 2$, $\mathcal{A}_2 = \mathbf{H}$, каждый $\mathbf{R}$-однородный $\mathbf{H}$-аддитивный оператор A имеет вид

$A.h = \sum_j B_j h C_j$ для любого $h \in \mathbf{H^n}$, где сумма по j конечна, $1 \leq j \leq 4$ (см. формулы в доказательстве теоремы 3.28 [27]), где B_j является $n \times n$ матрицей, h – это $n \times 1$ матрица, A_j – это 1×1 матрица с элементами из $\mathbf{H}$. Пусть A_k – это оператор соответствующий $Df_k(\eta_k)$ для данной отмеченной точки $z = a \in U_3$, $A_k.h = \sum_j B_{j,k} h C_{j,k}$ для любого $k = 1, 2, 3$, тогда $(A_1.A_2).A_3.h = \sum_{j_1,j_2,j_3} (B_{j_1,1} B_{j_2,2})(B_{j_3,3} h C_{j_3,3})(C_{j_2,2} C_{j_1,1})$ $= \sum_{j_1,j_2,j_3} B_{j_1,1}(B_{j_2,2} B_{j_3,3}) h (C_{j_3,3} C_{j_2,2}) C_{j_1,1} = (A_1.(A_2.A_3)).h$, так как матричное умножение над $\mathbf{H}$ ассоциативно. Применяя последнюю формулу по индукции, мы получим, что в случае $\mathbf{H}$ композиция в формуле (i) ассоциативна.

3.9. Теорема. *Пусть f является $\mathcal{A}_r$-голоморфной функцией на открытой области U в $\mathcal{A}_r$, $\infty \geq r \geq 3$ или $r = \Lambda$. Если $(\gamma+z_0)$ и ψ представлены как кусочные объединения путей $\gamma_j + z_0$ и ψ_j относительно параметра $\theta \in [a_j, b_j]$ и $\theta \in [c_j, d_j]$ соответственно с $a_j < b_j$ и $c_j < d_j$ для любого $j = 1, ..., n$, и $\bigcup_j [a_j, b_j] = \bigcup_j [c_j, d_j] = [0, 1]$, $\gamma_j + z_0$ и ψ_j гомотопны относительно $U_j \setminus \{z_0\}$, где $U_j \setminus \{z_0\}$ является $(2^r - 1)$-связной открытой областью в $\mathcal{A}_r$, так что $\pi_{s,p,t}(U_j \setminus \{z_0\})$ просто связна в $\mathbf{C}$ для любых $s = i_{2k}$, $p = i_{2k+1}$, $k = 0, 1, ..., 2^{r-1} - 1$ ($\forall 0 \leq k \in \mathbf{Z}$ и $P_m(U_j \setminus \{z_0\})$ является $(2^m - 1)$-связной для любого $4 \leq m \in \mathbf{N}$ если $r = \infty$ или $r = \Lambda$), для любых $t \in \mathcal{A}_{r,s,p}$ и $u \in \mathbf{C}_{s,p}$, для которых существует $z = t + u \in \mathcal{A}_r$. Если $(\gamma + z_0)$ и ψ – замкнутые спрямляемые пути (петли) в U, так что $\gamma(\theta) = \rho \exp(2\pi\theta M)$ с $\theta \in [0, 1]$ и отмеченной $M \in \mathcal{I}_r$, $|M| = 1$*

и $z_0 \notin \psi$*. Тогда*

$$(3.10) \quad (2\pi)f(z)M = \int_{\psi} f(\zeta)(\zeta - z)^{-1} d\zeta$$

для любого $z \in U$ *такого, что* $|z - z_0| < \inf_{\zeta \in \psi([0,1])} |\zeta - z_0|$*. Если* $\mathcal{A}_r$ *альтернативна, то есть,* $r = 3$*,* $\mathcal{A}_3 = \mathbf{K}$*, или* $f(z) \in \mathbf{R}$*, тогда*

$$(3.11) \quad f(z) = (2\pi)^{-1}(\int_{\psi} f(\zeta)(\zeta - z)^{-1} d\zeta)M^*.$$

Доказательство. Соединим γ и ψ спрямляемым путем ω, так что $z_0 \notin \omega$, который проходится дважды в одном направлении и противоположном, обозначемом ω^-, так что $\omega_j \cup \psi_j \cup \gamma_j \cup \omega_{j+1}$ гомотопно точке относительно $U_j \setminus \{z_0\}$ для подходящих ω_j и ω_{j+1}, где ω_j соединяет $\gamma(a_j)$ с $\psi(c_j)$, а ω_{j+1} соединяет $\psi(d_j)$ с $\gamma(b_j)$, так что z и $z_0 \notin \omega_j$ для любого j. Тогда $\int_{\omega_j} f(\zeta)(\zeta - z)^{-1} d\zeta = -\int_{\omega_j^-} f(\zeta)(\zeta - z)^{-1} d\zeta$ для любого j. В силу теоремы 2.15 выполняется равенство $-\int_{\gamma^- + z} f(\zeta)(\zeta - z)^{-1} d\zeta = \int_{\psi} f(\zeta)(\zeta - z)^{-1} d\zeta$. Поскольку $\gamma + z$ - это окружность вокруг z, то ее радиус $\rho > 0$ может быть выбран настолько малым, что $f(\zeta) = f(z) + \alpha(\zeta, z)$, где α – это непрерывная функция на U^2, так что $\lim_{\zeta \to z} \alpha(\zeta, z) = 0$, тогда $\int_{\gamma + z} f(\zeta)(\zeta - z)^{-1} d\zeta = \int_{\gamma + z} f(z)(\zeta - z)^{-1} d\zeta + \delta(\rho) = 2\pi f(z)M + \delta(\rho)$, где $|\delta(r)| \le |\int_{\gamma} \alpha(\zeta, z)(\zeta - z)^{-1} d\zeta| \le 2\pi \sup_{\zeta \in \gamma} |\alpha(\zeta, z)| C_1 \exp(C_2 \rho^6)$, где C_1 и C_2 – положительные постоянные (см. неравенство (2.7.4)), следовательно, $\lim_{\rho \to 0, \rho > 0} \delta(\rho) = 0$. Взятие предела при $\rho > 0$ стремящемся к нулю дает утверждение этой теоремы. Если $r = 3$, то есть, $\mathcal{A}_r = \mathbf{K}$, или $f(z) \in \mathbf{R}$, тогда $((2\pi)f(z)M)M^* = 2\pi f(z)$.

3.9.1. Следствие. *Пусть* f*,* U*,* ψ*,* z *и* z_0 *те же, что и в теореме 3.9, тогда*

$$|f(z)| \le \sup_{(\zeta \in \psi, h \in \mathcal{A}_r, |h| \le 1)} |\hat{f}(\zeta).h|.$$

3.9.2. Теорема. *Пусть* $\{f_n : n \in \mathbf{N}\}$ *– последовательность* $\mathcal{A}_r$*-голоморфных функций на окрестности* W *ограниченного канонического замкнутого подмножества* U *в* $\mathcal{A}_r$*,* $2 \le r \le \infty$ *или* $r = \Lambda$*, так что* $Int(U)$ *удовлетворяет условиям теоремы* 3.9 *и существует* $\delta > 0$*, для которого* $\{f_n : n \in \mathbf{N}\}$ *равномерно сходится на* δ*-окрестности топологической границы* $Fr(U)^\delta$ *множества* U*. Тогда* $\{f_n : n \in \mathbf{N}\}$ *сходится равномерно на* U *к* $\mathcal{A}_r$*-голоморфной функции на* $Int(U)$*.*

Доказательство. В силу §2.7 последовательность $\hat{f}_n$ равномерно сходится на $Fr(U)^\delta \cap W$. Рассмотрим сечения W плоскостями $i_{2m}\mathbf{R} \oplus i_{2m+1}\mathbf{R}$ для любого $m = 0, 1, 2, ...$ и рассмотрим спрямляемые петли γ в $Fr(U)^\delta \cap W \cap (i_{2m}\mathbf{R} \oplus i_{2m+1}\mathbf{R})$. Для $r > 3$ рассмотрим все возможные вложения $\mathbf{K}$ в $\mathcal{A}_r$ и такие копии $\mathbf{K}$ содержат все соответствующие петли γ. В силу оценки 2.7.(4) и теоремы 3.9 последовательность $\{f_n : n \in \mathbf{N}\}$ сходится равномерно на U к голоморфной функции, так как U имеет конечный диаметр.

3.10. Теорема. *Пусть* f *– непрерывная функция на открытом подмножестве* U *в* $\mathcal{A}_r$*,* $3 \le r \le \infty$ *или* $r = \Lambda$*. Если* f *является* $\mathcal{A}_r$*-интегрально голоморфной на* U*, тогда* f *является* $\mathcal{A}_r$ *локально* z*-аналитической на* U*.*

Доказательство. Пусть $z_0 \in U$ – отмеченная точка и пусть Γ обозначает семейство всех спрямляемых путей $\gamma : [0, 1] \to U$, так что $\gamma(0) = z_0$, тогда $U_0 = \{\gamma(1) : \gamma \in \Gamma\}$ – связная компонента z_0 в U. Поэтому, $g = \{\gamma(1), \int_{\gamma} f(z)dz\}$ – это функция с областью U_0. Из формул (3.2, 3.3) следует, что каждое $0 \ne z \in \mathcal{A}_r$ имеет обратное $z^{-1}z = zz^{-1} = 1$

(это не означает существования решения уравнения $(ab)z = a$ с $b \neq 0$ в общем на $\mathcal{A}_r$ для $r \geq 4$). В силу предложения 2.2.1 $\partial_z(\zeta - z)^{-k}.1 = k(\zeta - z)^{-k-1}$, так как $0 = (\partial_z 1).h = (\partial_z z^k z^{-k}).h = ((\partial_z z^k).h)z^{-k} + z^k((\partial_z z^{-k}).h)$ для любого $h \in \mathcal{A}_r$ и $z \neq 0$, $z \in \mathcal{A}_r$. Как в §2.15 можно доказать, что $F(z) := \int_\gamma f(z)dz$, для любого спрямляемого пути γ в U, зависит лишь от начальной и конечной точек. Этот интеграл конечен, так как $\gamma([0,1])$ содержится в компактном каноническом замкнутом подмножестве $W \subset U$, на котором f ограничена. Поэтому, $(\partial \int_{z_0}^z f(\zeta)d\zeta/\partial z).h = \hat{f}(z).h$ для любых $z \in U$ и $h \in \mathcal{A}_r$, $(\partial \int_{z_0}^z f(\zeta)d\zeta/\partial \tilde{z}) = 0$ для любых $z \in U$ и $h \in \mathcal{A}_r$, где z_0 – отмеченная точка в U, так что z и z_0 принадлежат одной связной компоненте в U, так как $\int_{z_0}^{z+\Delta z} f(\zeta)d\zeta - \int_{z_0}^z f(\zeta)d\zeta = \hat{f}(z).\Delta z + \epsilon(\Delta z)|\Delta z|$, где $\lim_{\Delta z \to 0} \epsilon(\Delta z) = 0$ (см. §2.5). В частности, $\hat{f}(z).1 = f(z)$ для любого $z \in U$. Здесь $\hat{f}$ корректно определено для любого $f \in C^{1,0}(U, \mathcal{A}_r)$ (см. следствие 2.15.1) в силу непрерывной супердифференцируемости функционала интегрирования на $C^0(U, \mathcal{A}_r)$. Для данной $z \in \mathbf{U}$ выберем окрестность W удовлетворяющую условиям теоремы 3.9. Тогда существует спрямляемый путь $\psi \subset W$, так что $f(z)$ представляется формулой (3.10). Последний интеграл бесконечно дифференцируем по z, так что

$$(3.12) \quad 2\pi((\partial^k F(z)/\partial z^k).h)M = (\int_\psi F(\zeta)(\partial^k(\zeta - z)^{-1}/\partial z^k).h)d\zeta),$$

где $h \in \mathcal{A}_r^k$, в частности, для $h = (1, ..., 1) =: 1^{\otimes k}$:

$$(3.13) \quad 2\pi((\partial^k F(z)/\partial z^k).1^{\otimes k})M = k!(\int_\psi F(\zeta)(\zeta - z)^{-k-1}d\zeta),$$

где $M \in \mathcal{I}_r$, $|M| = 1$. Для простоты обозначений мы можем опустить $1^{\otimes k}$ слева в (3.13). В частности, мы можем выбрать шар $W = B(a, R, \mathcal{A}_r) := \{\xi \in \mathcal{A}_r : |\xi - a| \leq R\} \subset U$ для достаточно малого $R > 0$ и $\psi = \gamma + a$, где $\gamma(s) = \rho \exp(2\pi t M)$ с $t \in [0,1]$, $0 < \rho < R$. Если мы докажем, что $F(z)$ является $\mathcal{A}_r$ локально z-аналитической, то очевидно её z-производная $f(z) = F'(z).1$ также будет $\mathcal{A}_r$ локально z-аналитической. Если $r \geq 4$, то существуют различные вложения алгебры октонионов $\mathbf{K}$ в $\mathcal{A}_r$ (см. §3.6.2).

Предположим, что существует ряд $f(z) := \sum_j a_j(z - z_0)^j b_j$ сходящийся для $|z - z_0| < \rho$, где a_j, b_j для любого j принадлежат одной и той же подалгебре $\Upsilon_a \hookrightarrow \mathbf{C}$, $0 \neq a \in \mathcal{A}_r$, коэффициенты разложения не зависят от вложения $\Upsilon_{a,z-z_0}$ в $\mathcal{A}_r$, в то время как $z - z_0$ варьируется в пределах одной и той же копии $\mathbf{K}$. Тогда это разложение выполняется для любого $z \in \mathcal{A}_r$ с $|z - z_0| < \rho$, так как различные вложения $\mathbf{K}$ (с генераторами $\{1, M_1, ..., M_7\} \hookrightarrow \mathcal{A}_r$, так что $|M_i| = 1$, $Re(M_i M_j) = 0$ и $|M_i M_j| = |M_i||M_j|$ для любого $i \neq j$) в $\mathcal{A}_r$ дают все возможные значения $z \in \mathcal{A}_r$ с $|z - z_0| < \rho$. Рассмотрим ψ, так что $\Upsilon_{\zeta-a,z-a}$ имеет вложение в $\mathbf{K}$ для любого $\zeta \in \psi$, что в итоге не является ограничительным в силу теоремы 2.15.

В силу последнего утверждения используя альтернативность $\mathbf{K}$, рассмотрим $z \in B(a, \rho', \mathcal{A}_r)$ с $0 < \rho' < \rho$, тогда $|z - a| < |\zeta - a|$ для любого $\zeta \in \psi$ и $(\zeta - a - (z - a))^{-1} = (1 - (\zeta - a)^{-1}(z - a))^{-1}(\zeta - a)^{-1} = \sum_{k=0}^\infty((\zeta - a)^{-1}(z - a))^k(\zeta - a)^{-1}$, где $0 \notin \psi$. Поэтому,

$$(3.14) \quad 2\pi F(z)M = \sum_{k=0}^\infty \phi_k(z),$$

$$\text{где } \phi_k(z) := (\int_\psi F(\zeta)((\zeta - a)^{-1}(z - a))^k(\zeta - a)^{-1}d\zeta).$$

Таким образом, $|\phi_k(z)| \leq \sup_{\zeta \in \psi}|F(\zeta)|(\rho'/\rho)^{-k}$ для любого $z \in B(a, \rho', \mathcal{A}_r)$ и ряд (3.14) сходится равномерно на $B(a, \rho', \mathcal{A}_r)$. Каждая функция $\phi_k(z)$ очевидно $\mathcal{A}_r$ локально

z-аналитична на $B(a, \rho', \mathcal{A}_r)$, следовательно, также $F(z)M$ локально z-аналитична. Поскольку для любого $a \in U$ существует $\rho' > 0$, для которого это выполняется, то $F(z)M$ является $\mathcal{A}_r$ локально z-аналитической функцией. Теперь запишем $f(z) = \sum_{s\in \mathbf{b}} f_s s$, где $f_s \in \mathbf{R}$ для любого $s \in \mathbf{b}$. Если петля γ невырождена, тогда петли $s\gamma$, γs, $(2^r - 2)^{-1}\{-\gamma + \sum_{s\in\hat{b}} s(\gamma s^*)\} = \tilde{\gamma}$ невырождены. Если

(i) $\int_\gamma f(\zeta)d\zeta = 0$, то $\int_\gamma sf(\zeta)d\zeta = 0$ и $\int_\gamma f(\zeta)sd\zeta = 0$ (см. теорему 2.7). В силу формул 2.8.(2):
$f_1 = (f + (2^r - 2)^{-1}\{-f + \sum_{s\in\hat{b}_r} s(fs^*)\})/2$ и
$f_p = (i_p(2^r - 2)^{-1}\{-f + \sum_{s\in\hat{b}_r} s(fs^*)\} - fi_p)/2$
для любого $i_p \in \hat{b}_r$ (в случае $\mathcal{A}_\infty$ воспользуемся $\lim_{r\to\infty}$ справа в этих формулах, а для $\mathcal{A}_\Lambda$, $card(\Lambda) > \aleph_0$ можно использовать то, что для любого $z \in \mathcal{A}_\Lambda$ существует подалгебра изоморфная $\mathcal{A}_\infty$, содержащая это z) мы имеем, что условие (i) эквивалентно: $\int_\gamma f_s(\zeta)d\zeta = 0$ для любого $s \in \mathbf{b}$. Поэтому, доказательство выше показывает, что каждая функция $2\pi f_s(z)M$ является $\mathcal{A}_r$ локально z-аналитической, где M произвольно в $\mathcal{I}_r$, $|M| = 1$. Но $f_s(z) \in \mathbf{R}$ для любого $z \in U$, следовательно, $f_s(z) = (2\pi f_s(z)M)(2\pi)^{-1}M^* = f_s(z)$ является $\mathcal{A}_r$ локально z-аналитической для любого $s \in \mathbf{b}$, следовательно, f является также $\mathcal{A}_r$ локально z-аналитической на U.

3.11. Замечание. Теоремы 2.11, 2.15, 2.16, 3.10 и следствие 2.13 обосновывают эквивалентность понятий $\mathcal{A}_r$-голоморфных, $\mathcal{A}_r$-интегрально голоморфных и $\mathcal{A}_r$ локально z-аналитических классов функций на областях удовлетворяющих условиям выше.

3.11.1. Определения. Пусть U – открытое подмножество в $\mathcal{A}_r$, $2 \le r \le \infty$ и $f \in C^0(U, \mathcal{A}_r)$, тогда мы скажем, что f обладает первообразной $g \in C^1(U, \mathcal{A}_r)$, если $g'(z).1 = f(z)$ для любого $z \in U$. Область U в $\mathcal{A}_r$ назовем $\mathcal{A}_r$-голоморфно односвязной, если каждая $\mathcal{A}_r$-голоморфная функция на ней обладает первообразной.

Из §3.10 мы получим.

3.11.2. Теорема. *Если $f \in C^\omega_z(U, \mathcal{A}_r)$, $2 \le r \le \infty$, где U является $(2^r - 1)$-связной ($P_m(U)$ является $(2^m - 1)$-связной для любого $4 \le m \in \mathbf{N}$ при $r = \infty$, а при $r = \Lambda$ с $card(\Lambda) > \aleph_0$ также при всевозможных вложениях $\mathcal{A}_\infty$ в $\mathcal{A}_\Lambda$ и всевозможных проекторах P_m); $\pi_{s,p,t}(U)$ просто связна в $\mathbf{C}$ для любых $s = i_{2k}$, $p = i_{2k+1}$ в $\mathbf{b}$, $t \in \mathcal{A}_{r,s,p}$ и $u \in \mathbf{C}_{s,p}$, для которых существует $z = t + u \in U$, U – открытое подмножество в $\mathcal{A}_r$, тогда существует $g \in C^\omega_z(U, \mathcal{A}_r)$, так что $g'(z).1 = f(z)$ для любого $z \in U$.*

3.11.3. Теорема. *Пусть U и V – это $\mathcal{A}_r$-голоморфно односвязные области в $\mathcal{A}_r$, $2 \le r \le \infty$ со связным пересечением $U \cap V \ne \emptyset$. Тогда $U \cup V$ является $\mathcal{A}_r$-голоморфно просто связной.*

3.12. Следствие. *Пусть U – открытое подмножество в $\mathcal{A}^n_r$, $2 \le r \le \infty$, тогда семейство всех $\mathcal{A}_r$-голоморфных функций $f : U \to \mathcal{A}_r$ имеет структуру $\mathcal{A}_r$-алгебра.*

Доказательство. Если $f_1(z) = \alpha g(z)\beta + \gamma h(z)\delta$ или $f_2(z) = g(z)h(z)$ для любого $z \in U$, где α, β, γ и $\delta \in \mathcal{A}_r$ – постоянные, g и h являются $\mathcal{A}_r$-голоморфными функциями на U, тогда F_1 и F_2 являются дифференцируемыми по Фреше на U по $(w_s : s \in \mathbf{b})$ (см. §2.1 и §2.2) и $\partial_{\tilde{z}} f_1(z) = \alpha(\partial_{\tilde{z}} g)\beta + \gamma(\partial_{\tilde{z}} h)\delta = 0$, и $\partial_{\tilde{z}} f_2(z) = (\partial_{\tilde{z}} g)h + g(\partial_{\tilde{z}} h) = 0$, следовательно, f_1 и f_2 также $\mathcal{A}_r$-голоморфны на U.

3.13. Предложение. *Для любой комплексно голоморфной функции f в окрестности $Int(B(q_0, \rho, \mathbf{C}))$, $\infty > \rho > 0$, точки $q_0 \in \mathbf{C}$ и любого $2 \le r \le \infty$, $s \ne p \in \mathbf{b}_r$, существует $\mathcal{A}_r$ z-аналитическая функция g на окрестности $Int(B(a, \rho, \mathcal{A}_r))$ точки $a \in \mathcal{A}_r$, так что $s^* g_{s,p}(u, t_0) = f(v)$ на $Int(B(u_0, \rho, \mathbf{C}))$, $u = s(Re(v) + s^*(pIm_{\mathbf{C}}(v)))$, где $B(x, \rho, X) := \{y \in X : d_X(x, y) \le \rho\}$ – это шар в пространстве X с метрикой d_X, $a = u_0 + t_0$, $u_0 \in \mathbf{C}_{s,p}$, $t_0 \in \mathcal{A}_{r,s,p}$, $u_0 = s(Re(q_0) + s^*(pIm_{\mathbf{C}}(q_0)))$, $Im_{\mathbf{C}}(v) := (v - \tilde{v})/(2i)$.*

Доказательство. Среди условий (2.3.1) имеются независимые:
(3.15) $\partial F_1/\partial\, {}^j w_p = \partial F_{pq^*}/\partial\, {}^j w_q$,
$\partial F_1/\partial\, {}^j w_q = -\partial F_{pq^*}/\partial\, {}^j w_p$
для любого $p = i_m$, $q = i_{m+1} \in \mathbf{b}_r$, $0 \le m \in \mathbf{Z}$. Рассмотрим однородную полиномиальную функция на открытом шаре $Int(B)$ в $\mathcal{A}_r$, так что $P_n(\lambda z) = \lambda^n P_n(z)$ для любого $\lambda \in \mathbf{R}$, $P_n : Int(B) \to \mathcal{A}_r$, тогда P_{n+1} можно записать в виде
(3.16) $P_{n+1}(z) = \sum_{s\in\mathbf{b}_r;k;j_1,...,j_k} C_{s;k;j_1,...,j_k} v_1^{j_1}...v_k^{j_k} s$;
где $v_l := w_{i_l}$ – действительная переменная для любого l, $z = \sum_{s\in\mathbf{b}_r} w_s s$, $0 \le j_1 \in \mathbf{Z}, ..., 0 \le j_k \in \mathbf{Z}$, $k \in \mathbf{N}$, $j_1 + ... + j_k = n + 1$, $C_{s;k;j_1,...,j_k} \in \mathbf{R}$ – действительный коэффициент разложения для любого $s, k, j_1, ..., j_k$. В силу (2.3.1) функция f является право суперлинейно $\mathcal{A}_r$-супердифференцируемой в точке z_0 тогда и только тогда, когда sf является право суперлинейно $\mathcal{A}_r$-супердифференцируемой в z_0 для любого $s \in \hat{b}_r$. Тогда (3.15) применённое к (3.16) дает условия на коэффициенты однородных полиномов давая его правосуперлинейную супердифференцируемость:
(3.17) $C_{1;k;j_1,...,j_m+1,...,j_k}(j_m + 1) = C_{pq^*;k;j_1,...,j_{m+1}+1,...,j_k}(j_{m+1} + 1)$ и
$C_{1;k;j_1,...,j_{m+1}+1,...,j_k}(j_{m+1} + 1) = -C_{pq^*;k;j_1,...,j_m+1,...,j_k}(j_m + 1)$,
для любого $p = i_m$, $q = i_{m+1}$ in $\mathbf{b}_r$. Поскольку $j_l + 1 \ge 1$ для любого l, то коэффициенты справа выражаются через коэффициенты слева, которые могут быть взяты как свободные переменные. Поэтому, для любого $n \ge 0$ существует нетривиальный (ненулевой) P_{n+1} удовлетворяющий (3.15). Очевидно, $\mathbf{R}$-линейное пространство всех правосуперлинейно $\mathcal{A}_r$-супердифференцируемых функций бесконечномерно, так как для любого n существует нетривиальное решение однородной системы линейных уравнений (3.17).

Рассмотрим сначала продолжение в классе $\mathcal{A}_r$-голоморфных функций с супердифференциалом, который необязательно правосуперлинеен на супералгебре $\mathcal{A}_r$. Поскольку f голоморфна в $Int(B(q_0, \rho, \mathbf{C}))$, то она имеет разложение $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(q - q_0)^n$, где $f_n \in \mathbf{C}$ – коэффициенты разложения, $q \in Int(B(q_0, \rho, \mathbf{C}))$. Рассмотрим его продолжение на $Int(B(z_0, \rho, \mathcal{A}_r))$, так что $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z - z_0)^n$, $z_0 = u_0 + t_0$, $u_0 = s(Re(q_0) + s^*(pIm_{\mathbf{C}}(q_0)))$, $t_0 \in \mathcal{A}_{r,s,p}$. Очевидно, что этот ряд сходится для любого $z \in Int(B(z_0, \rho, \mathcal{A}))$ и это продолжение f является $\mathcal{A}_r$-голоморфным, так как $f_n \in \mathcal{A}_r$ для любого n и $\partial f/\partial\tilde{z} = 0$.

Рассмотрим теперь более узкий класс $\mathcal{A}_r$ голоморфных функций с правосуперлинейным супердифференциалом на супералгебре $\mathcal{A}_r$. Условия Коши-Римана для комплексно голоморфных функций являются частными случаями (частью) условий (3.15). Сгруппировав ряд для комплексно голоморфной функции f в ряд по однородным полиномам и применив (3.17), мы получим коэффициенты разложения для правосуперлинейно супердифференцируемого продолжения функции f на $Int(B(z_0, \rho, \mathcal{A}))$.

3.14. Предложение. *Если f является $\mathcal{A}_r$-голоморфной функцией на открытом подмножестве U в $\mathcal{A}_r$, $2 \le r \le \infty$, а $ker(f'(z_0)) = \{0\}$ и $f'(z_0)$ является правосуперлинейной, тогда она является конформным отображением в отмеченной точке $z_0 \in U$, то есть, сохраняющей углы между дифференцируемыми кривыми. Если $r = 3$, $\mathcal{A}_3 = \mathbf{K}$, то $ker(f'(z_0)) = \{0\}$ тогда и только тогда, когда $f'(z_0) \ne 0$.*

Доказательство. Пусть $z_0 \in U$ и f является правосуперлинейно супердифференцируемой в z_0. Рассмотрим скалярное произведение $(*, *)_r$ в $\mathbf{C}^m$ как во введении, $m = 2^{r-1}$ для $r < \infty$, или в $l_2(\Lambda, \mathbf{C})$ наследуемое из $\mathcal{A}_\Lambda$ при $card(\Lambda) \ge \aleph_0$, где $(x, y)_{l_2} = \lim_{r\to\infty}(x_r, y_r)_r$ (см. также §3.6.2). Правосуперлинейному оператору $f'(z_0)$ соответствует единственный ограниченный оператор A на $\mathbf{C}^m$ или $l_2(\Lambda, \mathbf{C})$ соответственно, так что $ker(A) = \{0\}$, то есть, $Ah = 0$ тогда и только тогда, когда $h = 0$. Если $r = 3$, то A обратим тогда и только тогда, когда $f'(z_0) \ne 0$, так как $f'(z_0) \in \mathcal{A}_r$ и $\mathbf{K}$ является альтернативной: $(ab)y = a$ имеет единственное решение y для любого

$b \ne 0$ in $\mathbf{K}$. В силу полярного разложения (3.5) $f'(z_0) = \rho \exp(M)$, где $\rho > 0$ и $M \in \mathcal{I}_r$. Тогда сопряженный оператор A^* соответствует $\rho \exp(-M)$, но $\exp(-M)\exp(M) = 1$, следовательно, A является унитарным оператором: $A \in U(m)$ или $A \in U(\infty)$ соответственно. Поскольку унитарная группа сохраняет скалярное произведение, то $f(z)$ сохраняет угол α между двумя дифференцируемыми кривыми в U пересекающимися в отмеченной точке z_0: если ψ и $\phi : (-1,1) \to U$ являются двумя дифференцируемыми кривыми пересекающимися в точке $z_0 \in U$, то $f(\psi(\theta))' = f'(z)|_{z=\psi(\theta)}.\psi'(\theta)$, где $\cos(\alpha) = Re(\psi'(0), \phi'(0))/(|\psi'(0)||\phi'(0)|)$ при $\psi'(0) \ne 0$ и $\phi'(0) \ne 0$.

3.14.1. Замечание. Для любого $r \geq 4$ алгебра Кэли-Диксона не является алгеброй с делением, следовательно, условие $ker(f'(z_0)) = \{0\}$ необходимо в предложении 3.14.

3.15. Теорема. *Пусть f является $\mathcal{A}_r$-голоморфной функцией, $2 \leq r \leq \infty$ или $r = \Lambda$ с $card(\Lambda) > \aleph_0$, на открытом подмножестве U в $\mathcal{A}_r$, так что $\sup_{z\in U, h\in B(0,1,\mathcal{A}_r)} |[f(z)(\zeta - z)^{-2}]\hat{}.h| \leq C/|\zeta - z|^2$ для любого $\zeta \in \mathcal{A}_r \setminus cl(U)$. Тогда $|f'(z)| \leq C/d(z)$ для любого $z \in U$, где $d(z) := \inf_{\zeta\in\mathcal{A}_r\setminus U} |\zeta - z|$; $|f(\xi) - f(z)|/|\xi - z| \leq 2C/\rho$ для любого ξ и $z \in B(a, \rho/2, \mathcal{A}_r) \subset Int(B(a, \rho, \mathcal{A}_r)) \subset U$, где $\rho > 0$. В частности, если f – это $\mathcal{A}_r$-голоморфная функция с ограниченной $[f(z)(\zeta - z)^{-2}]\hat{}.h|\zeta - z|^2$ на $\mathcal{A}_r^2 \times B(0,1,\mathcal{A}_r)$ с $|\zeta| \geq 2|z|$, то есть, $\sup_{\zeta,z\in\mathcal{A}_r, |\zeta|\geq 2|z|, h\in B(0,1,\mathcal{A}_r)} |[f(z)(\zeta - z)^{-2}]\hat{}.h||\zeta - z|^2 < \infty$, Тогда f постоянна.*

Доказательство. В силу теоремы 3.9 существует спрямляемый путь γ в U, так что

$$(3.18) \quad (\partial^k f(z)M/\partial z^k).h = (2\pi)^{-1}(\int_{\gamma+z_0} f(\zeta)(\partial^k(\zeta - z)^{-1}/\partial z^k).hd\zeta)$$

для любого $h \in \mathcal{A}_r^k$, где $\gamma(t) = \rho' \exp(2\pi t M)$ с $t \in [0,1]$, $0 < \rho'$. Тогда, в частности, для $h = 1^{\otimes k}$, которое опустим для краткости, мы получим

$$(3.19) \quad (\partial^k f(z)M/\partial z^k) = k!(2\pi)^{-1}(\int_{\gamma+z_0} f(\zeta)(\zeta - z)^{-k-1}d\zeta).$$

Поэтому, $|f'(z)| \leq C/d(z)$, так как $|(\partial(\zeta - z)^{-1}/\partial z).s| = |\zeta - z|^{-2}$ для любого $s \in \mathbf{b}$. Поскольку $\int_\zeta^z df(z) = f(z) - f(\zeta)$, то $|f(\xi) - f(z)|/|\xi - z| \leq \sup_{z\in B(a,\rho/2,\mathcal{A}_r)}[C/d(z)] \leq 2C/\rho$, где $\rho' < \rho/2$, ξ и $z \in B(a, \rho/2, \mathcal{A}_r) \subset Int(B(a, \rho, \mathcal{A}_r)) \subset U$. Беря ρ стремящимся к бесконечности, если f является $\mathcal{A}_r$-голоморфной с ограниченной $[f(z)(\zeta - z)^{-2}]\hat{}.h|\zeta - z|^2$ на $\mathcal{A}_r^2 \times B(0,1,\mathcal{A}_r)$ при $|\zeta| \geq 2|z|$, тогда $f'(z) = 0$ для любого $z \in \mathcal{A}_r$, так как f является локально z-аналитической и $\sup_{\zeta,z\in U, |\zeta|\geq 2|z|, h\in B(0,1,\mathcal{A}_r)} |[f(z)(\zeta - z)^{-2}]\hat{}.h||\zeta - z|^2 < \infty$ ограничен, следовательно, f постоянна на $\mathcal{A}_r$.

3.16. Замечание. Теоремы 3.9, 3.10 и 3.15 являются $\mathcal{A}_r$-аналогами теорем Коши, Морера и Лиувилля соответственно. Очевидно, что теорема 3.15 также выполняется для правосуперлинейной $\hat{f}(z)$ на $\mathcal{A}_r$ для любого $z \in U$ и с ограниченной $\hat{f}(z).h$ на $U \times B(0,1,\mathcal{A}_r)$ вместо $[f(z)(\zeta - z)^{-2}]\hat{}.h|\zeta - z|^2$.

3.17. Теорема. *Пусть $P(z)$ – полином на $\mathcal{A}_r$, $2 \leq r \leq \infty$ или $r = \Lambda$ с $card(\Lambda) > \aleph_0$, так что $P(z) = z^{n+1} + \sum_{\eta(k)=0}^n (A_k, z^k)$, где $A_k = (a_{1,k}, ..., a_{m,k})$, $a_{j,l} \in \mathcal{A}_r$, $k = (k_1, ..., k_m)$, $0 \leq k_j \in \mathbf{Z}$, $\eta(k) = k_1 + ... + k_m$, $0 \leq m = m(k) \in \mathbf{Z}$, $m(k) \leq \eta(k) + 1$, $(A_k, z^k) := \{a_{1,k}z^{k_1}...a_{m,k}z^{k_s}\}_{q(m+\eta(k))}$, $z^0 := 1$. Тогда $P(z)$ имеет корень в $\mathcal{A}_r$.*

Доказательство. Рассмотрим сначала $r < \infty$. Предположим, что $P(z) \ne 0$ для любого $z \in \mathcal{A}_r$. Рассмотрим спрямляемый путь γ_R в $\mathcal{A}_r$, так что $\gamma_R([0,1]) \cap \mathcal{A}_r = [-R, R]$, а вне $[-R, R]$: $\gamma_R(t) = R\exp(2\pi t M)$, где M – это вектор в $\mathcal{I}_r$ с $|M| = 1$, $0 \leq t \leq 1/2$. Выразим $\tilde{P}$ также через переменную z с использованием

$z^* = (2^r - 2)^{-1}\{-z + \sum_{s\in\hat{b}_r} s(zs^*)\}$. Поскольку $\lim_{|z|\to\infty} P(z)z^{-n-1} = 1$, то в силу теоремы 2.11 $\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R}(P\tilde{P})^{-1}(z)dz = \int_{-R}^{R}(P\tilde{P})^{-1}(v)dv = \int_{-R}^{R}|P(v)|^{-2}dv \geq 0$. Но $\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R}(P\tilde{P})^{-1}(z)dz = \lim_{R\to\infty}\pi R^{-2n-1} = 0$. С другой стороны, $\int_{-R}^{R}|P(v)|^{-2}dv = 0$ тогда и только тогда, когда $|P(v)|^{-2} = 0$ для любого $v \in \mathbf{R}$. Это противоречит нашему предположению, следовательно, существует корень $z_0 \in \mathcal{A}_r$, то есть, $P(z_0) = 0$.

В случае $r = \infty$ можно воспользоваться тем, что $z = \lim_{r\to\infty} z_r$. При $card(\Lambda) \geq \aleph_0$ рассмотрим все коэффициенты полинома принадлежащие $\mathcal{A}_\Lambda$. Их множество конечно. Минимальная подалгебра S_p в $\mathcal{A}_\Lambda$ порожденная этими коэффициентами конечномерна над $\mathbf{R}$. Таким образом, можно взять ограничение $P(z)$ на S_p, в которой $P(z)$ имеет корень, а значит и в $\mathcal{A}_\Lambda$.

3.18. Теорема. *Пусть f – это $\mathcal{A}_r$-голоморфная функция на открытом подмножестве U в $\mathcal{A}_r$, $2 \leq r \leq \infty$ или $r = \Lambda$ с $card(\Lambda) > \aleph_0$. Предположим, что $\epsilon > 0$ и K – это компактное подмножество в U. Тогда для любого $M \in \mathcal{I}_r$, $|M| = 1$, существует функция $g_M(z) = P_\infty(z) + \sum_{k=1}^{\nu} P_k[(z - a_k)^{-1}]$, $z \in \mathcal{A}_r \setminus \{a_1, ..., a_\nu\}$, $\nu \in \mathbf{N}$, где P_∞ и P_j – полиномы, $a_j \in Fr(U)$, $Fr(U)$ обозначает топологическую границу U в $\mathcal{A}_r$, так что $|f(z)M - g_M(z)| < \epsilon$ для любого $z \in \mathsf{K}$. Если $r = 2$ или $r = 3$, тогда это утверждение выполняется также для $M = 1$.*

Доказательство. Рассмотрим кубы S_j с ребрами параллельными осям координат соответствующим каноническим базисным векторам, причем ребра имеют длину n^{-1} в $\mathcal{A}_r$. Положим $S := \cup_j S_j$, так что $\mathsf{K} \subset Int(S)$, где $n \in \mathbf{N}$ стремится к бесконечности. Поскольку f является $\mathcal{A}_r$-голоморфной и K – компакт, то мы можем применить формулу (3.10) к каждому пути $\gamma \subset Fr(S_j)$ определённому направляющим вектором $M \in \mathcal{I}_r$, $|M| = 1$. Можно усмотреть, что f можно равномерно аппроксимировать на K суммой вида $\sum_{k=1}^{\mu}\{(a_{1,k}(\zeta_k - z)^{-1}a_{2,k})\}_{q(3)}$, где $a_{j,k} \in \mathcal{A}_r$, $\zeta_k \in Fr(S_j)$. Для данного $n \in \mathbf{N}$, если $b \in Fr(S_j)$, то существует $a \in Fr(U_j) \cup \partial B(0, \rho, \mathcal{A}_r)$, так что $|b - a| \leq n^{-1}$. Если $z \in \mathsf{K}$ и $|z - a| \geq n^{-1}$, тогда ряд $(z - b)^{-1} = (\sum_{k=0}^{\infty}[(z - a)^{-1}(b - a)]^k)(z - a)^{-1}$ сходится равномерно на K и ясно, что fM можно аппроксимировать равномерно на K функцией такого вида. В частности, при $r = 2$ или $r = 3$ уравнение $(ab)y = a$ имеет решение для любого $b \neq 0$ в $\mathcal{A}_r$, что даёт аппроксимацию f посредством $g_M M^*$.

3.19. Замечание и определения. Рассмотрим одноточечную (Александровскую) компактификацию $\hat{\mathcal{A}}_r$ локально компактного топологического пространства $\mathcal{A}_r$ для $2 \leq r \in \mathbf{N}$. Она гомеоморфна единичной 2^r-мерной сфере S^{2^r} в Евклидовом пространстве $\mathbf{R^{2^r+1}}$. В случае $r = \Lambda$ с $card(\Lambda) \geq \aleph_0$ рассмотрим сферу S^Λ единичного радиуса с центром в 0 в $\mathbf{R} \oplus \mathcal{A}_\Lambda$, так что $\mathcal{A}_\Lambda$ топологически гомеоморфна $S^\Lambda \setminus \{(1, 0, 0, ...)\}$. Если ζ – это точка в S^{2^r} или в S^Λ отличная от $(1, 0, 0, ...)$, тогда прямая линия содержащая $(1, 0, 0, ...)$ и ζ пересекает π_S в конечной точке z, где π_S – это 2^r-мерное или $card(\Lambda)$-мерное соответственно подпространство над $\mathbf{R}$ ортогональное вектору $(1, 0, 0, ...)$ и касательное к S^{2^r} или S^Λ в южном полюсе $(-1, 0, 0, ...)$. Это определяет биективное непрерывное отображение из $S^{2^r} \setminus \{(1, 0, 0, ...)\}$ или $S^\Lambda \setminus \{(1, 0, 0, ...)\}$ на π_S, так что $(1, 0, 0, ...)$ соответствует точке в бесконечности. Поэтому каждая функция на подмножестве U в $\mathcal{A}_r$ как топологическое пространство можно рассмотреть на гомеоморфном подмножестве V в S^{2^r} или S^Λ. Бесконечномерная сфера S^Λ не является локально компактной относительно топологии нормы, но она компактна относительно слабой топологии наследуемой из $l_2(\Lambda, \mathbf{R})$ (см. [9, 28]).

Пусть $z_0 \in \hat{\mathcal{A}}_r$ – отмеченная точка. Если функция f определена и $\mathcal{A}_r$-голоморфна на $V \setminus \{z_0\}$, где V – это окрестность точки z_0, тогда z_0 называется изолированной особой точкой для f.

Предположим, что f является $\mathcal{A}_r$-голоморфной функцией в $B(a,0,\rho,\mathcal{A}_r)\setminus\{a\}$ для некоторого $\rho>0$. Тогда мы скажем, что f имеет изолированную особенность в a. Пусть $B(\infty,\rho,\mathcal{A}_r):=\{z\in\hat{\mathcal{A}}_r$, так что $\rho^{-1}<|z|\le\infty\}$. Тогда мы скажем, что f имеет изолированную сингулярность в ∞, если она $\mathcal{A}_r$-голоморфна в некотором шаре $B(\infty,\rho,\mathcal{A}_r)$.

Пусть $f:U\to\mathcal{A}_r$ – это функция, где U – окрестность $z\in\hat{\mathcal{A}}_r$. Тогда f называется *мероморфной* в z, если f имеет изолированную сингулярность в z. Если U является открытым подмножеством в $\hat{\mathcal{A}}_r$, тогда f называется мероморфной в U, если f мероморфна в каждой точке $z\in U$. Если U – это область определения f и f мероморфна в U, тогда f называется мероморфной в U. Обозначим через $\mathbf{M}(U)$ множество всех мероморфных функций на U. Пусть f является мероморфной в области U в $\hat{\mathcal{A}}_r$. Точка

$$c\in\bigcap_{V\subset U, V\text{ замкнуто и ограничено}} cl(f(U\setminus V))$$

называется предельным значением f.

3.20. Предложение. *Пусть f является $\mathcal{A}_r$-голоморфной функцией, $2\le r\le\infty$ или $r=\Lambda$ с $card(\Lambda)>\aleph_0$, с право $\mathcal{A}_r$-суперлинейным супердифференциалом на открытом связном подмножестве $U\subset\hat{\mathcal{A}}_r$ и предположим, что существует последовательность точек $z_n\in U$ имеющих предельную точку $z\in U$, так что $f(z_n)=0$ для любого $n\in\mathbf{N}$, тогда $f=0$ всюду на U.*

Доказательство следует из локальной z-аналитичности f и того факта, что $f^{(k)}(z)=0$ для любого $0\le k\in\mathbf{Z}$ (см. определение 2.2, теоремы 2.11 и 3.10), когда $f'(z)$ является право $\mathcal{A}_r$-суперлинейной на U. Поэтому, f равна нулю на окрестности точки z. Максимальное подмножество в U, на котором f равна нулю открыто в U. С другой стороны, оно замкнуто, так как f непрерывна, следовательно, f равна нулю на U, так как U связно.

3.21. Теорема. *Пусть $\mathbf{A}$ обозначает семейство всех функций f таких, что f является $\mathcal{A}_r$-голоморфной на $U:=Int(B(a,\rho,R,\mathcal{A}_r))$, $3\le r\le\infty$ или $r=\Lambda$ с $card(\Lambda)>\aleph_0$, где a – отмеченная точка в $\mathcal{A}_r$, $0\le\rho<R<\infty$ фиксированы. Пусть $\mathbf{S}$ обозначает подмножество в $\mathbf{Z}^{\mathbf{N}}$, так что для любого $k\in\mathbf{S}$ существует $m(k):=\max\{j:k_j\ne 0, k_i=0$ для любого $i>j\}\in\mathbf{N}$ и пусть $\mathbf{B}$ – семейство конечных последовательностей $b_k=(b_{k,1},...,b_{k,m(k)};q(m(k)+\eta(k)))$, так что $b_{k,j}\in\mathcal{A}_r$ для любого $j=1,...,n$, $n\in\mathbf{N}$, $q(m(k)+\eta(k))$ (см. §2.1). Тогда существует биективное соответствие между $\mathbf{A}$ и $\zeta\in\mathbf{B}^{\mathbf{S}}$, так что*

$$(3.20)\qquad \lim_{m+\eta\to\infty}\ \sup_{z\in B(a,\rho_1,R_1,\mathcal{A}_r)}\ \sum_{k,m(k)=m,\eta(k)=\eta}|\{(b_k,(z-a)^k)\}_{q(m(k)+\eta(k))}|=0$$

для любых ρ_1 и R_1 таких, что $\rho<\rho_1<R_1<R$, где $\eta(k):=k_1+...+k_{m(k)}$, $\zeta(k)=:b_k=(b_{k,1},...,b_{k,m(k)};q(m(k)+\eta(k)))$, $\{(b_k,z^k)\}_{q(m(k)+\eta(k))}=\{b_{k,1}z^{k_1}...b_{k,m(k)}z^{k_{m(k)}}\}_{q(m(k)+\eta(k))}$ для любого $k\in\mathbf{S}$, то есть, $f\in\mathbf{A}$ может быть представлена сходящейся последовательностью

$$(3.21)\qquad f(z)=\sum_{b\in\zeta}\{(b_k,(z-a)^k)\}_{q(m(k)+\eta(k))}.$$

Доказательство. Если выполнено условие (3.20), то ряд (3.21) сходится на $B(a,\rho',R',\mathcal{A}_r)$ для любых ρ' и R' таких, что $\rho<\rho'<R'<R$, так как ρ_1 и R_1 являются произвольными удовлетворяющими неравенству $\rho<\rho_1<R_1<R$ и $\sum_{n=0}^\infty p^n$ сходится для любого $|p|<1$. В частности, беря $\rho_1<\rho'<R'<R_1$ для $p=R'/R_1$

или $p = \rho_1/\rho'$. Поэтому, из (3.20) и (3.21) следует, что f представленная рядом (3.21) является $\mathcal{A}_r$-голоморфной на U.

Обратно, пусть f принадлежит семейству $\mathbf{A}$. В силу теорем 2.11 и 3.9 существуют две спрямляемые петли γ_1 и γ_2, так что $\gamma_2(t) = a + \rho' \exp(2\pi t M_2)$ и $\gamma_1(t) = a + R' \exp(2\pi t M_1)$, где $t \in [0,1]$, M_1 и $M_2 \in \mathcal{A}_r$ с $|M_1| = 1$ и $|M_2| = 1$, где $\rho < \rho' < R' < R$, потому что как и в §3.9 U может быть представлена как конечное объединение областей U_j, каждая из которых удовлетворяет условиям теоремы 2.11 (см. также §3.6.5). Использование конечного числа спрямляемых путей w_j (соединяющих γ_1 и γ_2 внутри U_j) обходимых дважды в одном и обратном направлении приводит к заключению, что для любого $z \in Int(B(a, \rho', R', \mathcal{A}_r))$ функция $f(z)M$ с $M = M_1 = M_2$ представляется интегральной формулой:

$$(3.22) \quad f(z)M = (2\pi)^{-1}\{(\int_{\gamma_1} f(\zeta)(\zeta - z)^{-1} d\zeta) - (\int_{\gamma_2} f(\zeta)(\zeta - z)^{-1} d\zeta)\}.$$

На γ_1 имеется неравенство: $|(\zeta - a)^{-1}(z - a)| < 1$, на γ_2 выполняется другое неравенство: $|(\zeta - a)(z - a)^{-1}| < 1$. В силу §3.6.2 как и в §3.10 рассматривая различные возможные вложения $\Upsilon_{\zeta - a, z - a} \subset \mathbf{K}$ в $\mathcal{A}_r$ и используя свойство альтернативности алгебры октонионов $\mathbf{K}$, мы получим, что для γ_1 ряд

$$(\zeta - z)^{-1} = (\sum_{k=0}^{\infty} ((\zeta - a)^{-1}(z - a))^k)(\zeta - a)^{-1}$$

сходится равномерно по $\zeta \in B(a, R_2 + \epsilon, R_1, \mathcal{A}_r)$ и $z \in B(a, \rho_2, R_2, \mathcal{A}_r)$ для ζ и z, так что $\Upsilon_{\zeta - a, z - a} \hookrightarrow \mathbf{K}$, в то время как для γ_2 ряд

$$(\zeta - z)^{-1} = -(z - a)^{-1}(\sum_{k=0}^{\infty} ((\zeta - a)(z - a)^{-1})^k)$$

сходится равномерно по $\zeta \in B(a, \rho_1, \rho_2 - \epsilon, \mathcal{A}_r)$ и $z \in B(a, \rho_2, R_2, \mathcal{A}_r)$ для ζ и z таких, что $\Upsilon_{\zeta - a, z - a} \hookrightarrow \mathbf{K}$, для любого $\rho' < \rho_2 < R_2 < R'$ и любого $0 < \epsilon < \min(\rho_2 - \rho_1, R_1 - R_2)$, так как коэффициенты разложений по $((\zeta - a)^{-1}(z - a))$ в первом ряду и по $((\zeta - a)(z - a)^{-1})$ во втором ряду не зависят от типа вложения. Рассмотрим соответствующие γ_1 и γ_2, так что $\zeta \in \gamma_1$ или $\zeta \in \gamma_2$ соответственно и a, ζ, z подчиняются условию $\Upsilon_{\zeta - a, z - a} \hookrightarrow \mathbf{K}$, которое в итоге не является ограничительным в силу теоремы 2.15. Следовательно,

$$(3.23) \quad f(z)M = \sum_{k=0}^{\infty} (\phi_k(z) + \psi_k(z)), \text{ где}$$

$$\phi_k(z) := (2\pi)^{-1}\{\int_{\gamma_1} f(\zeta)((((\zeta - a)^{-1}(z - a))^k (\zeta - a)^{-1}) d\zeta)\},$$

$$\psi_k(z) := (2\pi)^{-1}\{\int_{\gamma_2} f(\zeta)((z - a)^{-1}((\zeta - a)(z - a)^{-1})^k) d\zeta)\},$$

где $\phi_k(z)$ и $\psi_k(z)$ являются $\mathcal{A}_r$-голоморфными функциями, следовательно, fM имеет разложение (3.21) в U, так как в силу §2.15 и §3.9 существует $\delta > 0$, так что интегралы для ϕ_k и ψ_k вдоль γ_1 и γ_2 те же для любого $\rho' \in (\rho_1, \rho_1 + \delta)$, $R' \in (R_1 - \delta, R_1)$.

Используя определение $\mathcal{A}_r$ интеграла вдоль пути, мы получим ряд (3.21) сходящийся на U. Варьируя $z \in U$ по $|z|$ и $Arg(z)$, мы получим, что ряд (3.21) абсолютно сходится на U, следовательно, (3.20) выполнено для fM. Поскольку $M \in \mathcal{A}_r$, $|M| = 1$, произвольно, тогда как и в доказательстве теоремы 3.10 мы получим утверждение этой теоремы для f.

3.22. Замечания и определения. Пусть γ является замкнутой кривой в $\mathcal{A}_r$. Существуют естественные проекции из $\mathcal{A}_r$ на комплексные плоскости: $\pi_s(z) = w_1 + w_s s$ для любого $s \in \hat{b}_r$, где $2 \le r \le \infty$ или $r = \Lambda$ с $card(\Lambda) > \aleph_0$, $z = \sum_{s \in \mathbf{b}_r} w_s s$ с действительной w_s для любого $s \in \mathbf{b}_r$. Поэтому, $\pi_s(\gamma) =: \gamma_s$ – это кривые в комплексных плоскостях $\mathbf{C_s}$ изоморфных $\mathbf{R} \oplus \mathbf{R}s$. Путь γ в $\mathcal{A}_r$ замкнут (петля, иными словами) тогда и только тогда, когда γ_s замкнут для любого $s \in \hat{b}_r$, то есть, $\gamma(0) = \gamma(1)$ и $\gamma_s(0) = \gamma_s(1)$ соответственно. В каждой комплексной плоскости существует стандартное понятие комплексного топологического индекса $In(a_s, \gamma_s)$ петли γ_s в точке $a_s = \pi_s(a)$. Поэтому, существует вектор $In(a, \gamma) := \{In(a_s, \gamma_s) : s \in \hat{b}_r\}$, который мы назовем топологическим индексом петли γ в точке $a \in \mathcal{A}_r$. Этот топологический индекс инвариантен относительно гомотопий удовлетворяющих условиям теоремы 3.9.

Рассмотрим теперь стандартный замкнутый путь $\gamma(s) = a + \rho \exp(2\pi t n M)$, где $M \in \mathcal{I}_r$ с $|M| = 1$, $n \in \mathbf{Z}$, $\rho > 0$, $t \in [0,1]$. Тогда $\hat{In}(a, \gamma) := (2\pi)^{-1}(\int_\gamma dLn(z-a)) = nM$ называется $\mathcal{A}_r$-индексом γ в точке a. Он инвариантен относительно гомотопий удовлетворяющих условиям теоремы 3.9. Более того, $\hat{In}(h_1(ah_2), h_1(\gamma h_2)) = \hat{In}(a, \gamma)$ для любых h_1 и $h_2 \in \mathcal{A}_r \setminus \{0\}$ таких, что $h_1(Mh_2) = M$. Для $M = \sum_{s \in \hat{b}_r} m_s s$ выполняется равенство $\hat{In}(a, \gamma) = \sum_{s \in \hat{b}_r} In(a_s, \gamma_s) m_s s$ (принимая соответствующее соглашение для знаков индексов в каждой комплексной плоскости $\mathbf{C_s}$ и соглашение о положительном направлении обхода вдоль кривых). В силу свойств Ln для любой кривой ψ в $\mathcal{A}_r$ существует $\int_\gamma dLn(z-a) = 2\pi q M$ для некоторых $q \in \mathbf{R}$ и $M \in \mathcal{I}_r$ с $|M| = 1$. Для петли ψ с точностью до композиции гомотопий, каждая из которых характеризуется гомотопиями в $\mathbf{C_s}$ для $s \in \hat{b}_r$ существует стандартная γ с генератором M, для которого $\hat{In}(a, \gamma) = qM$, где $q \in \mathbf{Z}$. Поэтому, мы можем взять за определение $\hat{In}(a, \psi) = \hat{In}(a, \gamma)$. Определим также вычет мероморфной функции с изолированной особенностью в точке $a \in \mathcal{A}_r$ как

(i) $res(a,f)M := (2\pi)^{-1}(\int_\gamma f(z)dz)$, где $\gamma(t) = a + \rho \exp(2\pi t M) \subset V$, $\rho > 0$, $|M| = 1$, $M \in \mathcal{I}_r$, $t \in [0,1]$, f является $\mathcal{A}_r$-голоморфной на $V \setminus \{a\}$. Продолжим $res(a,f)M$ по формуле (i) на $\mathcal{I}_r$ как

(ii) $res(a,f)M := [res(a,f)(M/|M|)]|M|$, $\forall M \ne 0$; $res(a,f)0 := 0$,

когда $res(a,f)M$ конечен для любого $M \in \mathcal{I}_r$, $|M| = 1$. Для $r = 2$ или $r = 3$ уравнение для $res(a,f)$ можно разрешить для любого $M \ne 0$.

Если f имеет изолированную особую точку $a \in \hat{\mathcal{A}}_r$, тогда коэффициенты b_k её ряда Лорана (см. §3.21) независимы от $\rho > 0$. Общий ряд называется a-рядом Лорана. Если $a = \infty$, то $g(z) := f(z^{-1})$ имеет 0-ряд Лорана с коэффициентами c_k такими, что $c_{-k} = b_k$. Пусть $\beta := \sup_{b_k \ne 0} \eta(k)$, где $\eta(k) = k_1 + ... + k_m$, $m = m(k)$ для $a = \infty$; $\beta = \inf_{b_k \ne 0} \eta(k)$ для $a \ne \infty$. Мы скажем, что f имеет устранимую особенность, полюс, существенную особенность в ∞ в соответствии с $\beta \le 0$, $0 < \beta < \infty$, $\beta = +\infty$. Во втором случае β называется порядком полюса в бесконечности ∞. Для конечного a соответствующие случаи следующие: $\beta \ge 0$, $-\infty < \beta < 0$, $\beta = -\infty$. Если f имеет полюс в a, тогда $|\beta|$ называется порядком полюса в a.

Значение функции $\partial_f(a) := \inf\{\eta(k) : b_k \ne 0\}$ называется дивизором f в точке $a \ne \infty$, $\partial_f(a) := \inf\{-\eta(k) : b_k \ne 0\}$ для $a = \infty$, где $b_k \ne 0$ означает, что $b_{k,1} \ne 0$,....,$b_{k,m(k)} \ne 0$. Тогда $\partial_{f+g}(a) \ge \min\{\partial_f(a), \partial_g(a)\}$ для любого $a \in dom(f) \cap dom(g)$ и $\partial_{fg}(a) = \partial_f(a) + \partial_g(a)$. Для функции f мероморфной на открытом подмножестве U в $\hat{\mathcal{A}}_r$ функция $\partial_f(p)$ по переменной $p \in U$ называется *дивизором* f.

3.23. Теорема. *Пусть* U *– открытая область в* $\hat{\mathcal{A}}_r$, $2 \leq r \leq \infty$, *с* n *различными отмеченными точками* $p_1, ..., p_n$, *и пусть* f *является* $\mathcal{A}_r$*-голоморфной функцией на* $U \setminus \{p_1, ..., p_n\} =: U_0$ *и* ψ *– спрямляемая петля лежащая в* U_0, *так что* U_0 *удовлетворяет условиям теоремы 3.9 для любого* $z_0 \in \{p_1, ..., p_n\}$. *Тогда*

$$\int_\psi f(z)dz = 2\pi \sum_{j=1}^{n} res(p_j, f)\hat{I}n(p_j, \psi)$$

и $res(p_j, f)M$ *является* $\mathbf{R}$*-однородным* $\mathcal{I}_r$*-аддитивным (по переменной* M *в* $\mathcal{I}_r$*)* $\mathcal{A}_r$*-значным функционалом для любого* j.

Доказательство. Для любого p_j рассмотрим главную часть T_j ряда Лорана для f в окрестности p_j, то есть,
$T_j(z) = \sum_{k,\eta(k)<0} \{(b_k, (z-p_j)^k)\}_{q(m(k)+\eta(k))}$, где $\eta(k) = k_1 + ... + k_n$ для $k = (k_1, ..., k_n)$ (см. теорему 3.21). Поэтому, $h(z) := f(z) - \sum_j T_j(z)$ – это функция имеющая $\mathcal{A}_r$-голоморфное продолжение на U. В силу теоремы 3.9 для $\mathcal{A}_r$-голоморфной функции g в окрестности V точки p и спрямляемой петли ζ выполняется равенство:

$$g(p)\hat{I}n(p, \zeta) = (2\pi)^{-1}(\int_\zeta g(z)(z-p)^{-1}dz)$$

(см. §3.22). Мы можем рассмотреть достаточно малые петли ζ_j вокруг каждой p_j с $\hat{I}n(p_j, \zeta_j) = \hat{I}n(p_j, \gamma)$ для любого $j = 1, ..., n$. Тогда $\int_{\zeta_j} f(z)dz = \int_{\zeta_j} T_j(z)dz$ для любого j. Представляя U_0 как конечное объединение открытых областей U_j и соединяя ζ_j с γ путями ω_j проходимыми в одном и обратном направлении как в теореме 3.9, мы получим

$$\int_\gamma f(z)dz + \sum_j \int_{\zeta_j^-} f(z)dz = 0,$$

следовательно,

$$\int_\gamma f(z)dz = \sum_j \int_{\zeta_j} f(z)dz = \sum_j 2\pi res(p_j, f)\hat{I}n(p_j, \gamma),$$

где $\hat{I}n(p_j, \gamma)$ и $res(p_j, f)$ инвариантны относительно гомотопий удовлетворяющих условиям теоремы 3.9. Поскольку $\int_{\zeta_j} g(z)dLn(z-p_j)$ является $\mathbf{R}$-однородным и $\mathcal{I}_r$-аддитивным функционалом относительно направляющего вектора $M \in \mathcal{I}_r$ петли ζ_j, тогда $res(p_j, f)M$ определённый формулой 2.22.(i, ii) является $\mathbf{R}$-однородным $\mathcal{I}_r$-аддитивным по аргументу M в $\mathcal{I}_r$.

3.24. Следствие. *Пусть* f *и* T *те же, что и в §3.23, тогда* $res(p_j, f)M = res(p_j, T_j)M = res(p_j, \sum_{k,\eta(k)=-1} \{(b_k, (z-p_j)^k)\}_{q(m(k)+\eta(k))}M$, *в частности,* $res(p_j, \{b(z-p_j)^{-1}c\}_{q(3)})M = \{bMc\}_{q(3)}$ *для любых* $b, c \in \mathcal{A}_r$.

Доказательство. Первое утверждение следует из §3.23, второе утверждение следует из левой и правой-$\mathcal{A}_r$-линейности интеграла вдоль пути, хотя он не является суперлинейным функциналом (см. теорему 2.7).

3.25. Следствие. *Пусть* U *– открытая область в* $\hat{\mathcal{A}}_r$, $2 \leq r \leq \infty$, *с* n *различными точками* $p_1, ..., p_n$, *пусть также* f *является* $\mathcal{A}_r$*-голоморфной функцией на* $U \setminus \{p_1, ..., p_n\} =: U_0$, $p_n = \infty$, *а* U_0 *удовлетворяет условиям теоремы 3.9 с петлями* ψ, γ *и любой* $z_0 \in \{p_1, ..., p_n\}$. *Тогда* $\sum_{p_j \in U} res(p_j, f)M = 0$.

Доказательство. Если γ – это петля охватывающая p_1,...,p_{n-1}, тогда $\gamma^-(t) := \gamma(1-t)$, где $t \in [0,1]$, охватывает $p_n = \infty$ с положительным направлением обхода петли γ^- относительно p_n. Поскольку $\int_\gamma f(z)dz + \int_{\gamma^-} f(z)dz = 0$, то мы получим из теоремы 3.23, что $\sum_{p_j \in U} res(p_j, f)M = 0$ для любого $M \in \mathcal{I}_r$, следовательно, $\sum_{p_j \in U} res(p_j, f)M = 0$ – это нулевой $\mathbf{R}$-гомогенный $\mathcal{I}_r$-аддитивный $\mathcal{A}_r$-значный функционал на $\mathcal{I}_r$.

3.26. Определения. Пусть f является $\mathcal{A}_r$-голоморфной функцией, $2 \le r \le \infty$, на окрестности V точки $z \in \mathcal{A}_r$. Тогда нижняя грань: $\eta(z; f) := \inf\{k : k \in \mathbf{N}, f^{(k)}(z) \ne 0\}$ называется кратностью нуля функции f в точке z. Пусть f является $\mathcal{A}_r$-голоморфной функцией на открытом подмножестве U в $\hat{\mathcal{A}}_r$, $2 \le r \le \infty$ или $r = \Lambda$ с $card(\Lambda) > \aleph_0$. Предположим, что $w \in \hat{\mathcal{A}}_r$, тогда валентность $\nu_f(w)$ функции f в точке w – это по определению $\nu_f(w) := \infty$, когда множество $\{z : f(z) = w\}$ бесконечно, а в противном случае $\nu_f(w) := \sum_{z, f(z)=w} \eta(z; f)$.

3.26.1. Теорема. *Пусть f является $\mathcal{A}_r$-мероморфной право суперлинейно супердифференцируемой функцией на области $U \subset \hat{\mathcal{A}}_r$. Если $b \in \hat{\mathcal{A}}_r$ и $\nu_f(b) < \infty$, тогда b не является предельным значением f и множество $\{z : \nu_f(z) = \nu_f(b)\}$ является окрестностью точки b. Если $U \ne \hat{\mathcal{A}}_r$ или f не постоянна, то выполняется противоположное утверждение. Тем не менее, оно ложно, когда $f = const$ на $\hat{\mathcal{A}}_r$.*

3.26.2. Теорема. *Пусть U – собственное открытое подмножество в $\hat{\mathcal{A}}_r$, $2 \le r \le \infty$, предположим также, что f и g – две непрерывные функции из $\bar{U} := cl(U)$ в $\hat{\mathcal{A}}_r$, так что на топологической границе $Fr(U)$ области U они удовлетворяют неравенству $|f(z)| < |g(z)|$ для любого $z \in Fr(U)$. Предположим, что f и g являются $\mathcal{A}_r$-мероморфными функциями в U, а h – это единственное непрерывное отображение из $\bar{U}$ в $\hat{\mathcal{A}}_r$, так что $h|_E = f|_E + g|_E$, где $E := \{z : f(z) \ne \infty, g(z) \ne \infty\}$, $[\partial Ln(h(z))/\partial z]$ право суперлинеен в U_{z_0} для любого нуля z_0 функции f и в $U_{z_0} \setminus \{z_0\}$ для любого полюса z_0, где U_{z_0} – это окрестность z_0, $z \in U_{z_0}$ или $z \in U_{z_0} \setminus \{z_0\}$ соответственно. Тогда $\nu_{g|_U}(0) - \nu_{g|_U}(\infty) = \nu_{h|_U}(0) - \nu_{h|_U}(\infty)$.*

Доказательства этих двух теорем аналогичны доказательствам теорем VI.4.1, 4.2 [13]. Для доказательства теоремы 3.26.2 рассмотрим функцию $\zeta(z,t) := tf(z) + g(z)$ для любого $z \in \bar{U}$ и любого $t \in [0,1] \subset \mathbf{R}$. Если z_0 – это полюс функции $h(z)$, то z_0 – это нуль функции $1/h(z)$. Согласно предположению теоремы 3.26.1, предложению 2.3 и теореме 3.9 $res(z_0, Ln(h))$ является право суперлинейным оператором для любого нуля или полюса z_0. С другой стороны существует $\delta > 0$, так что $\Delta_\gamma Arg(1 + tg^{-1}f) = 0$ для любого $t \in [-1,1]$, когда ни один полюс или нуль функции g или f не принадлежит спрямляемой петле γ в U с $dist(\gamma, Fr(U)) < \delta$, где $dist(A,B) := \sup_{z \in A}(\inf_{\xi \in B} |\xi - z|) + (\sup_{\xi \in B} \inf_{z \in A} |\xi - z|)$. Тогда $\int_{z \in \gamma} dLn\zeta(z,t)$ – непрерывная функция по $t \in [0,1]$ принимающая значения $2\pi n M$, где $M \in \mathcal{I}_r$ характеризует спрямляемую петлю γ содержащуюся в U, $|M| = 1$, $n \in \mathbf{Z}$, M не зависит от t. Для любого $\delta > 0$ можно выбрать спрямляемую петлю γ в U, так что $dist(\gamma, Fr(U)) < \delta$. Тогда применим теорему 3.23 к подходящим кускам области U, чьи границы не содержат нулей и полюсов функций f и g.

Из доказательства теоремы 3.26.2 мы получим.

3.26.3. Следствие. *Пусть предположения теоремы 3.26 выполнены может быть кроме условия правой суперлинейности $[\partial Ln(h(z))/\partial z]$, тогда $\Delta_{\partial U} Arg(f) = \Delta_{\partial U} Arg(g) = \int_\gamma dLn(f(z))$, где γ та же, что и в §3.26.2.*

3.27. Теорема. *Пусть U – открытое подмножество в $\mathcal{A}_r^n$, $2 \le r \le \infty$ или $r = \Lambda$ с $card(\Lambda) > \aleph_0$, тогда существует представление $\mathbf{R}$-линейного пространства $C^\omega_{z,\tilde{z}}(U, \mathcal{A}_r)$ локально $(z, \tilde{z})$-аналитических функций на U, так что оно изоморфно $\mathbf{R}$-линейному пространству $C^\omega_z(U, \mathcal{A}_r)$ всех $\mathcal{A}_r$-голоморфных функций на U.*

Доказательство. Очевидно, что доказательство можно свести к случаю $n = 1$, методом математической индукции рассматривая локальные разложения в $(z, \tilde{z})$-ряды по $({}^n z,\ {}^n\tilde{z})$ с коэффициентами являющимися сходящимися рядами $({}^1 z,\ {}^1\tilde{z}, ...,\ {}^{n-1}z,\ {}^{n-1}\tilde{z})$. Мы имеем
$\tilde{z} = (2^r - 2)^{-1}\{-z + \sum_{s\in\hat{b}_r} s(zs^*)\}$ для любого $2 \le r < \infty$,
$\tilde{z} = \lim_{r\to\infty}(2^r - 2)^{-1}\{-z + \sum_{s\in\hat{b}_r} s(zs^*)\}$ in $\mathcal{A}_\infty$.
следовательно, каждый полином по переменным $(z, \tilde{z})$ также является полиномом только по z, более того, каждая полиномиальная локально $(z, \tilde{z})$ аналитическая функция на U также является полиномиальной локально z-аналитической функцией на U. Тогда, если ряд по $(z, \tilde{z})$ сходится в шаре $B(z_0, \rho, \mathcal{A}_r^n)$, тогда его ряд в z-представлении сходится в шаре $B(z_0, \rho', \mathcal{A}_r^n)$, где $\rho' = 2^r(2^r - 2)^{-1}\rho$ для любого конечного $r \ge 2$. При $r = \infty$ предельный переход дает $\rho' = \rho$. В случае $r = \Lambda$ для любого полинома существует подалгебра в $\mathcal{A}_\Lambda$ изоморфная $\mathcal{A}_\infty$ содержащая все коэффициенты этого полинома, то есть, он характеризуется полностью своим ограничением на эту подалгебру.

Рассматривая базисные полиномы любого выбранного полиномиального базиса в $C^\omega_{z,\tilde{z}}(U, \mathcal{A}_r)$ мы получим (благодаря бесконечномерности этого пространства) полиномиальный базис в $C^\omega_z(U, \mathcal{A}_r)$. Это устанавливает $\mathbf{R}$-линейный изоморфизм между двумя этими пространствами. Более того, в таком представлении пространства $C^\omega_{z,\tilde{z}}(U, \mathcal{A}_r)$ можно положить $D_{\tilde{z}} = 0$, что дает для дифференциальных форм $\partial_{\tilde{z}} = 0$. Это приводит к дифференциальному и интегральному исчислению только относительно D_z и dz.

3.28. Теорема (Принцип аргумента). *Пусть f – это $\mathcal{A}_r$-голоморфная функция на открытой области U удовлетворяющей условиям §3.9, $2 \le r \le \infty$ или $r = \Lambda$ с $card(\Lambda) > \aleph_0$, пусть также γ – спрямляемая петля содержащаяся в U, где $[\partial Ln(f(z))/\partial z]$ является право суперлинейным в некоторой окрестности U_{z_0} для любого нуля z_0 функции $f(z)$. Тогда $\hat{I}n(0; f\circ\gamma) = \sum_{\partial_f(a)\ne 0}\hat{I}n(a;\gamma)\partial_f(a)$.*

Доказательство. Выполняется равенство $\hat{I}n(0; f\circ\gamma) = \int_{\zeta\in\gamma} dLn(f(\zeta)) = \int_0^1 dLn(f\circ\gamma(s)) = \int_\gamma f^{-1}(\zeta)df(\zeta)$. Пусть $\partial_f(a) = n \in \mathbf{N}$, тогда

$$(i)\quad [Ln(f(z))]'.h = n(z-a)^{-1}h + \phi(z)h \quad \forall h \in \mathcal{A}_r \text{ и}$$

$$(ii)\quad f(z) = \sum_{l,k;\ n_1+...+n_k=\partial_f(a),\ 0\le n_j\ \in\mathbf{Z},\ j=1,...,k} \{(z-a)^{n_1}g_{l,k,1;n_1,...,n_k}(z)$$

$$(z-a)^{n_2}g_{l,k,2;n_1,...,n_k}(z)...(z-a)^{n_k}g_{l,k,k;n_1,...,n_k}(z)\}_{q(n_1+...+n_k+k)},$$

где ϕ – $\mathcal{A}_r$-голоморфна на U_a, также $g_{l,p,k;n_1,...,n_k}(z)$ – это $\mathcal{A}_r$-голоморфные функции переменной z на U, так что $g_{l,p,k;n_1,...,n_k}(a) \ne 0$, где $l = 1, ..., m$, $1 \le m \le 2^{r\partial_f(a)}$ для конечного r и любого $m \in \mathbf{N}$ для $r = \infty$ (см. §§2.8, 3.7, 3.21, 3.27), так как каждый член $\xi(z)\prod_{s\in\mathbf{b}_r}(w_s - w_{s,0})^{n_s}$ с $\sum_{s\in\mathbf{b}_r} n_s \ge \partial_f(a)$, $n_j \ge 0$, имеет такое разложение, где $2 \le r < \infty$, $\xi(z)$ – это $\mathcal{A}_r$-голоморфная функция на окрестности точки a, так что $\xi(a) \ne 0$.

При $r = \infty$ можно воспользоваться пределом $z = \lim_{r\to\infty} z_r$. При $r = \Lambda$ с $card(\Lambda) > \aleph_0$ для любого $z \in \mathcal{A}_\Lambda$ существует подалгебра изоморфная $\mathcal{A}_\infty$ содержащая z. Для γ существует последовательность спрямляемых петель γ_n равномерно сходящаяся к γ, причём для каждой γ_n существует подалгебра изоморфная $\mathcal{A}_\infty$ содержащая γ_n.

Предположим, что ψ – это петля такая, что $\hat{I}n(p, \psi) = 2\pi nM$, $|M| = 1$, $M \in \mathcal{I}_r$, $0 \ne n \in \mathbf{Z}$. Тогда можно задать путь $\psi^{1/n} =: \omega$ как петлю, для которой $\hat{I}n(p, \omega) = 2\pi M$ и $\omega([0, 1]) \subset \psi([0, 1])$. Тогда мы назовем $\omega^n = \psi$. То есть, $\hat{I}n(p, \psi^{1/n}) = \hat{I}(p, \psi)/n$. Последняя формула дает интерпретацию, когда $\hat{I}n(p, \psi)/n$ равен $2\pi qM$, где $0 \ne q \in \mathbf{Q}$. То есть, путь $\psi^{1/n}$ можно определить для любого $0 \ne n \in \mathbf{Z}$. Это означает, что γ можно представить как объединение путей ω_j, для любого из которых существует $n_j \in \mathbf{N}$ такое, что $\omega_j^{n_j}$ – петля.

Используя теоремы 3.23 на U и 3.26.2 на U_a для любого $a \in U$ с $\partial_f(a) \neq 0$, также используя формулы (i, ii), мы получим утверждение этой теоремы.

3.29. Теорема. *Если f имеет существенную особенность в точке a, то $cl(f(V)) = \hat{\mathcal{A}}_r$ для любого $V \subset dom(f)$, $V = U \setminus \{a\}$, где U – это окрестность точки a.*

Доказательство. Предположим, что утверждение этой теоремы ложно, тогда существовали бы $\rho > 0$ и $m > 0$, а также элемент $A \in \mathcal{A}_r$, так что f была бы z-аналитической в $B(a, 0, \rho, \mathcal{A}_r) \setminus \{a\}$ и $|f(z) - A| \geq m$ для любого z такого, что $0 < |z - a| < \rho$. Если $\infty \notin cl(f(V))$, тогда существует $R > 0$, так что $A \notin cl(f(V))$ для любого $|A| > R$. Поэтому, функция $[f(z) - A]^{-1}$ является $\mathcal{A}_r$-голоморфной в $B(a, 0, \rho, \mathcal{A}_r) \setminus \{a\}$. Следовательно, $[f(z) - A]^{-1} = \sum_k \{(p_k, (z - a)^k)\}_{q(\eta(k)+m(k))}$, где в этой сумме $k = (k_1, ..., k_{m(k)})$ с $k_j \geq 0$ для любого $j = 1, ..., m(k) \in \mathbf{N}$, p_k – это конечные последовательности коэффициентов для $[f(z) - A]^{-1}$ как и в §3.21.

Если $D_z^n([f(z) - A]^{-1})|_{z=a} = 0$ для любого $n \geq 0$, то $[f(z) - A]^{-1} = 0$ в окрестности точки a. Поэтому, $[f(z) - A]^{-1} = \sum_{n_1+...+n_l=n} \{g_1 z^{n_1} ... g_l z^{n_l}\}_{q(\eta(n)+l)}$ для некоторого n, так что $0 \leq n \in \mathbf{N}$, $n_j \geq 0$ для любого $j = 1, ..., l \in \mathbf{N}$, каждая g_j – это $\mathcal{A}_r$-голоморфная функция (по z). Следовательно, беря обратные от обеих частей $[f(z) - A]$ и $(\sum_{n_1+...+n_l=n} \{g_1 z^{n_1} ... g_l z^{n_l}\}_{q(\eta(n)+l)})^{-1}$, а также сравнивая их разложения в ряды, мы видим, что конечные последовательности b_k коэффициентов разложений для f имеют свойство $b_k = 0$ для любого $\eta(k) < -n$. Это противоречит гипотезе и доказывает теорему.

3.30. Определение. Пусть a и b – это две точки в $\mathcal{A}_r$, а θ – это стереографическая проекция действительной сферы S^{2^r} единичного радиуса с центром в нуле для $2 \leq r < \infty$ или S^Λ для $r = \Lambda$ на $\hat{\mathcal{A}}_r$. Тогда $\chi(a, b) := |\phi(a) - \phi(b)|_Y$ называется струнной метрикой, где $\phi := \theta^{-1} : \hat{\mathcal{A}}_r \to S^m$, S^m вложено в $Y := \mathbf{R^{m+1}}$ для $m := 2^r$ с $r < \infty$ или в $\mathbf{R} \oplus l_2(\Lambda, \mathbf{R})$ для $m = \Lambda$ с $r = \Lambda$ при $card(\Lambda) \geq \aleph_0$, $| * |_Y$ – это евклидова и гильбертова норма в Y соответсвенно.

3.30.1. Теорема. *Пусть U – это открытая область в $\hat{\mathcal{A}}_r$, $\{f_n : n \in \mathbf{N}\}$ – это последовательность функций мероморфных на U сходящаяся равномерно на U к f относительно струнной метрики. Тогда или f является постоянной ∞ или f мероморфна на U.*

3.30.2. Теорема. *Пусть $\{f_k : k \in \mathbf{N}\}$ - это последовательность мероморфных функций на открытом подмножестве U в $\hat{\mathcal{A}}_r$, которая равномерно сходится относительно струнной метрики в U к f, $f \neq const$. Если $f(a) = b$ и $\rho > 0$ таковы, так $B(a, \rho, \mathcal{A}_r) \subset U$ и $f(z) \neq b$ для любого $z \in B(a, \rho, \mathcal{A}_r) \setminus \{a\}$, тогда существует $m \in \mathbf{N}$, так что значение валентности $f_k|_{B(a,\rho,\mathcal{A}_r)}$ в точке b равно $\eta(b; f) = \eta(a; f)$ для любого $k \geq m$.*

3.30.3. Замечание. Доказательства этих двух теорем являются формально теми же, что и доказательства теорем VI.4.3 и 4.4 [13]. Теоремы 3.26.2 и 3.30.2 являются $\mathcal{A}_r$ аналогами теорем Руше и Гурвица соответственно. Имеются также следующие $\mathcal{A}_r$ аналоги терем Миттаг-Леффлера и Вейерштрасса. Их доказательства аналогичны доказательствам теорем VIII.1.1 и 1.2 [13] соответственно. Однако, вторая часть теоремы Вейерштрасса не верна из-за некоммутативности $\mathcal{A}_r$, то есть, функция $h \in \mathbf{M}(U)$ с $\partial_h = \partial$ не обязательно представима в виде $h = fg$, где g является $\mathcal{A}_r$-голоморфной на U, а f – другая отмеченная функция $f \in \mathbf{M}(U)$, так что $\partial_f = \partial$.

3.31. Теорема. *Пусть U – непустое собственное открытое подмножество в $\hat{\mathcal{A}}_r$, $2 \leq r \leq \infty$ или $r = \Lambda$ с $card(\Lambda) > \aleph_0$, пусть подмножество $A \subset U$ не содержит никакой предельной точки в U. Предположим, что существует функция $g_b \in \mathbf{M}(\hat{\mathcal{A}}_r)$ для любого $b \in A$ имеющая полюс в точке b и никакого другого. Тогда существует функция $f \in \mathbf{M}(U)$ $\mathcal{A}_r$-голоморфная на $U \setminus B$ и имеющая ту же главную часть в точке b, что и g_b. Если f такая функция, тогда каждая другая такая функция имеет вид $f + g$, где g – это $\mathcal{A}_r$-голоморфная функция на U.*

3.32. Теорема. *Пусть U – это собственное непустое открытое подмножество $\hat{\mathcal{A}}_r$, $2 \leq r \leq \infty$ или $r = \Lambda$ с $card(\Lambda) > \aleph_0$. Предположим также, что $\partial : U \to \mathbf{Z}$ – это функция такая, что $\{\partial(z) \neq 0\}$ не имеет предельной точки в U. Тогда существует $f \in \mathbf{M}(U)$ такая, что $\partial_f = \partial$.*

Доказательство. Если a_j – это нуль, то есть, $\partial(a_j) \neq 0$, Тогда возьмём окружность радиуса $\delta_j > 0$ с центром в точке a_j. Возможны два случая: $|a_j|\delta_j \geq 1$ и $|a_j|\delta_j < 1$. В точке a_j первого типа построим в U мероморфную функцию $g(z)$ с главной частью $g_j(z) = n_j(z - a_j)^{-1}$, $n_j = \partial(a_j)$, $g(z) := \sum_{j=1}^{\infty}(g_j(z) - h_j(z))$, где $h_j(z) := -n_j \sum_{p=1}^{k_j}(a_j^{-1}z)^{p-1}a_j^{-1}$. Выберем k_j, так что в каждом ограниченном каноническом замкнутом подмножестве V в $\mathcal{A}_r$, $V \subset U$, ряд для g равномерно сходится. В точке a_j второго типа построим
$g_j(z) := n_j \sum_{p=0}^{\infty}(z - b_j)^{-1}[(a_j - b_j)(z - b_j)^{-1}]^p$ и
$h_j(z) := n_j \sum_{p=0}^{k_j}(z - b_j)^{-1}[(a_j - b_j)(z - b_j)^{-1}]^p$,
где $|a_j - b_j| < |z - b_j|$, a_j, b_j, z удовлетворяют условию $\Upsilon_{a_j-b_j,z-b_j} \hookrightarrow \mathbf{K}$, которое в итоге не является ограничительным в силу теоремы 2.15. Выберем k_j, так что для любого z с $|z - b_j| \geq R > \delta_j$ мы имеем $|g_j(z) - h_j(z)| = |n_j \sum_{p=k_j+1}^{\infty}(z - b_j)^{-1}[(a_j - b_j)(z - b_j)^{-1}]^p| \leq n_j \sum_{p=k_j+1}^{\infty} |(a_j - b_j)^p R_j^{-p-1}| < \epsilon_j$, где $\sum_{j=1}^{\infty} \epsilon_j < \infty$ сходится, $R_j > 0$ – это постоянная для любого j. Эти ряды по $(a_j^{-1}z)^p a_j^{-1}$ или по $(z - b_j)^{-1}[(a_j - b_j)(z - b_j)^{-1}]^p$, $p = 0, 1, 2, ...$, имеют действительные коэффициенты независимые от типа вложения $\mathbf{K}$ в $\mathcal{A}_r$, где $z \in \Upsilon_{a_j,b_j,z_1} \hookrightarrow \mathbf{K} \hookrightarrow \mathcal{A}_r$ для любой данной точки $z_1 \in \mathcal{A}_r$ с переменной z в пределах данной копии октонионной подалгебры $\mathbf{K}$, следовательно, они могут быть продолжены на соответствующие шары в $\mathcal{A}_r$. Теперь проинтегрируем $g(\zeta)$ вдоль спрямляемого пути γ в U, который не содержит ни одной точки a_j, $\gamma(0) = z_0$, $\gamma(1) = z$. Тогда $\int_{z_0}^{z} g(\zeta)d\zeta = \sum_{j=1}^{\infty}[w_j(z) - w_j(z_0)]$, так что $f_1(z) := \exp(\int_{z_0}^{z} g(\zeta)d\zeta)$ не зависит от пути (см. теоремы 2.15 и 3.8.3, а также следствия $3.4, 3.4'$ и §3.6.5 выше), где
$\exp(w_j(z)) = ((1 - a_j^{-1}z)\exp(\sum_{p=1}^{\infty}(a_j^{-1}z)^p/p]))^{n_j}$ в первом случае,
$\exp(w_j(z)) = ([(z - a_j)(z - b_j)^{-1}]\exp(\sum_{p=1}^{\infty}[(a_j - b_j)(z - b_j)^{-1}]^p/p))^{n_j}$ во втором случае, но w_j и w_l в общем не коммутируют для $j \neq l$. Сходимость ряда аналогична сходимости ряда в теореме 25 [2] в комплексном случае. Две функции удовлетворяющие теореме 3.32 не обязаны отличаться на $\mathcal{A}_r$-голоморфный множитель в отличии от комплексного случая, так как, например, $\zeta_j := \{f_1...f_j g f_{j+1}...f_n\}_{q(n)}$ с различными $j = a$ и $j = b$ в $\{1, ..., n\} \subset \mathbf{N}$ не коррелируют: $\zeta_a \neq \{h\zeta_b k\}_{q(3)}$ в общем для любых $\mathcal{A}_r$-голоморфных функций h и k на U, где каждая f_l имеет нуль порядка $n_l > 0$ в точке a_l, $n \geq 2$. Более того, для $r \geq 3$ имеется также зависимость от порядка умножения $\{*\}_{q(n)}$.

3.33. Теорема. *Пусть U – открытая область в $\mathcal{A}_r$, $2 \leq r \leq \infty$ или $r = \Lambda$ с $card(\Lambda) > \aleph_0$, а f – это функция $\mathcal{A}_r$-голоморфная на U с право суперлинейным супердифференциалом на U. Предположим, что f не постоянна на $B(a, \rho, \mathcal{A}_r) \subset U$, где $0 < \rho < \infty$. Тогда $f(B(a, \rho, \mathcal{A}_r))$ – окрестность точки $f(a)$ в $\mathcal{A}_r$.*

3.34. Замечания. Для нескольких $\mathcal{A}_r$ переменных кратный $\mathcal{A}_r$ интеграл $\mathbf{I} := \{\int_{\gamma_n} ... \int_{\gamma_1} f(\,^1z, ..., \,^nz d\,^1z ... d\,^nz\}_{q(n)}$ можно естественным образом рассмотреть для спрямляемых путей $\gamma_1,...,\gamma_n$ в $\mathcal{A}_r$, $3 \le r \le \infty$, где $2 \le r < \aleph_0$ или $r = \Lambda$ с $card(\Lambda) \ge \aleph_0$, $\{*\}_{q(n)}$ обозначает порядок скобок в последовательных интегрированиях (см. также §2.1). В общем, порядок интегрирования важен, так как существование частной производной $\partial^n g({}^1z,...,{}^nz)/\partial\,{}^1z...\partial\,{}^nz$ не влечёт за собой существования непрерывной $g^{(n)}$ и как показывает предложение 3.8.5 порядок дифференцирования в общем случае влияет на результат, например, даже в случае g соответствующей $f := \{f_1 \circ ... \circ f_n\}_{q(n)}$ с $f_n({}^1z,...,{}^nz)$ со значениями в $\mathcal{A}_r^{n-1}$, $f_{n-1}({}^1z,...,{}^{n-1}z)$ со значениями в $\mathcal{A}_r^{n-2}$, ...,$f_2({}^1z, {}^2z)$ и $f_1({}^1z)$ со значениями в $\mathcal{A}_r$, $\{\partial^n g({}^1z,...,{}^nz)/\partial\,{}^1z...\partial\,{}^nz\}_{q(n)}.1^{\otimes n} = f({}^1z,...,{}^nz)$ (см. также §2.7). Поэтому, существует естественное обобщение теоремы 3.9 для нескольких $\mathcal{A}_r$ переменных:

$$(i) \quad (2\pi)^n f(z_0)\{M_1...M_n\}_{q(n)} =$$

$$\{\int_{\psi_n}...\int_{\psi_1} f({}^1\zeta,...,{}^n\zeta)({}^1\zeta-{}^1z_0)^{-1}d\,{}^1\zeta)...({}^n\zeta-{}^nz_0)^{-1}d\,{}^n\zeta)\}_{q(n)}$$

для соответствующего открытого подмножества $U = {}^1U \times ... \times {}^nU$, где ψ_j и ${}^jU$ удовлетворяет условиям теоремы 3.9 для любого j, а f – это $\mathcal{A}_r$-голоморфная функция на U.

Благодарности

Автор искренне благодарен Научному Фламандскому Обществу за поддержку проекта "Некоммутативная геометрия: от алгебры к физике" и профессору Ф. ван Ойстаену за его интерес и плодотворные обсуждения работы.

Литература

[1] J. C. Baez. "The octonions". Bull. Amer. Mathem. Soc. **39: 2** (2002), 145-205.

[2] H. Behnke, F. Sommer. "Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen" (Springer-Verlag: Berlin, 1972).

[3] Ya. I. Belopolskaya, Yu. L. Dalecky. "Stochastic equations and differential geometry" (Kluwer Acad. Publ.: Dordrecht, 1990).

[4] F. A. Berezin. "Introduction to superanalysis" (D. Reidel Publish. Comp., Kluwer group: Dordrecht, 1987).

[5] F. Brackx, R. Delanghe, F. Sommen. "Clifford analysis" (London: Pitman, 1982).

[6] A. Connes. "Noncommutative geometry" (Academic Press: San Diego, 1994).

[7] B. DeWitt. "Supermanifolds" 2d ed. (Cambridge Univ. Press: Cambridge, 1992).

[8] G. Emch. "Mèchanique quantique quaternionienne et Relativitè restreinte". Helv. Phys. Acta **36**, 739-788 (1963).

[9] Р. Энгелькинг. "Общая топология" (Мир: Москва, 1986).

[10] G. Grubb. "Functional calculus of pseudodifferential boundary problems" (Birkhäuser: Boston, 1996).

[11] F. Gürsey, C.-H. Tze. "On the role of division, Jordan and related algebras in particle physics" (World Scientific Publ. Co.: Singapore, 1996).

[12] У. Р. Гамильтон. "Избранные труды. Оптика. Динамика. Кватернионы" (Наука: Москва, 1994).

[13] M. Heins. "Complex function theory" (Acad. Press: New York, 1968).

[14] L. Hörmander. "The analysis of linear partial differential operators" (V. **3**; Springer-Verlag: Berlin, 1985).

[15] L. Hörmander. "An introduction to complex analysis in several variables" (3rd ed.; Nort-Holland: Amsterdam, 1990).

[16] J. R. Isbell. "Uniform neighborhood retracts". Pacif. J. Mathem. **11** (1961), 609-648.

[17] I. L. Kantor, A. S. Solodovnikov. "Hypercomplex numbers" (Berlin: Springer, 1989).

[18] A. Khrennikov. "Superanalysis", (Series "Mathem. and its Applic."; V. **470**; Kluwer: Dordrecht, 1999).

[19] А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. "Элементы теории функций и функционального анализа" (Наука: Москва, 1989).

[20] Encyclop. of Math. Sci. **V. 11** "Algebra". A. I. Kostrikin, J. R. Shafarevich (Eds.) (Springer-Verlag: Berlin, 1990).

[21] А. Г. Курош. "Лекции по общей алгебре" (Москва: Наука, 1973).

[22] H. B. Lawson, M.-L. Michelson. "Spin geometry" (Princeton: Princ. Univ. Press, 1989).

[23] S. V. Lüdkovsky. "Generalized Loop Groups of complex manifolds, Gaussian Quasi-Invariant Measures on them and their Representations". J. of Math. Sciences **122: 1**, 2984-3011, 2004 (см. также более раннюю версию: Los Alamos National Laboratory, USA. Preprint **math.RT/9910086**, 18 October 1999).

[24] С. В. Людковский. "Гауссовы меры на пространствах свободных петель". Усп. Матем. Наук. **56 : 5**, 183-184, 2001.

[25] С. В. Людковский. "Стохастические процессы на группах диффеоморфизмов и петель действительных, комплексных и неархимедовых многообразий". Фундам. и Прикл. Матем. **7: 4**, 1091-1105 (2001) (см. также Los Alamos National Laboratory, USA. Preprint **math.GR/0102222**, 35 pages, 28 February 2001).

[26] S. V. Lüdkovsky. "Poisson measures for topological groups and their representations". Southeast Asian Bull. Math. **25: 4**, 653-680 (2002).

[27] S. V. Lüdkovsky, F. van Oystaeyen. "Differentiable functions of quaternion variables". Bull. Sci. Math. (Paris). Ser. 2. **127** (2003), 755-796.

[28] L. Narici, E. Beckenstein. "Topological vector spaces" (Marcel-Dekker: New York, 1985).

[29] F. van Oystaeyen. "Algebraic geometry for associative алгебрас" (Series "Lect. Notes in Pure and Appl. Mathem."; V. **232**; Marcel Dekker: New York, 2000).

[30] H. Rothe. "Systeme Geometrischer Analyse" in: "Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften. Band 3. Geometrie", 1277-1423 (Leipzig: Teubner, 1914-1931).

[31] E. H. Spanier. "Algebraic topology" (Acad. Press: New York, 1966).

[32] E. M. Stein. "Singular integrals and differentiability properties of functions" (Princ. Univ. Press: New Jersey, 1970).

[33] H. Triebel. "Interpolation theory. Function spaces. Differential operators" (Deutsche Verlag: Berlin, 1978).

[34] B. L. van der Waerden. "A history of algebra" (Springer-Verlag: Berlin, 1985).

[35] J. P. Ward. "Quaternions and Cayley numbers". Ser. Math. and its Applic. **403** (Dordrecht: Kluwer, 1997).

[36] S. H. Weintraub. "Differential forms" (Academic Press: San Diego, 1997).

Differentiable functions over Cayley-Dickson numbers

S.V. Liudkovsky

sludkowski@mail.ru

We study the differentiability of functions defined on domains of the octonian (Cayley) algebra, and obtain a non-commutative version of the Cauchy-Riemann conditions. Further, we investigate the non-commutative analogue of the Cauchy integral, and the criteria of analyticity for the octonian functions. In particular, are analyzed the octonian exponential and logarithmic functions. Moreover, we investigate the functions of the variables from the finite- and infinite-dimensional Cayley-Dickson algebra (which contains the octonionic algebra, as proper sub-albgebra). The main results of the paper include: the analogues of the theorem of Cauchy, Hurwitz, the argument principle, Mittag-Loeffler, Rouche and Weierstrass for super-differentiable functions of Cayley-Dicksom numbers.

Key-words: differentiability, Cayley-Dickson numbers, octonian function, Cauchy integral.
MSC: 26E15, 58C20, 47D99.

ОТ 2D КОНФОРМНЫХ К 4D САМОДУАЛЬНЫМ ТЕОРИЯМ: КВАТЕРНИОННАЯ АНАЛИТИЧНОСТЬ[1]

М. Эванс,[2] Ф. Гюрши [3] и В. Огивецкий [4]

Теоретическое Отделение, ЦЕРН, Женева, Швейцария

Показано, что самодуальные теории обобщают на четыре измерения как конформные, так и аналитические аспекты двумерных конформных теорий поля. На языке гармонического пространства, появляются несколько путей расширения комплексной аналитичности (естественной в двух измерениях) до кватернионной аналитичности (естественной для четырех измерений). Чтобы быть аналитичными, конформные преобразования должны быть реализованы на CP^3, которое возникает как класс смежности комплексифицированной конформной группы по модулю ее максимальной параболической подгруппы. В рамках этого подхода наглядно представляется твисторное соответствие Пенроуза и Уорда и непротиворечиво формулируется аналитичность Фютера.

Феза Гюрши

Феза Гюрши, прекрасный человек и выдающийся физик, ушел из жизни 13 апреля 1992 года. Он является соавтором данной статьи, одной из серии его работ, посвященных кватернионным аспектам четырехмерных теорий поля, области в которой он был пионером. Феза с энтузиазмом принимал участие в написании этой статьи, даже когда он боролся с болезнью, унесшей его жизнь. К сожалению, он не успел утвердить окончательный вариант статьи и не несет поэтому ответственность за какие-либо ее недостатки. Было большим наслаждением и честью работать с Фезой, использовать преимущество его плодотворного мышления и острого ума. Опыт работы с ним и изумительная личность Фезы Гюрши останутся навсегда в памяти двух его соавторов.

Введение

От 2D комплексной к 4D кватернионной аналитичности

Две *действительные* координаты двумерного евклидова пространства достаточно естественно объединяются в *единое комплексное число*

$$x^\mu = \{x^1, x^2\} \quad \longrightarrow \quad z = x^1 + ix^2. \tag{1}$$

Как хорошо известно, наиболее общее конформное преобразование координат в двух (*и только в двух*) измерениях является аналитическим в этих комплексных координатах.

$$z' = f(z), \qquad \bar{z}' = \bar{f}(\bar{z}). \tag{2}$$

Благодаря условию Коши-Римана, его даламбертиан обращается в нуль

$$\frac{\partial}{\partial\bar{z}} f(z) = 0 \quad \longrightarrow \quad \Box f(z) = \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial\bar{z}} f(z) = 0. \tag{3}$$

---

[1] CERN-TH.6533/92, ArXiv:hep-th/9207089, перевод А. Виноградовой под ред. А. Элиовича

[2] Рокфеллеровский Университет, Нью-Йорк, USA, evans@physics.rockfeller.edu.

[3] Департамент Физики, Йэльский Университет, Нью Хэвен, скончался.

[4] Прибыл из Лаборатории теоретической физики, ОИЯИ, Дубна, Россия; Департамент Теоретической Физики, Женевский университет, Женева, Швейцария.

В любой размерности более высокого порядка конформные преобразования зависят от конечного числа параметров и даламбертиан бесконечно малых конформных бустов *не обращается в нуль.*

В четырехмерном случае координаты, как хорошо известно, можно объединить в кватернион так же естественно, как в двумерном случае – в комплексное число. В частности, в спинорном формализме имеем

$$x^m = \{x^0, x^1, x^2, x^3\} \longrightarrow z = x^{\alpha\dot{\alpha}} = \begin{pmatrix} x^0 - ix^3 & -ix^1 - x^2 \\ -ix^1 + x^2 & x^0 + ix^3 \end{pmatrix} =$$
$$x^0 I - i\sigma_a x^a = x^0 + e_a x^a \tag{4}$$

и матрицы Паули представляют алгебру кватернионных единиц, $e_a = -i\sigma_a$

$$e_a e_b = -\delta_{ab} + \epsilon_{abc} e_c. \tag{5}$$

Аналитические преобразования (2) являются фундаментальными для $2D$-конформных теорий поля. Естественно интересоваться, существуют ли $4D$-теории, в которых некоторая форма кватернионной аналитичности могла бы играть сходную роль [1], [2]. Однако, понятие кватернионной аналитичности оказывается более тонким и мы увидим, что существует множество ее потенциальных форм, но только некоторые из них оказываются интересными (см. например [3]).

Трудности кватернионной аналитичности

Прямым выражением условия Коши-Римана было бы

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^0} + \frac{1}{3} e_a \frac{\partial}{\partial x^a}\right) f = 0 \tag{6}$$

где $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ определено таким образом, что $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} z = 0$ и $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \bar{z} = 1$. Однако, хорошо известно (см. например [3]), что из-за некоммутативности кватернионов единственное решение уравнения (6) в форме степенных рядов z равно $f = a + zb$ с постоянными кватернионами a и b. Даже $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} z^2 = \frac{1}{3}(z - \bar{z})$.

Раньше *Фютеровская кватернионная аналитичность* ([4], [5], [6]) была единственной успешной попыткой найти что-нибудь менее ограничивающее, чем (6). Аналитическая функция кватерниона z определяется рядами типа рядов Вейерштрасса

$$f(z) = \sum a_n z^n, \tag{7}$$

где коэффициенты a_n являются вещественными или комплексными числами (или кватернионами, но стоящими только с одной стороны от z^n, скажем, слева как в (7)). Можно показать, что такая функция удовлетворяет некоторым условиям типа Коши-Римана, но в производных *третьего порядка* вместо первого. Уравнение $\Box f(z) = 0$ не выполняется в общем случае; однако уравнение $\Box^2 f(z) = 0$ сохраняется. В работе (6) было подчеркнуто, что выше приведенное определение может оставаться в силе в некоторых $SO(4)$ системах координат, но нарушаться в других[5].

---

[5] Действительно, четырехмерные вращения $SO(4) \simeq SU(2)_L \times SU(2)_R$, как известно, имеют кватернионную форму [1], [6] $z' = mz\bar{n}$, $m\bar{m} = n\bar{n} = 1$, где $m \in SU(2)_L$ и $n \in SU(2)_R$ - единичные кватернионы, представляющие эти группы. Возникают проблемы уже с z^2-членом. Он трансформируется в $mz\bar{n}mz\bar{n}$, что не может быть выражено в начальной аналитической форме вследствие некоммутативности кватернионов.

Несмотря на эти трудности, в самодуальных теориях [7] и в $N = 2$ суперсимметричных теориях ([8], [9]) возникают многообразия кватернионного типа, а именно кватернионно-кэлеровские и гиперкэлеровские многообразия. В самом деле, проблемы связанные с кватернионной аналитичностью очень напоминают трудности, возникающие при поиске нетривиального понятия кватернионной геометрии. Заманчиво думать, что малое количество решений уравнения (6) является аналитическим проявлением того факта, что только плоские метрики являются гиперкэлеровскими по отношению к интегрируемым почти кватернионным структурам.

Поэтому тот факт, что интересные кватернионные геометрии на самом деле существуют, наводит на мысль, что возможно найти полезное понятие кватернионной аналитичности. Это реализовано в рамках подхода гармонического пространства [10] (разновидность твисторного подхода [11], [12], [13], [14], [15], и т. д.), который оказался эффективным для теорий, обладающих кватернионными структурами ([10], [16], [17], [18], [19], [20], и т. д.), а также для надлежащего улучшения ([5], [6]) выше приведенного определения Фютера (см. также раздел 5).

План и результаты

Смысл настоящей работы заключается в демонстрации того, что приближение гармонического пространства открывает новые горизонты в поисках полезных определений кватернионной аналитичности, включая условия Коши-Римана, накладываемые на производные первого порядка, и с аналитическими функциями со стремящимся к нулю даламбертианом. Данное приближение позволяет достичь этих целей.

Существует несколько путей, на которых можно реализовать гармоническую версию кватернионной аналитичности. Один путь ведет как раз к самодуальным теориям Янга-Миллса и Эйнштейна, которые таким образом, возникают как $4D$-двойники $2D$-конформных теорий поля, в том смысле, что обе являются аналитическими в подходящих значениях размерностей. Мы будем иметь дело в этой статье с представлением самодуальных теорий Янга-Миллса в гармоническом пространстве и с их аналитической структурой в этом пространстве.

Другой путь ведет к "ковариантизации" определения Фютера [5] и соответствующее фактор-пространство также будет обсуждаться.

Заманчивая проблема нахождения четырехмерного двойника двухмерных конформных теорий поля была атакована несколькими авторами, см. частично ссылки к этой работе, например [21], [22]. $4D$-самодуальные калибровочные и гравитационные теории рассматривались как очень перспективные кандидаты. Следует заметить, что тесные связи этих теорий с разнообразными одно- и двухмерными интегрируемыми системами обсуждались уже более десяти лет назад, например [23], [24], [25]. В [26], [27] было сделано даже предположение, что все интегрируемые системы могут быть выведены посредством сокращения размерности из $4D$-самодуальных теорий, наследуя их замечательные свойства. Ряд последних работ ([28], [29], [30], [31], [32], [33] и т. д.) подкрепляют это предположение, обнаруживая также важность обеих сигнатур: (4,0) и (2,2).

Подход гармонического пространства позволяет систематически изучить самодуальные теории и их симметрии, основанные на их кватернионной аналитичности (в гармоническом смысле), которая заменяет стандартную комплексную в $2D$-конформных теориях. Конформная инвариантность самодуальности также играет существенную роль: а) Она ставит пространственные и гармонические координаты на равный уровень. б) Требование, что конформные преобразования должны быть аналитическими влечет за собой замечательный феномен *комплексификации*: они могут быть реализованы как действительная $Spin(5,1)$ группа, действующая на 5-мерном компактном смежном классе ее *комплексификации*, $Spin(6,C) \sim SL(4,C)$. Этот смежный класс есть как раз CP^3. Это многообразие является комплексным по отношению к обычному комплексному сопряжению. Однако, оно оказывается *действительным* по отношению к некоторому комбинированному сопряжению, произведению комплексного и антиподального сопряжений.

В этой статье мы ограничимся дискуссией о самодуальных теориях Янга-Миллса в евклидовом пространстве. План статьи состоит в следующем. В разделе 2 мы напоминаем основные свойства гармоник и их отношение к кватернионам. Необходимость комплексификации обсуждается на простом уровне в разделе 2.2. В разделе 3 введено простейшее определение гармонической аналитичности. Ее роль в самодуальных калибровочных теориях продемонстрирована в разделе 4, где также собраны некоторые другие факты [16], [18], [19], касающиеся трактовки самодуальности с позиций гармонического пространства, и даны простые примеры кватернионных аналитических преобразований. Некоторые другие смежные классы $4D$-группы вращения(другой, чем S^2) кратко обсуждены в разделе 5, включая тот, который используется в подходе Фютера. Раздел 6 посвящен полному исследованию классов смежности конформной группы $SO(5,1)$, или, более точно, ее универсальной накрывающей $Spin(5,1)$, поскольку мы имеем дело со спинорными гармониками. Нам снова придется рассмотреть ее действия на смежном классе, CP^3, его комплексифицированной формы, $Spin(6,C) \sim SL(4,C)$. В этом разделе разработана необходимая техника и мы покажем, как эффективно вычислить форму преобразований на таких классах смежности. Некоторые математические определения и утверждения даны в Приложении "Компактные смежные классы некомпактных групп". Другое Приложение представляет 5-параметрическое семейство кватернионных комплексных структур в $4D$.

Гармоники

$SU(2)/U(1)$

Перед обсуждением всех этих вопросов стоит повторить ряд основных положений, касающихся гармоник [16], [10]. Как в любой реализации твисторной программы [11], [12], подход гармонического пространства [10] осуществляется посредством рассмотрения расширенного пространства, что является платой за возможность определить походящие аналитичности. В нашем случае это пространство включает двумерную сферу S^2. Мы начнем с рассмотрения ее как смежного класса группы вращения $Spin(4) = SU(2)_L \times SU(2)_R$ по модулю ее подгруппы $U(1)_L \times SU(2)_R$. Другими словами, мы представим эту сферу как класс смежности $SU(2)/U(1)$. Конечно, для описания этой сферы можно выбрать полярные (θ, ϕ) или стереографические $(z, \bar{z})$ координаты. Однако, оказывается намного более удобным использовать именно гармоники вместо любых специфических координат, потому что гармоники определены на этой сфере *глобально.* Мы будем иметь дело с 2×2 матрицей [10]

$$U = (u^-_\alpha, u^+_\alpha) = \begin{pmatrix} u^-_1 & u^+_1 \\ u^-_2 & u^+_2 \end{pmatrix} \tag{8}$$

Гармоники имеют $SU(2)$ индексы α и $U(1)$ "заряды" $+, -$. Они преобразуются под действием $SU(2)$ как спиноры, поэтому для $M \in SU(2)$, $(M^+M = 1)$ имеем

$$u^{\pm'}_\alpha = M^\beta_\alpha u^\pm_\beta, \qquad U' = MU. \tag{9}$$

В соответствии с природой их смежных классов, гармоники определены по модулю $U(1)$ преобразований, производимых матрицей P,

$$U \longrightarrow UP, \qquad P = \begin{pmatrix} e^{-i\lambda} & 0 \\ 0 & e^{+i\lambda} \end{pmatrix} \in U(1) \qquad \text{или} \tag{10}$$

$$u_\alpha^{+'} \simeq e^{i\lambda} u_\alpha^+, u_\alpha^{-'} \simeq e^{-i\lambda} u_\alpha^-. \tag{11}$$

Благодаря такой свободе, можно выразить преобразования матрицы U в форме

$$U' = MUP \qquad (P^+ P = 1) \tag{12}$$

Иногда удобно тем или иным образом зафиксировать матрицу P, чтобы перейти к некоторым специфическим координатам, и т. д. Однако, тогда теряется глобальное описание фактор-многообразия (quotient manifold) и возникает хорошо известная проблема Римана-Гильберта.

Окончательно, в $\frac{SU(2)}{U(1)}$ описании S^2 все матрицы U, M и P являются унитарными и гармоники противоположных $U(1)$ зарядов *комплексно сопряжены*,

$$u_\alpha^- = \overline{u^{+\alpha}}, \tag{13}$$

где $SU(2)$-индексы поднимаются обычным образом, $u^{+\alpha} = \epsilon^{\alpha\beta} u_\beta^+$. Гармоники должны подчиняться условию

$$\det U = u^{+\alpha} u_\alpha^- = 1 \tag{14}$$

и имеет место соотношение полноты

$$u^{+\alpha} u_\beta^- - u^{-\alpha} u_\beta^+ = \delta_\beta^\alpha \tag{15}$$

Это соотношение делает возможным удобную операцию проецирования,

$$f_\beta = u^{+\alpha} u_\beta^- - u^{-\alpha} u_\beta^+ f_\beta = (u^{+\alpha} f_\alpha) u_\beta^- - (u^{-\alpha} f_\alpha) u_\beta^+, \tag{16}$$

Так что все свободные непунктирные индексы могут быть приписаны только гармоникам. Мы будем часто пользоваться этим приемом.

Заметим, что так как 2×2 матрицы унитарны, M и U могут одновременно рассматриваться как кватернионы единичной нормы. Поскольку гармоники определены только с точностью до $U(1)$, *фаза* $U(1)$ *не должна входить в какие-либо формулы.* Это означает, что заряд $U(1)$ сохраняется и что *"функции"* на сфере должны обладать *определенным* $U(1)$ зарядом, q. Другими словами, все члены в разложении должны содержать произведения гармоник u^+, u^- одного и того же заряда q. Например, для $q = +1$:

$$f^+(u) = f^\alpha u_\alpha^+ + f^{\alpha\beta\gamma} u_\alpha^+ u_\beta^+ u_\gamma^- + \ldots \tag{17}$$

Такие величины будут приобретать общую $U(1)$-фазу; однако, это неважно благодаря предполагаемому сохранению $U(1)$ заряда. Конечно, для каждого члена в гармоническом разложении типа (17) предполагается полная симметричность по индексам $\alpha, \beta, \gamma \ldots$, иначе оно сводилось бы к членам низшего порядка посредством условия (14).

Фактически, u_α^+, u_α^- – это фундаментальные сферические гармоники спина 1/2, хорошо знакомые всем из квантовой механике,[6] в то время как (16) является примером

---

[6] $U = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} e^{-\frac{i\phi}{2}} & i\sin\frac{\theta}{2} e^{-\frac{i\phi}{2}} \\ i\sin\frac{\theta}{2} e^{\frac{i\phi}{2}} & \cos\frac{\theta}{2} e^{\frac{i\phi}{2}} \end{pmatrix}$ в углах Эйлера, третий не нужен, так как берется из уравнения (12) как фаза.

гармонического разложения на S^2. Вот почему мы будем ссылаться на u_i^+, u_i^- в дальнейшем просто как на гармоники.

Удобно выполнять как дифференцирование, так и интегрирование на двусфере непосредственно в терминах гармоник. Действие гармонической производной D^{++} на сами гармоники определяется в соответствии с простым правилом

$$D^{++}u_\alpha^+ = 0 \qquad D^{++}u_\alpha^- = u_\alpha^+ \tag{18}$$

Комплексификация $SU(2)$

На очереди важное замечание. Рассмотрение конформных инвариантов самодуальных уравнений (так же, как и в некоторых других случаях) показывает, что необходимо *комплексифицировать* данное выше описание. Причина состоит в следующем. Параметры конформных бустов имеют размерность *длина*$^{-1}$. Поэтому конформные преобразования гармоник будут линейны в пространственных координатах. Если u^-, u^+ были комплексно сопряженные, как в (13) и если u^+ преобразования были аналитичны [см. разделы 3, 4 и (38), (40)], то преобразования u^- будут неизбежно неаналитичными. Рассматривая действие $SU(2)$ на смежном классе ее комплексификации, можно иметь как u^+, так и u^- преобразующиеся аналитически (см. раздел 3, 4), потому что в этом случае они перестают быть комплексно сопряженными друг другу.

Предварительно мы представим двумерную сферу S^2 как класс смежности $SU(2)/U(1)$. После этого мы будем рассматривать действие $SU(2)$-группы на S^2 смежном классе ее комплексификации $SL(2, C)$. Последняя группа может быть представлена через 2×2 унимодулярные матрицы. Она некомпактна и имеет унимодулярную треугольную подгруппу, которая является ее максимальной параболической подгруппой [35], [15], [35] (смотри Приложение B для математических определений и техники). Известно, что двусфера может также рассматриваться как класс смежности комплексифицированной группы. Используя разложение Ивасавы, взяв параболическую подгруппу равной $P = U(1) \times AN$, A и N – подгруппы $SL(2, C)$, имеем

$$\frac{SL(2,C)}{P} = \frac{SU(2) \times AN}{U(1) \times AN} = \frac{SU(2)}{U(1)} = S^2,$$

или

$$S^2 = \frac{SL(2,C)}{P} = \frac{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} \rho & 0 \\ z^{--} & \rho^{-1} \end{pmatrix}}, \quad ad - bc = 1, \tag{19}$$

где a, b, c, d, ρ и z^{--} – комплексные числа. Согласно этому представлению, гармоники определены с точностью до преобразований параболической группы

$$u_\alpha^{+'} = \rho^{-1}u_\alpha^+, \qquad u_\alpha^{-'} = \rho u_\alpha^- + z^{--}u_\alpha^+, \tag{20}$$

которые являются достаточно общими для u^- гармоник. Следовательно, мы приходим к ключевому выводу, что *любое преобразование гармоник может быть сведено к*

$$\delta u_\alpha^+ = \lambda^{++}u_\alpha^-, \qquad \delta u_\alpha^- = 0 \tag{21}$$

с некоторыми параметрами λ^{++} (выбирая подходящее компенсирующее преобразование параболической группы).

Мы будем ссылаться в дальнейшем на эту фиксированную калибровку как на u^- или "нормальную" форму, поскольку во всех калибровочных теориях, включая гравитационную, существует нормальная калибровка в которой все предпотенциалы зависят только от u^- и не зависят от u^+ гармоник. Нормальная форма значительно упрощает рассуждения и вычисления.

Основная процедура по нахождению такой формы следует из данного выше правила (12). Для бесконечно малых преобразований δM это читается:

$$\delta U = \delta M U + U \Delta P \tag{22}$$

Можно всегда найти такую компенсацию ΔP, такую что $\delta u_\alpha^- = 0$. Например, для вращений имеем

$$\delta u_\alpha^\pm = \delta l_\alpha^\beta u_\beta^\pm . \tag{23}$$

Переходя к u^- форме, запишем

$$(0,\, \delta u_\alpha^+) = (\delta l_\alpha^\beta u_\beta^-,\, \delta l_\alpha^\beta u_\beta^+) + (u_\alpha^- \Delta\rho + \Delta z^{--} u_\alpha^+,\, -\Delta\rho u_\alpha^+). \tag{24}$$

Тогда, проектируя на гармоники [см. (16)], получаем для параметров параболических преобразований

$$\Delta\rho = -u^{+\gamma} \delta l_\gamma^\beta u_\beta^-, \qquad \Delta z^{--} = u^{-\gamma} \delta l_\gamma^\beta u_\beta^-, \tag{25}$$

в то время, как преобразования гармоник приобрели u^- форму

$$\delta u_\alpha^- = 0, \qquad \delta u_\alpha^+ = (u^{+\gamma} \delta l_\gamma^\beta u_\beta^+) u_\alpha^- . \tag{26}$$

С этими новыми правилами игры *гармоники u^+ и u^- теперь уже не являются комплексно сопряженными.* Тем не менее, может быть определено новое комбинированное сопряжение [10], которое является произведением комплексного сопряжения и антиподального отображения (просто отображение точки на одном конце диаметра в точку на другом конце):

$$\hat{u}_\alpha^\pm = u^{\pm\alpha}, \quad \hat{u}^{\pm\alpha} = -u_\alpha^\pm . \tag{27}$$

Действительные свойства обсуждены в терминах по новому определенного сопряжения.

Важное замечание: действительные свойства гармоник сохраняются при действии $SU(2)$ на S^2, но не при действии полной $SL(2, C)$.

Гармоники как квадратные корни кватернионов

Мы упомянули, что гармоники тесно связаны с кватернионами. Фактически, в общей системе координат, кватернионы могут рассматриваться как билинейные комбинации гармоник. Чтобы это увидеть, мы объединяем $U(1)$ заряды в один индекс i:

$$u_\alpha^\pm = u_\alpha^i, \qquad i = (+, -). \tag{28}$$

Тогда определяющее ограничение (14) и соотношение полноты (15) приобретают симметричную форму

$$u_i^\alpha u_\alpha^j = \delta_j^i; \qquad u_i^\alpha u_\beta^i = \delta_\beta^\alpha . \tag{29}$$

Теперь всё двухпараметрическое семейство кватернионных единиц, произвольно ориентированных в трехмерном пространстве, задается посредством

$$e_{a_\alpha}^\beta = -i u_\alpha^i \sigma_{a_i}^j u_j^\beta . \tag{30}$$

Это легко проверить с помощью (29). Выше приведенное представление (4) приводит к специальной калибровке

$$u_1^i = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad u_2^i = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{31}$$

Эта гармоническая природа кватернионов объясняет, почему они требуются во всех задачах, где многообразия имеют кватернионные структуры: в $N = 2$ суперсимметричных теориях [10], [20] и в самодуальных теориях [16], [18], [19].

3. Гармоническая кватернионная аналитичность

Начнем наше обсуждение кватернионной аналитичности с напоминания некоторых положений из [16]. Прежде всего, говоря о координате $x^{\alpha\dot\alpha}$ как о кватернионе z, мы имеем в виду $4D$-группу вращений в форме $Spin(4) = SU(2)_L \times SU(2)_R$. Естественно реализовать ее на некоторых из ее факторпространств. Простейшая возможность – выбрать двусферу

$$SU(2)_R/U(1) = \{u_\alpha^\pm\} \tag{32}$$

Удобно перейти к пространственным координатам

$$x^{\pm\dot\alpha} = x^{\alpha\dot\alpha} u_\alpha^\pm, \qquad x^{\alpha\dot\alpha} = -x^{+\dot\alpha} u^{-\alpha} + x^{-\dot\alpha} u^{+\alpha} \tag{33}$$

Как можно видеть, это есть твисторное преобразование Пенроуза, записанное на языке гармонического пространства. Использование x^+ и x^- координат дает возможность ввести новый тип аналитических функций, которые зависят от x^+ и гармоник, но не зависят от x^-. Соответствующие условия Коши-Римана будут в производных первого порядка:

$$\frac{\partial}{\partial x^{-\dot\alpha}} f^A(x, u) = 0, \tag{34}$$

где A символически отображают индексы спинора и $U(1)$-заряды. Как следствие этого условия мы имеем

$$\Box f^A = \frac{\partial}{\partial x^m} \times \frac{\partial}{\partial x^m} f^A = 0 \tag{35}$$

поскольку можно проверить, что $\Box = \frac{\partial}{\partial x^{+\dot\alpha}} \times \frac{\partial}{\partial x^-_{\dot\alpha}}$ есть обычный даламбертиан в четырех измерениях. Таким образом, даламбертиан кватернионной аналитической функции обращается в нуль по совершенно аналогичным причинам, что и в случае обычной комплексной аналитичности.

Очевидно, что свойство аналитичности сохраняется при общих кватернионных аналитических преобразованиях, смешивающих координаты $x^{+\dot\alpha}, u_\alpha^+, u_\alpha^-$:

$$\begin{aligned} \delta x^{+\dot\alpha} &= f^{+\dot\alpha}(x^+, u^\pm), \\ \delta u_\alpha^+ &= w^{++}(x^+, u^\pm) u_\alpha^- \\ \delta u_\alpha^- &= 0 \end{aligned} \tag{36}$$

с произвольными кватернионными аналитическими функциями $x^{+\dot\alpha}$ и w^{++} как параметрами. Записав эти преобразования, мы эффективным образом принялм во внимание, что гармоники определены по модулю преобразований (20). Заметим также, что не было сделано никаких предположений относительно формы преобразований координат $x^{-\dot\alpha}$,

$$\delta x^{-\dot\alpha} = \phi^{-\dot\alpha}(x^+, x^-, u^\pm), \tag{37}$$

где локальные параметры ϕ являются неаналитическими и могут зависеть от x^- любым образом. Чтобы быть более конкретными, приведем несколько примеров.

1. Группа Пуанкаре (левые и правые вращения, δl^α_β и $\delta r^{\dot\alpha}_{\dot\beta}$ соответственно, $\delta l^\beta_\beta = \delta r^{\dot\alpha}_{\dot\beta} = 0$ и трансляции $\delta b^{\alpha\dot\alpha}$) представляется посредством аналитических кватернионных преобразований:

$$\delta x^{+\dot\alpha} = -\delta r^{\dot\alpha}_{\dot\beta} x^{+\dot\beta} + \delta b^{\alpha\dot\alpha} u^+_\alpha, \quad \delta u^\pm_\alpha = +\delta l^\beta_\alpha u^\pm_\beta,$$
$$(\delta x^{\alpha\dot\alpha} = -\delta l^\alpha_\beta x^{\beta\dot\alpha} - \delta r^{\dot\alpha}_{\dot\beta} x^{\alpha\dot\beta} + \delta b^{\alpha\dot\alpha}, \quad \delta x^{-\dot\alpha} = -\delta r^{\dot\alpha}_{\dot\beta} x^{-\dot\beta} + \delta b^{\alpha\dot\alpha} u^-_\alpha).$$

Заметим, что повороты гармоник могут также быть представлены как в (23).

2. То же самое для дилатаций (растяжений)

$$\delta x^{+\dot\alpha} = \delta d x^{+\dot\alpha}, \quad \delta u^\pm_\alpha = 0$$

и $\delta x^{\alpha\dot\alpha} = \delta d x^{\alpha\dot\alpha}$, $\delta x^{-\dot\alpha} = \delta d x^{-\dot\alpha}$. [Нужно помнить, что гармоники определены по модулю преобразований (20).] Выше приведенные преобразования исчерпывают все кватернионные аналитические преобразования, которые являются линейными по $x^{+\dot\alpha}$ и не ведут к явному возникновению гармоник в $\delta x^{\alpha\dot\alpha}$.

3. Аффинные преобразования

$$\delta x^{\alpha\dot\alpha} = a^{\alpha\dot\alpha}_{\beta\dot\beta} x^{\beta\dot\beta}, \quad a^{\alpha\dot\alpha}_{\alpha\dot\beta} = a^{\alpha\dot\alpha}_{\beta\dot\alpha} = 0$$

определенно являются неаналитическими при любом выборе репараметризации гармоник. Например, если $\delta u^\pm_\alpha = 0$, то

$$\delta x^{+\dot\alpha} = u^+_\alpha a^{\alpha\dot\alpha}_{\beta\dot\beta}(u^{+\beta} x^{-\dot\beta} - u^{-\beta} x^{+\dot\beta})$$

содержит как $x^{+\dot\alpha}$, так и $x^{-\dot\alpha}$.

4. Переходя к преобразованиям, билинейным в $x^{+\dot\alpha}$, обнаруживаем прежде всего, что *конформные бусты принадлежат к кватернионным аналитическим преобразованиям.* С очевидностью, конформные бусты равны

$$\delta x^{\alpha\dot\alpha} = x^{\alpha\dot\beta} \delta k_{\dot\beta\beta} x^{\beta\dot\alpha} \tag{38}$$

($\delta k_{\dot\beta\beta}$ – параметры), так что

$$\delta x^{+\dot\alpha} = -x^{+\dot\beta} \delta k_{\dot\beta\beta} u^{-\beta} x^{+\dot\alpha}, \tag{39}$$

$$\delta u^+_\alpha = -x^{+\dot\beta} \delta k_{\dot\beta\beta} u^{+\beta} u^-_\alpha, \quad \delta u^-_\alpha = 0, \tag{40}$$
$$(\delta x^{-\dot\alpha} = -x^{+\dot\beta} \delta k_{\dot\beta\beta} u^{-\beta} x^{-\dot\alpha}).$$

Параметр конформного буста имеет размерность обратной длины. Таким образом, конформные преобразования гармоник содержат пространственные координаты x линейно. Стоит подчеркнуть еще раз, что становится возможным избежать появления $x^{-\dot\alpha}$ (неаналитичности) в преобразованиях u^-_α гармоник только потому, что любое преобразование u^- может быть скомпенсировано подходящим преобразованием параболической группы (переходя к нормальной форме).

Заметим, что при комбинированном сопряжении (27)

$$\hat{x}^{+\dot\alpha} = -x^+_{\dot\alpha} \tag{41}$$

и это совместимо с *действительными* преобразованиями Пуанкаре и конформными преобразованиями.

Заметим также, что действительные свойства выше приведенных основных преобразований (36) должны точно так же согласоваться с комбинированным сопряжением (27), (41).

Ограничимся этими примерами.

Замечательно, что *только этот тип аналитичности присущ* важным теориям, обсуждаемым в следующем разделе.

4. Самодуальные калибровочные теории в четырех измерениях

Чтобы вскрыть природу кватернионной аналитичности теорий, названных в заголовке раздела, следует здесь вспомнить процедуру Уорда [12], [11] применяемую для самодуальных калибровочных уравнений в R^4. Использование языка гармонического пространства [16], [18], [19] делает ситуацию полностью понятной, показывая прозрачное соответствие между кватернионной аналитической (в смысле предыдущего раздела) дважды $U(1)$-заряженной функцией $V^{++}(x^+, u)$ и решениями самодуальных уравнений. Заметим, что рассмотрение самодуальной теории Эйнштейна проходит сходным путем.

Коммутатор ковариантных производных $D_{\alpha\dot\alpha} = \partial_{\alpha\dot\alpha} + iA(x)_{\alpha\dot\alpha}$ (связность A принимает значения в алгебре Ли калибровочной группы для теории Янга-Миллса и в касательной группе Лоренца для эйнштейновской теории),

$$[D_{\alpha\dot\alpha},\, D_{\beta\dot\beta}] = \epsilon_{\alpha\beta} F_{\dot\alpha\dot\beta}(x) + \epsilon_{\dot\alpha\dot\beta} F_{\alpha\beta}(x), \tag{42}$$

определяет напряженность поля Янга-Миллса $F_{\alpha\beta}, F_{\dot\alpha\dot\beta}$. В спинорном формализме, самодуальное уравнение есть просто $F_{\dot\alpha\dot\beta}(x) = 0$. Приняв во внимание определение (42), становится очевидным, что это уравнение *эквивалентно*

$$[D_{\alpha\dot\alpha},\, D_{\beta\dot\beta}] = \epsilon_{\dot\alpha\dot\beta} F_{\alpha\beta}(x). \tag{43}$$

Имея в своем распоряжении гармоники, мы можем развязать это уравнение следующим образом. Умножая уравнение (43) на $u^{+\dot\alpha}u^{+\dot\beta}$, и определяя

$$D^+_\alpha = u^{+\dot\alpha} D_{\alpha\dot\alpha} \tag{44}$$

получаем

$$[D^+_\alpha, D^+_\beta] = 0. \tag{45}$$

Более удобно заменить (44) на эквивалентное (приняв во внимание $U(1)$ сохранение заряда) коммутационное соотношение (18)

$$[D^{++}, D^+_\alpha] = 0. \tag{46}$$

Пара уравнений (45) и (46) эквивалентна условию самодуальности (43). Однако эта пара значительно проще. Первое из них устанавливает, что ковариантные производные D^+ коммутируют. Поэтому его решение есть "чистая калибровка",

$$D^+_\alpha = h\partial^+_\alpha h^{-1} = \partial^+_\alpha + h(\partial^+_\alpha h^{-1}), \tag{47}$$

где производная ∂^+_α не содержит никакой связности, и "мост" $h = h(x, u)$ принимает значения в калибровочной группе. Выбирая координаты (33) имеем

$$D^+_\alpha = u^{+\dot\alpha}\partial_{\alpha\dot\alpha} = \frac{\partial}{\partial x^{-\alpha}}. \tag{48}$$

В калибровке, в которой D_α^+ становится короткой, гармоническая производная D^{++} становится длинной (потому что мост h в основном зависит от гармоник):

$$D^{++} \to D^{++} = h^{-1}D^{++}h = D^{++} + h^{-1}(D^{++}h) = D^{++} + iV^{++}, \tag{49}$$

приобретая гармоническую связность, которая глобально определена на S^2 (действительно в значениях калибровочной алгебры)

$$V^{++} = -ih^{-1}(D^{++}h). \tag{50}$$

Теперь второе уравнение этой пары становится *условием Коши-Римана для гармонической аналитичности*

$$\frac{\partial}{\partial x^{-\alpha}}V^{++} = 0, \tag{51}$$

утверждая, что в самодуальном случае гармоническая связность аналитична, то есть она не зависит от $x^{-\alpha}$, $V^{++} = V^{++}(x^{+\alpha}, u^\pm)$. Обратно, если V^{++} аналитична, она кодирует решение самодуальных уравнений.

Более того, можно избавиться от положительно заряженных гармоник u^+, поскольку калибровочные потенциалы V^{++} определены только с точностью до калибровочных преобразований

$$V^{++}(x^+, u) = (D^{++} + iV^{++}(x^+, u))\lambda(x^+, u).$$

Существует нормальная калибровка [16], в которой V^{++} содержит в своем гармоническом разложении только отрицательно заряженные гармоники u^-:

$$V^{++} = V^{++}(x^+, u^-).$$

Поэтому аналитический V^{++} кодирует решение самодуального уравнения. Это есть прозрачное проявление "твисторного соответствия". Однако, мы больше знакомы с обычным пространством R^4, чем с гармоническим. Чтобы перейти к первому, нужно определить мост h из уравнения (50) для данной аналитики V^{++}, и затем заменить мост h на выражение обычной векторной связности $A_a(x) = -ih\frac{\partial}{\partial x^a}h^{-1}$. Важно, что (50) имеет решение для почти любых V^{++} [18].

Таким образом, не существует проблем в решении самодуальных уравнений в гармоническом пространстве. Инстантоны и монополи являются специальными решениями самодуального уравнения, имеющего конечное действие и конечную энергию соответственно. Они полностью описаны на языке гармонического пространства, включая ADHM конструкцию [18, 19].

Конечно, любое изменение гармонической аналитической связности

$$V'(x^+, u) = V^{++}(x^+, u) + g^{++}(x^+, u) \tag{52}$$

имеет своим результатом переход от одного решения самодуального уравнения к другому. Таким образом, наиболее общее преобразование Бэклунда кодируется снова с помощью дважды $U(1)$ заряженного аналитического объекта $g^{++}(x^+, u)$. Важный геометрический класс этих преобразований состоит из общих аналитических диффеоморфизмов (29) сопровождаемых преобразованием "подобия", определенного посредством общего аналитического веса $c(x^+, u)$, который принимает значение в калибровочной алгебре,

$$V'(x^{+'}, u') = e^{c(x^+,u)}V^{++}(x^+, u)e^{-c(x^+,u)}. \tag{53}$$

Этот класс включает очень многие преобразования Бэклунда. Говоря о диффеоморфизмах, мы можем ограничиться теми из них, которые реализуются в нормальной форме.

Таким образом, кватернионная аналитичность гармонического типа свойственна самодуальным $4D$ калибровочным теориям. Конечно, они также конформно инвариантны. Однако, теперь конформные преобразования образуют конечномерную подгруппу $Spin(5,1)$ аналитических преобразований, как раз тех, которые даны в (39), (40). Следовательно, эти теории могут естественно рассматриваться как $4D$-расширение $2D$-конформных теорий поля как в их конформном, так в и аналитическом аспектах.

5. Примеры других кватернионных аналитичностей

Только одно факторпространство было рассмотрено выше, это просто двусфера S^2. Однако, существуют и другие возможности, часть которых мы здесь кратко обсудим.

Произведение двух S^2

Первый пример будет

$$\frac{SU(2)_L}{U(1)_L} \times \frac{SU(2)_R}{U(1)_R} \tag{54}$$

с гармонизацией как левой, так и правой $SU(2)$ групп и с двумя различными $U(1)$ зарядами. В этом случае существуют как левая ($v_{\alpha^{\oplus,\ominus}}$), так и правая ($u_{\dot\alpha}^{+,-}$) гармоники имеющие левый ($\oplus,\ominus$) или правый $(+,-)U(1)$ заряды соответственно. Определение соответствующей кватернионной аналитичности достаточно очевидно. Нужно разбить $x^{\alpha\dot\alpha}$ на четыре части

$$x^{+\oplus} = x^{\alpha\dot\alpha} v_\alpha^\oplus u_{\dot\alpha}^+, \quad x^{+\ominus} = x^{\alpha\dot\alpha} v_\alpha^\ominus u_{\dot\alpha}^+, \quad x^{-\oplus} = x^{\alpha\dot\alpha} v_\alpha^\oplus u_{\dot\alpha}^-, \quad x^{-\ominus} = x^{\alpha\dot\alpha} v_\alpha^\ominus u_{\dot\alpha}^-. \tag{55}$$

Легко организовать кватернионные сопряжения, которые преобразуют эти переменные между собой. Объединить их в обычные 4-координаты также просто:

$$x^{\alpha\dot\alpha} = v^{\oplus\alpha} u^{+\dot\alpha} x^{-\ominus} - v^{\oplus\alpha} u^{-\dot\alpha} x^{+\ominus} - v^{\ominus\alpha} u^{+\dot\alpha} x^{-\oplus} + v^{\ominus\alpha} u^{-\dot\alpha} x^{+\oplus}. \tag{56}$$

Можно определить аналитические функции, зависящие только от одной из четырех координат (55), скажем от $x^{-\oplus}$ (и некоторым образом от гармоник). Тогда будет три условия Коши-Римана в производных первого порядка:

$$\partial^{+\oplus} f = \partial^{-\ominus} f = \partial^{-\oplus} f = 0. \tag{57}$$

Снова следствием будет, что даламбертиан аналитической функции обращается в нуль: $\Box f \equiv \partial x^{+\oplus} \partial^{-\ominus} f - \partial^{-\oplus} \partial^{+\ominus} f = 0$. В настоящее время мы не знаем теоретико-полевой модели, связанной с такой кватернионной аналитичностью.

Диагональный $U(1)$ случай

Далее, можно *отождествить* две $U(1)$ группы и рассмотреть факторпространство

$$\frac{SU(2) \times SU(2)}{U(1)}, \tag{58}$$

которое связано с теми же самыми гармониками $v_\alpha^\pm$ и $u_{\dot\alpha}^\pm$ как в выше приведенном примере, обе из которых обладают, тем не менее, зарядами одной и той же диагональной $U(1)$ подгруппы. Это обстоятельство, как мы далее увидим, будет улучшающим. Как в предыдущем случае, четыре-координата разбивается на четыре раздельные переменные,

$$x^{++} = x^{\alpha\dot\alpha} v_\alpha^+ u_{\dot\alpha}^+, \quad x^1 = x^{\alpha\dot\alpha} v_\alpha^- u_{\dot\alpha}^+, \quad x^2 = x^{\alpha\dot\alpha} v_\alpha^+ u_{\dot\alpha}^-, \quad x^{--} = x^{\alpha\dot\alpha} v_\alpha^- u_{\dot\alpha}^-. \tag{59}$$

в то время как

$$x^{\alpha\dot{\alpha}} = v^{+\alpha}u^{+\dot{\alpha}}x^{--} - v^{+\alpha}u^{-\dot{\alpha}}x^{1} - v^{-\alpha}u^{+\dot{\alpha}}x^{2} + v^{-\alpha}u^{-\dot{\alpha}}x^{++}. \tag{60}$$

Условия Коши-Римана снова в производных первого порядка; для функции которая зависит только от, скажем, x^1 они есть

$$\partial^{++}f = \partial^2 f = \partial^{--}f = 0. \tag{61}$$

и любая аналитическая функция, удовлетворяющая (61) будет подчиняться условию

$$\Box f \equiv \partial^{++}\partial^{--}f - \partial^1\partial^2 f = 0, \tag{62}$$

где ∂^1 и ∂^2 дифференцируют по x^1 и x^2 соответственно.

Возврат к кватернионной аналитичности Фютера

Как утверждалось во введении, Фютеровская аналитическая функция не удовлетворяет условию Коши-Римана или уравнению $\Box f = 0$. Вместо условия типа Коши-Римана для $\Box f$, получается уравнение четвертого порядка $\Box^2 f = 0$. Чтобы продемонстрировать эти утверждения, следует подчеркнуть, что *Фютеровская аналитичность связана только с гармоническим приближением из раздела 5.2*. В самом деле, в [6] было показано: чтобы сделать Фютеровское разложение (7) формально ковариантным, нужно ввести другой кватернион p^{-1}, с трансформационными свойствами, обратными к свойствам z:

$$z' = mz\bar{n}, \quad p^{-1'} = np^{-1}\bar{m}, \quad m\bar{m} = n\bar{n} = 1, \tag{63}$$

где $m \in SU(2)_L$ и $n \in SU(2)_R$ есть единичные кватернионы, представляющие эти группы соответственно (ссылка 5).

Теперь новая переменная, обозначаюшая левый кватор в [6], [5]

$$y = zp^{-1}, \tag{64}$$

будет иметь "более подходящий" чисто левоый закон преобразования

$$y' = my\bar{m}. \tag{65}$$

Соответственно, модифицированное определение Фютера [5]

$$f(y) = \sum a_n y^n \tag{66}$$

будет совместимо с четырехмерными вращениями, с y принадлежащим к $(1,0) \oplus (0,0)$ представлению $SO(4)$. Легко увидеть, что этот ново введенный вспомогательный кватернион p может быть выбран в виде векторной гармоники, составленной из спинорных гармоник, введенных в разделе 5.2 согласно

$$p^{-1}_{\alpha\dot{\alpha}} = (v^{+}_{\alpha}u^{-}_{\dot{\alpha}} + v^{-}_{\alpha}u^{+}_{\dot{\alpha}}). \tag{67}$$

[Существует некоторая свобода в определении коэффициентов в правой части (67)]. Заметим, что p^{-1} становится единичной матрицей в специальной системе координат для обоих типов гармоник. Тогда Фютеровская аналитическая функция является степенными рядами левого кватора (в терминологии [5])

$$y^{\alpha}_{\beta} = x^{\alpha\dot{\alpha}}(v^{+}_{\beta}u^{-}_{\dot{\alpha}} + v^{-}_{\beta}u^{+}_{\dot{\alpha}}) = x^{--}(L^{++})^{\alpha}_{\beta} + x^{1}(P^{1})^{\alpha}_{\beta} + x^{2}(P^{2})^{\alpha}_{\beta}, \tag{68}$$

где были использованы определения (59) и мы ввели операторы

$$\begin{gathered}(L^{++})^{\alpha}_{\beta} = v^{+\alpha}v^{+}_{\beta}, \qquad (L^{--})^{\alpha}_{\beta} = -v^{-\alpha}v^{-}_{\beta}, \\ (P^{1})^{\alpha}_{\beta} = v^{+\alpha}v^{-}_{\beta}, \qquad (P^{2})^{\alpha}_{\beta} = v^{+\alpha}v^{+}_{\beta}.\end{gathered} \tag{69}$$

Они удовлетворяют следующей алгебре (индексы опущены для краткости): операторы P являются проекторами

$$P^1P^1 = P^1, \quad P^2P^2 = P^2, \quad P^1 + P^1 = 1, \quad P^1P^2 = P^2P^1 = 0, \tag{70}$$

в то время как для операторов L мы имеем

$$L^{--}L^{++} = P^1, \quad L^{++}L^{--} = P^2, \quad L^{--}L^{--} = L^{++}L^{++} = 0 \tag{71}$$

и остальные произведения есть

$$\begin{gathered}L^{++}P^1 = P^2L^{++} = L^{++}, \quad L^{--}P^2 = P^1L^{--} = L^{--}, \\ L^{++}P^2 = P^1L^{++} = L^{--}P^1 = P^2L^{--} = 0.\end{gathered} \tag{72}$$

Теперь мы хотим показать, что общая аналитическая по Фютеру функция из уравнения (66) является бигармоникой и удовлетворяет некоторому уравнению в производных третьего порядка. С этой целью рассмотрим интегральное представление для f,

$$f(y) = \frac{1}{2\pi i}\oint dz \frac{f(z)}{z - y} \tag{73}$$

которое следует из факта, что она имеет разложение типа Вейерштрасса (66). Тогда мы можем сосредоточить внимание на функции $(z-y)^{-1}$, или еще проще, y^{-1}. Используя выше приведенную алгебру, имеем

$$y^{-1} = (x^{++}x^{--} - x^1x^2)^{-1}z \tag{74}$$

где

$$z = x^{++}(L^{--}) + x^{--}(L^{++}) - x^1(P^2) - x^2(P^1) \tag{75}$$

Теперь удобно рассмотреть дифференциальные операторы,

$$V = L^{--}\partial^{++} + L^{++}\partial^{--} - P^1\partial^1 - P^2\partial^2, T = L^{--}\partial^{++} + L^{++}\partial^{--} + P^1\partial^2 + P^2\partial^1,$$

которые удовлетворяют

$$VT = TV = \partial^{++}\partial^{--} - \partial^1\partial^2 = \Box, \tag{76}$$

$$Tz = 0. \tag{77}$$

Приняв во внимание факт, что

$$\Box(x^{++}x^{--} - x^1x^2)^{-1} = \Box(1/x^2) = 0 \tag{78}$$

видим из (77)–(79), что

$$V^2Ty^{-1} = 0. \tag{79}$$

Таким образом, мы можем доказать что любая аналитическая по Фютеру функция $f(y)$ удовлетворяет условиям "Коши-Римана" третьего порядка

$$(L^{--}\partial^{++} + L^{++}\partial^{--} + P^1\partial^1 + P^2\partial^2)\Box f = 0 \tag{80}$$

и следовательно бигармоническому уравнению

$$\Box^2 f = 0. \tag{81}$$

Стоит повторить, что конформная группа евклидового 4-мерного пространства может быть представлена с помощью преобразований Фютеровского типа [6]. Они реализованы на z нелинейно, как кватернионные преобразования Мёбиуса [1], построенные обычным путем из кватернионных элементов матрицы два на два, принадлежащей $SL(2, H)$.

$$z' = (az + b)(cz + d)^{-1}, \tag{82}$$

где a, b, c и d – постоянные кватернионы, удовлетворяющие

$$\det(a - bd^{-1}c) \times \det d = |ad - bd^{-1}cd|^2 = 1 \tag{83}$$

(условие унимодулярности для 2×2 матрицы с кватернионными составляющими)[7] В самом деле, если $c \neq 0$, $d \neq 0$, то z' может быть записано как

$$z' = ac^{-1} + (bd^{-1} - ac^{-1})(1 + czd^{-1})^{-1} \tag{85}$$

что является суммой постоянного кватерниона и Фютеровской аналитической функции составного аргумента (включающего преобразование параметров, кроме самой координаты) $y = czd^{-1}$ умноженного слева на другой постоянный кватернион. Если $c = 0$, то $d \neq 0$ и z' есть линейная функция $y = azd^{-1}$. Окончательно, для $d = 0, c \neq 0$, z' – линейная функция $t = bz^{-1}c^{-1}$. Четырехмерные вращения соответствуют (83) с $b = c = 0$, $a = m$ и $d = n$, $m\bar{m} = n\bar{n} = 1$, см. (8); дилатация (растяжение) происходит, когда a является действительным параметром, $d = 1$, $b = c = 0$; трансляции имеют параметр b, тогда как $a = d = 1$, $c = 0$; для конформных бустов c есть параметр и $a = d = 1$, $b = 0$.

В [6] были рассмотрены бесконечномерные квазиконформные группы, которые обобщают (83), будучи подгруппами четырехмерной группы диффеоморфизмов.

6. Объединенное пространство и двусфера. Комплексификация конформной группы

Выше мы гармонизировали группу вращения $SO(4)$, и гармоники появились без видимой связи с пространственными координатами x^m, которые являются координатами смежного класса группы Пуанкаре по модулю ее подгруппы вращений $SO(4)$. Было бы желательно иметь пространственные и гармонические (твисторные) координаты, трактуемые на одной основе. Конформная симметрия помогает нам достичь этой цели.

Конформная группа для евклидового 4-мерного пространства, как хорошо известно, есть $SO(5, 1)$, однако, так как мы имеем дело с гармониками спинорных представлений группы Лоренца, мы реально имеем дело с ее универсальной накрывающей, $Spin(5, 1)$. Можно было бы начать с рассмотрения ее классов смежности, выяснить, существуют ли подходящие 6-мерные классы. В предыдущем разделе была упомянута

---

[7] 2×2 матрицы с кватернионными (или опять 2×2 матрицами) элементами может быть разложена на произведение матриц, имеющих очевидные детерминанты [6]

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & bd^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a - bd^{-1}c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ d^{-1}c & I \end{pmatrix}. \tag{84}$$

кватернионная форма Мёбиуса $SO(5,1)$. В спинорной форме она представляется как матрица

$$M = \begin{pmatrix} l^{\alpha}_{\beta} & b^{\dot\beta}_{\alpha} \\ c^{\beta}_{\dot\alpha} & r^{\dot\beta}_{\dot\alpha} \end{pmatrix} \tag{86}$$

с единичным детерминантом

$$\det(l^{\beta}_{\alpha} - b^{\dot\alpha}_{\alpha}(r^{-1})^{\dot\beta}_{\dot\alpha} c^{\alpha}_{\dot\beta}) \times \det r^{\dot\beta}_{\dot\alpha} = 1 \tag{87}$$

(см. сноску 7). Элементы матрицы те же, что и в разделе 5: l^{α}_{β} и $r^{\dot\alpha}_{\dot\beta}$ представляют левое и правое вращения соответственно и растяжения, тогда как $b^{\dot\beta}_{\alpha}$ и $c^{\beta}_{\dot\alpha}$ – трансляции и конформные бусты соответственно. Теперь, используя разложение Ивасавы,

$$Spin(5,1) = Spin(5) \times AN \tag{88}$$

(см. Приложение B) мы действительно можем получить шестимерный класс смежности. С этой целью можно выбрать $Spin(3) \times SO(2) \times AN$ как параболическую подгруппу P (те же A, N, что в (87)). Тогда грассманиан

$$\frac{Spin(5,1)}{P} = \frac{SO(5)}{SO(3) \times SO(2)} \tag{89}$$

будет единственным 6-мерным классом смежности. Однако, группа левых вращений $SU(2)_L$ проявляется в исходной *не комплексифицированной форме.* Согласно такому же рассуждению, как в разделе 2, это приведет к неаналитическим конформным преобразованиям.

Это снова наводит на мысль о *комплексификации*, теперь уже *конформной группы.* Мы, следовательно, пришли к рассмотрению действия $Spin(5,1)$ на классе смежности группы $Spin(6,C) \sim SL(4,C)$. И в самом деле, это работает. Начав с разложения Ивасавы (смотри Приложение B) последней,

$$SL(4,C) = SU(4) \times AN, \tag{90}$$

и выбрав параболическую подгруппу равной

$$P = SU(3) \times U(1) \times AN \tag{91}$$

(с теми же AN, как в (89)) мы приходим к классу смежности

$$\frac{SL(4,C)}{P} = \frac{SU(4)}{SU(3) \times U(1)} = CP^3 \tag{92}$$

AN в числителе и в знаменателе были "сокращены". Заметим, что появление 3-мерного комплексного проективного многообразия согласуется с литературой по твисторам [11], [14], [12], и т. д. Координаты этого многообразия – это две пространственные координаты $x^{+\dot\alpha}$ и гармоники, которые могут быть представлены одной комплексной координатой, как мы теперь увидим.

Читатель может обратиться к Приложению B по поводу некоторых определений и техники. Используя их, мы кратко дадим здесь прямое взятие производной от формы $Spin(5,1)$ преобразований, реализованных на этом CP^3 классе смежности. Мы будем действовать тем же способом, как мы это делали в разделе 2, где мы имели дело с соответствующим классом смежности комплексифицированной группы $SU(2)_L$.

Вообще говоря, лучше работать с полным множеством гармоник, образующих $Spin(5,1)$ матрицу

$$U = \begin{pmatrix} u^s_\alpha & u^{\dot s}_\alpha \\ u^s_{\dot\alpha} & u^{\dot s}_{\dot\alpha} \end{pmatrix}.$$

и идентифицировать их по действию на подгруппу P. Это было бы *глобальным* определением G/P и в рамках этого подхода можно было бы полностью избежать проблемы Римана-Гильберта, и т. д.

Однако, чтобы показать как работать просто с 6 обычными координатами 6-мерного многообразия, мы будем использовать здесь подгруппу P для локального исключения избыточных степеней свободы в U. Эти локальные координаты нашего класса смежности могут быть записаны как элементы треугольной матрицы:

$$U = \begin{pmatrix} u^s_\alpha & -u^-_\alpha x^{+\dot s} \\ 0 & \delta^{\dot s}_{\dot\alpha} \end{pmatrix}; \tag{93}$$

Конформная группа действует на U посредством умножения слева на матрицу $M \in Spin(5,1)$, уравнение (85). Для сохранения формы (92) фиксируем калибровку с помощью использования подходящих компенсационных параболических групповых преобразований P [см. (11) и (22)]. Для бесконечно малых преобразований мы имеем

$$\delta U = M \times U \times P - U \approx \delta M \times U + U \times \triangle P \tag{94}$$

Как в разделе 2, гармоники определены только с точностью до преобразований (20), принадлежащих к параболической группе. Поэтому мы можем взять в качестве отправного пункта, что калибровка (21) фиксирована, т. е. мы будем работать с преобразованиями в нормальной форме,

$$\delta u^-_\alpha = 0, \quad \delta u^+_\alpha = \lambda^{++} u^-_\alpha.$$

Теперь вычислим явно преобразования $x^{+\dot\alpha}$ и u^+_α, так же, как компенсационные преобразования, принадлежащие к параболической группе, используя уравнение (93) вместе с условием (21). Ингредиенты есть

$$A. \quad \delta U = \begin{pmatrix} (0, \lambda^{++} u^-_\alpha) & -u^-_\alpha \delta x^{+\dot p} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{95}$$

$$B. \quad \delta M \times U = \begin{pmatrix} \delta\tilde{l}^\beta_\alpha u^s_\beta + \delta d \delta^s_\alpha & -\delta\tilde{l}^\beta_\alpha u^-_\beta \delta x^{+\dot s} - \delta d u^-_\alpha x^{+\dot s} + \delta b^{\dot s}_\alpha \\ \delta c^\beta_{\dot\alpha} u^s_\beta & -\delta c^\beta_{\dot\alpha} u^-_\beta x^{+\dot s} + \delta\tilde{r}^{\dot s}_{\dot\alpha} - \delta d \delta^{\dot s}_{\dot\alpha} \end{pmatrix}, \tag{96}$$

где мы выделим дилатации δd: теперь $\delta\tilde{l}^s_s = \delta\tilde{r}^{\dot s}_{\dot s} = 0$.

Индуцированные преобразования параболической группы образуют матрицу

$$\triangle P = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \triangle a + \triangle d & 0 \\ \triangle z^{--} & -\triangle a + \triangle d \end{pmatrix}^s_p & \begin{pmatrix} 0 \\ \triangle a^{-\dot s} \end{pmatrix} \\ \triangle c^s_{\dot p} & -\triangle d \delta^{\dot s}_{\dot p} + \triangle\tilde{r}^{\dot s}_{\dot p} \end{pmatrix} \tag{97}$$

Для последнего ингредиента, матрицы $U \times \triangle P$, запишем ее элементы отдельно. Верхний левый угол:

$$(u^-_\alpha(\triangle a + \triangle d - x^{+\dot p} \triangle c^-_{\dot p}) + u^+_\alpha \triangle z^{--}, \quad u^+_\alpha(-\triangle a + \triangle d) - u^-_\alpha x^{+\dot p} \triangle c^+_{\dot p}. \tag{98}$$

Нижний левый угол:

$$\triangle c^{s}_{\dot\alpha} \tag{99}$$

Верхний правый угол:

$$u^{+}_{\alpha}\triangle a^{-\dot s} + u^{-}_{\alpha}\triangle d x^{+\dot s} - u^{-}_{\alpha}x^{+\dot p}\triangle\tilde r^{\dot s}_{\dot p}. \tag{100}$$

Нижний правый угол:

$$-\triangle d\delta^{\dot s}_{\dot\alpha} + \triangle\tilde r^{\dot s}_{\dot\alpha}. \tag{101}$$

Теперь мы можем подставить компоненты (92), (95), (97), (98), (99) и (100) в уравнение (93). Затем, проецируя все элементы на $u^{\pm}_{\alpha}$, получим из результирующих уравнений явные выражения для бесконечно малых преобразований координат класса смежности:

$$\delta x^{+\dot\alpha} = (2\delta d + u^{+\gamma}\delta\tilde l^{\beta}_{\gamma}u^{-}_{\beta} + x^{+\dot p}\delta c^{\beta}_{\dot p}u^{-}_{\beta})x^{+\dot\alpha} - u^{+\gamma}\delta b^{\dot\alpha}_{\gamma} - x^{+\dot s}\delta\tilde r^{\dot\alpha}_{\dot s}$$

$$\delta u^{+}_{\alpha} = (u^{+\gamma}\delta\tilde l^{\beta}_{\gamma}u^{+}_{\beta} + x^{+\dot p}\delta c^{\beta}_{\dot p}u^{+}_{\beta})u^{-}_{\alpha}, \tag{102}$$

и в самом деле

$$\delta u^{-}_{\alpha} = 0. \tag{103}$$

В (101), (102) узнаются преобразования координат и гармоник, полученных уже в разделе 2.2. Для сопровождающих компенсирующих преобразований из параболической группы имеем:

$$\triangle z^{--} = u^{-\gamma}\delta\tilde l^{\beta}_{\gamma}u^{-}_{\beta} \quad \triangle a = -\frac{1}{2}x^{+\dot s}\delta c^{\beta}_{\dot s}u^{-}_{\beta} - u^{+\gamma}\delta\tilde l^{\beta}_{\gamma}u^{-}_{\beta}, \tag{104}$$

$$\triangle\tilde r^{\dot\beta}_{\dot\alpha} = -\delta\tilde r^{\dot\beta}_{\dot\alpha} + \delta c^{\beta}_{\dot\alpha}u^{-}_{\beta}x^{+\dot\beta} - \frac{1}{2}x^{+\dot s}\delta c^{\beta}_{\dot s}u^{-}_{\beta}\delta^{\dot\beta}_{\dot\alpha}, \tag{105}$$

$$\triangle d = -\delta d - \frac{1}{2}x^{+\dot s}\delta c^{\beta}_{\dot s}u^{-}_{\beta}, \tag{106}$$

$$\triangle c^{s}_{\dot\alpha} = -\delta c^{s}_{\dot\alpha}, \tag{107}$$

и окончательно

$$\triangle a^{-\dot s} = -\delta b^{\beta\dot s}u^{-}_{\beta} + u^{-\gamma}\delta\tilde l^{\beta}_{\gamma}u^{-}_{\beta}x^{+\dot s} \tag{108}$$

Очень важно, что все эти преобразования и манипуляции совместимы с комбинированным сопряжением, обсуждавшимся в разделе 2.2, которое реализуется на гармониках и координатах посредством (27) и (41).

В этой форме можем легко распознать три комплексные координаты для нашего класса смежности. Первые две есть $x^{+\dot\alpha}$ и третья, z, может быть получена, полагая что

$$u^{-}_{\alpha} = (1,0), \quad u^{+}_{\alpha} = (z,1) \tag{109}$$

Закон преобразования для z следует из уравнения (101).

Важным уроком является то, что *комплексное* (в обычном смысле) многообразие является *действительным* по отношению к комбинированному сопряжению. Все преобразования должны согласовываться с этим фактом. В частности, это условие совместимости выделяет подгруппу $Spin(5,1)$ из $Spin(6,C)$.

Замечание. Достаточно легко найти конечные преобразования в нормальной форме. Например, конформные преобразования записываются как

$$\tilde x^{+\dot\alpha} = \frac{x^{+\dot\alpha}}{1 - x^{+\dot\beta}c^{\sigma}_{\dot\beta}u^{-}_{\sigma}}, \quad \tilde u^{+}_{\alpha} = u^{+}_{\alpha} + \frac{x^{+\dot\beta}c^{\sigma}_{\dot\beta}u^{+}_{\sigma}}{1 - x^{+\dot\beta}c^{\sigma}_{\dot\beta}u^{-}_{\sigma}}u^{-}_{\alpha} \quad \tilde u^{-}_{\alpha} = u^{-}_{\alpha}. \tag{110}$$

Они сингулярны при некотором конечном значении конформного параметра, поскольку калибровка фиксирована только для одного множества координат (то есть одной карты) из целого многообразия[8]. Как было замечено выше, глобальное описание этого смежного класса может быть достигнуто при использовании 32 гармоник (вместо этих 6-ти координат), определенных по модулю параболической группы преобразований и удовлетворяющих ограничению унимодулярности.

Выводы

Расширение пространственных переменных посредством добавления некоторых гармонических (или твисторных) переменных, как известно, допускает новый вид аналитичности, гармоническую (или твисторную) аналитичность. Мы наблюдали в этой работе, что это есть аспект кватернионной аналитичности и что существует несколько путей ее определения. В $4D$ самодуальных теориях Янга-Миллса и Эйнштейна аналитичность этого типа замещает стандартную комплексную аналитичность $2D$ конформных теорий.

Самодуальные уравнения являются конформно инвариантными. Замечательным следствием гармонической аналитичности является, что $4D$ конформная группа должна быть реализована на смежном классе CP^3 *комплексификации*, $SL(4,C)$. Эти рассуждения являются достаточно общими: в любом смежном классе действительной группы невозможно иметь x-зависимые преобразования u^- и u^+ одновременно аналитичными. Нужно подчеркнуть, однако, что мы имеем дело только с "евклидовой" конформной группой $Spin(5,1)$. Как следствие, может быть определено комбинированное сопряжение (вместо комплексного), в рамках которого CP^3 является действительным многообразием. Стоит упомянуть, что такой же феномен комплексификации возникает также в $N=2$ и $N=3$ суперсимметричных теориях.

Эти темы будут обсуждаться где-нибудь еще, так же, как более полный анализ и классификация "аналитических" симметрий самодуальных уравнений. Это наиболее эффективно выполнимо в нормальной калибровке, выбирающей преобразования в нормальной форме. Параллельное рассмотрение симметрий самодуальных уравнений и их малоразмерных интегрируемых систем представляется привлекательным и может пролить свет на многие тонкости. Мы откладываем на будущие публикации также исследование гармонических аналитических свойств самодуальных калибровочных теорий в сигнатуре (2,2) которые, как ожидается, имеют интригующие особенности (peculiarities) из-за различных "некомпактностей" соответствующих групп вращения и конформных групп.

В заключении отметим, что $\frac{SU(2)\times SU(2)}{U(1)}$ гармоники лежат в основе Фютеровской аналитичности.

Благодарности

Нам приятно искренне поблагодарить C. Devchand, А. Гальперина, P. S. Howe, Е. Иванова, L. Michel, P. van Nieuwenhuizen, О. Огивецкого, М. Савельева и C. Vafa за ценные дискуссии. Один из нас (В. О.) весьма признателен за сердечное гостеприимство Рокфеллеровскому Университету, в котором эта работа была начата, и ЦЕРНу и Женевскому Университету, где она была завершена. М. Е. выражает также признательность ЦЕРНу и ОИЯИ, Дубна, за гостеприимство.

---

[8] Авторы признательны А. Гальперину за это замечание

Приложение А. Кватернионные структуры

Почти кватернионная структура есть набор трех тензоров типа (1,1), $J^n_{a_m}$, действующих на касательном расслоении многообразия, который представляет собой базис алгебры кватернионов (5):

$$J_a J_b = -\delta_{ab} + \epsilon_{abc} J_c \tag{A-1}$$

Из-за некоммутативности кватернионов нужно различать *левые* (L_a) и *правые* (R_a) кватернионные структуры. Выше мы видели, что право-кватернионные структуры образуют двухпараметрическое семейство (30):

$$R^{\beta\dot{\beta}}_{a_{\alpha\dot{\alpha}}} = -iu^i_{\dot{\alpha}} \sigma^j_{a_i} u^{\dot{\beta}}_j \delta^{\beta}_{\alpha}. \tag{A-2}$$

Аналогичное утверждение справедливо по отношению к левым кватернионным структурам (L_a).

Интересное наблюдение: даны две взаимно коммутирующие кватернионные структуры, например, L_a и R_a, можно построить однопараметрическое семейство кватернионных структур, которое интерполирует между ними. Для этого построим оператор

$$\eta = \frac{1}{2}(1 - L_a R_a). \tag{A-3}$$

Он имеет свойства (которые следуют из кватернионных алгебр для L_a, R_a и из того, что они взаимно коммутируют)

$$\eta^2 = 1, \quad \eta L_a \eta = R_a, \quad \eta R_a \eta = L_a. \tag{A-4}$$

Теперь становится очевидным, что кватернионная алгебра (5) будет выполняться на "смешанной" кватернионной структуре

$$J_a = e^{c\eta} L_a e^{-c\eta} = L_a \cosh^2 c - R_a \sinh^2 c + \epsilon_{abc} R_b L_c \cosh c \sinh c \tag{A-5}$$

и коммутировать с этой кватернионной структурой

$$J'_a = e^{c\eta} R_a e^{-c\eta} = R_a \cosh^2 c - L_a \sinh^2 c - \epsilon_{abc} R_b L_c \cosh c \sinh c, \tag{A-6}$$

где c – действительный параметр. Следовательно, в $4D$ пространстве существует 5-параметрическая система кватернионных структур (2 параметра в выборе L_a, 2 в выборе R_a, и параметр c).

Приложение В. Компактные классы смежности некомпактных групп

Здесь представлены некоторые математические определения и утверждения в форме, удобной для нас, вместе с поясняющими примерами, взятыми из статьи.

Разложение Ивасавы некомпактной полупростой группы G есть (см. учебники [34], [15])

$$G = KAN. \tag{B-1}$$

Здесь K, A и N – подгруппы G, имеющие следующие значения: K – максимальная компактная подгруппа G. Обозначим генераторы G через ϱ и генераторы K – κ. Пусть υ – это остальные генераторы G и $\alpha = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ – максимальная абелевская подалгебра υ. $A = e^{\alpha}$ есть коммутативная подгруппа G, генерируемая посредством α. Окончательно, все генераторы G раскладываются в прямую сумму собственных пространств при присоединенном действии (adjoint action) α,

$$[\alpha_\kappa, \, \varrho_\gamma] = \gamma(\alpha_\kappa) \varrho_\gamma,$$

$$\varrho = \sum_{\gamma} \varrho_{\gamma}, \quad \gamma = \gamma(\alpha_1), \ldots, \gamma(\alpha_n). \tag{B-2}$$

Говорят, что γ положительно, $\gamma > 0$, если его первая отличная от нуля компонента положительна. Пространство $n = \{n_\gamma\}$ генераторов ϱ_γ с положительным γ есть максимальная нильпотентная подалгебра генераторов ϱ. $N = e^n$ есть соответствующая максимальная нильпотентная подгруппа G.

Теперь максимальная разрешимая подгруппа G есть произведение AN. Борелевская параболическая подгруппа G есть

$$B = MAN, \tag{B-3}$$

где M – централизатор подгруппы A в K, то есть подгруппа K, коммутирующая с A.

Параболические подгруппы P из G определены как те, которые содержат Борелевскую подгруппу как свою подгруппу. Другими словами,

$$P = LAN, \tag{B-4}$$

где L – подгруппа вышеупомянутой максимальной компактной подгруппы K сверху, содержащую в свою очередь M как подгруппу. Подгруппа Бореля есть минимальная параболическая подгруппа. Это есть "квинтэссенция" некомпактности, как можно увидеть из замечательной теоремы Бореля [35]:

Класс смежности некомпактной группы G по модулю любой из ее параболических подгрупп P является компактным пространством.

Более того, параболические подгруппы P могут быть определены именно как те, чьи смежные классы $\frac{G}{P}$ являются компактными. Подгруппа Бореля есть наименьшая параболическая группа.

Интуитивное представление этой теоремы достаточно прозрачно:

$$\frac{G}{P} = \frac{KAN}{LAN} = \frac{K}{L}, \tag{B-5}$$

K и L компактные. Несмотря на сверхпростоту, это описание эффективно в том смысле, что оно показывает явно, какое компактное многообразие было получено.

Теперь дадим несколько примеров из статьи:

1. $G = SL(2,C) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = 1$ (см. раздел 2.2)

$$K = SU(2) = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}, \qquad |a|^2 + |b|^2 = 1,$$

$$\alpha = \begin{pmatrix} -\phi & 0 \\ 0 & \phi \end{pmatrix}, \qquad A = e^{\alpha},$$

$$n = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ z & 0 \end{pmatrix}, \quad [\alpha,\, n] = +\phi n, \quad N = e^n.$$

Использованная параболическая группа есть

$$P = U(1) \times AN, \tag{B-6}$$

где $U(1)$ – подгруппа K с $a = e^{-i\phi}$, $b = 0$. Мы видим, что

$$\frac{G}{P} = \frac{SU(2)}{U(1)} = S^2.$$

2. $G = Spin(5,1)$, представленная матрицей (85)

$$\begin{pmatrix} l^{\alpha}_{\beta} & b^{\dot\beta}_{\alpha} \\ c^{\beta}_{\dot\alpha} & r^{\dot\beta}_{\dot\alpha} \end{pmatrix} \tag{B-7}$$

Ее максимальная компактная подгруппа $K = Spin(5)$ дается с помощью такой же матрицы с идентификацией $b^{\dot\alpha}_{\alpha} = \epsilon^{\dot\alpha\dot\beta}\epsilon_{\alpha\beta}c^{\beta}_{\dot\beta}$ и с унимодулярными l^{α}_{β} и $r^{\dot\alpha}_{\dot\beta}$.

В этом случае $A = \exp\begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$ есть группа дилатаций.

Наконец, $n = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c^{\alpha}_{\dot\alpha} & O \end{pmatrix}$ – конформные бусты; $N = e^n$.

Параболическая подгруппа $P = Spin(3) \times SO(2) \times AN$ приводит к шестимерному смежному классу

$$\frac{Spin(5,1)}{P} = \frac{Spin(5)}{Spin(3) \times SO(2)} = \frac{SO(5)}{SO(3) \times SO(2)} \tag{B-8}$$

С этим смежным классом, однако, конформные преобразования будут неаналитичными, как объяснено в разделе 6.

3. $Spin(6,C) \sim SL(4,C)$. Удобно представить это снова в виде матрицы (B-7), но теперь с комплексными элементами.

Теперь максимально компактная группа есть $K = Spin(6)(\sim SL(4))$, заданная с помощью унитаризованной матрицы (B-7).

Группа $A = e^{\alpha_i\alpha_i}$ имеет три генератора,

$$\alpha = \begin{pmatrix} -\sigma_3 & 0 \\ 0 & O \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\sigma_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

Индексы $\gamma = \{\gamma(\alpha_1), \gamma(\alpha_2), \gamma(\alpha_3)\}$ могут быть показаны в матричной форме

$$\begin{pmatrix} 000 & 0-20 & --+ & --- \\ 020 & 000 & -++ & -+- \\ ++- & +-- & 000 & 00-2 \\ +++ & +-+ & 002 & 000 \end{pmatrix}$$

где тройки индексов в каждой позиции являются ее индексами γ.

Таким образом, существует шесть *комплексных* (эквивалентных двенадцати действительным) генераторов n с положительными индексами. Они расположены ниже главной диагонали. Согласно нашему основному правилу, максимальная нильпотентная группа есть $N = e^n$ и $B = AN$.

Для параболической подгруппы

$$P = SU(3) \times U(1) \times AN, \tag{B-9}$$

можно получить шестимерный класс смежности

$$\frac{SL(4,C)}{P} = \frac{SU(4) \times AN}{SU(3) \times U(1) \times AN} = \frac{SU(4)}{SU(3) \times U(1)}, \tag{B-10}$$

т. е. как раз CP^3 проективное пространство.

Литература

[1] F. Gürsey, Nuovo Cim. 3 (1956) 988.

[2] F. Gürsey and H. C. Tze, Ann. of Phys. (N.Y.) 128 (1980).

[3] A. Sudbery, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 85 (1979) 199.

[4] R. Fueter, Comment. Math. Helv. 7 (1935) 307, ibid. 8 (1936) 371.

[5] F. Gürsey, Conformal and quasi-conformal structures in space-time, Yale prep. YCTR - P 34–91.

[6] F. Gürsey and W. X. Jiang, J. Math. Phys. 33 (1992) 682.

[7] G. W. Gibbons and S. W. Hawking, Phys. Lett. B 78 (1991) 430.

[8] L. Alvarez-Gaumé and D. Z. Freedman, Commun. Math. Phys. 80 (1981) 443.

[9] J. Bagger and E. Witten, Nucl. Phys. B 222 (1983) 1.

[10] A. Galperin, E. Ivanov, S. Kalitzin, V. Ogievetsky and E. Sokatchev, Class. Quantum Grav. 1 (1984) 469.

[11] R. Penrose, Gen. Rel. Grav. 7 (1976) 31.

[12] R. S. Ward, Phys. Lett. 61A (1977) 81.

[13] R. S. Ward and R. O. Wells, Twistor Geometry and Field Theory (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990).

[14] R. Penrose, in "Twistors in Mathematics and Physics", ed. by T. H. Bailey and R. J. Baston (Cambr. Univ. Press, Cambridge, 1990, p.1–29).

[15] R. J. Baston and M. G. Eastwood (The Penrose transform. Its Interaction with Presentation Theory, Clarendon Press, Oxford, 1989).

[16] A. Galperin, E. Ivanov, V. Ogievetsky and E. Sokatchev, prepr. JINR E2-85-363, (1985), in Quantum Field Theory and Quantum Statistics, vol.2, 233-248 (A. Hilger, Bristol, 1987) and Ann. Phys (N. Y.) 185 (1988) 1 and 22.

[17] N. J. Hitchin, A. Karlhede, U. Lindström and M. Rocek, Commun. Math. Phys. 108 (1987) 535.

[18] O. Ogievetsky, in Proc. Conf. on Group Theor. Methods in Physics, Varna, 1987, (Berlin, Springer 1988), p. 548 and Thesis, Physical Lebedev Institute, Moscow, 1989, p. 1–115.

[19] S. Kalitzin and E. Sokatchev, Class. Quantum Grav. 4 (1987) L173.

[20] J. Bagger, A. Galperin, E. Ivanov and V. Ogievetsky, Nucl. Phys. B 303 (1988) 522.

[21] A. P. Hodges, R. Penrose and M. A. Singer, Phys. Lett. B 216 (1989) 48.

[22] H. Ooguri and C. Vafa, Mod. Phys. Lett. A 5, (1990) 1389.

[23] A. Belavin and V. Zakharov, Phys. Lett. B 73 (1978) 53.

[24] E. F. Corrigan, D. B. Fairlie, R. C. Yates and P. Goddard, Comm. Math. Phys. 58 (1978) 223.

[25] A. Leznov and M. Saveliev, Comm. Math. Phys. 74 (1980) 111.

[26] R. S. Ward, Phil. Trans. Roy. Lond. Soc. A315 (1985) 451 and in the same book as ref. [14], p. 246–259.

[27] N. J. Hitchin, Proc. Lond. Math. Soc. 55 (1987) 59.

[28] L. Mason and G. A. J. Sparling, Phys. Lett. B 137 (1989) 29; J. Geom. and Phys. 8 (1992) 243.

[29] S. Chakravarti, M. J. Ablovitz and P. A. Clarkson, Phys. Rev. Lett. 65 (1990) 1085; S. Chakravarti, S. Kent and E. T. Newman, J. Math. Phys. 33 (1992) 382.

[30] Q-Han Park, Phys. Lett. B 236 (1990) 429; 257 (1991) 105.

[31] L. Bakas, D. A. Depireux, Mod. Phys. Lett. A 6 (1991) 399; 2351.

[32] L.- L. Chau, I. Yamasaka, Phys. Rev. Lett. 68 (1982) 1807. [33] K. Takasaki, w Algebra, Twistor, and Nonlinear Integrable Systems, Kyoto prepr. KUCP-0049/92, June 1992.

[34] N. Ya. Vilenkin, A. U. Klimyk, Lie group representatione and special functions, In Modern Problems of Math., Fundamental Trends, vol. 59 (VINITI, Moscow, 1990) p. 145–368.

[35] A. Borel, Linear Algebraic Groups, (Springer, New York, 1991) New York.

[36] Ch. Devchand, D. Khetselius and V. Ogievetsky, Heavenly equations in harmonic space, in preparation.

ИНФОРМАЦИЯ ДЛЯ АВТОРОВ

В журнале печатаются оригинальные и обзорные статьи российских и зарубежных авторов по тематике: а) Гиперкомплексные числа, б) Геометрии, связанные с гиперкомплексными числами, в) Финслеровы пространства, г) Фракталы, основанные на гиперкомплексных числах, д) Применение гиперкомплексных чисел в физике, е) Экспериментальные исследования возможной анизотропии пространства-времени и иных проявлений финслеровой геометрии.

Редколлегия информирует авторов статей о принятых ею правилах:

1. Язык статей – русский или английский.

2. Объем статьи не должен превышать 1 печ. листа (24 усл. маш. стр.)

3. Автор предоставляет в редакцию файл статьи в формате LaTeX (версия LaTeX2$_\varepsilon$, для набора формул используется $\mathcal{A}\!\mathcal{M}\!\mathcal{S}$-LaTeX) и файл статьи в формате PostScript или PDF.

4. Принимаемые форматы файлов рисунков: для растровых TIFF, GIF, PNG (должна быть возможна инкапсуляция в EPS); для векторных EPS, PDF, TEX. Каждый рисунок должен быть помещен в отдельный файл. Цветовая гамма – черно-белая или серая (8 бит).

5. Текст статьи должен включать аннотацию (в ней не должно быть громоздких формул и ссылок), ключевые слова, классификацию по PACS или MSC2000. Глубина разбивки текста не должна превышать трех уровней.

6. Название статьи, аннотация, ключевые слова, имена авторов и их организации предоставляются на русском и английском языках.

7. Автор указывает e-mail и телефон для оперативной связи. Возвращение статьи автору на доработку не означает, что она принята к опубликованию.

8. Отклонение от данных правил уменьшает вероятность опубликования статьи.

9. Публикация бесплатна для всех авторов.

Гиперкомплексные числа
в геометрии и физике

Научный журнал.   Основан в 2003 г.

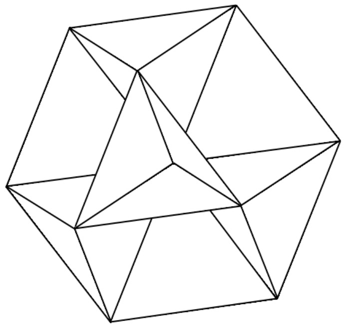
2005, № 1 (3)

Главный редактор Павлов Д. Г.
Ответственный секретарь Элиович А. А.

www.polynumbers.ru
hypercomplex@mail.ru

Свидетельство о регистрации
ПИ № 77-15331 от 30 апреля 2003 г.

ISSN 1814-3946



Типографские данные