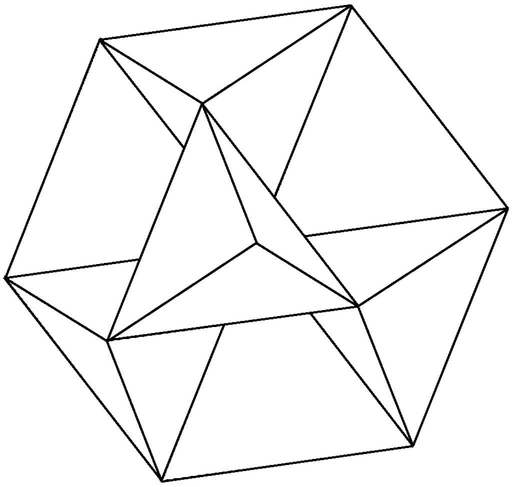
ISSN 1814-3946

Гиперкомплексные числа в геометрии и физике

2004, № 2 (2)

Научный журнал

Основан в 2003 г.



www.hypercomplex.ru
www.polynumbers.ru
hypercomplex@mail.ru

Адрес редакции:
129515, Россия, Москва, м. ВДНХ,
ул. Прасковьина, 21, офис 112, "МОЗЭТ"

Оглавление

КОНФЕРЕНЦИЯ "ЧИСЛО, ВРЕМЯ, ОТНОСИТЕЛЬНОСТЬ" – 2004

В. О. Гладышев, Д. Г. Павлов

hypercomplex@mail.ru

10 – 13 августа 2004 в МГТУ им. Н. Э. Баумана состоялась Международная научная конференция "Число, время, относительность".

Целью Конференции было привлечь внимание российских и зарубежных физиков к финслеровым обобщениям теории относительности, собрать ведущих специалистов в области гиперкомплексных чисел, Финслеровой геометрии, обобщающей римановы многообразия, а также специалистов в области теории относительности.

Конференция была посвящена 175-летию Московского государственного технического университета им. Н. Э. Баумана и организована его кафедрой физики, кафедрой теоретической физики Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова и Объединенным физическим обществом РФ. Генеральным спонсором Конференции являлся Фонд 175-летия МГТУ им. Н. Э. Баумана.

На торжественном открытии Конференции с приветствиями к участникам выступили проректор по международным связям МГТУ им. Н. Э. Баумана Г. П. Павлихин, заведующий кафедрой физики А. Н. Морозов, научный сотрудник Лаборатории им. Оливера Лоджа физического факультета Ливерпульского университета П. Роуландс.

Основные направления программы Конференции:

1. Финслерова геометрия.
2. Гиперкомплексные числа и связанные с ними пространства.
3. Поличисла и полипространства.
4. Геометрические аспекты понятия времени.
5. Финслеровы обобщения теории относительности.

Финслерова геометрия, на принципиальную возможность построения которой обратил внимание еще Риман, и гиперкомплексные числа, чья история берет свое начало в трудах Гамильтона, вплоть до конца XX века существовали как бы в не пересекающихся плоскостях. Организаторы Конференции ставили перед собой цель найти пути синтеза этих областей знания, что, возможно, приведет к созданию нового теоретического аппарата, удобного для более полного описания многообразия физических явлений. В связи с этим ряд докладов на Конференции был посвящен собственно Финслеровой геометрии, некоторые доклады были посвящены гиперкомплексным числам, но особый интерес вызвали доклады, нацеленные на объединение понятий числа и геометрии.

На Конференции были представлены свыше 50 докладов с результатами исследований, проводимых в МГУ им. М. В. Ломоносова, Институте общей физики РАН, Институте механики сплошных сред РАН, Акустическом институте им. акад. Н. Н. Андреева РАН, Институте механики и машиностроения КазНЦ РАН, Объединенном институте ядерных исследований и в других университетах и академических институтах России, стран ближнего и дальнего зарубежья.

Среди участников – физики и математики из России, Азербайджана, Алжира, Бангладеш, Бразилии, Великобритании, Греции, Индии, Казахстана, Канады, Португалии, США, Украины, Швеции.

Основными языками Конференции являлись русский и английский. Работа Конференции освещалась на Web-сайте http://www.hypercomplex.ru. Этот сайт, созданный по инициативе Д. Г. Павлова, содержит большое количество информации о научных работах, посвященных связи финслеровой геометрии и гиперкомплексных алгебр, о научных семинарах и конкурсах по этой тематике (в том числе студенческих).

Перед началом работы Конференции был издан сборника тезисов докладов на русском и английском языках под редакцией Д. Г. Павлова (председатель оргкомитета, МГТУ им. Н. Э. Баумана) и Г. С. Асанова (сопредседатель, МГУ им. М. В. Ломоносова). Полные тексты наиболее интересных докладов будут опубликованы в настоящем журнале "Гиперкомплексные числа в геометрии и физике" на русском и английском языках.

Работа Конференции проходила в зале заседаний Ученого совета МГТУ им. Н. Э. Баумана. Для участников Конференции были организованы экскурсия в музей МГТУ, экскурсии по центру Москвы и в Сергиев Посад.

Конференция, посвященная юбилею Бауманского Университета, позволила участникам Конференции познакомиться с историей развития науки и техники в старейшем Российском техническом университете, в котором работали такие выдающиеся ученые как Д. И. Менделеев, Н. Е. Жуковский, П. Л. Чебышев, С. А. Чаплыгин, А. С. Ершов, Д. К. Советкин, Ф. М. Дмитриев, А. В. Летников, А. П. Гавриленко и многие другие, а также узнать о тесной исторической и научной связи двух главных Университетов страны (МГУ им. М. В. Ломоносова и МГТУ им. Н. Э. Баумана).

* * *

Основной задачей Оргкомитета было собрать физиков, математиков и философов, пытающихся взглянуть на наиболее глубокие проблемы естествознания с самых общих позиций, среди которых одно из первых мест занимает идея связи алгебраических структур, геометрии и физики.

Недавно завершившееся столетие отмечено двумя фундаментальными научными революциями. Одну из них произвели Эйнштейновские Частная и Общая теории относительности: изменив представления о пространства-времени, они позволили создать теорию гравитации. Другая революция в физике оказалась менее заметной для широкой публики, но более радикальной для физического мировоззрения: Бор, Гейзенберг, а вслед за ними Дирак создали квантовую механику. В итоге фундамент современной физики оказался состоящим из двух не связанных меж собой первоначал, своего рода двух китов, плавающих в совершенно неизведанном море. Теория относительности вполне удовлетворительно обрисовала картину мира. Квантовая теория также полно и непротиворечиво описала материальный мир для своего круга явлений. И хотя двух истин не бывает, в современном естествознании дело обстоит именно так. Поэтому с середины XX столетия многие выдающиеся ученые стремились найти более общую теоретическую концепцию.

Чтобы создать теорию относительности, Эйнштейну пришлось выйти за ставшие традиционными рамки классической геометрии Евклида, сменив ее на геометрию Римана. Можно предположить, что и будущее развитие физики потребует новой геометрии. Таковой может стать, например, Финслерова геометрия, являющаяся более общей геометрией, чем геометрия Минковского. Как известно, точки на прямой и плоскости являются геометрическими образами действительного и комплексного чисел. Точки n-мерных Финслеровых пространств во многих случаях могут выражаться гиперкомплексными числами, алгебрами со своими особыми свойствами.

В последние 20 лет число научных публикаций в области исследований гиперкомплексных чисел растет экспоненциально. Международная научная Конференция "Число, время и относительность" была призвана обсудить наиболее важные и интересные результаты последних лет в этой области.

Среди представленных на Конференции докладов наибольший интерес вызвали доклады Д. Г. Павлова "Число, геометрия пространства времени и относительность", Г. С. Асанова "Геометрия, основанная на финслероиде", Г. И. Гарасько "Нормальное сопряжение на множестве поличисел", П. Роуландса (Великобритания) "Нильпотентный вакуум", А. Ф. Турбина "Алгебры гиперкомплексных чисел: от алгебры к геометрии и анализу", Ф. Топпана (Бразилия) "Алгебры с делением, обобщенные суперсимметрии и октонионная М-теория", Э. Г. Мычелкина "Неизбежность антискалярной гравитации", Х. Б. Альмейда (Португалия) "Альтернативная формулировка Общей теории относительности в терминах четырехмерной оптики, новое определение времени", Р. В. Михайлова "Особая роль четырехмерных пространств в топологии", Ю. А. Рылова "Принцип деформации как основа физической геометрии" и ряд других.

Помимо нового взгляда на основания физики, исследования гиперкомплексных чисел могут приводить к важным прикладным результатам. Так, геофизик из Тюмени В. Кутрунов обнаружил, что с помощью кватернионов многие геофизические задачи, в том числе столь актуальные, как поиск новых нефтегазовых месторождений Сибири, решаются эффективней, чем векторными методами. Перспективы исследования гиперкомплексных чисел и Финслеровой геометрии, как следует из докладов, прозвучавших на Конференции, просматриваются в таких разных областях, как расчет электрических цепей, представление о природе гравитации, изучение феномена времени.

Это свидетельствует, что данное направление в науке продолжит свое развитие и завоюет признание научного сообщества. Однако в настоящее время оно развивается лишь благодаря энтузиазму исследователей. Поэтому, как отметил председатель оргкомитета Конференции Д. Г. Павлов, особенно важно поддержать молодых ученых и студентов, учредить специальные стипендии, организовать конкурсы работ, обеспечить возможность участия в Конференциях студентов и аспирантов. Первые шаги в этом направлении уже сделаны. Не один год проводится конкурс научных работ по проблемам, связанным с финслеровой геометрией, в 2004 году впервые при поддержке Объединенного физического общества состоялся конкурс рефератов студентов и школьников. За лучший реферат по гиперкомплексным числам студент из Саратова А. В. Малыгин получил возможность принять участие в Конференции и ежемесячную стипендию.

Подводя итоги Конференции, можно сказать, что она подтвердила существование тесной связи между гиперкомплексными алгебрами и некоторыми выделенными финслеровыми пространствами. Организаторам Конференции удалось поддержать и, в известном смысле, стимулировать рост интереса к этой тематике. Поэтому можно считать, что основная цель Конференции была достигнута.

НОРМАЛЬНОЕ СОПРЯЖЕНИЕ НА МНОЖЕСТВЕ ПОЛИЧИСЕЛ

Г. И. Гарасько

ГУП Всероссийский электротехнический институт
gri9z@mail.ru

Д. Г. Павлов

Московский Государственный Технический Университет им. Н. Э. Баумана
geom2004@mail.ru

Поличисловое пространство является примером линейного пространства с несколькими полилинейными формами. На множестве невырожденных n-чисел вводится понятие нормального сопряжения. Нормальное сопряжение является $(n-1)$-нарной операцией, коммутативной по всем аргументам, но в общем случае неассоциативной. Для комплексных и гиперболических чисел такая операция является обычным сопряжением. Нормальное сопряжение может быть применено для изучения алгебраической и геометрической структур координатного пространства n-чисел, а также для введения таких понятий, как скалярное произведение и угловые характеристики двух и более чисел (векторов).

Ключевые слова: поличисла, полилинейные формы, нормальное сопряжение, скалярное произведение.

Введение

Поличисловые пространства являются примерами векторных пространств, роль фундаментальных метрических форм в которых играют полиформы от нескольких векторов [1]. Такие пространства принципиальным образом отличаются от привычных евклидовых и псевдоевклидовых пространств и требуют разработки понятий, замещающих понятия угла, ортогональности, скалярного произведения и т. д. Необходимость соответствующих построений диктуется участившимися попытками рассматривать финслеровы пространства (а именно таковыми, как правило, являются поличисловые пространства) в качестве геометрического фундамента физики [2, 3]. Успехи же физики во многом зависят от адекватности применяемого математического аппарата и геометрических представлений.

Удивительно, но первое из известных упоминаний о подобных пространствах принадлежит Риману. В своей знаменитой лекции, прочитанной при вступлении в должность профессора Геттингенского университета в 1854 году, он отмечал, что помимо обычных квадратичных метрических форм, "случай, который можно назвать следующим по простоте, соответствует тем многообразиям, в которых линейный элемент представляется в виде корня четвертой степени из дифференциального выражения той же степени" [4]. По сути, в этой короткой фразе он описал частный случай пространств, впоследствии получивших название финслеровых.

Финслеровы метрические функции, даже когда они заданы на линейных пространствах, весьма разнообразны и нередко требуют индивидуального подхода в каждом конкретном случае. Однако, когда за финслеровыми пространствами стоят коммутативно-ассоциативные гиперкомплексные числа (*поличисла, n-числа*), оказывается возможным предложить единый алгоритм, некоторые элементы которого рассматриваются ниже.

Несмотря на то, что исключительная роль поличисловых пространств не вызывает сомнений, в современной геометрической литературе они упоминаются весьма редко. Это объясняется, по-видимому, простой, на первый взгляд, алгебраической структурой поличисел, не стимулирующей исследования ни их самих, ни связанных с ними пространств. Однако, сюрприз, совсем недавно преподнесенный математикам от, казалось бы, со всех сторон изученных комплексных чисел в виде построения на их основе фракталов, говорит о том, что нечто подобное можно ожидать и от других представителей поличисел. Простота алгоритма, при помощи которого получены фрактальные объекты, подчеркивает потенциальное разнообразие, скрывающееся за самыми тривиальными числовыми структурами.

Такие понятия, как скалярное произведение, ортогональность, угол между двумя векторами – неотъемлемая часть аппарата теории евклидового пространства. Эти понятия естественным образом обобщаются на псевдоевклидовые пространства. Предлагаемый в данной работе подход позволяет единообразно обобщить указанные понятия на пространства поличисел.

Пространства поличисел P_n при $n > 2$ не являются евклидовыми или псевдоевклидовыми. Так, если e_1, e_2, ... , $e_n \in P_n$ – базис и

$$e_i e_j = p^k_{ij} e_k, \tag{1}$$

$$P_n \ni X = x^1 e_1 + x^2 e_2 + ... + x^n e_n, \tag{2}$$

то n-я степень нормы числа X выражается через n-линейную симметрическую форму

$$(X, Y, ..., Z) = \omega_{i_1 i_2 ... i_n} x^{i_1} y^{i_2} ... z^{i_n} \tag{3}$$

от одного аргумента X. Так как при $n > 2$ и использовании двух аргументов X и Y получается $(n-1)$ различных форм, то скалярное произведение и угол между парой векторов (чисел) можно ввести многими способами.

Кроме метрической формы (3) в пространстве P_n можно рассмотреть и другие инвариантные формы, например билинейную

$$((X, Y)) = q_{ij} x^i y^j, \tag{4}$$

где

$$q_{ij} = C p^k_{im} p^m_{kj}, \tag{5}$$

$C \neq 0$ – некоторое действительное число. Для каждой конкретной системы поличисел это число выбирается из соображений простоты и симметрии получаемых формул. Из определения следует, что данная форма является симметрической, то есть $((X, Y)) = ((Y, X))$.

Таким образом, пространство P_n является n-мерным линейным пространством с несколькими полилинейными формами, среди которых две выделенных: метрическая n-го порядка и билинейная.

Понятие сопряженного числа обычно (комплексные числа, кватернионы...) связывают с изменением знаков у мнимых (символьных) единиц. Это приводит к тому, что в поличисловом пространстве P_n приходится вводить в общем случае $(n-1)$ сопряжение и использовать само число и $(n-1)$ его сопряжение, чтобы сконструировать из них поличисло вида $(| X|^n \cdot 1 + 0e)$.

Нормальное сопряжение

Будем называть n-числа *невырожденными*, если матрица (q_{ij}) (5) невырожденна, то есть

$$det(q_{ij}) \neq 0. \tag{6}$$

В этом случае, кроме дважды ковариантного тензора q_{ij} в координатном пространстве P_n определен дважды контравариантный тензор q^{ij}.

Определим $(n-1)$-нарную операцию, которую в дальнейшем будем называть *нормальным сопряжением комплекса* $\{X_{(1)}, X_{(2)}, ..., X_{(n-1)}\}$, следующим образом:

$$[X_{(1)}, X_{(2)}, ..., X_{(n-1)}] = \omega_{i_1 i_2 ... i_{n-1} i_n} q^{i_n k} x^{i_1}_{(1)} ... x^{i_{n-1}}_{(n-1)} e_k. \tag{7}$$

Непосредственно из этой формулы видно, что операция нормального сопряжения коммутативна по всем аргументам, но она в общем случае не является ассоциативной. Постоянную C в формуле (5) можно, например, выбирать так, чтобы $[1, 1, ..., 1] = 1$.

Будем говорить, что число $Z = [X_{(1)}, X_{(2)}, ..., X_{(n-1)}]$ *нормально сопряженное* комплексу чисел $\{X_{(1)}, X_{(2)}, ..., X_{(n-1)}\}$.

Назовем *скалярным произведением числа* X *на комплекс* $\{X_{(1)}, X_{(2)}, ..., X_{(n-1)}\}$ билинейную форму

$$((X, Z)) = (X, X_{(1)}, X_{(2)}, ..., X_{(n-1)}). \tag{8}$$

Введем обозначение

$$\tilde{X} = [X, X, ..., X], \tag{9}$$

и тогда

$$((X, \tilde{X})) = |\, X|^n, \tag{10}$$

если в данной системе поличисел n-я степень нормы числа X выражается формулой

$$|\, X|^n = (X, X, ..., X). \tag{11}$$

Согласно определению, число $\tilde{X}$ является нормально сопряженным числу X.

Поясним введенные выше понятия на примерах.

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

$$X = x^1 + ix^2, \qquad i^2 = -1, \tag{12}$$

$$(X, Y) = x^1 y^1 + x^2 y^2, \tag{13}$$

$$(\omega_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{14}$$

$$(q_{ij}) = 2C \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{15}$$

Выберем $C = \frac{1}{2}$, тогда

$$(\omega_{ik} q^{kj}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{16}$$

$$\tilde{X} = x^1 - ix^2, \tag{17}$$

то есть нормальное сопряжение для комплексных чисел – это обычное комплексное сопряжение. Скалярное произведение числа X на Y есть

$$((X,\widetilde{Y})) = x^1y^1 + x^2y^2 = (X,Y). \tag{18}$$

Таким образом

$$((X,\tilde{X})) = |\,X|^2, \tag{19}$$

$$X\cdot\tilde{X} = |\,X|^2\cdot 1 + 0\cdot i. \tag{20}$$

ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ЧИСЛА, H_2

$$X = x^1 + jx^2, \qquad j^2 = 1, \tag{21}$$

$$(X,Y) = x^1y^1 - x^2y^2, \tag{22}$$

$$(\omega_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{23}$$

$$(q_{ij}) = 2C\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{24}$$

Выберем $C=\frac{1}{2}$, тогда

$$(\omega_{ik}q^{kj}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{25}$$

$$\tilde{X} = x^1 - jx^2, \tag{26}$$

то есть нормальное сопряжение для гиперболических чисел – это обычное сопряжение. Скалярное произведение числа X на Y есть

$$((X,\tilde{Y})) = x^1y^1 - x^2y^2 = (X,Y). \tag{27}$$

Таким образом,

$$((X,\tilde{X})) = |\,X|^2, \tag{28}$$

$$X\cdot\tilde{X} = |\,X|^2\cdot 1 + 0\cdot j. \tag{29}$$

ГИПЕРКОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА H_3

С этими числами удобнее всего работать в ψ-базисе:

$$X = x^1\psi_1 + x^2\psi_2 + x^3\psi_3, \tag{30}$$

$$p^k_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad i=j=k, \\ 0, & \text{во всех остальных случаях}\,, \end{cases} \tag{31}$$

$$(q_{ij}) = C \cdot diag(1,1,1), \tag{32}$$

$$(X,Y,Z) = \frac{1}{6}(x^1y^2z^3 + x^1y^3z^2 + x^2y^1z^3 + x^2y^3z^1 + x^3y^1z^2 + x^3y^2z^1). \tag{33}$$

Выберем $C = \frac{1}{3}$, тогда

$$[X,Y] = \frac{1}{2}[(x^2y^3 + x^3y^2)\psi_1 + (x^1y^3 + x^3y^1)\psi_2 + (x^1y^2 + x^2y^1)\psi_3], \tag{34}$$

$$[1,1] = 1, \tag{35}$$

$$\tilde{X} = x^2x^3\psi_1 + x^1x^3\psi_2 + x^1x^2\psi_3, \tag{36}$$

$$X \cdot \tilde{X} = |\,X|^3 \cdot 1 + 0 \cdot e, \tag{37}$$

если норма $X \in H_3$ определяется формулой

$$|\,X|^3 = x^1x^2x^3. \tag{38}$$

Скалярное произведение комплекса $\{X,Y\}$ на число Z есть скаляр

$$((Z,[X,Y])) = (X,Y,Z). \tag{39}$$

Билинейная форма (4) от двух чисел X, Y имеет вид

$$((X,Y)) = \frac{1}{3}(x^1y^1 + x^2y^2 + x^3y^3). \tag{40}$$

Найдем все такие числа H_3, которые удовлетворяют уравнению

$$\tilde{X} = X. \tag{41}$$

Решая систему трех квадратных уравнений с тремя неизвестными, получим пять корней: $(0,0,0)$, $(1,1,1)$, $(1,-1,-1)$, $(-1,1,-1)$, $(-1,-1,1)$. Последние четыре числа составляют, если представить их радиус векторами, вершины правильного тетраэдра, а первая – его центр.

Для того чтобы $X, Y \in H_3$ были делителями нуля относительно операции нормального сопряжения (т. е. $[X,Y] = 0$, при $X \neq 0,\ Y \neq 0$), они должны быть делителями нуля относительно поличислового умножения.

Любое число $Y \in H_3$ можно представить в виде

$$Y = [1,Z], \quad \text{где} \quad Z = (-y^1 + y^2 + y^3, y^1 - y^2 + y^3, y^1 + y^2 - y^3). \tag{42}$$

Рассмотрим задачу на собственные векторы и собственные значения вида

$$[1,Y] = \lambda Y, \tag{43}$$

где λ – некоторое действительное или комплексное число. Так как матица линейного преобразования в правой части формулы (43) симметрическая, то собственные значения все действительные: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_{2,3} = -\frac{1}{2}$. Собственные векторы, соответствующие первому собственному значению, образуют прямую $1t$, где t – параметр вдоль прямой, а собственные векторы, соответствующие собственному значению $(-\frac{1}{2})$, образуют плоскость, перпендикулярную (в евклидовом смысле) прямой вдоль единицы и проходящую через начало координат, то есть плоскость натянутую на два радиус-вектора, например: $(2,-1,-1)$, $(0,1,1)$.

Формулы (30) – (40) автоматически обобщаются на поличисла[1] H_n с заменой $3 \to n$, $C = \frac{1}{n}$.

Из приведенных выше примеров, сравнивая формулы (20), (29) и (37), можно сделать вывод, что для комплексных и H_n чисел справедлива формула

$$X \cdot \tilde{X} = |\,X|^n \cdot 1 + 0 \cdot e. \tag{44}$$

Возможно, такая формула справедлива для любых невырожденных поличисел, но это утверждение требует доказательства.

Можно говорить, что число X *"ортогонально"* числу Y, если

$$((X, \tilde{Y})) = 0. \tag{45}$$

Отметим, что это понятие при $n > 2$, вообще говоря, не симметричное, то есть из того, что X ортогонально Y, в общем случае не следует, что Y ортогонально X. Если обе ортогональности имеют место, то числа X и Y называются *взаимно ортогональными.*

Если задан комплекс из $(n-1)$ чисел, часть из которых могут совпадать, и число Z является нормальным сопряжением этому комплексу, то число X *"ортогонально" данному комплексу,* если

$$((X, Z)) = 0. \tag{46}$$

Угловые параметры нескольких чисел

В пространстве поличисел $n > 2$ угол между двумя числами (векторами) можно ввести многими способами. В данной работе мы используем алгебраический подход на основе аналога формулы треугольника евклидового пространства.

Поясним это на примере чисел H_3. Пусть числа X и Y таковы, что

$$x^i > 0, \quad y^i > 0, \quad i = 1, 2, 3. \tag{47}$$

В этом случае они не являются делителями нуля. Найдем выражение для куба нормы их суммы $Z = X + Y$

$$|\,Z|^3 = (X+Y, X+Y, X+Y) = |\,X|^3 + 3(X,X,Y) + 3(X,Y,Y) + |\,Y|^3. \tag{48}$$

Введем два гиперболических угла β_X, β_Y согласно формулам:

$$\cosh \beta_X = \frac{(X,X,Y)}{|\,X|^2 |\,Y|}, \quad \cosh \beta_Y = \frac{(X,Y,Y)}{|\,X|\,|\,Y|^2}, \tag{49}$$

тогда

$$|\,Z|^3 = |\,X|^3 + |\,Y|^3 + 3|\,X|^2 |\,Y| \cosh \beta_X + 3|\,X|\,|\,Y|^2 \ \cosh \beta_Y. \tag{50}$$

Эти два гиперболических угла β_X, β_Y будем называть *угловыми характеристиками* пары чисел X, Y.

Поясним смысл форм, фигурирующих в формулах (48), (49). Для этого рассмотрим комплекс $\{X, Y\}$ и нормально сопряженное к этому комплексу число $W = [X, Y]$. Форма

---

[1] H_n – гиперкомплексные числа, изоморфные алгебре действительных квадратных диагональных матриц $n \times n$.

(X, X, Y) есть скалярное произведение числа X на комплекс $\{X, Y\}$, а форма (X, Y, Y) есть скалярное произведение числа Y на тот же комплекс.

Если числа X, Y не являются делителями нуля, но не удовлетворяют условиям (47), то правые части в формулах (49) могут принимать отрицательные значения. Если мы при этом хотим сохранить формулу (50), то угловые характеристики β_X, β_Y будут уже в общем случае комплексными числами. Если же нам важно, чтобы угловые характеристики оставались действительными, то приходится одновременно изменять формулы (49) и (50). Например, если в первой формуле (49) правая часть меньше нуля, то в этой формуле и в формуле (50) можно заменить $\cosh\beta_X$ на $\sinh\beta_X$.

Почему пара чисел (векторов) в трехмерном пространстве H_3 характеризуется двумя угловыми характеристиками, а не одной, как это имеет место в трехмерном евклидовом пространстве? Это связано с тем, что пространство H_3, как и все поличисловые пространства размерности больше двух, имеет выделенные направления и плоскости, то есть не являются изотропным.

Фракталы

Последние тридцать лет в теории динамических систем бурно развивалось направление, связанное с комплексными фракталами [5], яркими представителями которых являются множества Жюлиа и Мандельброта. Однако на фоне многочисленных замечательных и красивых результатов почти затерялся тот факт, что практически все достижения были получены на основе комплексных чисел и евклидовой плоскости. В противоположность этому, построение многомерных фракталов на основе кватернионов в целом оказалось мало впечатляющим.

Глубинные основания проблем, возникающих на данном пути, следует отнести к принципиальной невозможности обобщить теорию аналитических функций комплексной переменной на кватернионную переменную. Последнее обстоятельство обусловлено некоммутативностью кватернионного произведения.

Структура поличисел, сохраняя симметрию (равносложность) между сложением и умножением, не содержит тех трудностей, которые возникают в некоммутативных или неассоциативных числовых алгебрах. Следовательно, на основе поличисел вполне можно ожидать построение многомерных фракталов более интересных, чем получились с использованием кватернионов. Обратившись в качестве примера к числам H_n, получим, что невозможно построить сколько-нибудь содержательные фракталы, используя обычные для множеств Жюлиа зависимости, например:

$$X_{(i+1)} = X_{(i)}^2 + C. \tag{51}$$

Это связано с чрезвычайно простым устройством чисел H_n и, в частности, H_3. В специальном базисе аналитические функции переменной H_n распадаются на n функций одной действительной переменной, и в результате, получающийся итерационный процесс сводится к n независимым одномерным итерационным процессам, что мало интересно. Однако для поличисел имеется принципиальная возможность ввести дополнительные операции, среди которых имеется и рассмотренная выше операция нормального сопряжения, и использовать эти операции для построения более сложных не расщепляющихся итерационных процессов.

Так, для H_3 можно предложить несколько простых и нетривиальных итерационных процессов $X_{i+1} = F(X_i)$:

1. $F(X) = \tilde{X} + C$,
2. $F(X) = [X, \tilde{X}] + C$,
3. $F(X) = [X, [X, 1]] + C$,
4. $F(X) = [X, [X, [X, 1]]] + C$,
5. $F(X) = X \cdot [X, 1] + C$,
6. $F(X) = [X, [X, C]] - 1$,
7. $F(X) = [X \cdot X, X] + C = [X, X] \cdot [X, 1] + C$,

где $C \in H_3$. Начальные значения чисел для этих итерационных процессов брались на плоскостях, перпендикулярных (в евклидовом смысле) прямой $1 \cdot t$. Параметр t указывает точку пересечения этой прямой и плоскости, при $t = 0$ плоскость проходит через начало координат. Интересно, что при $C = 0$, $t = 0$ процессы 2, 3, 4 дают вокруг начала координат область сходимости в виде скругленного шестиугольника.

Исследование на сходимость итерационного процесса 1 дает достаточно интересные в геометрическом плане трехмерные области сходимости. Еще интереснее оказываются области сходимости процесса 7.

Заключение

Конечно, предложенные в данной работе построения можно обобщать и далее. Так, в самом общем случае можно рассмотреть n-мерное линейное пространство с полилинейной симметрической формой (3), разбить множество аргументов на два комплекса и говорить, что такая форма есть скалярное произведение этих двух комплексов. Это вызовет дальнейшее обобщение всех введенных выше понятий.

Несомненно, что операция нормального сопряжение имеет свое собственное алгебраическое значение. Для невырожденных поличисел построен удобный алгоритм обобщения геометрических объектов и величин, которые понятны и привычны в евклидовых и псевдоевклидовых пространствах, такие как скалярное произведение, ортогональность, углы между векторами и т. п.

Введение над гиперкомплексными числами дополнительных операций превращает последние в нечто большее, чем линейные алгебры. Такие операции позволяют вместо достаточно тривиальных структур поличисел получить геометрии, количество и качество внутренних симметрий которых неизмеримо превышает возможности поличисел. Развивая эту идею, возможно будет уместно помимо общепринятого термина "линейная алгебра" ввести термин "линейная геометрия", понимая под этим линейную алгебру плюс все возможные на этом множестве независимые полилинейные операции, естественно вытекающие с помощью некоторых построений из самой линейной алгебры.

Одним из перспективных направлений использования потенциала таких линейных геометрий оказывается построение многомерных фрактальных числовых множеств, аналогичных множествам Мандельброта и Жюлиа на комплексной плоскости.

Вероятно, следует еще раз подчеркнуть, что построенные при помощи введенной авторами специфической $(n-1)$-нарной операции фрактальные множества являются объектами не произвольного, а именно поличислового пространства, что открывает перед ними широкие перспективы, отсутствующие, например, у фракталов, строящихся над телом кватернионов. Кватернионы, как известно, обладают некоммутативным умножением, что существенно сужает возможности их математических приложений, в частности, построение развитой теории аналитических функций. Поскольку этот недостаток отсутствует у поличисел, а также учитывая гипотезу о возможности замены пространства Минковского на одно из полипространств [6], предлагаемый подход, по-видимому, имеет широкие перспективы.

Литература

[1] Д. Г. Павлов. Обобщение аксиом скалярного произведения. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **1**, 2004.

[2] Г. Ю. Богословский. Теория локально анизотропного пространства-времени. М., Издательство МГУ, 1992.

[3] G. S. Asanov. Finslerian Extension of General Relativity, Dordrecht, 1984.

[4] Б. Риман. О гипотезах, лежащих в основаниях геометрии. – В кн.: Об основаниях геометрии. М., ТТЛ, 1956.

[5] Х. О. Пайтген, П. Х. Рихтер. Красота фракталов. М., "Мир", 1993.

[6] Д. Г. Павлов. Четырехмерное время. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **1**, 2004.

Normal conjugation on the set of poly-numbers

G. I. Garas'ko, D. G. Pavlov

Electrotechnical institute of Russia, Moscow, MSTU n. a. N. E. Bauman, Russia
gri9z@mail.ru, geom2004@mail.ru

The space of poly-numbers is an example of linear space endowed with several poly-forms. On the set of non-degenerate $n-$numbers, is introduced the notion of normal conjugation. This is an $(n-1)$-ary operation, which is commutative in all its arguments, but non-associative in general. For complex and hyperbolic numbers this operation reduces to usual conjugation. The normal conjugation can be used for the study of algebraic and geometric structures of the coordinate space of $n-$numbers, and also for introducing concepts like scalar product and angular characteristics of two or more numbers (vectors).

Key-words: poly-number, poly-form, normal conjugation, scalar product.
MSC: 08A99, 15A69, 15A99, 45K99.

ОБОБЩЕННО–АНАЛИТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ И КОНГРУЕНЦИИ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ

Г. И. Гарасько

ГУП Всероссийский электротехнический институт
gri9z@mail.ru

В данной работе изучаются некоторые свойства обобщенно-аналитических функций поличисловой переменной. Классу $\{f^i; \Gamma^i_{kj}\}$ таких функций можно сопоставить множество пространств аффинной связности, в каждом из которых определяется конгруенция геодезических, ассоциированная с данным классом обобщенно-аналитических функций. Если векторное поле f^i в каждой точке такого пространства касательно одной из геодезических конгруенции, то такое свойство накладывает некоторые ограничений на саму обобщенно-аналитическую функцию.

Ключевые слова: обобщенные аналитические функции, конгруенция геодезических, аффинная связность.

Введение

Впечатляющие успехи теории функций комплексной переменной и ее приложений при решении физических задач побуждает искать обобщение такой теории для пространств размерности больше, чем два. Одним из таких возможных обобщений является построение теории обобщенно-аналитических функций поличисловой переменной [1] с рядом дополнительных условий, выполнение которых позволяло бы автоматически применять такие функции при построении теоретико-физических моделей и решении конкретных физических задач.

Обобщенно-аналитическая функция (подробнее см. [1]) – это пара $\{f^i; \gamma^i_k\}$:

$$\frac{\partial f^i}{\partial x^k} + \gamma^i_k = p^i_{kj} \dot{f}^j, \quad \text{или} \quad \tilde{\nabla}_k f^i = p^i_{kj} \dot{f}^j, \tag{1}$$

где f^i, $\dot{f}^i$ – одноковариантные векторные поля в пространстве $\{\mathbf{M_n}; \mathbf{P_n}\}$, $\mathbf{M_n}$ – n-мерное элементарное многообразие, допускающее взаимно однозначное отображение $\mathbf{M_n} \leftrightarrow \mathbf{P_n}$ на n-мерное пространство поличисел $\mathbf{P_n}$, а объекты γ^i_k при переходе от одной системы координат к другой преобразуются как объекты $(\Gamma^i_{kj} f^i)$, где Γ^i_{kj} – объекты аффинной связности. Одним из необходимых свойств пространства $\{\mathbf{M_n}; \mathbf{P_n}\}$ постулируется изоморфность касательного пространства в любой точке $X \in \{\mathbf{M_n}; \mathbf{P_n}\}$ пространству ассоциативно-коммутативных гиперкомплексных чисел (поличисел) $\mathbf{P_n}$. Наличие взаимно однозначного отображения $\mathbf{M_n} \leftrightarrow \mathbf{P_n}$ позволяет вводить в пространстве $\{\mathbf{M_n}; \mathbf{P_n}\}$ специальные системы координат, в которых тензорное поле p^i_{kj}, определяющее правила поличислового умножения, не зависит от точки пространства; если $\mathbf{P_n} \ni e_1, e_2, ..., e_n$ – базис, то

$$e_i e_j = p^k_{ij} e_k. \tag{2}$$

Пусть ε^i – координаты разложения единицы, тогда

$$\varepsilon^i p^k_{ij} = \delta^k_j. \tag{3}$$

Используя эту формулу и формулу (1), получим явное инвариантное выражение обобщенной производной

$$\dot{f}^i = \varepsilon^k \tilde{\nabla}_k f^i \tag{4}$$

и соотношений Коши-Римана

$$\tilde{\nabla}_k f^i - p^i_{kj} \varepsilon^m \tilde{\nabla}_m f^j = 0. \tag{5}$$

Каждой обобщенно-аналитической функции $\{f^i; \gamma^i_k\}$ можно сопоставить множество пространств аффинной связности $\mathbf{L_n}(\Gamma^i_{kj})$ с объектами аффинной связности Γ^i_{kj}, являющимися решениями системы уравнений

$$\Gamma^i_{kj} f^j = \gamma^i_j. \tag{6}$$

Множество всех функций с одним и тем же объектом связности, определяемым таким образом, образуют некоторое множество (класс функций), которое обозначается $\{f^i; \Gamma^i_{kj}\}$. В пространстве аффинной связности всегда найдется такой параметр τ, что система уравнений для определений геодезических $x^i = x^i(\tau)$ принимает [2] вид

$$\frac{d^2 x^i}{d\tau^2} + \Gamma^i_{kj} \frac{dx^k}{d\tau} \frac{dx^j}{d\tau} = 0. \tag{7}$$

Если заменить объект связности Γ^i_{kj} на другой

$$\tilde{\Gamma}^i_{kj} = \Gamma^i_{kj} + \frac{1}{2}(p_k \delta^i_j + p_j \delta^i_k) + S^i_{kj}, \tag{8}$$

где p_i – произвольное одноковариантное поле, а S^i_{kj} – произвольный тензор, антисимметричный по нижним индексам, то есть тензор кручения, то геодезические останутся теми же (см., например, [2]).

Конгруенция геодезических, соответствующая обобщенно-аналитической функции

Пусть $\{f^i; \gamma^i_k\}$ – обобщенно-аналитическая функция, и векторное поле f^i определяет конгруенцию геодезических с объектом связности (8), где объект Γ^i_{kj} связан с данной обобщенно-аналитической функцией соотношением (6), причем касательный вектор вдоль геодезической $x^i = x^i(\tau)$ есть

$$\frac{dx^i}{d\tau} = f^i. \tag{9}$$

Тогда дифференциальные уравнения (7) с заменой Γ^i_{kj} на $\tilde{\Gamma}^i_{kj}$ для определения геодезических превратятся в соотношения для обобщенно-аналитической функции

$$f^k \tilde{\nabla}_k f^i + (p_m f^m) f^i = 0, \tag{10}$$

или

$$f^k p^i_{kj} \dot{f}^i + (p_m f^m) f^i = 0. \tag{11}$$

Итак, для того чтобы обобщенно-аналитическая функция определяла конгруенцию геодезических, предложенным выше способом, или, как мы будем говорить в дальнейшем, обладала X-свойством, она должна удовлетворять соотношениям (10), (11). Для краткости обобщенно-аналитические функции, обладающие X-свойством, будем называть X-*функциями*.

Система уравнений (11), рассматриваемая как система линейных уравнений относительно n неизвестных компонент $\dot{f}^i$, совместна, так как одно решение заведомо имеется

$$\dot{f}^i = -(p_m f^m)\varepsilon^i. \tag{12}$$

Если матрица

$$(a_{ij}) = f^k p^i_{kj} \tag{13}$$

невырожденна в некоторой области, то (12) – единственное решение системы (11) в этой области пространства $\{\mathbf{M_n}; \mathbf{P_n}\}$.

В пространстве поличисел $X \in P_n$ n-ная степень "нормы" выражается через форму

$$\Omega(X) = det(x^k p^i_{kj}). \tag{14}$$

Значение этой формы не зависит от базиса;

$$\Omega(YX) = \Omega(Y)\Omega(X) \tag{15}$$

при любых $X, Y \in P_n$; наконец $\Omega(1) = 1$. Таким образом, можно определить n-ную степень "нормы" формулой

$$|\,X|^n = \Omega(X) \tag{16}$$

или формулой

$$|\,X|^n = |\Omega(X)|. \tag{17}$$

В силу выше сказанного, можно ожидать, что решения уравнения (10) будут существенно зависеть от неравенства или равенства нулю нормы X-функции.

Покажем, что для произвольных поличисел аналитическая функция

$$F(X) = \omega X + V_0 \tag{18}$$

(ω – произвольное действительное число, а V_0 – произвольное поличисло) является именно функцией, определяющей конгруенцию геодезических, то есть является X-функцией. Если $\omega \neq 0$, то ее можно записать в виде

$$F(X) = \omega(X - X_0), \tag{19}$$

где X_0 – произвольное поличисло. Подставим (18) в (10) и, учитывая, что для аналитических функций $\gamma^i_k = 0$, получим

$$f^i[\omega + (p_m f^m)] = 0. \tag{20}$$

Так как p_m – m произвольных функций-компонент, то всегда можно построить такие m компонент, что $(p_m f^m) = -\omega$. Что и требовалось показать.

Выясним вид кривых, которые определяются функцией (18). Для этого надо найти общее решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx^i}{d\tau} = \omega x^i + v^i_0. \tag{21}$$

Оно имеет вид

$$x^i = v^i_0 \tau + a^i e^{\omega\tau}. \tag{22}$$

Под конгруенцией кривых в некоторой области n-мерного пространства будем понимать $(n-1)$-параметрическое семейство кривых, причем через каждую точку этой n-мерной области должна проходить одна и только одна кривая. В общем решении (22) имеется $(2n+1)$ независимый действительный параметр плюс параметр вдоль кривой, поэтому для того, чтобы уравнения (22) определяли конгруенцию, параметры v_0^i, a^i, ω должны выражаться через $(n-1)$ независимый параметр, а область изменения параметра τ также может быть ограничена в зависимости от значений этих $(n-1)$ независимого параметра. Если мы фиксируем направление изменения параметра τ, например, от меньших к большим значениям, то каждая кривая получает еще и направление, то есть имеет вид линии тока или "силовой линии". Несмотря на простейший вид общего решения (22), эти формулы дают большое разнообразие конгруенций кривых, не все из них будут прямыми, а значит геодезическими. Таким образом, множество решений системы уравнений (10) включает в себя как подмножество X-функции. То есть выполнение уравнений (10) является необходимым, но не достаточным условием наличия у обобщенно-аналитической функции X-свойства.

В физике часто встречается условие $\nabla_i f^i = 0$. Так, например, выражается закон сохранения заряда, а также калибровка четырехвектора потенциала электромагнитного поля. Вычислим аналогичную свертку для обобщенно-аналитической функции, получим

$$\tilde{\nabla}_i f^i = p^i_{ij} \dot{f}^j. \tag{23}$$

Для X-функции при выполнении условия (12) имеем

$$\tilde{\nabla}_i f^i = -(p_m f^m), \tag{24}$$

а для X-функции (18), (19)

$$\tilde{\nabla}_i f^i = n\omega. \tag{25}$$

Примеры аналитических X-функций

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Рассмотрим аналитическую функцию

$$F(z) = u(x,y) + iv(x,y) \tag{26}$$

комплексной переменной

$$z = x + iy, \quad i^2 = -1. \tag{27}$$

Выпишем вначале матрицу (13)

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix} \tag{28}$$

и найдем ее определитель

$$det(a_{ij}) = u^2 + v^2. \tag{29}$$

Таким образом, для комплексных чисел справедлива формула (16)

$$det(a_{ij}) = |F(z)|^2. \tag{30}$$

Решим систему уравнений (10). В данном случае они принимают вид

$$\begin{cases} u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} + (p_1 u + p_2 v)u = 0, \\ u\dfrac{\partial v}{\partial x} + v\dfrac{\partial v}{\partial y} + (p_1 u + p_2 v)v = 0. \end{cases} \tag{31}$$

Используя соотношения Коши-Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \tag{32}$$

из этой системы уравнений получим две системы:

$$\begin{cases} (u^2+v^2)\left[\dfrac{\partial u}{\partial x} + (p_1 u + p_2 v)\right] = 0, \\ (u^2+v^2)\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0, \end{cases} \tag{33}$$

и

$$\begin{cases} (u^2+v^2)\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0, \\ (u^2+v^2)\left[\dfrac{\partial u}{\partial y} + (p_1 u + p_2 v)\right] = 0. \end{cases} \tag{34}$$

Рассмотрим эти системы уравнений в области $u^2+v^2 \neq 0$. Тогда, сокращая на этот общий ненулевой множитель и записывая условия интегрируемости получившихся систем уравнений, имеем

$$\frac{\partial}{\partial x}(p_1 u + p_2 v) = \frac{\partial}{\partial y}(p_1 u + p_2 v) = 0 \quad \Rightarrow \quad (p_1 u + p_2 v) = const, \tag{35}$$

и единственное решение для данного случая

$$F(z) = \omega z + w_0, \tag{36}$$

где ω – произвольное действительное число, $w_0 = u_0 + iv_0$ – произвольное комплексное число.

Вычислим свертку $\nabla_i f^i$ от X-функции (36), получим

$$\nabla_i f^i = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 2\omega, \tag{37}$$

что согласуется с формулой (25).

Итак, мы доказали, что все аналитические X-функции комплексной переменной имеют вид (36) и что не существует аналитической X-функции от комплексной переменной, кроме постоянной, для которой бы $\nabla_i f^i \equiv 0$.

ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ЧИСЛА, H_2

Рассмотрим аналитическую функцию

$$F(z) = u(x,y) + jv(x,y) \tag{38}$$

гиперболической переменной

$$z = x + jy, \quad j^2 = 1. \tag{39}$$

Вычислим матрицу (13)

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} u & v \\ v & u \end{pmatrix} \tag{40}$$

и ее определитель

$$det(a_{ij}) = u^2 - v^2. \tag{41}$$

Таким образом, при $v = \pm u$ матрица (a_{ij}) является вырожденной, и для гиперболических чисел справедлива формула (16)

$$det(a_{ij}) = |F(z)|^2, \tag{42}$$

если квадрат нормы в пространстве H_2 понимать как

$$|z|^2 = x^2 - y^2. \tag{43}$$

Для гиперболических чисел соотношения (10) имеют тот же самый вид, что и для комплексных чисел, а уравнения Коши-Римана несколько изменяются:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} \tag{44}$$

– поэтому в уравнениях (33), (34) изменяется только общий множитель, он должен быть заменен на $(u^2 - v^2)$. Действуя точно так же как в случае комплексных чисел, мы получим уже не одно, а три качественно различных решения:

$$F_{(0)}(z) = \omega z + w_0, \tag{45}$$

где ω – произвольное действительное число, а w_0 – произвольное гиперболическое число;

$$F_{(1)}(z) = f_{(1)}(x + y)(1 + j), \tag{46}$$

где $f_{(1)}(\xi)$ – произвольная функция одной действительной переменной;

$$F_{(2)}(z) = f_{(2)}(x - y)(1 - j), \tag{47}$$

где $f_{(2)}(\xi)$ – произвольная функция одной действительной переменной. В ψ-базисе:

$$\begin{gathered} \psi_{1,2} = \tfrac{1}{2}(1 \pm j), \quad \psi_1\psi_1 = \psi_1, \quad \psi_2\psi_2 = \psi_2, \psi_1\psi_2 = 0, \\ x + jy = (x + y)\psi_1 + (x - y)\psi_2 = \xi^1\psi_1 + \xi^2\psi_2 \end{gathered} \tag{48}$$

последние две X-функции принимают вид

$$F_{(1)}(z) = 2f_{(1)}(\xi^1)\psi_1, \quad F_{(2)}(z) = 2f_{(2)}(\xi^2)\psi_2, \tag{49}$$

причем $|F_{(1)}(z)| = 0, \quad |F_{(2)}(z)| = 0.$

Итак, аналитические X-функции H_2 переменной более разнообразны, чем соответствующие функции комплексной переменной. Это связано именно с наличием в алгебре H_2 делителей нуля.

Вычислим скаляры $\nabla_i f^i$ от трех полученных X-функций:

$$\nabla_i f^i_{(0)} = 2\omega, \quad \nabla_i f^i_{(1)} = 2\dot{f}_{(1)}(x + y), \quad \nabla_i f^i_{(2)} = 2\dot{f}_{(2)}(x - y). \tag{50}$$

Отметим, что не существует аналитической X-функции H_2 переменной, кроме постоянной, для которой бы $\nabla_i f^i \equiv 0$.

ГИПЕРКОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА H_4

Алгебра этих поличисел изоморфна алгебре действительных диагональных квадратных матриц 4 × 4. Удобнее всего с этими числами работать в ψ-базисе: ψ_1, ψ_2, ψ_3, ψ_4;

$$\psi_i\psi_j = p^k_{ij}\psi_k, \quad p^k_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad i = j = k, \\ 0, & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases} \tag{51}$$

Произвольная аналитическая функция H_4 переменной имеет вид

$$F(x) = \varphi^1(\xi^1)\psi_1 + \varphi^2(\xi^2)\psi_2 + \varphi^3(\xi^3)\psi_3 + \varphi^4(\xi^4)\psi_4, \tag{52}$$

где φ^i – произвольные гладкие функции одной действительной переменной, а ξ^i – координаты $X \in P_n$ в ψ-базисе. Матрица (13) будет иметь вид

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} \varphi^1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varphi^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varphi^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varphi^4 \end{pmatrix} \tag{53}$$

а ее определитель равен

$$det(a_{ij}) = \varphi_1\varphi_2\varphi_3\varphi_4. \tag{54}$$

Таким образом, для гиперкомплексных чисел H_4 справедлива формула (16)

$$|F|^4 = det(a_{ij}), \tag{55}$$

если под четвертой степенью нормы в пространстве H_4 понимать

$$|\,X|^4 = \xi^1\xi^2\xi^3\xi^4. \tag{56}$$

Система уравнений (10) после подстановки в нее (52) запишется следующим образом:

$$\varphi^i \left[\frac{\partial\varphi^{i_-}}{\partial\xi^{i_-}} + p_m\varphi^m\right] = 0, \tag{57}$$

где $i \equiv i_-$, но по ним не ведется суммирования. Как мы уже отмечали выше, качественно различные решения системы уравнений (57) связаны с наличием различных делителей нуля в системе поличисел. Классифицируем все поличисла $X \neq 0$ в пространстве H_4 следующим образом:

А) X не есть делитель нуля;

Б) три координаты ξ^i, ξ^j, ξ^k, $\quad i \neq j, \quad i \neq \; j, \quad j \neq \; k$ не равны нулю, а четвертая координата равна нулю;

В) только две координаты ξ^i и ξ^j, $i \neq j$ отличны от нуля, а две другие равны нулю;

Г) три координаты равны нулю, и только одна координата ξ^i не равна нулю.

В соответствии с этой классификацией проведем классификацию всех решений системы уравнений (57):

$$\text{А)} \qquad F_{(0)}(X) = \omega X + W_0, \tag{58}$$

где ω – произвольное действительное число, а W_0 – произвольное поличисло;

$$\text{Б)} \qquad F_{(i,j,k)}(X) = \omega(\xi^i\psi_{i_-} + \xi^j\psi_{j_-} + \xi^k\psi_{k_-}) + \zeta_0^i\psi_{i_-} + \zeta_0^j\psi_{j_-} + \zeta_0^k\psi_{k_-}, \tag{59}$$

где ω, ζ_0^m – четыре произвольные действительные числа для каждой X-функции этого вида;

$$\text{В)} \qquad F_{(i,j)}(X) = \omega(\xi^i\psi_{i_-} + \xi^j\psi_{j_-}) + \zeta_0^i\psi_{i_-} + \zeta_0^j\psi_{j_-}, \tag{60}$$

где ω, ζ_0^m – три произвольные действительные числа для каждой X-функции этого вида;

$$\text{Г)} \qquad F_{(i)}(X) = \varphi^i(\xi^{i_-})\psi_{i_-}, \tag{61}$$

где $\varphi^i(\xi^{i-})$ – одна произвольная гладкая функция одного действительного переменного для каждой X-функции этого вида.

Вычислим скаляры $\nabla_m\varphi^m$ от всех полученных X-функций:

$$\begin{aligned} &\text{А})\nabla_m\varphi^m = 4\omega, \quad \text{Б})\nabla_m\varphi^m = 3\omega, \\ &\text{В})\nabla_m\varphi^m = 2\omega, \ \ \text{Г})\nabla_m\varphi^m = \dot\varphi^i(\xi^{i-}). \end{aligned} \tag{62}$$

Таким образом, не существует аналитической X-функции H_4 переменной, кроме постоянной, для которой бы $\nabla_m\varphi^m \equiv 0$.

Невырожденные X-функции

Будем называть X-функцию *невырожденной,* если она не является делителем нуля, то есть $|\,F(X)| \neq 0$. Тогда из выше изложенного следует общий вид такой обобщенно-аналитической функции

$$\{f^i; \gamma^i_k\} = \{f^i; -\frac{\partial f^i}{\partial x^k} + \delta^i_k a(x)\}, \tag{63}$$

где f^i – произвольное гладкое векторное поле, а $a(x)$ – произвольное скалярное поле. Таким образом, для любых поличисел существуют невырожденные X-функции, все они имеют вид (63), причем

$$\dot f^i = \varepsilon^i a(x), \qquad \tilde\nabla_i f^i = na(x). \tag{64}$$

Формально существуют отличные от постоянных невырожденные X-функции, для которых $\tilde\nabla_i f^i = 0$, но они тривиальны, так как скалярное поле $a(x)$ при этом тождественно равно нулю. Подчеркнем, что производная от невырожденной X-функции в базисе $e_1 = 1, e_2, ..., e_n$ в общем случае имеет вид

$$\dot F(X) = a(x) + 0e_2 + 0e_3 + ... + e_n. \tag{65}$$

Найдем условия, при выполнении которых поличисловое произведение двух невырожденных X-функций $F_{(1)}(X), F_{(2)}(X)$ опять есть невырожденная X-функция $F_{(3)}(X)$. Так как $|\,F_{(1)}(X)F_{(2)}(X)| = |\,F_{(1)}(X)|\,|\,F_{(2)}(X)|$, то функция $F_{(3)}(X)$ будет невырожденной. Остается проверить выполнение для нее формулы (63). В работе [1] приводится формула поличислового произведения двух обобщенно-аналитических функций

$$\{f^i_{(1)}; \gamma^i_{(1)k}\}\{f^i_{(2)}; \gamma^i_{(2)k}\} = \{f^i_{(3)}; \gamma^i_{(3)k}\}, \tag{66}$$

где

$$\gamma^i_{(3)k} = p^i_{i_1 i_2}(f^{i_2}_{(2)}\gamma^{i_1}_{(1)k} + f^{i_1}_{(1)}\gamma^{i_2}_{(2)k}). \tag{67}$$

Потребуем, чтобы все γ-объекты в формуле (67) имели вид, определяемый формулой (63). Тогда после преобразований получим

$$a_{(3)}\delta^i_k = a_{(1)}p^i_{kj}f^j_{(2)} + a_{(2)}p^i_{kj}f^j_{(1)}. \tag{68}$$

Это и есть те условия, которым должны удовлетворять две невырожденные X-функции, чтобы их произведение опять было невырожденной X-функцией.

Заключение

В настоящей работе построены обобщенно-аналитические функции произвольной поличисловой переменной, которые названы невырожденными X-функциями и которые являются аналогами функции $F(z) = z$ комплексной переменной z. Эти функции, не являясь делителями нуля, могут определять в пространстве $\{\mathbf{M_n}; \mathbf{P_n}\}$ конгруенцию геодезических, причем производная от такой функции есть поличисловая единица, умноженная на скалярное поле. Формально существуют отличные от постоянных невырожденные X-функции, для которых $\tilde{\nabla}_i f^i = 0$, но они тривиальны, так как в этом случае скалярное поле $a(x)$ тождественно равно нулю. Возможно, именно невырожденные X-функции будут играть ту же фундаментальную роль в теории обобщенно-аналитических функций, какую в теории аналитических функций комплексной переменной играет комплексная переменная z, то есть невырожденная X-функция $F(z) = z$.

Автор благодарен И. Н. Дулькину за доброжелательное внимание к его работе, Д. Г. Павлову за подробное обсуждение результатов и Л. М. Фишеру за серьезную техническую помощь.

Литература

[1] Г. И. Гарасько, Обобщенно-аналитические функции поличисловой переменной, Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **1**, 2004, стр. 77 − 90 , 2004.

[2] П. К. Рашевский. Риманова геометрия и тензорный анализ. М., "Наука", 1967.

Generalized analytic functions and congruences of geodesics

G. I. Garas'ko

Electrotechnical institute of Russia, Moscow, gri9z@mail.ru

Several properties of generalized analytic functions of poly-number variable are investigated. The class $\{f^i; \Gamma^i_{kj}\}$ of such functions corresponds to the set of spaces of affine connections, in which are defined congruences of geodesics associated t the given class of generalized analytic functions. If some vector field f^i at each point of such a space is tangent to one of the geodesics of the congruence, then such a property determines a certain constraint on the generalized analytic function itself.

Key-words: generalized analytic function, congruence of geodesics, affine connection.
MSC: 32A17, 46J15.

О НОРМЕ БИКВАТЕРНИОНОВ И ИНЫХ АЛГЕБР С ЦЕНТРАЛЬНЫМ СОПРЯЖЕНИЕМ

А. А. Элиович

eliovich@mail.ru

В работе на примере алгебр бикватернионов и биоктав вводится понятие центрального сопряжения. Все реально изучаемые гиперкомплексные алгебры являются алгебрами с центральным сопряжением. С помощью предложенного метода анализа допустимых алгеброй сопряжений вводится ряд новых результатов. Доказывается, что алгебры с центральным сопряжением моноассоциативны и монокомпозиционны. Доказывается, что альтернативные алгебры с центральным сопряжением обладают мультипликативной нормой 2 степени (вообще говоря, не вещественной). Как следствие, эти алгебры (в частности, бикватернионы и биоктавы) обладают мультипликативной вещественной нормой степени выше 2, которая может иметь несколько разных, но эквивалентных представлений. Вводится квадроскалярное и квадровекторное произведение. Для алгебр бикватернионов, дикватернионов и биоктав ряд результатов представлен в изотропных базисах. Полученный аппарат может оказаться полезным при использовании алгебр бикватернионов и биоктав в геометрии и физике.

Ключевые слова: бикватернионы, биоктавы, центральное сопряжение, норма.

Введение

Бикватернионы – перспективная гиперкомплексная алгебра, являющаяся довольно естественным языком для релятивистской физики. Многие, кто когда-то были очарованы красотой кватернионов, вслед за этим переоткрывали и бикватернионы. Хороший обзор известных возможностей применения бикватернионов дан в [1]. Изучая бикватернионы десять лет назад, в 1994 г., автор установил для своего использования ряд фактов и формул, сочтя их слишком элементарными для публикации. Недавно выяснилось, что некоторые их этих фактов, по-видимому, остаются неизвестными, в том числе и для тех, кто работает с бикватернионами. В связи с этим, ряд вопросов в отношении бикватернионов до сих пор освещается некорректно. Распространено мнение, что бикватернионы а) обладают вещественной нормой 2 степени и б) норма бикватернионов не является мультипликативной (т. е. норма произведения не равна произведению норм). Это утверждение встречается даже в энциклопедических обзорах, например, [2]. Однако, подобная норма (механически записываемая в виде суммы и разности квадратов) не согласована с таблицей умножения бикватернионов и является для них довольно искусственной. Правильное утверждение, что бикватернионы обладают комплексной нормой 2 степени (и, как следствие, вещественной нормой 4 степени), встречается довольно редко. И автор ни разу не нашел в литературе указание на мультипликативность этой нормы.

Возможно, невнимание к формам степени выше 2 объясняется тем, что все классические полупростые группы Ли есть группы инвариантности той или иной квадратичной формы. Поскольку геометрии согласно Эрлангенской программе Клейна связаны с теми или иными группами, формы степени выше 2 выглядят излишними.

Данная работа основывается на двух идеях: 1) рассмотрение набора сопряжений, заданных в алгебре, позволяет доказать многие факты более простым и более общим образом, чем с помощью непосредственных алгебраических выкладок; 2) правильнее изучать полинормы, естественно возникающие в алгебрах, чем приписывать им квадратичную норму.

Нормы и скалярные произведения степени выше 2 на гиперкомплексных алгебрах ввел в 1950-х годах Р. Д. Шафер (R. D. Schafer) [5] – [7], установив ряд основополагающих фактов в данной области. В последнее время в России идею применения полинорм гиперкомплексных чисел в физике активно пропагандирует Д. Г. Павлов [9], [10].

В данной статье для лучшего понимания вопроса изучаются параллельно бикватернионы и дикватернионы, а также биоктавы.

Алгебры кватернионов, бикватернионов и дикватернионов, биоктав

Кватернион (см., например, [3]) есть гиперкомплексное число

$$\mathbf{a} = a_0 + a_1\mathbf{q}_1 + a_2\mathbf{q}_2 + a_3\mathbf{q}_3, \tag{1}$$

где a_i – вещественные числа, а орты $\mathbf{q}_i$ перемножаются согласно правилу умножения

$$1\mathbf{q}_k = \mathbf{q}_k 1 = \mathbf{q}_k, \qquad \mathbf{q}_j\mathbf{q}_k = -\delta_{jk}1 + \varepsilon_{jkn}\mathbf{q}_n,$$

где δ_{jk} и ε_{jkn} – символы Кронекера и Леви-Чивиты $(j, k, n = 1, 2, 3)$.

Бикватернионы есть кватернионы, определенные над полем комплексных чисел $(\mathbf{i}_0^2 = -1)$. *Дикватернионы* – это кватернионы, определенные над алгеброй двойных чисел $(\mathbf{i}_0^2 = +1)$. В связи с этим, эти числа можно по-прежнему записывать в виде (1), имея в виду под коэффициентами a_i уже комплексные (двойные) числа. Однако, мы примем более свободную трактовку бикватернионов (дикватернионов) как 8-мерной алгебры над полем вещественных чисел, состоящей из двух блоков:

$$\mathbf{a} = a + k \cdot \mathbf{i}_0, \tag{2}$$

или, в развернутой записи,

$$\mathbf{a} = a_0 + a_1\mathbf{q}_1 + a_2\mathbf{q}_2 + a_3\mathbf{q}_3 + k_0\mathbf{i}_0 + k_1\mathbf{i}_1 + k_2\mathbf{i}_2 + k_3\mathbf{i}_3, \tag{3}$$

где a, k – кватернионы с вещественными коэффициентами. $\mathbf{i}_0$ является внешней единицей, коммутирующей с кватернионами a, k; $\mathbf{i}_0^2 = -1$ для бикватернионов и $+1$ для дикватернионов, единицы $\mathbf{i}_j$ – результат внешнего (тензорного) произведения $\mathbf{i}_0 \otimes \mathbf{q}_j$. (Мы будем использовать для удобства изложения одинаковое обозначение $\mathbf{i}_0$ для обеих алгебр, поскольку перемешиваться в данной работе они не будут.) Отсюда вытекает правило умножения бикватернионов (дикватернионов, нижний знак) в блочном и табличном виде:

$$(a + k \cdot \mathbf{i}_0)(b + l \cdot \mathbf{i}_0) = ab \mp kl + (al + kb) \cdot \mathbf{i}_0. \tag{4}$$

$\times$	1	$\mathbf{q}_1$	$\mathbf{q}_2$	$\mathbf{q}_3$	$\mathbf{i}_0$	$\mathbf{i}_1$	$\mathbf{i}_2$	$\mathbf{i}_3$
1	1	$\mathbf{q}_1$	$\mathbf{q}_2$	$\mathbf{q}_3$	$\mathbf{i}_0$	$\mathbf{i}_1$	$\mathbf{i}_2$	$\mathbf{i}_3$
$\mathbf{q}_1$	$\mathbf{q}_1$	-1	$\mathbf{q}_3$	$-\mathbf{q}_2$	$\mathbf{i}_1$	$-\mathbf{i}_0$	$\mathbf{i}_3$	$-\mathbf{i}_2$
$\mathbf{q}_2$	$\mathbf{q}_2$	$-\mathbf{q}_3$	-1	$\mathbf{q}_1$	$\mathbf{i}_2$	$-\mathbf{i}_3$	$-\mathbf{i}_0$	$\mathbf{i}_1$
$\mathbf{q}_3$	$\mathbf{q}_3$	$\mathbf{q}_2$	$-\mathbf{q}_1$	-1	$\mathbf{i}_3$	$\mathbf{i}_2$	$-\mathbf{i}_1$	$-\mathbf{i}_0$
$\mathbf{i}_0$	$\mathbf{i}_0$	$\mathbf{i}_1$	$\mathbf{i}_2$	$\mathbf{i}_3$	∓ 1	$\mp\mathbf{q}_1$	$\mp\mathbf{q}_2$	$\mp\mathbf{q}_3$
$\mathbf{i}_1$	$\mathbf{i}_1$	$-\mathbf{i}_0$	$\mathbf{i}_3$	$-\mathbf{i}_2$	$\mp\mathbf{q}_1$	± 1	$\mp\mathbf{q}_3$	$\pm\mathbf{q}_2$
$\mathbf{i}_2$	$\mathbf{i}_2$	$-\mathbf{i}_3$	$-\mathbf{i}_0$	$\mathbf{i}_1$	$\mp\mathbf{q}_2$	$\pm\mathbf{q}_3$	± 1	$\mp\mathbf{q}_1$
$\mathbf{i}_3$	$\mathbf{i}_3$	$\mathbf{i}_2$	$-\mathbf{i}_1$	$-\mathbf{i}_0$	$\mp\mathbf{q}_3$	$\mp\mathbf{q}_2$	$\pm\mathbf{q}_1$	± 1

. (*Tab.* 1)

Дуокватернионы есть кватернионы, определенные над полем дуальных чисел ($\mathbf{i}_0^2 = 0$). Они в данной статье изучаться не будут.

Октонионы, или *октавы,* (см. [3] и [4]) есть гиперкомплексные числа вида

$$\mathbf{a} = a_0 + a_1\mathbf{q}_1 + a_2\mathbf{q}_2 + a_3\mathbf{q}_3 + A_0\mathbf{e}_0 + A_1\mathbf{e}_1 + A_2\mathbf{e}_2 + A_3\mathbf{e}_3, \tag{5}$$

где правило умножения орт $\mathbf{q}_i, \mathbf{e}_j$ определяется на основании *формулы удвоения Кэли-Диксона* кватернионов:

$$(a + A \cdot \mathbf{e}_0)(b + B \cdot \mathbf{e}_0) = ab - \bar{B}A + (Ba + A\bar{b}) \cdot \mathbf{e}_0, \tag{6}$$

(a, b, A, B – кватернионы, $\bar{b}$ – сопряженный кватернион b, об этом см. далее). Если снять различие между мнимыми элементами $\mathbf{q}_i$и $\mathbf{e}_j$ ($\mathbf{e}_j \equiv \mathbf{q}_{j+4}$), правило умножения может быть выражено следующим образом:

$$\mathbf{q}_i \cdot \mathbf{q}_j \ = \ -\delta_{ij} \cdot 1 + C_{ijk}\mathbf{q}_k, \qquad i, j, k = 1, 2, \ldots, 7, \tag{7}$$

где полностью антисимметричные октонионные структурные константы C_{ijk} равны

$$C_{123} = C_{145} = C_{176} = C_{246} = C_{257} = C_{347} = C_{365} = 1 \tag{8}$$

(и обращаются в нуль в при других сочетаниях индексов).

Для удобства приведем таблицу умножения октав:

$\times$	1	$\mathbf{q}_1$	$\mathbf{q}_2$	$\mathbf{q}_3$	$\mathbf{e}_0$	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_3$
1	1	$\mathbf{q}_1$	$\mathbf{q}_2$	$\mathbf{q}_3$	$\mathbf{e}_0$	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_3$
$\mathbf{q}_1$	$\mathbf{q}_1$	-1	$\mathbf{q}_3$	$-\mathbf{q}_2$	$\mathbf{e}_1$	$-\mathbf{e}_0$	$-\mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_2$
$\mathbf{q}_2$	$\mathbf{q}_2$	$-\mathbf{q}_3$	-1	$\mathbf{q}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_3$	$-\mathbf{e}_0$	$-\mathbf{e}_1$
$\mathbf{q}_3$	$\mathbf{q}_3$	$\mathbf{q}_2$	$-\mathbf{q}_1$	-1	$\mathbf{e}_3$	$-\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_1$	$-\mathbf{e}_0$
$\mathbf{e}_0$	$\mathbf{e}_0$	$-\mathbf{e}_1$	$-\mathbf{e}_2$	$-\mathbf{e}_3$	-1	$\mathbf{q}_1$	$\mathbf{q}_2$	$\mathbf{q}_3$
$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_0$	$-\mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_2$	$-\mathbf{q}_1$	-1	$-\mathbf{q}_3$	$\mathbf{q}_2$
$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_0$	$-\mathbf{e}_1$	$-\mathbf{q}_2$	$\mathbf{q}_3$	-1	$-\mathbf{q}_1$
$\mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_3$	$-\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_0$	$-\mathbf{q}_3$	$-\mathbf{q}_2$	$\mathbf{q}_1$	-1

. (*Tab.* 2)

Наконец, *биоктавы (биоктонионы)* – это октавы, определенные над полем комплексных чисел. Из определения вытекает правило их умножения в блочном виде:

$$\begin{gathered}(a + A \cdot \mathbf{e}_0 + k \cdot \mathbf{i}_0 + K \cdot \mathbf{f}_0)(b + B \cdot \mathbf{e}_0 + l \cdot \mathbf{i}_0 + L \cdot \mathbf{f}_0) = ab - \bar{B}A - kl + \bar{L}K+ \\ (Ba + A\bar{b} - Lk - K\bar{l}) \cdot \mathbf{e}_0 + (al - \bar{L}A + kb - \bar{B}K) \cdot \mathbf{i}_0 + (La + K\bar{b} + Bk + A\bar{l}) \cdot \mathbf{f}_0,\end{gathered} \tag{9}$$

где $\mathbf{f}_0 \equiv \mathbf{i}_0 \cdot \mathbf{e}_0$. Его можно записать в виде символической таблицы (для удобства таблица умножения приведена и в полном виде):

$\times$	b	$B \cdot \mathbf{e}_0$	$l \cdot \mathbf{i}_0$	$L \cdot \mathbf{f}_0$
a	ab	$Ba \cdot \mathbf{e}_0$	$al \cdot \mathbf{i}_0$	$La \cdot \mathbf{f}_0$
$A \cdot \mathbf{e}_0$	$A\bar{b} \cdot \mathbf{e}_0$	$-\bar{B}A$	$A\bar{l} \cdot \mathbf{f}_0$	$-\bar{L}A \cdot \mathbf{i}_0$
$k \cdot \mathbf{i}_0$	$kb \cdot \mathbf{i}_0$	$Bk \cdot \mathbf{f}_0$	$-kl$	$-Lk \cdot \mathbf{e}_0$
$K \cdot \mathbf{f}_0$	$K\bar{b} \cdot \mathbf{f}_0$	$-\bar{B}K \cdot \mathbf{i}_0$	$-K\bar{l} \cdot \mathbf{e}_0$	$\bar{L}K$

и (*Tab.* 3)

$\times$	1	$\mathbf{q}_1$	$\mathbf{q}_2$	$\mathbf{q}_3$	$\mathbf{e}_0$	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_3$	$\mathbf{i}_0$	$\mathbf{i}_1$	$\mathbf{i}_2$	$\mathbf{i}_3$	$\mathbf{f}_0$	$\mathbf{f}_1$	$\mathbf{f}_2$	$\mathbf{f}_3$
1	1	$\mathbf{q}_1$	$\mathbf{q}_2$	$\mathbf{q}_3$	$\mathbf{e}_0$	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_3$	$\mathbf{i}_0$	$\mathbf{i}_1$	$\mathbf{i}_2$	$\mathbf{i}_3$	$\mathbf{f}_0$	$\mathbf{f}_1$	$\mathbf{f}_2$	$\mathbf{f}_3$
$\mathbf{q}_1$	$\mathbf{q}_1$	-1	$\mathbf{q}_3$	$-\mathbf{q}_2$	$\mathbf{e}_1$	$-\mathbf{e}_0$	$-\mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{i}_1$	$-\mathbf{i}_0$	$\mathbf{i}_3$	$-\mathbf{i}_2$	$\mathbf{f}_1$	$-\mathbf{f}_0$	$-\mathbf{f}_3$	$\mathbf{f}_2$
$\mathbf{q}_2$	$\mathbf{q}_2$	$-\mathbf{q}_3$	-1	$\mathbf{q}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_3$	$-\mathbf{e}_0$	$-\mathbf{e}_1$	$\mathbf{i}_2$	$-\mathbf{i}_3$	$-\mathbf{i}_0$	$\mathbf{i}_1$	$\mathbf{f}_2$	$\mathbf{f}_3$	$-\mathbf{f}_0$	$-\mathbf{f}_1$
$\mathbf{q}_3$	$\mathbf{q}_3$	$\mathbf{q}_2$	$-\mathbf{q}_1$	-1	$\mathbf{e}_3$	$-\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_1$	$-\mathbf{e}_0$	$\mathbf{i}_3$	$\mathbf{i}_2$	$-\mathbf{i}_1$	$-\mathbf{i}_0$	$\mathbf{f}_3$	$-\mathbf{e}_2$	$\mathbf{f}_1$	$-\mathbf{f}_0$
$\mathbf{e}_0$	$\mathbf{e}_0$	$-\mathbf{e}_1$	$-\mathbf{e}_2$	$-\mathbf{e}_3$	-1	$\mathbf{q}_1$	$\mathbf{q}_2$	$\mathbf{q}_3$	$\mathbf{f}_0$	$-\mathbf{f}_1$	$-\mathbf{f}_2$	$-\mathbf{f}_3$	$-\mathbf{i}_0$	$\mathbf{i}_1$	$\mathbf{i}_2$	$\mathbf{i}_3$
$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_0$	$-\mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_2$	$-\mathbf{q}_1$	-1	$-\mathbf{q}_3$	$\mathbf{q}_2$	$\mathbf{f}_1$	$\mathbf{f}_0$	$-\mathbf{f}_3$	$\mathbf{f}_2$	$-\mathbf{i}_1$	$-\mathbf{i}_0$	$-\mathbf{i}_3$	$\mathbf{i}_2$
$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_0$	$-\mathbf{e}_1$	$-\mathbf{q}_2$	$\mathbf{q}_3$	-1	$-\mathbf{q}_1$	$\mathbf{f}_2$	$\mathbf{f}_3$	$\mathbf{f}_0$	$-\mathbf{f}_1$	$-\mathbf{i}_2$	$\mathbf{i}_3$	$-\mathbf{i}_0$	$-\mathbf{i}_1$
$\mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_3$	$-\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_0$	$-\mathbf{q}_3$	$-\mathbf{q}_2$	$\mathbf{q}_1$	-1	$\mathbf{f}_3$	$-\mathbf{f}_2$	$\mathbf{f}_1$	$\mathbf{f}_0$	$-\mathbf{i}_3$	$-\mathbf{i}_2$	$\mathbf{i}_1$	$-\mathbf{i}_0$
$\mathbf{i}_0$	$\mathbf{i}_0$	$\mathbf{i}_1$	$\mathbf{i}_2$	$\mathbf{i}_3$	$\mathbf{f}_0$	$\mathbf{f}_1$	$\mathbf{f}_2$	$\mathbf{f}_3$	-1	$-\mathbf{q}_1$	$-\mathbf{q}_2$	$-\mathbf{q}_3$	$-\mathbf{e}_0$	$-\mathbf{e}_1$	$-\mathbf{e}_2$	$-\mathbf{e}_3$
$\mathbf{i}_1$	$\mathbf{i}_1$	$-\mathbf{i}_0$	$\mathbf{i}_3$	$-\mathbf{i}_2$	$\mathbf{f}_1$	$-\mathbf{f}_0$	$-\mathbf{f}_3$	$\mathbf{f}_2$	$-\mathbf{q}_1$	1	$-\mathbf{q}_3$	$\mathbf{q}_2$	$-\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_0$	$\mathbf{e}_3$	$-\mathbf{e}_2$
$\mathbf{i}_2$	$\mathbf{i}_2$	$-\mathbf{i}_3$	$-\mathbf{i}_0$	$\mathbf{i}_1$	$\mathbf{f}_2$	$\mathbf{f}_3$	$-\mathbf{f}_0$	$-\mathbf{f}_1$	$-\mathbf{q}_2$	$\mathbf{q}_3$	1	$-\mathbf{q}_1$	$-\mathbf{e}_2$	$-\mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_0$	$\mathbf{e}_1$
$\mathbf{i}_3$	$\mathbf{i}_3$	$\mathbf{i}_2$	$-\mathbf{i}_1$	$-\mathbf{i}_0$	$\mathbf{f}_3$	$-\mathbf{f}_2$	$\mathbf{f}_1$	$-\mathbf{f}_0$	$-\mathbf{q}_3$	$-\mathbf{q}_2$	$\mathbf{q}_1$	1	$-\mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_2$	$-\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_0$
$\mathbf{f}_0$	$\mathbf{f}_0$	$-\mathbf{f}_1$	$-\mathbf{f}_2$	$-\mathbf{f}_3$	$-\mathbf{i}_0$	$\mathbf{i}_1$	$\mathbf{i}_2$	$\mathbf{i}_3$	$-\mathbf{e}_0$	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_3$	1	$-\mathbf{q}_1$	$-\mathbf{q}_2$	$-\mathbf{q}_3$
$\mathbf{f}_1$	$\mathbf{f}_1$	$\mathbf{f}_0$	$-\mathbf{f}_3$	$\mathbf{f}_2$	$-\mathbf{i}_1$	$-\mathbf{i}_0$	$-\mathbf{i}_3$	$\mathbf{i}_2$	$-\mathbf{e}_1$	$-\mathbf{e}_0$	$\mathbf{e}_3$	$-\mathbf{e}_2$	$\mathbf{q}_1$	1	$\mathbf{q}_3$	$-\mathbf{q}_2$
$\mathbf{f}_2$	$\mathbf{f}_2$	$\mathbf{f}_3$	$\mathbf{f}_0$	$-\mathbf{f}_1$	$-\mathbf{i}_2$	$\mathbf{i}_3$	$-\mathbf{i}_0$	$-\mathbf{i}_1$	$-\mathbf{e}_2$	$-\mathbf{e}_3$	$-\mathbf{e}_0$	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{q}_2$	$-\mathbf{q}_3$	1	$\mathbf{q}_1$
$\mathbf{f}_3$	$\mathbf{f}_3$	$-\mathbf{f}_2$	$\mathbf{f}_1$	$\mathbf{f}_0$	$-\mathbf{i}_3$	$-\mathbf{i}_2$	$\mathbf{i}_1$	$-\mathbf{i}_0$	$-\mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_2$	$-\mathbf{e}_1$	$-\mathbf{e}_0$	$\mathbf{q}_3$	$\mathbf{q}_2$	$-\mathbf{q}_1$	1

.

(*Tab.* 4)

Эта таблица содержит в качестве фрагментов таблицы умножения бикватернионов и октав.

Центральное сопряжение

Алгебры кватернионов, бикватернионов и дикватернионов обладают замечательными свойствами, которые вытекают из существования в этих алгебрах "очень хорошего" сопряжения.

Под сопряжениями принято понимать линейные инволюционные антиавтоморфизмы:

$$\begin{aligned} C(\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b}) = \lambda C(\mathbf{a}) + \mu C(\mathbf{b}) \qquad & (\lambda, \mu \text{ – вещественные числа, линейность}),\\ C(C(\mathbf{a})) = \mathbf{a} \qquad & (\text{инволюция}),\\ C(\mathbf{ab}) = C(\mathbf{b})\cdot C(\mathbf{a}) \qquad & (\text{антиавтоморфизм}). \end{aligned} \tag{10}$$

Благодаря этим свойствам, выражения

$$\Re(\mathbf{a}) = 1/2(\mathbf{a}+C(\mathbf{a})) \qquad (\textit{реальная часть } \mathbf{a}), \tag{11}$$

$$N_r = \mathbf{a}\cdot C(\mathbf{a}) \qquad (\textit{правая 2-норма } \mathbf{a}), \tag{12}$$

$$N_l = C(\mathbf{a})\cdot \mathbf{a} \qquad (\textit{левая 2-норма } \mathbf{a}), \tag{13}$$

не изменяются при сопряжении (назовем их *инвариантными* или *реальными* для данного сопряжения):

$$C(\Re(\mathbf{a})) = \Re(\mathbf{a}), \qquad C(N(\mathbf{a})) = N(\mathbf{a}). \tag{14}$$

При этом

$$\Re(C(\mathbf{a})) = \Re(\mathbf{a}), \qquad \text{но вообще говоря} \quad N(C(\mathbf{a})) \neq N(\mathbf{a}). \tag{15}$$

Подчеркнем, что хотя инвариантные выражения вводятся по тем же формулам, что и для классических алгебр кватернионов и октав, они, вообще говоря, могут и не являться вещественными числами. Однако, если реальные выражения коммутируют со всеми элементами алгебры, подобная запись нормы выглядит все же более правомерной, чем вещественное выражение в виде суммы или разности квадратов, никак не укорененное в свойствах алгебры. Будем называть $\mathbf{a} \cdot C(\mathbf{a})$ и $C(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{a}$ *естественными 2-нормами* гиперкомплексной алгебры (правой и левой), подчеркивая их согласованность с таблицей умножения.

Отметим, что далеко не во всех гиперкомплексных алгебрах существует сопряжение, "плохих" гиперкомплексных алгебр без сопряжения несопоставимо больше.

Для кватернионов сопряжение $\bar{\mathbf{a}}$ можно ввести по следующему правилу:

$$\bar{\mathbf{a}} = a_0 - a_1\mathbf{q}_1 - a_2\mathbf{q}_2 - a_3\mathbf{q}_3. \tag{16}$$

Это сопряжение может быть выражено через операции данной алгебры (будем называть такие сопряжения *согласованными с умножением алгебры*):

$$\bar{\mathbf{a}} = -1/2(\mathbf{a} + \mathbf{q}_1\mathbf{a}\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2\mathbf{a}\mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3\mathbf{a}\mathbf{q}_3), \tag{17}$$

и как следствие:

$$\Re(a) = 1/2(\mathbf{a} + \bar{\mathbf{a}}) = 1/4(\mathbf{a} - \mathbf{q}_1\mathbf{a}\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2\mathbf{a}\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_3\mathbf{a}\mathbf{q}_3). \tag{18}$$

В справедливости соотношения (17) легко убедиться, если учесть, что отображение $\mathbf{a} \to -\mathbf{q}_k\mathbf{a}\mathbf{q}_k$ меняет все компоненты, кроме $\mathbf{a}_0$ и $\mathbf{a}_k$. Отметим, что сопряжение комплексных чисел не может быть выражено через умножение и сложение в силу коммутативности алгебры комплексных чисел; его приходится вводить "руками" .

Учитывая, что бикватернионы и дикватернионы есть прямо удвоенные кватернионы, аналогичное *кватернионное сопряжение* $\bar{\mathbf{a}}$ для них можно ввести по очевидному правилу:

$$\bar{\mathbf{a}} = a_0 - a_1\mathbf{q}_1 - a_2\mathbf{q}_2 - a_3\mathbf{q}_3,$$

(запись с комплексными коэффициентами),

$$\bar{\mathbf{a}} = a_0 - a_1\mathbf{q}_1 - a_2\mathbf{q}_2 - a_3\mathbf{q}_3 + k_0\mathbf{i}_0 - k_1\mathbf{i}_1 - k_2\mathbf{i}_2 - k_3\mathbf{i}_3,$$

(полная запись с вещественными коэффициентами),

$$\bar{\mathbf{a}} = \overline{a + k \cdot \mathbf{i}_0} = \bar{a} + \bar{k} \cdot \mathbf{i}_0 \tag{19}$$

(сокращенная запись).

Это сопряжение опять же согласовано с умножением. Для бикватернионов (верхний знак) и дикватернионов (нижний):

$$\bar{\mathbf{a}} = -1/4(\mathbf{a} + \mathbf{q}_1\mathbf{a}\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2\mathbf{a}\mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3\mathbf{a}\mathbf{q}_3) \pm 1/4(\mathbf{i}_0\mathbf{a}\mathbf{i}_0 - \mathbf{i}_1\mathbf{a}\mathbf{i}_1 - \mathbf{i}_2\mathbf{a}\mathbf{i}_2 - \mathbf{i}_3\mathbf{a}\mathbf{i}_3), \tag{20}$$

(Учитываем, что отображение $\mathbf{a} \to -\mathbf{q}_k\mathbf{a}\mathbf{q}_k$ меняет все компоненты, кроме $\mathbf{a}_0$, $\mathbf{a}_k$, $\mathbf{a}_0$, $\mathbf{a}_k$; отображение $\mathbf{a} \to -\mathbf{i}_k\mathbf{a}\mathbf{i}_k$ ведет себя точно так же для дикватернионов и обратным образом для бикватернионов).

Однако, для изучения 4-нормы и 4-скалярного произведения в алгебрах бикватернионов и дикватернионов этого сопряжения, как мы увидим ниже, недостаточно. Введем поэтому второе, *дуальное кватернионное сопряжение* по следующему правилу (записи в той же последовательности):

$$\widetilde{\mathbf{a}} = a_0^* - a_1^*\mathbf{q}_1 - a_2^*\mathbf{q}_2 - a_3^*\mathbf{q}_3,$$

$$\widetilde{\mathbf{a}} = a_0 - a_1\mathbf{q}_1 - a_2\mathbf{q}_2 - a_3\mathbf{q}_3 - k_0\mathbf{i}_0 + k_1\mathbf{i}_1 + k_2\mathbf{i}_2 + k_3\mathbf{i}_3.$$

$$\widetilde{\mathbf{a}} = \alpha \widetilde{+ k} \cdot \mathbf{i}_0 = \bar{\alpha} - \bar{k} \cdot \mathbf{i}_0 \tag{21}$$

Сопряжение $\widetilde{\mathbf{a}}$ (21) также является инволюционным антиавтоморфизмом и поэтому заслуживает название сопряжения. Однако, сопряжение $\widetilde{\mathbf{a}}$ не согласовано с умножением алгебры: из-за коммутативности орта $\mathbf{i}_0$ со всеми прочими ортами его невозможно подвергнуть отражению с помощью умножения и сложения.

Замечание 1. Рассмотрим комбинацию сопряжений $\bar{\widetilde{\mathbf{a}}}$ (записи в прежней последовательности):

$$\bar{\widetilde{\mathbf{a}}} = a_0^* + a_1^*\mathbf{q}_1 + a_2^*\mathbf{q}_2 + a_3^*\mathbf{q}_3,$$

$$\bar{\widetilde{\mathbf{a}}} = a_0 + a_1\mathbf{q}_1 + a_2\mathbf{q}_2 + a_3\mathbf{q}_3 - k_0\mathbf{i}_0 - k_1\mathbf{i}_1 - k_2\mathbf{i}_2 - k_3\mathbf{i}_3,$$

$$\bar{\widetilde{\mathbf{a}}} = \overline{a \widetilde{+ k} \cdot \mathbf{i}_0} = a - k \cdot \mathbf{i}_0. \tag{22}$$

Иначе говоря, это преобразование $\bar{\widetilde{\mathbf{a}}}$ есть *комплексное сопряжение*, внешнее для кватернионов a, k. Обозначим его $\mathbf{a}^*$. Оно является инволюцией и автоморфизмом (а не антиавтоморфизмом):

$$(\mathbf{a}^*)^* = \mathbf{a} \qquad \text{и} \qquad (\mathbf{ab})^* = \mathbf{a}^*\mathbf{b}^*. \tag{23}$$

Как следствие, выражение $\mathbf{aa}^*$, вообще говоря, изменяется при сопряжении своего рода (иначе говоря, не является инвариантным, реальным для него):

$$(\mathbf{aa}^*)^* = \mathbf{a}^*\mathbf{a} \neq \mathbf{aa}^*. \tag{24}$$

В связи с этим, комбинированное преобразование (комплексное сопряжение) $\mathbf{a}^*$, строго говоря, не является сопряжением данной алгебры. Кроме того, поскольку комплексное сопряжение $\mathbf{a}^*$ изменяет знак орта $\mathbf{i}_0$, коммутирующего со всеми остальными ортами би(ди)-кватернионов, оно не согласуется с умножением алгебры.

Самое важное преимущество базового сопряжения $\bar{\mathbf{a}}$ (19) перед дуальным сопряжением $\widetilde{\mathbf{a}}$ в том, что гиперкомплексные числа, реальные (инвариантные) относительно $\bar{\mathbf{a}}$, содержат в себе только орты 1 и $\mathbf{i_0}$ и поэтому, подобно вещественным числам, коммутируют с любыми числами алгебры. Данное свойство кватернионного сопряжения и является источником ряда хороших свойств алгебр кватернионов, бикватернионов и дикватернионов, а также октав и биоктав. Важно, что далеко не все алгебры располагают таким "хорошим" сопряжением.

Более строго, реальные (инвариантные) относительно базового сопряжения элементы $\mathbf{r}$:

1) алгебраически замкнуты;

2) коммутируют со всеми элементами алгебрами $\mathbf{ar} = \mathbf{ra}$;

3) ассоциативно умножаются на любые элементы алгебры $\mathbf{r} \cdot \mathbf{ab} = \mathbf{ra} \cdot \mathbf{b}$.

Иначе говоря, они принадлежат коммутативному и одновременно ассоциативному центрам алгебры, т. е. центру алгебры в его обычном понимании. Итак, введем

Определение. *Сопряжение, реальные (инвариантные) числа которого принадлежат центру алгебры будем называть* ***центральным***.

Далее алгебры, в которых существует центральное сопряжение, будем обозначать $\mathbb{A}_c$. Все реально изучаемые гиперкомплексные алгебры (в частности, все алгебры бесконечной последовательности Кэли-Диксона), со всеми их комплексификациями и гиперболическими удвоениями, – алгебры с центральным сопряжением.

Замечание 2. Все квадратичные алгебры обладают естественной нормой 2 степени (т. е. нормой вида $\mathbf{a}\bar{\mathbf{a}}$, согласованной с таблицей умножения алгебры). Каноническая инволюция $\bar{\mathbf{a}}$ при этом оставляет центр алгебры (сводящийся к вещественным числам) инвариантным. Если каноническая инволюция является антиавтоморфизмом (т. е., полноценным сопряжением), мы имеем алгебру $\mathbb{A}_c$. Поэтому все результаты для алгебр с центральным сопряжением есть вместе с тем и результаты для квадратичных алгебр с сопряжением, а в тех случаях, когда не используется свойство антиавтоморфизма, – для любых квадратичных алгебр.

Замечание 3. В силу того, что коммутативный центр алгебры $\mathbb{A}_c$ является (вообще говоря) подмножеством ассоциативного центра, справедливо

$$\mathbf{r}_i\mathbf{q}_n \cdot \mathbf{r}_j\mathbf{q}_m = \mathbf{r}_i\mathbf{r}_j \cdot \mathbf{q}_n\mathbf{q}_m.$$

Это значит, что алгебра с центральным сопряжением $\mathbb{A}_c$ представляет собой внешнее (тензорное) произведение своего центра $\mathbb{Z}$ на некоторую (квадратичную) подалгебру $\mathbb{A}_0$, иначе говоря, является квадратичной алгеброй $\mathbb{A}_0$ над своим центром $\mathbb{Z}$.

В принципе, почти все рассуждения данной статьи справедливы при более слабом условии принадлежности реальных (инвариантных) элементов сопряжения не ассоциативному, а альтернативному центру алгебры. В этом случае алгебра $\mathbb{A}_c$ уже не сводится к тензорному произведению своего центра $\mathbb{Z}$ на подалгебру $\mathbb{A}_0$. Однако неясно, является ли такое расширение понятия действительно содержательным.

Везде в настоящей статье будет подразумеваться, что алгебры обладают единицей и что они заданы над полем характеристики 0.

Моноассоциативность алгебр с центральным сопряжением

Итак, для коммутатора $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ элементов алгебр $\mathbb{A}_c$ с центральным сопряжением (и, в том числе, кватернионов, бикватернионов и дикватернионов) справедливо:

$$[\mathbf{a}, \mathbf{r}] = 0, \quad \text{где} \quad \mathbf{r} = \bar{\mathbf{r}}, \tag{25}$$

($\bar{\mathbf{a}} \equiv C(a)$ – базовое сопряжение алгебры $\mathbb{A}_c$) и, в частности,

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b} + \bar{\mathbf{b}}] = 0, \qquad [\mathbf{a}, \mathbf{b}\bar{\mathbf{b}}] = 0 \tag{26}$$

Из (26) немедленно следует

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = [\bar{\mathbf{b}}, \mathbf{a}], \qquad \text{и поэтому} \tag{27}$$

$$[\mathbf{a}, \bar{\mathbf{a}}] = [\mathbf{a}, \mathbf{a}] = 0, \qquad \text{то есть} \qquad \mathbf{a}\bar{\mathbf{a}} = \bar{\mathbf{a}}\mathbf{a}. \tag{28}$$

Это означает, что верна

Лемма 1. *В алгебрах с центральным сопряжением совпадают правая и левая 2-нормы:*

$$N_l(\mathbf{a}) \equiv \bar{\mathbf{a}}\mathbf{a} = N_r(\mathbf{a}) \equiv \mathbf{a}\bar{\mathbf{a}}. \tag{29}$$

Но тогда верно следующее:

$$\mathbf{a} \cdot \bar{\mathbf{a}}\mathbf{a} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{r} \cdot \mathbf{a} = \bar{\mathbf{a}}\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}\bar{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{a} \qquad (\mathbf{r} \equiv \bar{\mathbf{a}}\mathbf{a} \in \text{центру алгебры}), \tag{30}$$

или, короче,

$$\mathbf{a}\cdot\bar{\mathbf{a}}\mathbf{a}=\mathbf{a}\bar{\mathbf{a}}\cdot\mathbf{a}. \tag{31}$$

Поэтому прямым следствием Леммы 1 является степенная ассоциативность (моноассоциативность) алгебр $\mathbb{A}_c$ – ассоциативность подалгебры, состоящей из всех возможных произведений одного элемента ($\mathbf{a}^k\cdot\mathbf{a}^n=\mathbf{a}^{n+k}$). В самом деле, как известно, над полем характеристики 0 алгебра будет являться моноассоциативной, если в ней верны два тождества:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{aa}=\mathbf{aa}\cdot\mathbf{a} \qquad \text{и} \quad \mathbf{aa}\cdot\mathbf{aa}=(\mathbf{aa}\cdot\mathbf{a})\mathbf{a}. \tag{32}$$

Первое из этих свойств немедленно следует из (31), поскольку всякий элемент $\mathbf{a}$ алгебры $\mathbb{A}_c$ можно представить в виде суммы мнимой и реальной (инвариантной) относительно базового сопряжения алгебры частей $\mathbf{q}$ и $\mathbf{s}$:

$$\mathbf{a}=1/2(\mathbf{a}-\bar{\mathbf{a}})+1/2(\mathbf{a}+\bar{\mathbf{a}})=\mathbf{q}+\mathbf{s};\quad C(\mathbf{q}+\mathbf{s})=-\mathbf{q}+\mathbf{s}$$

и реальные элементы умножаются ассоциативно ($\mathbf{a}\cdot\mathbf{sa}=\mathbf{as}\cdot\mathbf{a}$). Аналогичным образом легко видеть, что

$$\mathbf{a}\bar{\mathbf{a}}\cdot\mathbf{aa}=\mathbf{r}\cdot\mathbf{aa}=\mathbf{ra}\cdot\mathbf{a}=(\mathbf{a}\bar{\mathbf{a}}\cdot\mathbf{a})\mathbf{a},$$

откуда в силу принадлежности $\mathbf{s}=\Re(\mathbf{a})$ ассоциативному центру алгебры немедленно следует второе из свойств (32). Итак, доказана

Теорема 1. *Всякая алгебра с центральным сопряжением моноассоциативна.*

А вместе с ней, как частный случай, и

Теорема 1b. *Всякая квадратичная алгебра моноассоциативна.*

(антиавтоморфные свойства сопряжения при доказательстве не использовались).

Прочие ассоциативные свойства алгебр $\mathbb{A}_c$

Для упрощения дальнейших выкладок введем, как принято, ассоциатор

$$\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\}\equiv(\mathbf{ab})\mathbf{c}-\mathbf{a}(\mathbf{bc}). \tag{33}$$

С очевидностью он линеен по каждому из элементов. В ассоциативных алгебрах ассоциатор тождественно равен нулю. В альтернативных он антисимметричен по всем переменным:

$$\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{b}\}=0 \quad\Leftrightarrow\quad \{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\}=-\{\mathbf{a},\mathbf{c},\mathbf{b}\} \qquad \text{(правая альтернативность)}, \tag{34}$$

$$\{\mathbf{a},\mathbf{a},\mathbf{b}\}=0 \quad\Leftrightarrow\quad \{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\}=-\{\mathbf{b},\mathbf{a},\mathbf{c}\} \qquad \text{(левая альтернативность)}. \tag{35}$$

Как следствие, ассоциатор в альтернативных алгебрах цикличен:

$$\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\}=\{\mathbf{c},\mathbf{a},\mathbf{b}\}. \tag{36}$$

Альтернативные алгебры, с очевидностью, эластичны:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{ba}=\mathbf{ab}\cdot\mathbf{a}, \qquad \text{поскольку в них} \tag{37}$$

$$\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{a}\}=-\{\mathbf{a},\mathbf{a},\mathbf{b}\}=0.$$

Но обратное неверно: не всякая эластичная алгебра альтернативна. Отметим, что свойство эластичности с очевидностью эквивалентно

$$\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\}=-\{\mathbf{c},\mathbf{b},\mathbf{a}\}. \tag{38}$$

Легко показать, что всякая алгебра, полученная удвоением Кэли-Диксона (6) из эластичной алгебры $\mathbb{A}_c$, также эластична и также является алгеброй с центральным сопряжением. Таким образом, эластична вся бесконечная цепочка алгебр Кэли-Диксона, начинающаяся с вещественных чисел.

Во всякой альтернативной алгебре, как известно и как легко показать, справедливы тождества

$$\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{bc}\}=\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\}\mathbf{b},\qquad \{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{cb}\}=\mathbf{b}\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\}, \tag{39}$$

из которых следуют известные тождества Муфанг:

$$\begin{array}{rl}
(\mathbf{ab}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b}=\mathbf{a}(\mathbf{bcb}) & -\ \text{правое},\\
(\mathbf{aba})\mathbf{c}=\mathbf{a}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{ac}) & -\ \text{левое},\\
\mathbf{ab}\cdot\mathbf{ca}=\mathbf{a}(\mathbf{bc})\mathbf{a} & -\ \text{центральное}.
\end{array} \tag{40}$$

С помощью этих соотношений и их линеаризаций легко доказывается теорема Артина: в альтернативной алгебре любые два элемента порождают ассоциативную подалгебру. (При линеаризации тождества приводятся к линейным по каждому переменному. Для этого повторяющийся элемент $\mathbf{a}$ заменяется на, допустим, $\mathbf{a}+\mathbf{d}$, после чего сокращаются уже известные тождества с повторяющимися переменными.)

Можно показать, что для алгебр с центральным сопряжением эластичность эквивалентна важному для физических приложений свойству *йордановости*:

$$\mathbf{a}^2\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}=\mathbf{a}^2\cdot\mathbf{ba}\qquad\text{или}\quad\{\mathbf{a}^2,\mathbf{b},\mathbf{a}\}=0, \tag{41}$$

но в общем случае алгебр с единицей йордановость сильнее (у́же) эластичности.

Для алгебр с центральным сопряжением альтернативность с очевидностью эквивалентна следующему полезному при выкладках свойству (назовем его *сопряженной альтернативностью*):

$$\mathbf{a}\cdot\bar{\mathbf{b}}\mathbf{b}=\mathbf{a}\bar{\mathbf{b}}\cdot\mathbf{b}\qquad\text{и одновременно}\quad\mathbf{a}\cdot\bar{\mathbf{a}}\mathbf{b}=\mathbf{a}\bar{\mathbf{a}}\cdot\mathbf{b}, \tag{42}$$

а значит

$$\{\mathbf{a},\bar{\mathbf{b}},\mathbf{b}\}=0\qquad\text{и}\quad\{\mathbf{a},\bar{\mathbf{a}},\mathbf{b}\}=0, \tag{43}$$

или иначе

$$\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\}=-\{\mathbf{a},\bar{\mathbf{c}},\bar{\mathbf{b}}\}\qquad\text{и}\quad\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\}=-\{\bar{\mathbf{b}},\bar{\mathbf{a}},\mathbf{c}\}. \tag{44}$$

Отметим, что в общем случае сопряженная альтернативность сильнее (у́же) альтернативности: если реальные элементы принадлежат коммутативному но не ассоциативному центру алгебры, из сопряженной альтернативности следует альтернативность, но не всегда обратно.

Подытожим все сказанное в виде иерархии уровней ассоциативных свойств (из верхних уровней вытекают нижние, но вообще говоря не наоборот):

ассоциативность:	$\mathbf{a}\cdot\mathbf{bc}=\mathbf{ab}\cdot\mathbf{c}$		$\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\}=0;$
альтернативность:	$\mathbf{a}\cdot\mathbf{bb}=\mathbf{ab}\cdot\mathbf{b}$	$\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\}=-\{\mathbf{a},\mathbf{c},\mathbf{b}\}$	$\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{b}\}=0$
вместе с	$\mathbf{a}\cdot\mathbf{ab}=\mathbf{aa}\cdot\mathbf{b}$	$\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\}=-\{\mathbf{b},\mathbf{a},\mathbf{c}\}$	$\{\mathbf{a},\mathbf{a},\mathbf{b}\}=0;$
йордановость:	$\mathbf{a}^2\cdot\mathbf{ba}=\mathbf{a}^2\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$		$\{\mathbf{a}^2,\mathbf{b},\mathbf{a}\}=0;$
эластичность:	$\mathbf{a}\cdot\mathbf{ba}=\mathbf{ab}\cdot\mathbf{a}$	$\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\}=-\{\mathbf{c},\mathbf{b},\mathbf{a}\}$	$\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{a}\}=0;$
моноассоциативность:	$\mathbf{a}^n\cdot\mathbf{a}^m=\mathbf{a}^{n+m}$	$\{\mathbf{a}^2,\mathbf{a},\mathbf{a}\}=0$	$\{\mathbf{a},\mathbf{a},\mathbf{a}\}=0;$

Наконец, для дальнейшего важно, что ассоциатор элемента центра алгебры (в алгебрах $\mathbb{A}_c$ – реального элемента) с любыми элементами равен нулю:

$$\{\mathbf{r},\mathbf{a},\mathbf{b}\} = 0. \tag{45}$$

Мультипликативность 2-нормы алгебр $\mathbb{A}_c$

Существование центрального сопряжения (свойство (25)) в алгебрах $\mathbb{A}_c$ вместе с дополнительным условием их альтернативности имеет своим следствием замечательное свойство мультипликативности (комплексной, двойной и т. п.) 2-нормы в этих алгебрах. (Норма произведения равна произведению норм.) Цепочка рассуждений здесь такова (используется свойство сопряженной альтернативности):

$$N_2(\mathbf{ab}) = \mathbf{ab}\cdot\bar{\mathbf{b}}\bar{\mathbf{a}} = \mathbf{a}(\mathbf{b}\bar{\mathbf{b}}\cdot\bar{\mathbf{a}}) = \mathbf{a}(\bar{\mathbf{a}}\cdot\mathbf{b}\bar{\mathbf{b}}) = \mathbf{a}\bar{\mathbf{a}}\cdot\mathbf{b}\bar{\mathbf{b}} = N_2(\mathbf{a})N_2(\mathbf{b}). \tag{46}$$

Самое существенное в доказательстве – 1-е преобразование $\mathbf{ab}\cdot\bar{\mathbf{b}}\bar{\mathbf{a}} = \mathbf{a}(\mathbf{b}\bar{\mathbf{b}}\cdot\bar{\mathbf{a}})$. Оно, как легко видеть, образом выполняется в альтернативных (и потому сопряженно-альтернативных) алгебрах. В самом деле,

$$\mathbf{ab}\cdot\bar{\mathbf{b}}\bar{\mathbf{a}} - \mathbf{a}(\mathbf{b}\bar{\mathbf{b}}\cdot\bar{\mathbf{a}}) = \mathbf{ab}\cdot\bar{\mathbf{b}}\bar{\mathbf{a}} - \mathbf{a}(\mathbf{b}\cdot\bar{\mathbf{b}}\bar{\mathbf{a}}) = \{\mathbf{a},\mathbf{b},\bar{\mathbf{b}}\bar{\mathbf{a}}\}.$$

В силу сопряженной альтернативности это выражение равно

$$\{\mathbf{a},\mathbf{b},\bar{\mathbf{b}}\bar{\mathbf{a}}\} = -\{\mathbf{a},\mathbf{ab},\bar{\mathbf{b}}\} = -(\mathbf{a}\cdot\mathbf{ab})\bar{\mathbf{b}} + \mathbf{a}(\mathbf{ab}\cdot\bar{\mathbf{b}}) =$$
$$= -(\mathbf{aa}\cdot\mathbf{b})\bar{\mathbf{b}} + \mathbf{a}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\bar{\mathbf{b}}) = -\mathbf{aa}\cdot\mathbf{b}\bar{\mathbf{b}} + \mathbf{a}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\bar{\mathbf{b}}) = -\{\mathbf{a},\mathbf{a},\mathbf{b}\bar{\mathbf{b}}\} = 0.$$

Итак, доказана

Теорема 2. *Всякая альтернативная алгебра с центральным сопряжением обладает мультипликативной (вообще говоря, не вещественной) 2-нормой* $N_2 = \mathbf{a}\bar{\mathbf{a}} = \bar{\mathbf{a}}\mathbf{a}$.

Поскольку достаточно не ассоциативности, а альтернативности алгебры, мультипликативной 2-нормой (комплексной, двойной и т. п.) обладают не только алгебры кватернионов, бикватернионов и дикватернионов, вместе со всевозможными биби- биди- диди- и т. п. кватернионами, но и октавы, комплексные и двойные октавы (биоктавы и диоктавы) и прочие всевозможные биби- биди- диди- октавы.

А что можно сказать, если мы имеем произвольную, неальтернативную алгебру с центральным сопряжением? Легко доказать следующую теорему:

Теорема 3. *В любой алгебре с центральным сопряжением 2-норма квадрата элемента равна квадрату его 2-нормы (т. е. алгебра монокомпозиционна):*

$$N_2(\mathbf{aa}) = N_2(\mathbf{a})N_2(\mathbf{a}). \tag{47}$$

А значит, как частный случай, верна и

Теорема 3b. *Любая квадратичная алгебра монокомпозиционна, т. е. в ней норма квадрата элемента равна квадрату нормы этого элемента.*

В самом деле, используя лишь факт моноассоциативности алгебр $\mathbb{A}_c$:

$$N_2(\mathbf{aa}) = \mathbf{aa}\cdot\bar{\mathbf{a}}\bar{\mathbf{a}} = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}\bar{\mathbf{a}})\bar{\mathbf{a}} = (\mathbf{a}\cdot\bar{\mathbf{a}}\mathbf{a})\mathbf{a} = (\mathbf{a}\bar{\mathbf{a}}\cdot\mathbf{a})\bar{\mathbf{a}} = \mathbf{a}\bar{\mathbf{a}}\cdot\mathbf{a}\bar{\mathbf{a}} = N_2(\mathbf{a})N_2(\mathbf{a}).\ \square$$

Хотя результат получается на основе метода анализа сопряжений легко, он, по-видимому, является новым.

Несколько полезных фактов

Сначала докажем несколько важных вспомогательных результатов.

Лемма 2. *Для сопряжения ассоциатора справедливо:*

$$\overline{\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\}} = -\{\bar{\mathbf{c}},\bar{\mathbf{b}},\bar{\mathbf{a}}\}. \tag{48}$$

В самом деле,

$$\overline{\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\}} = C((\mathbf{ab}\cdot\mathbf{c} - \mathbf{a}\cdot\mathbf{bc})) = \bar{\mathbf{c}}\cdot\bar{\mathbf{b}}\bar{\mathbf{a}} - \bar{\mathbf{c}}\bar{\mathbf{b}}\cdot\bar{\mathbf{a}} = -\{\bar{\mathbf{c}},\bar{\mathbf{b}},\bar{\mathbf{a}}\}.$$

С помощью Леммы 2 легко доказываются две теоремы:

Теорема 4. *В эластичных алгебрах с центральным сопряжением ассоциатор чисто мним.*

В самом деле, согласно (45), ассоциатор элементов $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ в алгебрах $\mathbb{A}_c$ сводится к ассоциатору чисто мнимых элементов $\mathbf{p},\mathbf{q},\mathbf{g}$ и тогда

$$C(\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\}) = C(\{\mathbf{p},\mathbf{q},\mathbf{g}\}) = -\{\bar{\mathbf{g}},\bar{\mathbf{q}},\bar{\mathbf{p}}\} = +\{\mathbf{g},\mathbf{q},\mathbf{p}\} = -\{\mathbf{p},\mathbf{q},\mathbf{g}\} = -\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\}. \ \square$$

Теорема 5. *Во всякой эластичной алгебре с центральным сопряжением произведение трех элементов под знаком реальной части ассоциативно*:

$$\Re(\mathbf{ab}\cdot\mathbf{c}) = \Re(\mathbf{a}\cdot\mathbf{bc}). \tag{49}$$

(Заметим, что для произведения произвольного числа элементов это не так.)

В самом деле, это равенство есть ничто иное, как

$$\Re(\mathbf{ab}\cdot\mathbf{c} - \mathbf{a}\cdot\mathbf{bc}) = 0, \qquad \text{т. е.} \quad \Re(\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\}) = 0,$$

а это для эластичных алгебр выполняется согласно Теореме 4. □

Далее, применяя (27) два раза, получим

$$[\mathbf{a},\mathbf{b}] = [\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}}]. \tag{50}$$

Это означает, что верна

Лемма 3. *Коммутатор двух элементов алгебры $\mathbb{A}_c$ является чисто мнимым относительно центрального сопряжения этой алгебры:*

$$\overline{[\mathbf{a},\mathbf{b}]} = \overline{(\mathbf{ab} - \mathbf{ba})} = \bar{\mathbf{b}}\bar{\mathbf{a}} - \bar{\mathbf{a}}\bar{\mathbf{b}} = -(\bar{\mathbf{a}}\bar{\mathbf{b}} + \bar{\mathbf{b}}\bar{\mathbf{a}}) = -[\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}}] = -[\mathbf{a},\mathbf{b}].$$

Однако, антикоммутатор $\{\mathbf{a},\mathbf{b}\} = \mathbf{ab} + \mathbf{ba}$ реальным, вообще говоря, не является.

Из (50) вытекает

Теорема 6. *Во всякой эластичной алгебре с центральным сопряжением возможна циклическая перестановка сомножителей под знаком реальной части.*

В самом деле,

$$\mathbf{ab} - \mathbf{ba} = \bar{\mathbf{a}}\bar{\mathbf{b}} - \bar{\mathbf{b}}\bar{\mathbf{a}} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{ab} + \bar{\mathbf{b}}\bar{\mathbf{a}} = \bar{\mathbf{a}}\bar{\mathbf{b}} + \mathbf{ba}, \qquad \text{то есть}$$

$$\Re(\mathbf{ab}) = \Re(\bar{\mathbf{a}}\bar{\mathbf{b}}) = \Re(\overline{\mathbf{ba}}) = \Re(\mathbf{ba}), \tag{51}$$

и, как следствие, в силу Теоремы 5

$$\Re(\mathbf{a}\cdot\mathbf{bc}) = \Re(\mathbf{ab}\cdot\mathbf{c}) = \Re(\mathbf{c}\cdot\mathbf{ab}) = \Re(\mathbf{ca}\cdot\mathbf{b}) = \Re(\mathbf{b}\cdot\mathbf{ca}). \ \square \tag{52}$$

2-скалярное и 2-векторное произведения в алгебрах $\mathbb{A}_c$

Введем теперь по тем же формулам, что и для кватернионов и октав, *правое и левое 2-скалярное произведение*. Подчеркнем, что оно теперь может и не быть вещественным числом (но обладает преимуществом согласованности с алгеброй):

$$\begin{aligned}(\mathbf{a},\mathbf{b})_p &\equiv \Re(\mathbf{a}\bar{\mathbf{b}}) = 1/2(\mathbf{a}\bar{\mathbf{b}}+\mathbf{b}\bar{\mathbf{a}})\\ (\mathbf{a},\mathbf{b})_l &\equiv \Re(\bar{\mathbf{a}}\mathbf{b}) = 1/2(\bar{\mathbf{a}}\mathbf{b}+\bar{\mathbf{b}}\mathbf{a}).\end{aligned} \tag{53}$$

С очевидностью,

$$(\mathbf{a},\mathbf{b}) = (\mathbf{b},\mathbf{a}) \qquad \text{и} \qquad (\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}})_p = (\mathbf{a},\mathbf{b})_l.$$

Из (51) следует

$$(\mathbf{a},\mathbf{b})_p = \Re(\mathbf{a}\bar{\mathbf{b}}) = \Re(\bar{\mathbf{a}}\mathbf{b}) = (\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}})_p = (\mathbf{a},\mathbf{b})_l.$$

Иначе говоря, *для алгебр $\mathbb{A}_c$ правое и левое 2-скалярные произведения совпадают,* а кроме того

$$(\mathbf{a},\mathbf{b}) = (\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}}). \tag{54}$$

2-норма и 2-скалярное произведение связаны очевидной формулой:

$$N(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = N(\mathbf{a}) + N(\mathbf{b}) + 2(\mathbf{a},\mathbf{b}), \tag{55}$$

и следовательно

$$(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \frac{1}{2}\big(N(\mathbf{a}+\mathbf{b}) - N(\mathbf{a}) - N(\mathbf{b})\big), \tag{56}$$

и, в частности,

$$(\mathbf{a},\mathbf{a}) = N(\mathbf{a}), \tag{57}$$

поэтому совпадение правых и левых 2-норм и совпадение правых и левых 2-скалярных произведений связаны непосредственно.

Лемма 4. В альтернативных алгебрах с центральным сопряжением выполняется:

$$(\mathbf{ab},\mathbf{cd}) + (\mathbf{ad},\mathbf{cb}) = 2(\mathbf{a},\mathbf{c})(\mathbf{b},\mathbf{d}), \tag{58}$$

$$(\mathbf{ab},\mathbf{cb}) = (\mathbf{a},\mathbf{c})(\mathbf{b},\mathbf{b}) = (\mathbf{a},\mathbf{c})N_2(\mathbf{b}). \tag{59}$$

Эти формулы являются более общим выражением свойства мультипликативности нормы алгебр $\mathbb{A}_c$ и могут быть получены из него линеаризацией. (В равенство

$$N_2(\mathbf{ab}) = N_2(\mathbf{a})N_2(\mathbf{b}), \qquad \text{то есть} \qquad (\mathbf{ab},\mathbf{ab}) = (\mathbf{a},\mathbf{a})(\mathbf{b},\mathbf{b}),$$

вместо $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ подставляются $\mathbf{a}+\mathbf{c}$ и $\mathbf{b}+\mathbf{d}$, после чего сокращаются тождества мультипликативности нормы по каждому из переменных.)

Введем теперь, как это принято, *левое и правое векторные произведения*:

$$\begin{aligned}\langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle_l &\equiv \Im(\bar{\mathbf{a}}\mathbf{b}) = 1/2(\bar{\mathbf{a}}\mathbf{b}-\bar{\mathbf{b}}\mathbf{a})\\ \langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle_p &\equiv \Im(\mathbf{a}\bar{\mathbf{b}}) = 1/2(\mathbf{a}\bar{\mathbf{b}}-\mathbf{b}\bar{\mathbf{a}})\end{aligned} \tag{60}$$

С очевидностью, выполняется:

$$\langle\mathbf{b},\mathbf{a}\rangle = -\langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle, \qquad \langle\mathbf{a},\mathbf{a}\rangle = 0, \quad \langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle_p = \langle\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}}\rangle_l. \tag{61}$$

Отметим, что для векторных произведений

$$\langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle \neq \langle\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}}\rangle \qquad \text{или} \qquad \langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle_p \neq \langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle_l.$$

Вместо этого, в силу свойства (45), в эластичных алгебрах с центральным сопряжением выполняется:

$$\langle \mathbf{a},\mathbf{b}\rangle^2 = \langle \bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}}\rangle^2, \qquad \text{т. е.} \quad \langle \mathbf{a},\mathbf{b}\rangle_p^2 = \langle \mathbf{a},\mathbf{b}\rangle_l^2, \tag{62}$$

однако, не является верным равенство

$$(\langle \mathbf{a},\mathbf{b}\rangle + \langle \mathbf{c},\mathbf{d}\rangle)^2 \neq (\langle \bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}}\rangle + \langle \bar{\mathbf{c}},\bar{\mathbf{d}}\rangle)^2.$$

Для векторных произведений в альтернативных алгебрах $\mathbb{A}_c$, как несложно показать, справедлива формула, связанная с их мультипликативностью и сходная с (59):

$$\langle \mathbf{ca},\mathbf{da}\rangle^2 = N_2^2(\mathbf{a})\langle \mathbf{c},\mathbf{d}\rangle^2 = \langle \mathbf{ac},\mathbf{ad}\rangle^2. \tag{63}$$

В ассоциативных алгебрах $\mathbb{A}_c$ эту формулу, с очевидностью, можно усилить до:

$$\langle \mathbf{ca},\mathbf{da}\rangle_p = N_2(\mathbf{a})\langle \mathbf{c},\mathbf{d}\rangle_p \qquad \text{и} \qquad \langle \mathbf{ac},\mathbf{ad}\rangle_l = N_2(\mathbf{a})\langle \mathbf{c},\mathbf{d}\rangle_l. \tag{64}$$

В эластичных алгебрах $\mathbb{A}_c$ выполняется:

$$\langle \mathbf{b},\mathbf{a}\rangle_p\,\mathbf{a} = \mathbf{a}\langle \bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}}\rangle_p \qquad \text{и} \qquad \mathbf{a}\langle \mathbf{b},\mathbf{a}\rangle_l = \langle \bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}}\rangle_l\,\mathbf{a}. \tag{65}$$

В альтернативных алгебрах $\mathbb{A}_c$ верно тождество

$$N_2(\mathbf{a})N_2(\mathbf{b}) = (\mathbf{a},\mathbf{b})^2 - \langle \mathbf{a},\mathbf{b}\rangle^2. \tag{66}$$

Далее, если не указан индекс p или l, будет иметься в виду правое векторное произведение.

Геометрический аспект ассоциативных свойств: об алгебре, напрямую связанной с нормой Минковского

Значение ассоциативных свойств для геометрии, естественно порождаемой алгеброй, можно проиллюстрировать на одном довольно простом и наглядном примере.

Зададимся вопросом, какая гиперкомплексная алгебра соответствует напрямую метрике Минковского:

$$s^2 = t^2 - x^2 - y^2 - z^2. \tag{67}$$

Таких алгебр можно сконструировать, отталкиваясь от алгебры кватернионов, несколько, они будут распадаться на два класса с заметно разными свойствами. Рассмотрим, к примеру, две таблицы умножения:

×	1	$\mathbf{q}_1$	$\mathbf{q}_2$	$\mathbf{q}_3$
1	1	$\mathbf{q}_1$	$\mathbf{q}_2$	$\mathbf{q}_3$
$\mathbf{q}_1$	$\mathbf{q}_1$	1	$\mathbf{q}_3$	$-\mathbf{q}_2$
$\mathbf{q}_2$	$\mathbf{q}_2$	$-\mathbf{q}_3$	1	$\mathbf{q}_1$
$\mathbf{q}_3$	$\mathbf{q}_3$	$\mathbf{q}_2$	$-\mathbf{q}_1$	1

. (*Tab.* 5*a*)

×	1	$\mathbf{q}_1$	$\mathbf{q}_2$	$\mathbf{q}_3$
1	1	$\mathbf{q}_1$	$\mathbf{q}_2$	$\mathbf{q}_3$
$\mathbf{q}_1$	$\mathbf{q}_1$	1	$-\mathbf{q}_3$	$-\mathbf{q}_2$
$\mathbf{q}_2$	$\mathbf{q}_2$	$\mathbf{q}_3$	1	$\mathbf{q}_1$
$\mathbf{q}_3$	$\mathbf{q}_3$	$\mathbf{q}_2$	$-\mathbf{q}_1$	1

. (*Tab.* 5*b*)

Сопряжение в таких алгебрах задается обычным образом (все орты, кроме 1, полагаются мнимыми) и является антиавтоморфизмом:

$$\bar{\mathbf{a}} = a_0 \cdot 1 - a_1\mathbf{q}_1 - a_2\mathbf{q}_2 - a_3\mathbf{q}_3\,; \qquad \overline{\mathbf{ab}} = \bar{\mathbf{b}}\bar{\mathbf{a}}\,.$$

Поскольку реальная часть элемента алгебр есть просто вещественное число, перед нами алгебры с центральным сопряжением. Естественная квадратичная норма также является вещественным числом и совпадает с метрикой Минковского:

$$\mathbf{a}\bar{\mathbf{a}} = a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2.$$

Рассматриваемые алгебры неассоциативны и, более того, неальтернативны:

$$\mathbf{q}_3\mathbf{q}_3 \cdot \mathbf{q}_1 = \mathbf{q}_1, \qquad \text{но} \quad \mathbf{q}_3 \cdot \mathbf{q}_3\mathbf{q}_1 = \mathbf{q}_3(-\mathbf{q}_2) = -\mathbf{q}_1.$$

Вторая из алгебр даже не эластична (хотя согласно Теореме 1b, она, как и все алгебры с естественной квадратичной нормой, моноассоциативна). Убедиться в этом не так просто, как в случае неальтернативности: произведения орт будут всегда удовлетворять свойству эластичности (это связано с тем, что квадрат орта равен вещественному числу ± 1). С помощью (45), эластичность можно свести к эластичности произведения мнимых частей $\mathbf{q}, \mathbf{p}$ элементов $\mathbf{a}, \mathbf{b}$:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{ba} = \mathbf{ab} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{q} \cdot \mathbf{pq} - \mathbf{qp} \cdot \mathbf{q} = 0 \qquad \text{или}$$

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{pq} + \overline{\mathbf{q} \cdot \mathbf{pq}} = 2\Re(\mathbf{q} \cdot \mathbf{pq}) = 0. \tag{68}$$

Таким образом, получается удобный для практики критерий эластичности:

Алгебра с центральным сопряжением эластична, если в ней выражение из мнимых элементов $\mathbf{q} \cdot \mathbf{pq}$ *не содержит реальных членов.*

В данной же алгебре, как несложно убедиться,

$$\Re(\mathbf{q} \cdot \mathbf{pq}) = 2a_3(a_1b_2 - a_2b_1) \neq 0.$$

Наконец, как и во всех алгебрах с квадратичной нормой, в обеих алгебрах норма квадрата элемента равна квадрату его нормы (алгебры монокомпозиционны):

$$N_2(\mathbf{aa}) = N_2(\mathbf{a})N_2(\mathbf{a}).$$

Это тождество можно проверить и напрямую. Поскольку норма

$$\mathbf{aa} = (a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) \cdot 1 + 2a_0a_1\mathbf{q}_1 + 2a_0a_2\mathbf{q}_2 + 2a_0a_3\mathbf{q}_3,$$

тождество записывается как

$$(a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2)^2 = (a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)^2 - 4a_0a_1^2 - 4a_0a_2^2 - 4a_0a_3^2.$$

Теперь рассмотрим непосредственные геометрические последствия всех этих алгебраических свойств.

1) Поскольку алгебры *неассоциативны,* движения в них нельзя задать посредством внутренних автоморфизмов:

$$\mathbf{a}' = \mathbf{u} \cdot \mathbf{au}^{-1}, \tag{69}$$

поскольку не проходит то, что проходит в ассоциативных алгебрах:

$$\mathbf{a}' \cdot \mathbf{b}' = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{au}^{-1}) \cdot (\mathbf{u} \cdot \mathbf{bu}^{-1}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{a} \cdot (\mathbf{u}^{-1} \cdot \mathbf{u}) \cdot \mathbf{bu}^{-1} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{ab} \cdot \mathbf{u}^{-1} = (\mathbf{ab})'.$$

2) Поскольку алгебры *неальтернативны,* движения в них нельзя задать посредством умножения на элемент (элементы) единичной нормы $\mathbf{e}$. Ведь в неальтернативных

алгебрах норма произведения не равна произведению норм, а значит норма образа элемента не будет равна норме прообраза:

$$N_2(\mathbf{ea}) \neq N_2(\mathbf{e})N_2(\mathbf{a}) = N_2(\mathbf{a}).$$

3) Поскольку вторая из алгебр *неэластична,* возникают проблемы с ортогональностью чисто мнимых элементов (по идее, соответствующих векторам обычного 3-мерного пространства). В самом деле, в эластичных алгебрах согласно (51) и (68)

$$\Re(\mathbf{qp}\cdot\mathbf{q}) = \Re(\mathbf{q}\cdot\mathbf{qp}) = 0.$$

Следовательно,

$$0 = \Re(\mathbf{qp}\cdot\mathbf{q} + \mathbf{q}\cdot\mathbf{qp}) = \mathbf{qp}\cdot\mathbf{q} - \mathbf{q}\cdot\mathbf{pq} + \mathbf{q}\cdot\mathbf{qp} - \mathbf{pq}\cdot\mathbf{q} =$$
$$= \mathbf{q}(\mathbf{qp}-\mathbf{pq}) + (\mathbf{qp}-\mathbf{pq})\mathbf{q} = \mathbf{q} < \mathbf{p},\mathbf{q} > + < \mathbf{p},\mathbf{q} > \mathbf{q} = (\mathbf{q}, < \mathbf{q},\mathbf{p} >).$$

Итак, справедлива

Теорема 7. *В эластичных алгебрах с центральным сопряжением векторное произведение произвольных мнимых векторов ортогонально каждому из них:*

$$(\mathbf{q}, < \mathbf{q},\mathbf{p} >) = 0. \tag{70}$$

Во второй из рассматриваемых алгебр это не так, а значит затруднительно алгебраическим образом ввести понятие ортогональности трехмерных векторов.

Все это показывает, что требование порождать "хорошие" геометрии является довольно жестким ограничением для гиперкомплексных алгебр. Чрезмерное удаление от ассоциативности приводит к малосодержательным, по-видимому, геометриям.

2-норма, 2-скалярное и 2-векторное произведение для алгебр бикватернионов, дикватернионов и биоктав

2-скалярное произведение алгебр бикватернионов (верхний знак) и дикватернионов (нижний знак) рассчитывается легко. Для орт оно равно

$$(\mathbf{q}_k,\mathbf{q}_s) = \delta_{ks} \quad (\mathbf{q}_k,\mathbf{i}_s) = \mathbf{i}_0\delta_{ks}, \quad (\mathbf{i}_k,\mathbf{i}_s) = \mp\delta_{ks}. \tag{71}$$

В покомпонентном и в сокращенном виде скалярное произведение элементов равно:

$$(\mathbf{a},\mathbf{b}) = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \mp (k_0l_0 + k_1l_1 + k_2l_2 + k_3l_3) +$$
$$+ (a_0l_0 + a_1l_1 + a_2l_2 + a_3l_3 + k_0b_0 + k_1b_1 + k_2b_2 + k_3b_3)\cdot\mathbf{i}_0, \tag{72}$$

$$(\mathbf{a},\mathbf{b}) = (a,b) \mp (k,l) + \big((a,l) + (k,b)\big)\cdot\mathbf{i}_0. \tag{73}$$

Отсюда или на основании (19) легко рассчитывается 2-норма $N_2(\mathbf{a}) = (\mathbf{a},\mathbf{a})$ алгебр бикватернионов и дикватернионов в кратком:

$$N_2(\mathbf{a}) = \mathbf{a}\bar{\mathbf{a}} = (a + k\cdot\mathbf{i}_0)(\bar{a} + \bar{k}\cdot\mathbf{i}_0) = a\bar{a} \mp k\bar{k} + (a\bar{k} + k\bar{a})\cdot\mathbf{i}_0, \quad \text{или}$$

$$N_2(\mathbf{a}) = N_2(a) \mp N_2(k) + 2(a,k)\cdot\mathbf{i}_0, \tag{74}$$

и в покомпонентном виде:

$$N_2(\mathbf{a}) = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \ \mp (k_0^2 + k_1^2 + k_2^2 + k_3^2) \ + 2(a_0k_0 + a_1k_1 + a_2k_2 + a_3k_3)\cdot\mathbf{i}_0 \tag{75}$$

Аналогично, 2-скалярное произведение для орт алгебры биоктав равно

$$(\mathbf{q}_k,\mathbf{q}_s)=(\mathbf{e}_k,\mathbf{e}_s)=\delta_{ks}\quad(\mathbf{i}_k,\mathbf{i}_s)=(\mathbf{f}_k,\mathbf{f}_s)=-\delta_{ks},\quad(\mathbf{q}_k,\mathbf{i}_s)=(\mathbf{e}_k,\mathbf{f}_s)=\mathbf{i}_0\delta_{ks}. \tag{76}$$

Все остальные пары орт дают 0. Отсюда 2-норма для алгебры биоктав в кратком:

$$\begin{aligned}N_2(\mathbf{a})&=(a+A\cdot\mathbf{e}_0+k\cdot\mathbf{i}_0+K\cdot\mathbf{f}_0)(\bar{a}-A\cdot\mathbf{e}_0+\bar{k}\cdot\mathbf{i}_0-K\cdot\mathbf{f}_0)=\\&=a\bar{a}+\bar{A}A-k\bar{k}-\bar{K}K+(a\bar{k}+k\bar{a}+\bar{K}A+\bar{A}K)\cdot\mathbf{i}_0+0\cdot\mathbf{e}_0+0\cdot\mathbf{f}_0=\\&=N_2(a)+N_2(A)-N_2(k)-N_2(K)+2((a,k)+(A,K))\cdot\mathbf{i}_0,\end{aligned} \tag{77}$$

и покомпонентном виде:

$$\begin{aligned}N_2(\mathbf{a})=a_0^2+a_1^2+a_2^2+a_3^2\ +A_0^2+A_1^2+A_2^2+A_3^2-k_0^2-k_1^2-k_2^2-k_3^2\ -K_0^2-K_1^2-K_2^2-K_3^2\\+2(a_0k_0+a_1k_1+a_2k_2+a_3k_3\ +A_0K_0+A_1K_1+A_2K_2+A_3K_3)\cdot\mathbf{i}_0\end{aligned} \tag{78}$$

Приведем также 2-векторное произведение для алгебр бикватернионов и дикватернионов в кратком виде:

$$\langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle=\langle a+\mathbf{i}_0k,b+\mathbf{i}_0l\rangle=\langle a,b\rangle\mp\langle k,l\rangle+(\langle a,l\rangle+\langle k,b\rangle)\mathbf{i}_0, \tag{79}$$

и в покомпонентном виде:

$$\begin{aligned}\langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle=\big(-a_0b_1+a_1b_0-a_2b_3+a_3b_2\ \mp(-k_0l_1+k_1l_0-k_2l_3+k_3l_2)\big)\cdot\mathbf{q}_1+\\\big(-a_0b_2+a_1b_3+a_2b_0-a_3b_1\ \mp(-k_0l_2+k_1l_3+k_2l_0-k_3l_1)\big)\cdot\mathbf{q}_2+\\\big(-a_0b_3-a_1b_2+a_2b_1+a_3b_0\ \mp(-k_0l_3-k_1l_2+k_2l_1+k_3l_0)\big)\cdot\mathbf{q}_3+\\+\big(-a_0l_1+a_1l_0-a_2l_3+a_3l_2\ -k_0b_1+k_1b_0-k_2b_3+k_3b_2\big)\cdot\mathbf{i}_1+\\+\big(-a_0l_2+a_1l_3+a_2l_0-a_3l_1\ -k_0b_2+k_1b_3+k_2b_0-k_3b_1\big)\cdot\mathbf{i}_2+\\+\big(-a_0l_3-a_1l_2+a_2l_1+a_3l_0\ -k_0b_3-k_1b_2+k_2b_1+k_3b_0\big)\cdot\mathbf{i}_3.\end{aligned} \tag{80}$$

Мультинорма и мультискалярное произведение для алгебр $\mathbb{A}_c$

Вопрос о том, какие алгебры обладают мультипликативной нормой второй степени, был всесторонне рассмотрен и решен еще в XIX веке (см. [3], [11], [12]).

Согласно теореме Гурвица, любая алгебра с единицей, обладающая мультипликативной положительно определенной нормой, изоморфна либо действительным числам, либо комплексным числам, кватернионам или октавам.

Обобщенная теорема Фробениуса утверждает, что любая альтернативная алгебра с делением изоморфна опять же одной из алгебр этого списка.

Согласно теореме Алберта, альтернативными алгебрами с единицей, реальные элементы в которых суть вещественные числа, и которые обладают невырожденной мультипликативной квадратичной формой, являются только алгебры комплексных и двойных чисел, кватернионы и антикватернионы, октавы и антиоктавы.

Согласно обобщенной теореме Понтрягина, только вещественные, комплексные числа, кватернионы и октавы являются связными локально компактными альтернативными топологическими телами. Вследствие этого, пространства бикватернионов, дикватернионов и биоктав односвязными не являются.

Наконец, из теоремы Цорна вытекает, что единственными простыми альтернативными неассоциативными алгебрами являются октавы, антиоктавы и биоктавы.

В 50-60-х гг. XX века вопрос о мультипликативности форм степени выше 2 поставил и решил Р. Д. Шафер [5] – [7] (с дополнениями Кевина МакКриммона [8]). Под формами

n-степени понимается следующее. Пусть V – векторное пространство, возможно бесконечномерное, над полем F характеристики 0 или $p > n$ (вещественные и комплексные числа имеют характеристику 0). Тогда отображение $\mathbf{u} \to N(\mathbf{u})$ V на F называется *формой степени* n на V в случае

$$N(\lambda\mathbf{u}) = \lambda^n N(\mathbf{u}) \qquad \text{для любых} \quad \lambda \in F,\ \mathbf{u} \in V.$$

Результатом исследований того времени стала следующая теорема.

Теорема Шафера. *Пусть* $\mathbb{U}$ *– алгебра с единицей, вообще говоря бесконечномерная, над полем* F *характеристики 0 или* $p > n$. *Необходимое и достаточное условие для существования на* $\mathbb{U}$ *невырожденной формы* N *степени* $n > 0$, *допускающей композицию, состоит в том, что* $\mathbb{U}$ *является конечномерной сепарабельной альтернативной алгеброй* $\mathbb{U} = \mathbb{U}_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{U}_r$, $\mathbb{U}_i$ *– простые алгебры степени* m_i, *где*

$$n = m_1 f_1 + \ldots + m_r f_r, \tag{81}$$

удовлетворяется для положительных целых чисел $f_i (i = 1, \ldots, r)$. *Более того, форма* N *на* $\mathbb{U}$ *задается посредством*

$$N(\mathbf{u}) = [n_1(u_1)]^{f_1} \cdots [n_r(u_r)]^{f_r}, \tag{82}$$

где $n_j(u_j)$ *– форма, заданная на простой алгебре* $\mathbb{U}_j$.

В теореме существенным является понятие *невырожденности* нормы степени n. Имеется в виду следующее. С каждой n-нормой естественным образом связывается n-линейная форма *n-скалярного произведения* от n гиперкомплексных чисел по формуле Шафера:

$$\begin{aligned}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n) = \frac{1}{n!}\big[N(\mathbf{u}_1 + \ldots + \mathbf{u}_n) - \sum_{i=1}^{n} N(\mathbf{u}_1 + \ldots + \breve{\mathbf{u}}_i + \ldots + \mathbf{u}_n) \\ + \sum_{i<j} N(\mathbf{u}_1 + \ldots + \breve{\mathbf{u}}_i + \ldots + \breve{\mathbf{u}}_j + \ldots + \mathbf{u}_n) - \ldots + (-1)^{n-1}\sum N(\mathbf{u}_i)\big],\end{aligned} \tag{83}$$

где запись $\breve{\mathbf{u}}_i$ означает, что $\mathbf{u}_i$ опущен. Легко видеть, что

$$N_n(\mathbf{u}) = (\mathbf{u}, \mathbf{u}, \ldots, \mathbf{u}), \qquad \text{поскольку} \quad \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k C_n^k (n-k)^n = n!$$

С очевидностью, форма $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n)$ имеет все свойства, которые естественно ожидать от обобщения понятия скалярного произведения. Она вещественна, симметрична относительно любых перестановок входящих в него векторов, линейна по каждому из них (и, в частности, обращается в нуль, если один из векторов равен нулю).

По определению Шафера, формы степени n называются *невырожденными* в случае, если из $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n) = 0$ для всех $\mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n \in V$ вытекает $\mathbf{u}_1 = 0$.

С очевидностью, альтернативные алгебры с центральным сопряжением удовлетворяют условию теоремы Шафера (если в них невырождена исходная 2-норма). Поэтому в них существует вещественная невырожденная мультипликативная норма степени n. В общем случае, теорема Шафера не дает явного алгоритма построения такой нормы. Для алгебр с центральным сопряжением этот алгоритм достаточно ясен, поскольку мы уже знаем 2-норму, мультипликативную согласно доказанному выше. Особенно легко построить n-норму, если алгебра может быть получена цепочкой тех или иных удвоений (не обязательно по Кэли-Диксону) из вещественных чисел, т. е. является последовательно градуированной и имеет размерность 2^p (таковы все или почти все реально изучаемые гиперкомплексные алгебры). Нужно, используя набор сопряжений, заданных в алгебре, каждый раз, удваивая степень нормы, избавляться от половины членов центра алгебры. Используется тождество $(a^2+b^2)(a^2-b^2)=0$ (a и b коммутируют меж собой, принадлежа центру алгебры). Процесс повторяется, пока не останется лишь вещественное число. В результате, если центр алгебры (инвариантный относительно базового сопряжения) состоит из $r=2^k$ элементов, то норма алгебры будет иметь степень $n=2r=2^{k+1}$.

Мультипликативность полученной n-нормы будет вытекать из мультипликативности 2-нормы. Докажем это с помощью метода индукции. В самом деле, верно, что

$$N_2(\mathbf{uv})=N_2(\mathbf{u})N_2(\mathbf{v}),$$

и пусть это же верно для степени $m=2^k$:

$$N_m(\mathbf{uv})=N_m(\mathbf{u})N_m(\mathbf{v}).$$

Но $N_m(\mathbf{u})$ в алгебрах $\mathbb{A}_c$ принадлежит замкнутой ассоциативной коммутативной алгебре с единицей, являющейся подмножеством центра алгебры. Если эта алгебра (обозначим ее A_z) совпадает с 1, доказательство завершено. Если нет, рассмотрим алгебру, порожденную 1 и некоторым элементом r_1 из A_z. Если мы опять не получим всю алгебру A_z, добавим элемент r_2 из A_z и рассмотрим алгебру, образованную всеми произведениями $1, r_1, r_2$ (с любыми вещественными коэффициентами) и т. д. В конце концов, набор $\{1, r_1, \dots, r_z\}$ даст всю алгебру A_z, а набор $\{1, r_1, \dots, r_{z-1}\}$ даст ее "половинную" подалгебру A_{z-1}. Всякий элемент алгебры A_z можно записать в виде

$$\mathbf{t}=\mathbf{s}+\mathbf{r}_z\mathbf{S},$$

где $\mathbf{s}, \mathbf{S}$ принадлежат подалгебре A_{z-1}. Введем теперь инволюцию по формуле

$$C[\mathbf{s}+\mathbf{r}_z\mathbf{S}]=\mathbf{s}-\mathbf{r}_z\mathbf{S}, \qquad \text{и в частности} \quad C(\mathbf{r}_z)=-C(\mathbf{r}_z).$$

Тогда $C[\mathbf{r}_z^2]=\mathbf{r}_z^2$ и, учитывая коммутативность алгебры A_z, получаем:

$$\begin{aligned}C[\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2]&=C[(\mathbf{s}_1+\mathbf{r}_z\mathbf{S}_1)(\mathbf{s}_2+\mathbf{r}_z\mathbf{S}_2)]=C[\mathbf{s}_1\mathbf{s}_2+\mathbf{r}_z^2\mathbf{S}_1\mathbf{S}_2+(\mathbf{s}_1\mathbf{S}_2+\mathbf{s}_2\mathbf{S}_1)\mathbf{r}_z]=\\&\mathbf{s}_1\mathbf{s}_2+\mathbf{r}_z^2\mathbf{S}_1\mathbf{S}_2-(\mathbf{s}_1\mathbf{S}_2+\mathbf{s}_2\mathbf{S}_1)\mathbf{r}_z=(\mathbf{s}_1-\mathbf{r}_z\mathbf{S}_1)(\mathbf{s}_2-\mathbf{r}_z\mathbf{S}_2)=C[\mathbf{r}_1]C[\mathbf{r}_2].\end{aligned}$$

Теперь мы можем ввести норму степени $2k$ по правилу:

$$N_{2k}(\mathbf{u})=N_k(\mathbf{u})C[N_k(\mathbf{u})]$$

и доказать ее мультипликативность:

$$\begin{aligned}N_{2k}(\mathbf{uv})&=N_k(\mathbf{uv})C[N_k(\mathbf{uv})]=N_k(\mathbf{u})N_k(\mathbf{v})C[N_k(\mathbf{u})N_k(\mathbf{v})]=\\&N_k(\mathbf{u})N_k(\mathbf{v})C[N_k(\mathbf{u})]C[N_k(\mathbf{v})]=N_k(\mathbf{u})C[N_k(\mathbf{u})]N_k(\mathbf{v})C[N_k(\mathbf{v})]=N_{2k}(\mathbf{u})N_{2k}(\mathbf{v}).\end{aligned}$$

Итак, описанный метод построения вещественной n-нормы вместе с тем доказывает

Теорема 8. *Всякая альтернативная последовательно градуированная алгебра с центральным сопряжением и невырожденной 2-нормой обладает вещественной невырожденной мультипликативной нормой степени n, выражающейся с помощью набора сопряжений через исходную 2-норму. При этом степень нормы вдвое выше размерности центра алгебры (инвариантного относительно базового сопряжения) $n=2r$.*

Поскольку посредством данного алгоритма n-норма строится на основе 2-нормы, многие ее свойства в альтернативных алгебрах с центральным сопряжением автоматически переносятся на n-норму и порождаемую ею n-скалярное произведение. Так,

$$\begin{gathered} N_n(\bar{\mathbf{u}}) = N_n(\mathbf{u}), \\ (\bar{\mathbf{u}}_1, \bar{\mathbf{u}}_2, \ldots, \bar{\mathbf{u}}_n) = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n), \\ (\mathbf{v}\mathbf{u}_1, \mathbf{v}\mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{v}\mathbf{u}_n) = N_n(\mathbf{v})(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n). \end{gathered} \tag{84}$$

Четырехнорма для бикватернионов, дикватернионов и биоктав

Особенно легко получить вещественную норму алгебр бикватернионов, дикватернионов и биоктав, она будет иметь степень 4. Алгоритм очевиден: 2-норма является здесь комплексным или двойным числом; умножив его на сопряженное, получим вещественное число.

$$N_4(\mathbf{a}) = N_2(\mathbf{a})N_2(\mathbf{a})^* \tag{85}$$

Учитывая (23), получим:

$$N_4(\mathbf{a}) = \mathbf{a}\bar{\mathbf{a}}(\mathbf{a}\bar{\mathbf{a}})^* = \mathbf{a}\bar{\mathbf{a}}\mathbf{a}^*\bar{\mathbf{a}}^* = N_2(\mathbf{a})N_2(\mathbf{a}^*) = N_2(\bar{\mathbf{a}})N_2(\bar{\mathbf{a}}^*) = N_4(\bar{\mathbf{a}}). \tag{86}$$

В блочном виде 4-норма для алгебр бикватернионов и дикватернионов равна:

$$N_4(a + k \cdot \mathbf{i}_0) = (N_2(a) \mp N_2(k))^2 \pm 4(a, k)^2, \tag{87}$$

а для биоктав:

$$N_4(a + A \cdot \mathbf{e}_0 + k \cdot \mathbf{i}_0 + K \cdot \mathbf{f}_0) = (N_2(a) + N_2(A) - N_2(k) - N_2(K))^2 + 4((a, k) + (A, K))^2. \tag{88}$$

В покомпонентном виде 4-норма бикватернионов и дикватернионов равна:

$$N_4(\mathbf{a}) = (a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \ \mp (k_0^2 + k_1^2 + k_2^2 + k_3^2))^2 \ \pm 4(a_0k_0 + a_1k_1 + a_2k_2 + a_3k_3)^2, \tag{89}$$

для биоктав:

$$\begin{aligned} N_4(\mathbf{a}) = (a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \ + A_0^2 + A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 \ - k_0^2 - k_1^2 - k_2^2 - k_3^2 \ - K_0^2 - K_1^2 - K_2^2 - K_3^2)^2 \\ + 4(a_0k_0 + a_1k_1 + a_2k_2 + a_3k_3 \ + A_0K_0 + A_1K_1 + A_2K_2 + A_3K_3)^2. \end{aligned} \tag{90}$$

С очевидностью, все нормы неотрицательны. Но они не являются положительно определенными (и не могут являться в силу теоремы Фробениуса): из факта $N_4(\mathbf{a}) = 0$ не следует $\mathbf{a} = 0$. В самом деле, для дикватернионов достаточно просто взять $a = A$, и 4-норма будет равна 0:

$$N_4(a + a \cdot \mathbf{i}_0) = (N_2(a) + N_2(a))^2 - 4(a, a)^2 = 4N_2(a)^2 - 4N_2(a)^2 = 0.$$

Для бикватернионов ситуация несколько хитрее. Как легко видеть, чтобы занулить 4-норму, нужно взять A равным по 2-норме a, и при этом перпендикулярным ему: $(a, A) = 0$. Например, $a = 3\mathbf{i}_1 - 2\mathbf{i}_3$, $A = 2\mathbf{i}_0 + 3\mathbf{i}_2$.

Формула мультипликативности 4-нормы биоктав в кватернионной записи выглядит так (с помощью довольно длинных преобразований ее несложно доказать и напрямую):

$$\begin{gathered} \big(N_2(a) + N_2(A) - N_2(k) - N_2(K)\big)^2 + 4\big((a, k) + (A, K)\big)^2 \cdot \\ \big(N_2(b) + N_2(B) - N_2(l) - N_2(L)\big)^2 + 4\big((b, l) + (B, L)\big)^2 = \\ \big(N_2(ab - \bar{B}A - kl + \bar{L}K) + N_2(Ba + A\bar{b} - Lk - K\bar{l}) \\ -N_2(al - \bar{L}A + kb - \bar{B}K) - N_2(La + K\bar{b} + Bk + A\bar{l})\big)^2 \\ +4\big((ab - \bar{B}A - kl + \bar{L}K,\ al - \bar{L}A + kb - \bar{B}K) \\ +(Ba + A\bar{b} - Lk - K\bar{l},\ La + K\bar{b} + Bk + A\bar{l})\big)^2 \end{gathered} \tag{91}$$

Для иллюстративных целей покажем, как выглядит в вещественных числах тождество, выражающее мультипликативность 4-нормы алгебры биоктав.

$$
\begin{gathered}
\Big[(a_0^2+a_1^2+a_2^2+a_3^2\ +A_0^2+A_1^2+A_2^2+A_3^2\ -k_0^2-k_1^2-k_2^2-k_3^2\ -K_0^2-K_1^2-K_2^2-K_3^2)^2\\
+\ 4(a_0k_0+a_1k_1+a_2k_2+a_3k_3\ +A_0K_0+A_1K_1+A_2K_2+A_3K_3)^2\Big]\cdot\\
\Big[(b_0^2+b_1^2+b_2^2+b_3^2\ +B_0^2+B_1^2+B_2^2+B_3^2\ -l_0^2-l_1^2-l_2^2-l_3^2\ -L_0^2-L_1^2-L_2^2-L_3^2)^2\\
+\ 4(b_0l_0+b_1l_1+b_2l_2+b_3l_3\ +B_0L_0+B_1L_1+B_2L_2+B_3L_3)^2\Big]=\\
\Big[(a_0b_0-a_1b_1-a_2b_2-a_3b_3-A_0B_0-A_1B_1-A_2B_2-A_3B_3-k_0l_0+k_1l_1+k_2l_2+k_3l_3+K_0L_0+K_1L_1+K_2L_2+K_3L_3)^2\\
+(a_0b_1+a_1b_0+a_2b_3-a_3b_2+A_0B_1-A_1B_0-A_2B_3+A_3B_2-k_0l_1-k_1l_0-k_2l_3+k_3k_2-K_0L_1+K_1L_0+K_2L_3-K_3L_2)^2\\
+(a_0b_2-a_1b_3+a_2b_0+a_3b_1-k_0l_2+k_1l_3-k_2B_0-k_3B_1+A_0B_2+A_1B_3-A_2B_0-A_3B_1-K_0L_2-K_1L_3+K_2L_0+K_3L_1)^2\\
+(a_0b_3+a_1b_2-a_2b_1+a_3b_0-k_0l_3-k_1l_2+k_2l_1-k_3l_0+A_0B_3-A_1B_2+A_2B_1-A_3B_0-K_0L_3+K_1L_2-K_2L_1+K_3L_0)^2\\
+(a_0B_0-a_1B_1-a_2B_2-a_3B_3+A_0b_0+A_1b_1+A_2b_2+A_3b_3-k_0L_0+k_1L_1+k_2L_2+k_3L_3-K_0l_0-K_1l_1-K_2l_2-K_3l_3)^2\\
+(a_0B_1+a_1B_0-a_2B_3+a_3B_2-A_0b_1+A_1b_0-A_2b_3+A_3b_2-k_0L_1-k_1L_0+k_2L_3-k_3L_2+K_0l_1-K_1l_0+K_2l_3-K_3l_2)^2\\
+(a_0B_2+a_1B_3+a_2B_0-a_3B_1-A_0b_2+A_1b_3+A_2b_0-A_3b_1-k_0L_2-k_1L_3-k_2L_0+k_3L_1+K_0l_2-K_1l_3-K_2l_0+K_3l_1)^2\\
+(a_0B_3-a_1B_2+a_2B_1+a_3B_0-A_0b_3-A_1b_2+A_2b_1+A_3b_0-k_0L_3+k_1L_2-k_2L_1-k_3L_0+K_0l_3+K_1l_2-K_2l_1-K_3l_0)^2\\
-(a_0l_0-a_1l_1-a_2l_2-a_3l_3+k_0b_0-k_1b_1-k_2b_2-k_3b_3-A_0L_0-A_1L_1-A_2L_2-A_3L_3-K_0B_0-K_1B_1-K_2B_2-K_3B_3)^2\\
-(a_0l_1+a_1l_0+a_2l_3-a_3l_2+k_0b_1+k_1b_0+k_2b_3-k_3b_2+A_0L_1-A_1L_0-A_2L_3+A_3L_2+K_0B_1-K_1B_0-K_2B_3+K_3B_2)^2\\
-(a_0l_2-a_1l_3+a_2l_0+a_3l_1+k_0b_2-k_1b_3+k_2b_0+k_3b_1+A_0L_2+A_1L_3-A_2L_0-A_3L_1+K_0B_2+K_1B_3-K_2B_0-K_3B_1)^2\\
-(a_0l_3+a_1l_2-a_2l_1+a_3l_0+k_0b_3+k_1b_2-k_2b_1+k_3b_0+A_0L_3-A_1L_2+A_2L_1-A_3L_0+K_0B_3-K_1B_2+K_2B_1-K_3B_0)^2\\
-(a_0L_0-a_1L_1-a_2L_2-a_3L_3+A_0l_0+A_1l_1+A_2l_2+A_3l_3+k_0B_0-k_1B_1-k_2B_2-k_3B_3+K_0b_0+K_1b_1+K_2b_2+K_3b_3)^2\\
-(a_0L_1+a_1L_0-a_2L_3+a_3L_2-A_0l_1+A_1l_0-A_2l_3+A_3l_2+k_0B_1+k_1B_0-k_2B_3+k_3B_2-K_0b_1+K_1b_0-K_2b_3+K_3b_2)^2\\
-(a_0L_2+a_1L_3+a_2L_0-a_3L_1-A_0l_2+A_1l_3+A_2l_0-A_3l_1+k_0B_2+k_1B_3+k_2B_0-k_3B_1-K_0b_2+K_1b_3+K_2b_0-K_3b_1)^2\\
-(a_0L_3-a_1L_2+a_2L_1+a_3L_0-A_0l_3-A_1l_2+A_2l_1+A_3l_0+k_0B_3-k_1B_2+k_2B_1+k_3B_0-K_0b_3-K_1b_2+K_2b_1+K_3b_0)^2\Big]^2\\[2ex]
+4\Big[(a_0b_0-a_1b_1-a_2b_2-a_3b_3\ -A_0B_0-A_1B_1-A_2B_2-A_3B_3-k_0l_0+k_1l_1+k_2l_2+k_3l_3\ +K_0L_0+K_1L_1+K_2L_2+K_3L_3)\cdot\\
(a_0l_0-a_1l_1-a_2l_2-a_3l_3\ +k_0b_0-k_1b_1-k_2b_2-k_3b_3-A_0L_0-A_1L_1-A_2L_2-A_3L_3\ -K_0B_0-K_1B_1-K_2B_2-K_3B_3)\\
+(a_0b_1+a_1b_0+a_2b_3-a_3b_2\ +A_0B_1-A_1B_0-A_2B_3+A_3B_2-k_0l_1-k_1l_0-k_2l_3+k_3k_2\ -K_0L_1+K_1L_0+K_2L_3-K_3L_2\ )\cdot\\
(a_0l_1+a_1l_0+a_2l_3-a_3l_2\ +k_0b_1+k_1b_0+k_2b_3-k_3b_2+A_0L_1-A_1L_0-A_2L_3+A_3L_2\ +K_0B_1-K_1B_0-K_2B_3+K_3B_2)\\
+(a_0b_2-a_1b_3+a_2b_0+a_3b_1\ -k_0l_2+k_1l_3-k_2B_0-k_3B_1+A_0B_2+A_1B_3-A_2B_0-A_3B_1\ -K_0L_2-K_1L_3+K_2L_0+K_3L_1)\cdot\\
(a_0l_2-a_1l_3+a_2l_0+a_3l_1\ +k_0b_2-k_1b_3+k_2b_0+k_3b_1+A_0L_2+A_1L_3-A_2L_0-A_3L_1\ +K_0B_2+K_1B_3-K_2B_0-K_3B_1)\\
+(a_0b_3+a_1b_2-a_2b_1+a_3b_0\ -k_0l_3-k_1l_2+k_2l_1-k_3l_0+A_0B_3-A_1B_2+A_2B_1-A_3B_0\ -K_0L_3+K_1L_2-K_2L_1+K_3L_0)\cdot\\
(a_0l_3+a_1l_2-a_2l_1+a_3l_0\ +k_0b_3+k_1b_2-k_2b_1+k_3b_0+A_0L_3-A_1L_2+A_2L_1-A_3L_0\ +K_0B_3-K_1B_2+K_2B_1-K_3B_0)\\
+(a_0B_0-a_1B_1-a_2B_2-a_3B_3+A_0b_0+A_1b_1+A_2b_2+A_3b_3-k_0L_0+k_1L_1+k_2L_2+k_3L_3-K_0l_0-K_1l_1-K_2l_2-K_3l_3)\cdot\\
(a_0L_0-a_1L_1-a_2L_2-a_3L_3+A_0l_0+A_1l_1+A_2l_2+A_3l_3+k_0B_0-k_1B_1-k_2B_2-k_3B_3+K_0b_0+K_1b_1+K_2b_2+K_3b_3)\\
+(a_0B_1+a_1B_0-a_2B_3+a_3B_2-A_0b_1+A_1b_0-A_2b_3+A_3b_2-k_0L_1-k_1L_0+k_2L_3-k_3L_2+K_0l_1-K_1l_0+K_2l_3-K_3l_2)\cdot\\
(a_0L_1+a_1L_0-a_2L_3+a_3L_2-A_0l_1+A_1l_0-A_2l_3+A_3l_2+k_0B_1+k_1B_0-k_2B_3+k_3B_2-K_0b_1+K_1b_0-K_2b_3+K_3b_2)\\
+(a_0B_2+a_1B_3+a_2B_0-a_3B_1-A_0b_2+A_1b_3+A_2b_0-A_3b_1-k_0L_2-k_1L_3-k_2L_0+k_3L_1+K_0l_2-K_1l_3-K_2l_0+K_3l_1)\cdot\\
(a_0L_2+a_1L_3+a_2L_0-a_3L_1-A_0l_2+A_1l_3+A_2l_0-A_3l_1+k_0B_2+k_1B_3+k_2B_0-k_3B_1-K_0b_2+K_1b_3+K_2b_0-K_3b_1)\\
+(a_0B_3-a_1B_2+a_2B_1+a_3B_0-A_0b_3-A_1b_2+A_2b_1+A_3b_0-k_0L_3+k_1L_2-k_2L_1-k_3L_0+K_0l_3+K_1l_2-K_2l_1-K_3l_0)\cdot\\
(a_0L_3-a_1L_2+a_2L_1+a_3L_0-A_0l_3-A_1l_2+A_2l_1+A_3l_0+k_0B_3-k_1B_2+k_2B_1+k_3B_0-K_0b_3-K_1b_2+K_2b_1+K_3b_0)\Big]^2.
\end{gathered}
\tag{92}
$$

Это слоноподобное тождество является непосредственным обобщением знаменитого тождества восьми квадратов. Более того, это тождество можно считать максимальным и исключительным. Поскольку по теореме Цорна биоктавы – максимальная простая альтернативная (неассоциативная) алгебра, то все тождества большей размерности, связанные с неассоциативными алгебрами, так или иначе сведутся к данному или его фрагментам. Подобно формулам суммы квадратов, это тождество, случайное с позиций вещественных чисел, является отражением существования алгебр биоктав.

Знание 4-нормы позволяет ввести *обратный элемент* для алгебр би(ди)-кватернионов и биоктав (и вообще для любой алгебры с центральным сопряжением и нормой 4 порядка). Поскольку

$$N_4(\mathbf{a}) = N_2(\mathbf{a})N_2^*(\mathbf{a}) = \mathbf{a}\bar{\mathbf{a}}N_2^*(\mathbf{a}), \quad N_4(\bar{\mathbf{a}}) = \bar{\mathbf{a}}\mathbf{a}N_2^*(\bar{\mathbf{a}}), \quad N_4(\bar{\mathbf{a}}) = N_4(\mathbf{a}),$$

то ясно, как ввести правый и левый обратный элемент, если $N_4(\mathbf{a}) \neq 0$:

$$\mathbf{a}_p^{-1} = \frac{\bar{\mathbf{a}}N_2^*(\mathbf{a})}{N_4(\mathbf{a})} = \frac{\bar{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{a}^*\bar{\mathbf{a}}^*}{N_4(\mathbf{a})}, \quad \mathbf{a}_l^{-1} = \frac{N_2^*(\bar{\mathbf{a}})\bar{\mathbf{a}}}{N_4(\mathbf{a})} \equiv \mathbf{a}_p^{-1}. \tag{93}$$

Поскольку $N_2(\bar{\mathbf{a}}) = N_2(\mathbf{a})$, то *правый и левый обратные элементы с очевидностью совпадают в любой алгебре с центральным сопряжением* – с любой степенью нормы, поскольку рассуждение легко обобщается. То, что формулы (93) действительно дают обратный элемент:

$$\mathbf{a}\mathbf{a}_p^{-1} = \mathbf{a}_l^{-1}\mathbf{a} = 1. \tag{94}$$

вытекает из ассоциативности произведений реальной 2-нормы с любыми элементами алгебры (свойство (45)). Таким образом, обратный элемент существует для каждого элемента с ненулевой 4-нормой алгебры $\mathbb{A}_c$.

Дуальная четырехнорма для бикватернионов и дикватернионов

Неожиданным фактом является то, что есть и совершенно другой способ получения 4-нормы для алгебр бикватернионов и дикватернионов, иначе говоря, получения вещественного числа для произвольного элемента этих алгебр с помощью умножения и сопряжений. Если вместо $\bar{\mathbf{a}}$ взять как базовое сопряжение дуальное сопряжение $\widetilde{\mathbf{a}}$ (21) то в произведении $\mathbf{a}\widetilde{\mathbf{a}}$ останутся лишь инвариантные (реальные) относительно него члены, пропорциональные ортам $1, \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$. Поскольку орты $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ антикоммутируют меж собой, можно умножить $\mathbf{a}\widetilde{\mathbf{a}}$ на его комплексное сопряжение $(\mathbf{a}\widetilde{\mathbf{a}})^*$ (все члены с ортами $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ изменят знак) и получить вещественное число. Итак, вторую 4-норму для алгебр би(ди)кватернионов можно ввести как:

$$N_4^{\circledast}(\mathbf{a}) = \mathbf{a}\widetilde{\mathbf{a}}(\mathbf{a}\widetilde{\mathbf{a}})^*. \tag{95}$$

Поскольку дуальное сопряжение равно $\widetilde{\mathbf{a}} = \bar{a} - \mathbf{i}_0\bar{k}$ (21), то в блочном виде альтернативная 2-норма для алгебр бикватернионов и дикватернионов ($\mathbf{i}_0^2 = \mp 1$) равна

$$N_2^{\circledast}(a + k \cdot \mathbf{i}_0) = (a + k \cdot \mathbf{i}_0)(\bar{a} - \bar{k} \cdot \mathbf{i}_0) = N_2(a) \pm N_2(k) + 2\langle k, a\rangle \mathbf{i}_0. \tag{96}$$

Далее, $N_4^{\circledast}(\mathbf{a}) = N_2^{\circledast}(\mathbf{a})[N_2^{\circledast}(\mathbf{a})]^*$. Но поскольку

$$(m + \mathbf{q} \cdot \mathbf{i}_0)(m - \mathbf{q} \cdot \mathbf{i}_0) = m^2 \pm \mathbf{q}^2$$

для вещественного m и чисто мнимого кватерниона $\mathbf{q}$, то в блочном виде вторая 4-норма для алгебр бикватернионов и дикватернионов равна:

$$N_4^{\circledast}(a + k \cdot \mathbf{i}_0) = (N_2(a) \pm N_2(k))^2 \pm 4\langle k, a\rangle^2. \tag{97}$$

Вместо скалярного произведения кватернионов в альтернативную норму входит их векторное произведение.

Так как для чисто мнимого кватерниона $\mathbf{q}^2 = -\sum_k \mathbf{q}_k^2$, то в покомпонентном виде альтернативная 4-норма бикватернионов и дикватернионов ($\mathbf{i}_0^2 = -1, +1$) равна:

$$\begin{aligned} N_4^{\circledast}(\mathbf{a}) = \big(a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \ \pm (k_0^2 + k_1^2 + k_2^2 + k_3^2)\big)^2 \ \mp 4\big(a_1k_0 - a_0k_1 + a_3k_2 - a_2k_3\big)^2 \\ \mp 4\big(a_2k_0 - a_0k_2 + a_1k_3 - a_3k_1\big)^2 \mp 4\big(a_3k_0 - a_0k_3 + a_2k_1 - a_1k_2\big)^2. \end{aligned} \tag{98}$$

Дуальная 4-норма совершенно не похожа на первую 4-норму. Тем не менее, докажем их эквивалентность. Учитывая (23) и то, что $\widetilde{\mathbf{a}} = \bar{\mathbf{a}}^*$, получим:

$$N_4^{\circledast}(\mathbf{a}) = \mathbf{a}\widetilde{\mathbf{a}}\mathbf{a}^*\widetilde{\mathbf{a}}^* = \mathbf{a}\widetilde{\mathbf{a}}\mathbf{a}^*\bar{\mathbf{a}} = \mathbf{a}(\bar{\mathbf{a}}\mathbf{a})^*\bar{\mathbf{a}}.$$

Но $\bar{\mathbf{a}}\mathbf{a}$, как и его модификация $(\bar{\mathbf{a}}\mathbf{a})^*$, принадлежат центру алгебры. Следовательно,

$$N_4^{\circledast}(\mathbf{a}) = \mathbf{a}(\bar{\mathbf{a}}\mathbf{a})^*\bar{\mathbf{a}} = \mathbf{a}\bar{\mathbf{a}}(\bar{\mathbf{a}}\mathbf{a})^* = N_4(\mathbf{a}).$$

Итак, мы доказали, что в алгебрах би(ди)кватернионов оба вида 4-нормы совпадают. Этот факт в кватернионной записи для бикватернионов (дикватернионы дают то же самое в другом порядке):

$$(N_2(a) - N_2(k))^2 + 4(a,k)^2 = (N_2(a) + N_2(k))^2 + 4\langle k,a\rangle^2 \qquad (\,\langle k,a\rangle^2 \leqslant 0\,), \tag{99}$$

и после очевидных преобразований сводится к тождеству (66)

$$N_2(a)N_2(k) = (a,k)^2 - \langle k,a\rangle^2.$$

В вещественных числах это тождество довольно красиво:

$$\begin{aligned}(a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(A_0^2 + A_1^2 + A_2^2 + A_3^2) = {}&\\ (a_0A_0 + a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3)^2 + (a_1A_0 - a_0A_1 + a_3A_2 - a_2A_3)^2&\\ + (a_2A_0 - a_0A_2 + a_1A_3 - a_3A_1)^2 + (a_3A_0 - a_0A_3 + a_2A_1 - a_1A_2)^2.&\end{aligned} \tag{100}$$

Четырехскалярное произведение для бикватернионов, дикватернионов и биоктав

Для случая $n = 4$ формула Шафера (83) выглядит так:

$$\begin{aligned}(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d}) = \frac{1}{24}\big[&N_4(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}) \ - N_4(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}) - N_4(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{d}) - N_4(\mathbf{a}+\mathbf{c}+\mathbf{d})\\ &- N_4(\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}) \ + N_4(\mathbf{a}+\mathbf{b}) + N_4(\mathbf{a}+\mathbf{c}) + N_4(\mathbf{b}+\mathbf{c}) + N_4(\mathbf{a}+\mathbf{d})\\ &+ N_4(\mathbf{b}+\mathbf{d}) + N_4(\mathbf{c}+\mathbf{d}) \ - N_4(\mathbf{a}) - N_4(\mathbf{b}) - N_4(\mathbf{c}) - N_4(\mathbf{d})\big].\end{aligned} \tag{101}$$

Учтя теперь формулу, выражающую для алгебр бикватернионов и дикватернионов 4-норму через 2-норму (85), и выражая 2-норму суммы через 2-скалярное произведение согласно (55), получаем после ряда преобразований и упрощений формулу 4-скалярное произведения в алгебрах $\mathbb{A}_c$ с нормой 4 степени:

$$\begin{aligned}(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d}) = \frac{1}{6}\big[&(\mathbf{a},\mathbf{b})(\mathbf{c},\mathbf{d})^* + (\mathbf{a},\mathbf{c})(\mathbf{b},\mathbf{d})^* + (\mathbf{a},\mathbf{d})(\mathbf{b},\mathbf{c})^* +\\ &+ (\mathbf{c},\mathbf{d})(\mathbf{a},\mathbf{b})^* + (\mathbf{b},\mathbf{d})(\mathbf{a},\mathbf{c})^* + (\mathbf{b},\mathbf{c})(\mathbf{a},\mathbf{d})^*\big], \qquad \text{или}\end{aligned} \tag{102}$$

$$\begin{aligned}(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d}) = \frac{1}{6}\big[&(\mathbf{a},\mathbf{b})(\mathbf{c}^*,\mathbf{d}^*) + (\mathbf{a},\mathbf{c})(\mathbf{b}^*,\mathbf{d}^*) + (\mathbf{a},\mathbf{d})(\mathbf{b}^*,\mathbf{c}^*) +\\ &+ (\mathbf{c},\mathbf{d})(\mathbf{a}^*,\mathbf{b}^*) + (\mathbf{b},\mathbf{d})(\mathbf{a}^*,\mathbf{c}^*) + (\mathbf{b},\mathbf{c})(\mathbf{a}^*,\mathbf{d}^*)\big].\end{aligned} \tag{103}$$

Несложно вывести ряд полезных следствий из этой формулы. Так, при решении геометрических вопросов важны вещественные 4-формы от двух векторов. На основании 4-формы от 4 векторов их можно ввести две:

$$(\mathbf{a},\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{b}) = \frac{1}{6}\big[N_2(\mathbf{a})N_2^*(\mathbf{b}) + 4(\mathbf{a},\mathbf{b})(\mathbf{a},\mathbf{b})^* + N_2(\mathbf{b})N_2^*(\mathbf{a})\big], \tag{104}$$

$$(\mathbf{a},\mathbf{a},\mathbf{a},\mathbf{b}) = \frac{1}{2}\big[N_2(\mathbf{a})(\mathbf{a},\mathbf{b})^* + (\mathbf{a},\mathbf{b})N_2^*(\mathbf{a})\big], \tag{105}$$

а кроме того полезно иметь в виду третью

$$\{\mathbf{a},\mathbf{b}\} = (\mathbf{a},\mathbf{b})(\mathbf{a},\mathbf{b})^*. \tag{106}$$

Отметим также симметризованную форму:

$$\mathbf{a}\circ\mathbf{b} = (\mathbf{a},\mathbf{a},\mathbf{a},\mathbf{b}) + (\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{b},\mathbf{b}) = \frac{1}{2}\big[(N_2(\mathbf{a}) + N_2(\mathbf{b}))(\mathbf{a},\mathbf{b})^* + (\mathbf{a},\mathbf{b})(N_2^*(\mathbf{a}) + N_2^*(\mathbf{b}))\big] \tag{107}$$

С ее использованием формула 4-нормы суммы

$$\begin{aligned} N_4(\mathbf{a}+\mathbf{b}) &= (\mathbf{a}+\mathbf{b},\mathbf{a}+\mathbf{b},\mathbf{a}+\mathbf{b},\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \\ &= N_4(\mathbf{a}) + 4(\mathbf{a},\mathbf{a},\mathbf{a},\mathbf{b}) + 6(\mathbf{a},\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{b}) + 4(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{b},\mathbf{b}) + N_4(\mathbf{b}) \end{aligned} \tag{108}$$

выглядит так:

$$N_4(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = N_4(\mathbf{a}) + N_4(\mathbf{b}) + N_2(\mathbf{a})N_2^*(\mathbf{b}) + N_2(\mathbf{b})N_2^*(\mathbf{a}) + 4\{\mathbf{a},\mathbf{b}\} + 4\mathbf{a}\circ\mathbf{b} \tag{109}$$

Свойства форм $(\mathbf{a},\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{b})$ и $(\mathbf{a},\mathbf{a},\mathbf{a},\mathbf{b})$ весьма различны. В самом деле, как несложно подсчитать, симметричная форма $(\mathbf{j}_p,\mathbf{j}_p,\mathbf{j}_q,\mathbf{j}_q)$ для биоктав (и значит, в том числе, для октав, бикватернионов и в равной степени для дикватернионов) равна

$$\begin{aligned} (\mathbf{j}_p,\mathbf{j}_p,\mathbf{j}_q,\mathbf{j}_q) &= 1 \qquad \text{при} \quad p = q, \\ (\mathbf{j}_p,\mathbf{j}_p,\mathbf{j}_q,\mathbf{j}_q) &= \pm 1/3 \qquad \text{при} \quad p \neq q. \end{aligned} \tag{110}$$

Напротив, $\mathbf{j}_p \circ \mathbf{j}_q$ равен нулю не только тогда, когда 2-скалярное произведение $(\mathbf{j}_p,\mathbf{j}_q) = 0$, но и во всех случаях, когда орты $\mathbf{j}_p$ и $\mathbf{j}_q$ различны:

$$(\mathbf{j}_p,\mathbf{j}_p,\mathbf{j}_p,\mathbf{j}_q) = 0 \qquad \text{если} \quad p \neq q, \tag{111}$$

и поэтому

$$\mathbf{j}_p \circ \mathbf{j}_q = \delta_{pq}, \tag{112}$$

Таким образом, *отношение* $\mathbf{a}\circ\mathbf{b} = 0$ *можно рассматривать как обобщение ортогональности векторов на случай форм 4 степени.*

При проведении расчетов полезно иметь в виду, что

$$\mathbf{a}\mathbf{a}^* = \mathbf{a}^*\mathbf{a} \qquad \text{и поэтому} \quad \mathbf{a}\mathbf{b}^* + \mathbf{b}\mathbf{a}^* = \mathbf{b}^*\mathbf{a} + \mathbf{a}^*\mathbf{b}. \tag{113}$$

Четырехвекторное произведение для бикватернионов и биоктав

Имеет смысл пойти дальше результатов Шафера и обобщить не только скалярное, но и векторное произведение. Для алгебр бикватернионов, биоктав и им подобным четырехвекторное произведение можно предложить на основе следующей формулы:

$$\begin{aligned} \langle\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d}\rangle = \frac{1}{6}\big[&\langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle\langle\mathbf{c},\mathbf{d}\rangle^* + \langle\mathbf{a},\mathbf{c}\rangle\langle\mathbf{d},\mathbf{b}\rangle^* + \langle\mathbf{a},\mathbf{d}\rangle\langle\mathbf{b},\mathbf{c}\rangle^* + \\ &+ \langle\mathbf{c},\mathbf{d}\rangle\langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle^* + \langle\mathbf{d},\mathbf{b}\rangle\langle\mathbf{a},\mathbf{c}\rangle^* + \langle\mathbf{b},\mathbf{c}\rangle\langle\mathbf{a},\mathbf{d}\rangle^*\big], \qquad \text{или} \end{aligned} \tag{114}$$

$$\begin{aligned} \langle\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d}\rangle = \frac{1}{6}\big[&\langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle\langle\mathbf{c}^*,\mathbf{d}^*\rangle + \langle\mathbf{a},\mathbf{c}\rangle\langle\mathbf{d}^*,\mathbf{b}^*\rangle + \langle\mathbf{a},\mathbf{d}\rangle\langle\mathbf{b}^*,\mathbf{c}^*\rangle + \\ &+ \langle\mathbf{c},\mathbf{d}\rangle\langle\mathbf{a}^*,\mathbf{b}^*\rangle + \langle\mathbf{d},\mathbf{b}\rangle\langle\mathbf{a}^*,\mathbf{c}^*\rangle + \langle\mathbf{b},\mathbf{c}\rangle\langle\mathbf{a}^*,\mathbf{d}^*\rangle\big]. \end{aligned} \tag{115}$$

Как легко видеть, 4-векторное произведение полностью антисимметрично относительно перестановок в любой паре векторов. Как и 2-векторное произведение, это не вещественное число, а гиперкомплексный вектор. Любопытно, что в отличие от чисто мнимого 2-векторного произведения, 4-векторное произведение реально относительно базового сопряжения $\bar{\mathbf{r}}$ (и содержит поэтому только орты 1 и $\mathbf{i}_0$). Можно показать, что если половина степени нормы $n/2$ – четное число, то n-векторное произведение будет реальным, при нечетным $n/2$ – мнимым (так, мнимо 2-векторное произведение кватернионов).

Если формально образовать 4-векторное произведение из кватернионов (алгебры с нормой степени 2, а не 4), получится вещественное число с ясным геометрическим смыслом. Для кватернионов, как легко показать, 4-векторное произведение равно детерминанту матрицы, составленной из координат входящих в него векторов:

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d} \rangle = \begin{bmatrix} a_0 & b_0 & c_0 & d_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{bmatrix}. \tag{116}$$

Т. о. 4-векторное произведение для кватернионов равно 4-объему параллелепипеда, натянутого на четыре вектора, т. е. совпадает с смешанным произведением 4 порядка (скаляром).

Норма и скалярное произведение бикватернионов в изотропном базисе

Структурные свойства алгебры, как правило, хорошо видны не в обычном базисе, а в базисах, образованных элементами с нулевой нормой. Как известно, в полупростых ассоциативных кольцах идеалы порождаются идемпотентами. Взяв в алгебре бикватернионов два изотропных идемпотента ($e^2 = e$) $\mathbf{u}_0$ и $\mathbf{v}_0$, получим с их помощью изотропный базис $\{\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_k\}$:

$$\begin{aligned} &\mathbf{u}_0 = 1 + \mathbf{i}_3, \quad \mathbf{u}_1 = \mathbf{q}_1(1 + \mathbf{i}_3), \quad \mathbf{u}_2 = \mathbf{q}_2(1 + \mathbf{i}_3), \quad \mathbf{u}_3 = \mathbf{q}_3(1 + \mathbf{i}_3), \\ &\mathbf{v}_0 = 1 - \mathbf{i}_3, \quad \mathbf{v}_1 = \mathbf{q}_1(1 - \mathbf{i}_3), \quad \mathbf{v}_2 = \mathbf{q}_2(1 - \mathbf{i}_3), \quad \mathbf{v}_3 = \mathbf{q}_3(1 - \mathbf{i}_3), \end{aligned} \tag{117}$$

или, в явном виде,

$$\begin{aligned} &\mathbf{u}_0 = 1 + \mathbf{i}_3, \quad \mathbf{u}_1 = \mathbf{q}_1 - \mathbf{i}_2, \quad \mathbf{u}_2 = \mathbf{q}_2 + \mathbf{i}_1, \quad \mathbf{u}_3 = \mathbf{q}_3 - \mathbf{i}_0, \\ &\mathbf{v}_0 = 1 - \mathbf{i}_3, \quad \mathbf{v}_1 = \mathbf{q}_1 + \mathbf{i}_2, \quad \mathbf{v}_2 = \mathbf{q}_2 - \mathbf{i}_1, \quad \mathbf{v}_3 = \mathbf{q}_3 + \mathbf{i}_0. \end{aligned} \tag{118}$$

Таблица умножения алгебры бикватернионов в изотропном базисе:

$\times$	$\mathbf{u}_0$	$\mathbf{u}_1$	$\mathbf{u}_2$	$\mathbf{u}_3$	$\mathbf{v}_0$	$\mathbf{v}_1$	$\mathbf{v}_2$	$\mathbf{v}_3$
$\mathbf{u}_0$	$\mathbf{u}_0$	0	0	$\mathbf{u}_3$	0	$\mathbf{v}_1$	$\mathbf{v}_2$	0
$\mathbf{u}_1$	$\mathbf{u}_1$	0	0	$-\mathbf{u}_2$	0	$-\mathbf{v}_0$	$\mathbf{v}_3$	0
$\mathbf{u}_2$	$\mathbf{u}_2$	0	0	$\mathbf{u}_1$	0	$-\mathbf{v}_3$	$-\mathbf{v}_0$	0
$\mathbf{u}_3$	$\mathbf{u}_1$	0	0	$-\mathbf{u}_0$	0	$\mathbf{v}_2$	$-\mathbf{v}_1$	0
$\mathbf{v}_0$	0	$\mathbf{u}_1$	$\mathbf{u}_2$	0	$\mathbf{v}_0$	0	0	$\mathbf{v}_3$
$\mathbf{v}_1$	0	$-\mathbf{u}_0$	$\mathbf{u}_3$	0	$\mathbf{v}_1$	0	0	$-\mathbf{v}_2$
$\mathbf{v}_2$	0	$-\mathbf{u}_3$	$-\mathbf{u}_0$	0	$\mathbf{v}_2$	0	0	$\mathbf{v}_1$
$\mathbf{v}_3$	0	$\mathbf{u}_2$	$-\mathbf{u}_1$	0	$\mathbf{v}_3$	0	0	$-\mathbf{v}_0$

. (*Tab.* 6)

Мы видим, что наборы векторов $\mathbf{u}_k$ и $\mathbf{v}_k$ образуют левые идеалы по умножению в алгебре бикватернионов. (Умножение слева любого элемента алгебры на произвольный элемент набора дает снова элемент этого набора). Идеалы не могут быть двусторонними в силу простоты алгебры бикватернионов.

Таблица 2-скалярных произведений бикватернионов в изотропном базисе:

$(\times)$	$\mathbf{u}_0$	$\mathbf{u}_1$	$\mathbf{u}_2$	$\mathbf{u}_3$	$\mathbf{v}_0$	$\mathbf{v}_1$	$\mathbf{v}_2$	$\mathbf{v}_3$
$\mathbf{u}_0$	0	0	0	0	1	0	0	$\mathbf{i}_0$
$\mathbf{u}_1$	0	0	0	0	0	1	$-\mathbf{i}_0$	0
$\mathbf{u}_2$	0	0	0	0	0	$\mathbf{i}_0$	1	0
$\mathbf{u}_3$	0	0	0	0	$-\mathbf{i}_0$	0	0	1
$\mathbf{v}_0$	1	0	0	$-\mathbf{i}_0$	0	0	0	0
$\mathbf{v}_1$	0	1	$\mathbf{i}_0$	0	0	0	0	0
$\mathbf{v}_2$	0	$-\mathbf{i}_0$	1	0	0	0	0	0
$\mathbf{v}_3$	$\mathbf{i}_0$	0	0	1	0	0	0	0

. (*Tab.* 7)

Отсюда вытекает вид 2-нормы алгебры бикватернионов в изотропном базисе $\mathbf{u}_k, \mathbf{v}_k$. Запишем $\mathbf{a}$ в изотропном базисе:

$$\begin{gathered}\mathbf{a} = a_0 + a_1\mathbf{q}_1 + a_2\mathbf{q}_2 + a_3\mathbf{q}_3 + k_0\mathbf{i}_0 + k_1\mathbf{i}_1 + k_2\mathbf{i}_2 + k_3\mathbf{i}_3,\\ \mathbf{a} = r_0\mathbf{u}_0 + r_1\mathbf{u}_1 + r_2\mathbf{u}_2 + r_3\mathbf{u}_3 + s_0\mathbf{v}_0 + s_1\mathbf{v}_1 + s_2\mathbf{v}_2 + s_3\mathbf{v}_3,\end{gathered} \tag{119}$$

где вещественные числа r_k, s_k:

$$\begin{gathered}r_0 = 1/2(a_0 + k_3),\ r_1 = 1/2(a_1 - k_2),\ r_2 = 1/2(a_2 + k_1),\ r_3 = 1/2(a_3 - k_0),\\ s_0 = 1/2(a_0 - k_3),\ s_1 = 1/2(a_1 + k_2),\ s_2 = 1/2(a_2 - k_1),\ s_3 = 1/2(a_3 + k_0).\end{gathered} \tag{120}$$

Тогда 2-норма в изотропном базисе равна:

$$N_2(\mathbf{a}) = (\mathbf{a}, \mathbf{a}) = r_0s_0 + r_1s_1 + r_2s_2 + r_3s_3 + \mathbf{i}_0(r_0s_3 - r_3s_0 + r_2s_1 - r_1s_2) \tag{121}$$

Отсюда получается 4-норма бикватернионов в изотропном базисе:

$$N_4(\mathbf{a}) = (r_0s_0 + r_1s_1 + r_2s_2 + r_3s_3)^2 + (r_0s_3 - r_1s_2 + r_2s_1 - r_3s_0)^2. \tag{122}$$

Норма и скалярное произведение дикватернионов в изотропном базисе

Для дикватернионов ситуация с изотропным базисом несколько хитрее, но результат проще. Как легко видеть из таблицы 5, на квадратичном уровне двойная норма обратиться в нуль не может. Однако, ситуация меняется на уровне нормы 4 степени, которую можно занулить очевидным образом. Опять же взяв два идемпотента, выберем 4-изотропный базис в виде:

$$\begin{gathered}\mathbf{u}_0 = 1 + \mathbf{i}_0,\quad \mathbf{u}_1 = \mathbf{q}_1(1 + \mathbf{i}_0),\quad \mathbf{u}_2 = \mathbf{q}_2(1 + \mathbf{i}_0),\quad \mathbf{u}_3 = \mathbf{q}_3(1 + \mathbf{i}_0),\\ \mathbf{v}_0 = 1 - \mathbf{i}_0,\quad \mathbf{v}_1 = \mathbf{q}_1(1 - \mathbf{i}_0),\quad \mathbf{v}_2 = \mathbf{q}_2(1 - \mathbf{i}_0),\quad \mathbf{v}_3 = \mathbf{q}_3(1 - \mathbf{i}_0),\end{gathered} \tag{123}$$

или, в явном виде,

$$\begin{gathered}\mathbf{u}_0 = 1 + \mathbf{i}_0,\quad \mathbf{u}_1 = \mathbf{q}_1 + \mathbf{i}_1,\quad \mathbf{u}_2 = \mathbf{q}_2 + \mathbf{i}_2,\quad \mathbf{u}_3 = \mathbf{q}_3 + \mathbf{i}_3,\\ \mathbf{v}_0 = 1 - \mathbf{i}_0,\quad \mathbf{v}_1 = \mathbf{q}_1 - \mathbf{i}_1,\quad \mathbf{v}_2 = \mathbf{q}_2 - \mathbf{i}_2,\quad \mathbf{v}_3 = \mathbf{q}_3 - \mathbf{i}_3.\end{gathered} \tag{124}$$

Таблица умножения алгебры дикватернионов в изотропном базисе:

$\times$	$\mathbf{u}_0$	$\mathbf{u}_1$	$\mathbf{u}_2$	$\mathbf{u}_3$	$\mathbf{v}_0$	$\mathbf{v}_1$	$\mathbf{v}_2$	$\mathbf{v}_3$
$\mathbf{u}_0$	$\mathbf{u}_0$	$\mathbf{u}_1$	$\mathbf{u}_2$	$\mathbf{u}_3$	0	0	0	0
$\mathbf{u}_1$	$\mathbf{u}_1$	$-\mathbf{u}_0$	$\mathbf{u}_3$	$-\mathbf{u}_2$	0	0	0	0
$\mathbf{u}_2$	$\mathbf{u}_2$	$-\mathbf{u}_3$	$-\mathbf{u}_0$	$\mathbf{u}_1$	0	0	0	0
$\mathbf{u}_3$	$\mathbf{u}_1$	$\mathbf{u}_2$	$-\mathbf{u}_1$	$-\mathbf{u}_0$	0	0	0	0
$\mathbf{v}_0$	0	0	0	0	$\mathbf{v}_0$	$\mathbf{v}_1$	$\mathbf{v}_2$	$\mathbf{v}_3$
$\mathbf{v}_1$	0	0	0	0	$\mathbf{v}_1$	$-\mathbf{v}_0$	$\mathbf{v}_3$	$-\mathbf{v}_2$
$\mathbf{v}_2$	0	0	0	0	$\mathbf{v}_2$	$-\mathbf{v}_3$	$-\mathbf{v}_0$	$\mathbf{v}_1$
$\mathbf{v}_3$	0	0	0	0	$\mathbf{v}_3$	$\mathbf{v}_2$	$-\mathbf{v}_1$	$-\mathbf{v}_0$

. (*Tab.* 8)

Наборы векторов $\mathbf{u}_k$ и $\mathbf{v}_k$ образуют двусторонние идеалы в алгебре дикватернионов, которая разлагается в их прямую сумму. Иначе говоря, алгебра дикватернионов является не простой, но лишь полупростой.

Поэтому скалярное произведение дикватернионов в изотропном базисе устроено очень просто:

$$(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_k) = \delta_{ik}\mathbf{u}_0, \quad (\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_k) = \delta_{ik}\mathbf{v}_0, \quad (\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_k) = 0, \tag{125}$$

Записав число $\mathbf{a}$ в изотропном базисе:

$$\begin{gathered}\mathbf{a} = a_0 + a_1\mathbf{q}_1 + a_2\mathbf{q}_2 + a_3\mathbf{q}_3 + k_0\mathbf{i}_0 + k_1\mathbf{i}_1 + k_2\mathbf{i}_2 + k_3\mathbf{i}_3,\\ \mathbf{a} = r_0\mathbf{u}_0 + r_1\mathbf{u}_1 + r_2\mathbf{u}_2 + r_3\mathbf{u}_3 + s_0\mathbf{v}_0 + s_1\mathbf{v}_1 + s_2\mathbf{v}_2 + s_3\mathbf{v}_3,\end{gathered} \tag{126}$$

где вещественные числа r_k, s_k:

$$\begin{gathered}r_0 = 1/2(a_0 + k_0),\ r_1 = 1/2(a_1 + k_1),\ r_2 = 1/2(a_2 + k_2),\ r_3 = 1/2(a_3 + k_3),\\ s_0 = 1/2(a_0 - k_0),\ s_1 = 1/2(a_1 - k_1),\ s_2 = 1/2(a_2 - k_2),\ s_3 = 1/2(a_3 - k_3).\end{gathered} \tag{127}$$

получим вид 2-нормы в изотропном базисе:

$$N_2(\mathbf{a}) = (\mathbf{a}, \mathbf{a}) = (1 + \mathbf{i}_0)(r_0^2 + r_1^2 + r_2^2 + r_3^2) + (1 - \mathbf{i}_0)(s_0^2 + s_1^2 + s_2^2 + s_3^2) \tag{128}$$

Поскольку для двойных чисел $(1 + \mathbf{i}_0)(1 - \mathbf{i}_0) = 0$, то

$$\big(\mathbf{r}(1 + \mathbf{i}_0) + \mathbf{s}(1 - \mathbf{i}_0)\big)\big(\mathbf{r}(1 - \mathbf{i}_0) + \mathbf{s}(1 + \mathbf{i}_0)\big) = 2\mathbf{rs}.$$

Поэтому 4-норма дикватернионов в изотропном базисе распадается на произведение двух 2-норм

$$N_4(\mathbf{a}) = N_2(\mathbf{a})N_2(\mathbf{a})^* = (r_0^2 + r_1^2 + r_2^2 + r_3^2)(s_0^2 + s_1^2 + s_2^2 + s_3^2). \tag{129}$$

Выводы

Метод изучения алгебры на основе анализа допускаемых ею сопряжений позволяет не только получить простым образом уже известные результаты, но и некоторые интересные новые. В частности, упрощается работа с формами степени выше квадратичной.

Однако, поскольку уже 2-норма для алгебр бикватернионов и биоктав является мультипликативной и поскольку 4-норма однозначно выражается через нее, неясно, создает ли переход от комплексной (или двойной) 2-нормы к вещественной 4-норме какие-либо новые возможности. Точно так же неясно, дадут ли что-то принципиально новое 4-скалярное и 4-векторное произведения, поскольку и они выражаются через свои прототипы 2 степени. В любом случае, представляются интересными попытки придать этим квадраобъектам какой-либо геометрический и физический смысл.

Благодарности

Автору приятно выразить свою признательность Г. И. Гарасько, Д. Г. Павлову, проф. В. И. Санюку и А. В. Чалыку за ценное обсуждение.

Литература

[1] А. П. Ефремов. *Кватернионы: алгебра, геометрия и физические теории*, Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **1**, 2004, см. также arXiv:math-ph/0501055.
[2] В. В. Сильвестров. *Системы чисел*, Соросовский образовательный журнал. № 8, 1998, 121–127.
[3] И. Л. Кантор и А. С. Солодовников. *Гиперкомплексные числа*, Наука, М. 1973.
[4] John C. Baez. *The Octonions*. ArXiv: math-RA/0105155
[5] R. D. Schafer. *On forms of degree n permitting composition*, J. Math. Mech. **12** (1963), 777–792. В русском переводе: Шафер Р. Д., *О формах степени n, допускающих композицию,* Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **1**, 2004, 140–154.
[6] R. D. Schafer. *Forms permitting composition*, Advances in Mathematics **4**, 111–148 (1970).
[7] R. D. Schafer. *An introduction to nonassociative algebras*, Academic Press, New York, 1 изд. 1967, 2 изд. 1991.
[8] K. McCrimmon. *Generically algebraic algebras*, Trans. Amer. math. Soc. **127** (1967), 527–551.
[9] Д. Г. Павлов. *Обобщение аксиом скалярного произведения*, Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **1**, 2004.
[10] D. G. Pavlov. *Hypercomplex Numbers, Associated Metric Spaces, and Extension of Relativistic Hyperboloid*, arXiv:gr-qc/0206004.
[11] Б. А. Розенфельд: *Многомерные пространства*, Наука, М. 1966.
[12] Б. А. Розенфельд, М. П. Замаховский: *Геометрия групп Ли*, МЦНМО, М. 2003.
[13] "Общая алгебра", том 1. Справочная математическая библиотека. М., "Наука", Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990.

On norms of biquaternions and their algebras with central conjugation

A. A. Eliovich

eliovich@mail.ru

In the framework of the algebras of biquaternions and bioctaves, is introduced the notion of central conjugation. All the studied algebras are algebras with central conjugation. Using the developed method which analyzes the admissible conjugations, new results are obtained. It is shown that the algebras with central conjugation are mono-associative and mono-composite, that they admit a multiplicative norm of degree two (which is generally, not real) and, as consequence, that they (in particular the biquaternions and the bioctaves) admit a multiplicative norm of degree higher than two, which admits several equivalent representations. The quadri-scalar and quadri-vector products are introduced. For the algebras of biquaternions and diquaternions and bioctaves several results are formulated in terms of their isotropic bases. The developed method can prove to be useful in the applications of the algebras of biquaterninos and bioctaves in Geometry and Physics.

Key-words: algebra of biquaternions, algebra of bi-octaves, central conjugation, norm.
MSC: 20G20.

О НЕКОТОРЫХ ДИСТРИБУТИВНЫХ УНИВЕРСАЛЬНЫХ АЛГЕБРАХ

Соловей Л. Г.

lgsolovey@gmail.com

Рассматриваются множества, не обязательно являющиеся кольцами, но в определенном смысле близкие к ним. Эти множества, названные гиперкольцами, состоят из нескольких аддитивных групп, пересекающихся только в нуле, и в то же время являются мультипликативными группоидами (или группами, исключая нуль). Выполняются дистрибутивные законы.

Кольца (и, в частности. тела или поля) представляют собой частный случай рассматриваемых множеств. Приводятся примеры, свидетельствующие о распространенности рассматриваемых множеств. Так, представление о том, что действительные физические величины "укладываются" в кольцо, неверно, так как они являются подмножеством гиперкольца.

Действительные гиперкольца с единицей (не сводящиеся к кольцам), аддитивные группы которых являются векторными пространствами, можно рассматривать как обобщенные гиперкомплексные системы, если в эти системы включить действительные бинарные (со сложением и умножением) дистрибутивные алгебраические структуры с единицей, где количество входящих в них векторных пространств больше единицы и конечно.

Примером гиперколец, наводящим на мысль о целесообразности их изучения, могут служить матрицы второго порядка, подобные ортогональным или унитарным, но нормированные не на единицу, а на произвольное неотрицательное число. Комплексные числа и кватернионы могут быть представлены такими матрицами, являясь их подмножествами.

Ключевые слова: гиперкольца, гиперкомплексные системы, векторные пространства, группоид, матрицы.

§1. Гипертело (гиперполе, гиперкольцо) k-го порядка по аддитивным группам

В алгебре наряду с телами, полями, кольцами существуют и объекты более общего типа – универсальные алгебры [1]. В статье рассматривается один класс универсальных алгебр, включающий тела, поля и кольца.

Назовем *гипертелом* (соответственно, *гиперкольцом*) k-го порядка по аддитивным группам множество M, которое обладает следующими свойствами:

1) составляет k ненулевых аддитивных групп, единственной точкой пересечения которых является нуль;

2) составляет, кроме нуля, мультипликативную группу или лупу [1] (соответственно, мультипликативный группоид [1], включая нуль);

3) среди произведений элементов a_i, a_k из фиксированных аддитивных групп A_i и A_k есть отличные от нуля для любых i и k;

4) два элемента из каких-либо двух (возможно, и совпадающих) аддитивных групп, будучи умножены друг на друга, дают элемент из фиксированной аддитивной группы, определяемой только аддитивными группами, к которым принадлежат сомножители, и, возможно. порядком расположения этих сомножителей; следовательно, аддитивные группы A_i и A_k суть элементы группоида, причем

$$A_iA_k = A_l$$

при фиксированных i и k l также фиксирован; назовем этот группоид *фактор-группоидом* множества M по аддитивным группам;

5) при этом становятся возможными левый и правый дистрибутивные законы, которые и выполняются.

Гипертело k-го порядка по аддитивным группам с коммутативным умножением назовем гиперполем k-го порядка по аддитивным группам. Гиперкольца, аддитивные группы которых являются n-мерными векторными пространствами над полем P [2], причем n одинаково для всех аддитивных групп, назовем *гипералгебрами k-го порядка n-го ранга* над полем P при выполнении соотношений:

$$(\alpha a) \cdot b = a \cdot (\alpha b) = \alpha(a \cdot b),$$

где α – элемент поля P, а a, b – элементы гиперкольца. Такие же гипералгебры, элементы которых (кроме нуля) составляют мультипликативную группу или лупу, назовем *гипералгебрами k-го порядка n-го ранга с делением* над полем P. Обычные тела (поля, кольца) являются, таким образом. гипертелами (гиперполями, гиперкольцами) первого порядка по всему множеству M, являющемуся в данном случае единственной аддитивной группой.

Среди аддитивных групп гипертела может быть не более одного тела (поля), так как единица, согласно пункту 1, может принадлежать не более, чем одной аддитивной группе. Если рассматриваемое множество является гипертелом или гиперполем, то аддитивная группа с единицей сама является телом или полем. Действительно, произведение единицы e на элемент из этой аддитивной группы представляет собой тот же элемент и принадлежит, следовательно, той же аддитивной группе. Но тогда, согласно пункту 4, произведение любых двух элементов этой аддитивной группы есть элемент. принадлежащий той же аддитивной группе. Далее, любому элементу a рассматриваемой аддитивной группы (кроме нуля) соответствует обратный элемент, принадлежащий той же аддитивной группе. В самом деле, если бы обратный элемент a^{-1} принадлежал другой аддитивной группе, то, согласно пункту 4, $a^{-1}a$ должно было бы принадлежать аддитивной группе, содержащей a^{-1}; но тогда $a^{-1}a$ не могло бы равняться e. Таким образом, аддитивная группа, содержащая единицу, является также (кроме нуля) мультипликативной группой или лупой и, следовательно, мультипликативной группой или лупой тела или поля[1]. Рассматриваемая аддитивная группа (кроме нуля) в случае ассоциативного гипертела (в частности, гиперполя), будучи мультипликативной подгруппой всей мультипликативной группы, является ее нормальным делителем [1,3]. Действительно, для любого элемента b множества M, кроме нуля, выполняется соотношение:

$$b^{-1}eb = e.$$

Следовательно, согласно пункту 4, если $h_1 \neq 0$ принадлежит аддитивной группе с единицей, то

$$b^{-1}h_1b = h_2,$$

где h_2 также принадлежит этой аддитивной группе, что и требовалось доказать. Любая аддитивная группа ассоциативного гипертела (гиперполя), кроме нуля, является смежным классом по нормальному делителю. В самом деле, элемент $a \neq 0$ какой-либо аддитивной группы A_1 удовлетворяет соотношению $ae = a$; поэтому, согласно пункту

---

[1] Аддитивная группа с единицей ассоциативной гипералгебры с делением конечного ранга над полем действительных чисел, являющаяся ассоциативной алгеброй конечного ранга с делением над полем действительных чисел, согласно теореме Фробениуса изоморфна либо действительным числам, либо комплексным числам, либо кватернионам [1].

4, $ah_1 = b$, где h_1 – любой элемент нормального делителя H, а b – элемент той же аддитивной группы, что и a. Это означает, что весь левый смежный класс, соответствующий элементу a, принадлежит рассматриваемой аддитивной группе A_1. Возьмем теперь произвольный элемент $a' \neq a$, $a' \in A_1$, причем $a' \neq 0$. Для a', как и для a, справедливо соотношение $a'H \in A_1$. Если h_i – произвольный элемент H, то

$$a'h_i = aa^{-1}a'h_i.$$

Но

$$a^{-1}a = e \in H.$$

Следовательно, согласно пункту 4, $a^{-1}a' \in H$; пусть $a^{-1}a' = h_3$. Тогда $a'h_i = ah_3h_i = ah_4$, где $h_4 = h_3h_i \in H$, т. е. a' принадлежит тому же классу смежности, что и a, что и требовалось доказать.

Напомним теперь, что правые смежные классы по нормальному делителю совпадают с левыми [1, 3]. Все аддитивные группы ассоциативного гипертела (без нуля), следовательно, составляют фактор-группу его мультипликативной группы [1, 3] по аддитивной группе, содержащей единицу (без нуля).

Отметим еще некоторые свойства гиперколец (и, в частности, гипертел и гиперполей).

a) Так же, как и для колец [1], доказывается, что произведение (слева и справа) нуля на любой элемент гиперкольца равно нулю.

b) Мы видели, что аддитивные группы гиперкольца составляют мультипликативный группоид – его фактор-группоид по этим аддитивным группам. Легко также видеть, что аддитивные группы A_i сами являются единственными элементами аддитивных групп с законом сложения

$$A_i + A_i = A_i,$$

причем A_i является как нулем 0_i такой аддитивной группы, так и, следовательно, ее противоположным элементом, но не общим нулем всех таких аддитивных групп.

Наконец, отметим, что гипертела (гиперполя, гиперкольца) по аддитивным группам вообще говоря не являются телами (полями, кольцами), но могут и быть ими. Гипертела (гиперполя, гиперкольца) по аддитивным группам могут быть как конечного, так и бесконечного порядка.

§2. Ненормированные на единицу унитарные и ортогональные матрицы

Прежде чем перейти к примерам, рассмотрим необходимые для дальнейшего изложения ненормированные на единицу унитарные и ортогональные матрицы. Как известно, комплексная матрица n-го порядка A называется унитарной, если

$$AA^{+} = A^{+}A = 1, \tag{1}$$

где A^{+} – матрица, эрмитово-сопряженная матрице A. Матрица A называется ортогональной, если

$$A\widetilde{A} = \widetilde{A}A = 1, \tag{2}$$

где $\widetilde{A}$ – матрица, транспонированная матрице A (в вещественной области унитарная матрица ортогональна [4]).

Рассмотрим теперь комплексную матрицу A n-го порядка, удовлетворяющую условию

$$AA^{+} = \lambda I, \tag{3}$$

где λ– некоторое число, а I – единичная матрица. Число λ вещественно и неотрицательно. В самом деле, для любого индекса i

$$\lambda = (AA^+)_{ii} = \sum_k A_{ik}(A^+)_{ki} = \sum_k A_{ik}A^*_{ik} = \sum_k |A_{ik}|^2 \geq 0. \tag{4}$$

(знак равенства имеет место при $A = 0$).

Отметим также, что при выполнении условия (3)

$$AA^+ = A^+A = \lambda I. \tag{5}$$

Действительно, при $\lambda \neq 0$

$$A(A^+/\lambda) = I, \tag{6}$$

т. е. $A^+/\lambda = A^{-1}$ – матрица, обратная A. Но для обратных матриц, как известно,

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I, \qquad \text{т. е.} \quad (A^+/\lambda)A = A(A^+/\lambda) = I.$$

Следовательно, верно (5). Для нулевой матрицы соотношение (5) также выполняется (при $\lambda = 0$).

Матрицу A, удовлетворяющую условию (3) и, как следствие, условиям (4), (5), назовем ненормированной на единицу унитарной, или *квазиунитарной*. Если A – вещественная матрица n-го порядка, то точно так же, наряду с ортогональными матрицами, удовлетворяющими условиям (2), можно рассматривать матрицы, удовлетворяющие условию

$$A\widetilde{A} = \lambda I. \tag{7}$$

Матрицу, удовлетворяющую условию (7), назовем ненормированной на единицу ортогональной, или *квазиортогональной*. Очевидно, что λ – вещественное число. Оно неотрицательно, что следует из того, что квазиортогональные матрицы в вещественной области квазиунитарны. Как и для квазиунитарных матриц, доказывается соотношение

$$\widetilde{A}A = A\widetilde{A} = \lambda I. \tag{8}$$

Легко показать, что вещественные матрицы второго и четвертого порядка, изоморфные соответственно комплексным числам и кватернионам, являются квазиортогональными, а комплексная матрица второго порядка, также изоморфная кватернионам, является квазиунитарной.

Покажем теперь. что квазиунитарные матрицы n-го порядка (за исключением нуля) составляют мультипликативную группу.

В самом деле, единичная матрица является квазиунитарной и представляет собой единицу системы. Далее, как мы видели, каждой квазиунитарной матрице A (за исключением нулевой) соответствует квазиунитарная обратная матрица

$$A^{-1} = A^+/\lambda.$$

Рассмотрим теперь произведение AB квазиунитарных матриц A и B. Имеем:

$$AB \cdot (AB)^+ = ABB^+A^+ = \lambda_B(AA^+) = \lambda_B\lambda_A, \qquad \text{где} \quad \lambda_A = AA^+,\ \lambda_B = BB^+. \tag{9}$$

Следовательно, AB – также квазиунитарная матрица. Таким образом, все условия, превращающие квазиунитарные матрицы n-го порядка, кроме нуля, в группу по умножению, выполнены. Назовем произведение

$$AA^+ = \lambda_A = |A|^2 \tag{10}$$

квадратом модуля квазиунитарной матрицы, а, следовательно,

$$|A| = \sqrt{AA^+} \tag{11}$$

– ее *модулем* или *абсолютной величиной.*

Из формулы (10) следует, что для детерминанта A имеем:

$$|det\,A|^2 = |A|^{2n},$$

откуда

$$|det\,A| = |A|^n \tag{10$'$}$$

(n – порядок матрицы).

В вещественной области квазиортогональные матрицы n-го порядка, за исключением нуля, точно так же составляют мультипликативную группу. Модулем, или абсолютной величиной, квазиортогональной матрицы является величина

$$|A| = \sqrt{A\widetilde{A}}. \tag{12}$$

Формула (10$'$) верна, разумеется, и для вещественной квазиортогональной матрицы n-го порядка. Согласно (9) – (12) модуль произведения квазиунитарных (квазиортогональных) матриц равен произведению модулей сомножителей.

Группу (по умножению) квазиунитарных матриц n-го порядка (кроме нуля) обозначим символом $QU(n)$, а группу (по умножению) квазиортогональных матриц n-го порядка (кроме нуля) – символом $QO(n)$. Группу квазиунитарных матриц n-го порядка с положительным детерминантом обозначим через $QSU(n)$, а такую же группу квазиортогональных матриц – через $QO^+(n)$.

Подчеркнем, что совокупность квазиортогональных и квазиунитарных матриц n-го порядка содержит нулевую матрицу, что не имеет места для ортогональных и унитарных матриц.

§3. Примеры гипертел, гиперполей и гиперколец

1) Квазиортогональные вещественные матрицы второго порядка, образующие (кроме нуля) мультипликативную группу $QO(2)$.

Рассмотрим вещественную матрицу второго порядка

$$A = \begin{pmatrix} x & y \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Транспонируя A, получим:

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} x & a_{21} \\ y & a_{22} \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Нас интересуют квазиортогональные матрицы. Условия квазиортогональности (7) дают:

$$(A\widetilde{A})_{11} = x^2 + y^2, \tag{15}$$

$$(A\widetilde{A})_{12} = xa_{21} + ya_{22} = 0, \tag{16}$$

$$(A\widetilde{A})_{21} = a_{21}x + a_{22}y = 0, \tag{16$'$}$$

$$(A\widetilde{A})_{22} = (A\widetilde{A})_{11} = a_{21}^2 + a_{22}^2 = x^2 + y^2. \tag{17}$$

Поскольку уравнения (16) и ($16'$) совпадают, имеем систему уравнений (16), (17) относительно a_{21}, a_{22}:

$$xa_{21} + ya_{22} = 0, \tag{16}$$

$$a_{21}^2 + a_{22}^2 = x^2 + y^2. \tag{17}$$

Уравнение (16) дает

$$a_{21} = -\frac{y}{x}\, a_{22}. \tag{16''}$$

Подставляя ($16''$) в (17), получим:

$$\frac{(x^2 + y^2)a_{22}^2}{x^2} = x^2 + y^2. \tag{17'}$$

При $x \neq 0$ имеем:

$$a_{22}^2 = x^2$$

откуда

$$a_{22} = \pm x. \tag{17''}$$

Подставляя ($17''$) в ($16''$), получим:

$$a_{21} = \mp y. \tag{18}$$

Следовательно, имеем два решения:

$$A_1 = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}, \tag{19}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} x' & y' \\ y' & -x' \end{pmatrix}. \tag{20}$$

При $x = 0, y \neq 0$ уравнения (16) и (17) дают:

$$a_{22} = 0, \tag{21}$$

$$a_{21} = \mp y. \tag{22}$$

Для матрицы A имеем:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & y \\ -y & 0 \end{pmatrix}, \tag{19'}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & y' \\ y' & 0 \end{pmatrix}. \tag{20'}$$

Матрицы ($19'$) и ($20'$) являются частными случаями матриц A_1 и A_2 ((19) и (20)). Наконец, при $x = y = 0$ имеем, согласно (17):

$$a_{21}^2 + a_{22}^2 = 0, \tag{23}$$

откуда

$$a_{21} = a_{22} = 0, \tag{24}$$

и мы получим нулевую матрицу

$$A_1 = A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{25}$$

Но матрицы (25) также являются частными случаями матриц A_1 и A_2 ((19) и (20)).

Таким образом, квазиортогональные матрицы второго порядка в общем случае сводятся к матрицам A_1 и A_2, определяемым формулами (19) и (20). Матрицы A_1 и A_2 определяются независимыми переменными $x, y; x', y'$.

Как известно [2], матрицы A_1, определяемые формулой (19), изоморфны комплексным числам, причем модуль матрицы равен модулю комплексного числа. Легко видеть, что матрицы A_1 (комплексные числа) образуют (кроме нуля) мультипликативную группу $QO^+(2)$.

Как известно, придавая x и y различные значения и складывая матрицы типа A_1 (комплексные числа), получим:

$$A_1|_{x_1,\,y_1} + A_1|_{x_2,\,y_2} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 & y_1 + y_2 \\ -y_1 - y_2 & x_1 + x_2 \end{pmatrix}, \tag{26}$$

т. е. снова матрицы типа A_1 – квазиортогональные матрицы (комплексные числа). Точно так же сложение матриц типа A_2 дает снова матрицы типа A_2. Сумма же $A_1 + A_2$ матриц A_1 и A_2 есть, вообще говоря, матрица, не принадлежащая ни к одному из указанных типов, т. е. не является квазиортогональной матрицей. Совокупности матриц A_1 и A_2 нигде, кроме нулевой матрицы, не пересекаются и, следовательно, являются двумя аддитивными группами, пересекающимися только в нуле.

Произведение двух матриц типа A_1 (комплексных чисел), как известно, есть снова матрица типа A_1 (т. е. комплексное число).

Далее, имеем:

$$A_3 = (A_2|_{x=x_1',\,y=y_1'}) \cdot (A_2|_{x=x_2',\,y=y_2'}) = \begin{pmatrix} x_1' & y_1' \\ y_1' & -x_1' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2' & y_2' \\ y_2' & -x_2' \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} x_1'x_2' + y_1'y_2' & x_1'y_2' - y_1'x_2' \\ y_1'x_2' - x_1'y_2' & y_1'y_2' + x_1'x_2' \end{pmatrix}. \tag{27}$$

Мы видим, что A_3 – матрица типа A_1, т. е. комплексное число, хотя и зависит от порядка сомножителей.

Наконец,

$$A_4 = A_1 \cdot A_2 = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' & y' \\ y' & -x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xx' + yy' & xy' - yx' \\ -yx' + xy' & -yy' - xx' \end{pmatrix}, \tag{28}$$

$$A_5 = A_2 \cdot A_1 = \begin{pmatrix} x' & y' \\ y' & -x' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'x - y'y & x'y + y'x \\ y'x + x'y & y'y - x'x \end{pmatrix}. \tag{29}$$

Таким образом, $A_1A_2 \neq A_2A_1$, но как $A_4 = A_1A_2$, так и $A_5 = A_2A_1$ являются матрицами типа A_2. Мы убедились в том, что:

a) квазиортогональные матрицы второго порядка не являются ни телом, ни даже кольцом, но представляют собой гипертело второго порядка;

b) матрицы типа A_1 (кроме нулевой матрицы) представляют собой нормальный делитель всей мультипликативной группы, причем аддитивная группа A_2 (без нуля) – класс смежности по нормальному делителю A_1;

c) поскольку, как легко видеть, аддитивные группы A_1 и A_2 – векторные двухмерные пространства над полем действительных чисел, то квазиортогональные матрицы второго порядка представляют собой гиперандебру второго порядка второго ранга с делением по аддитивным группам над полем действительных чисел.

2) Квазиунитарные матрицы второго порядка, образующие (кроме нуля) мультипликативную группу $QU(2)$.

а) Пусть теперь A – комплексная матрица второго порядка. Как и в предыдущем примере, положим

$$A = \begin{pmatrix} x & y \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Определим матричные элементы a_{21} и a_{22} для квазиунитарной матрицы. Для A^+ получим:

$$A^+ = \begin{pmatrix} x^* & a_{21^*} \\ y^* & a_{22}^* \end{pmatrix}. \tag{30}$$

Выпишем условия квазиунитарности:

$$(AA^+)_{11} = |x|^2 + |y|^2, \tag{31}$$

$$(AA^+)_{12} = xa_{21}^* + ya_{22}^* = 0, \tag{32}$$

$$(AA^+)_{21} = a_{21}x^* + a_{22}y^* = 0, \tag{33}$$

$$(AA^+)_{22} = |a_{21}|^2 + |a_{22}|^2 = |x|^2 + |y|^2. \tag{34}$$

Решая систему уравнений(33), (34), получим:

$$a_{21} = -\frac{a_{22}y^*}{x^*}, \tag{35}$$

$$|a_{22}|^2 \frac{(|y|^2 + |x|^2)}{|x|^2} = |x|^2 + |y|^2. \tag{36}$$

При $x \neq 0$ формула (36) дает:

$$|a_{22}| = |x|. \tag{37}$$

Не нарушая общности, запишем:

$$a_{22} = x^* e^{i\varphi}. \tag{38}$$

Подставляя (38) в (35), имеем:

$$a_{21} = -y^* e^{i\varphi}. \tag{39}$$

Следовательно,

$$A = \begin{pmatrix} x & y \\ -y^* e^{i\varphi} & x^* e^{i\varphi} \end{pmatrix}. \tag{40}$$

При $x = 0$, $y \neq 0$ получим, согласно (33), (34):

$$a_{22} = 0, \tag{41}$$

$$|a_{21}| = |y|, \tag{42}$$

откуда, не нарушая общности,

$$a_{21} = -y^* e^{i\varphi}. \tag{39$'$}$$

При $x = 0$, $y = 0$ получим, согласно (34):

$$a_{21} = a_{22} = 0. \tag{43}$$

Таким образом, общий вид квазиунитарной матрицы дается формулой (40).

Назовем φ в формуле (40) угловым параметром квазиунитарной матрицы второго порядка. Легко видеть, что все матрицы A с одним и тем же угловым параметром φ составляют аддитивную группу.

Рассмотрим теперь две квазиунитарные матрицы с угловыми параметрами φ_1 и φ_2:

$$A_1 = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ -y_1^* e^{i\varphi_1} & x_1^* e^{i\varphi_1} \end{pmatrix}, \tag{44}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ -y_2^* e^{i\varphi_2} & x_2^* e^{i\varphi_2} \end{pmatrix}, \tag{45}$$

$$A_{12} = A_1 A_2 = \begin{pmatrix} x_{12} & y_{12} \\ -y_{12}^* e^{i\varphi_{12}} & x_{12}^* e^{i\varphi_{12}} \end{pmatrix}, \tag{46}$$

где

$$x_{12} = x_1 x_2 - y_1 y_2^* e^{i\varphi_2}, \tag{47}$$

$$y_{12} = x_1 y_2 + y_1 x_2^* e^{i\varphi_2}, \tag{48}$$

$$\varphi_{12} = \varphi_1 + \varphi_2 + 2k\pi \qquad (k \text{ – целое}). \tag{49}$$

Произведение A_{12}, как и должно быть, описывается формулой (46), однотипной с формулой (40), причем его угловой параметр (с точностью до $2k\pi$) равен сумме угловых параметров сомножителей. Легко видеть из формулы (40), что:

$$det\, A = |det\, A| e^{i\varphi}. \tag{40$'$}$$

В общем случае для матриц n-го порядка, очевидно, также выполняется равенство (40$'$), где φ – некоторый угол. Назовем φ в формуле (40$'$) угловым параметром квазиунитарной матрицы n-го порядка. Очевидно, что и в общем случае квазиунитарной матрицы n-го порядка выполняется соотношение (49).

При $\varphi = 0$ квазиунитарные матрицы n-го порядка (кроме нуля) образуют мультипликативную группу $QSU(n)$ – подгруппу группы $QU(n)$.

Матрицы

$$A_0 = \begin{pmatrix} x & y \\ -y^* & x^* \end{pmatrix} \tag{50}$$

с нулевым угловым параметром, как известно [4], изоморфны кватернионам. Они представляют собой (без нуля) нормальный делитель всей мультипликативной группы, поскольку содержат единичную матрицу.

Таким образом, из формул (44)–(50) следует, что квазиунитарные матрицы второго порядка представляют собой гипертело бесконечного порядка.

b) Рассмотрим теперь в качестве частного случая матрицы типа

$$A_{1,0} = A_1|_{\varphi=0} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ -y_1^* & x_1^* \end{pmatrix}, \tag{44$'$}$$

$$A_{2,0} = A_2|_{\varphi=\pi} = \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ y_2^* & -x_2^* \end{pmatrix}. \tag{45$'$}$$

Матрицы $A_{1,0}$ типа A_0 (см. (50)) и, следовательно, изоморфны кватернионам. Матрицы типа $A_{1,0}$ и $A_{2,0}$ представляют собой, согласно предыдущему, две аддитивные группы. Имеем:

$$A_{10,10'} = A_{1,0}A'_{1,0} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ -y_1^* & x_1^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 & y'_1 \\ -y_1'^* & x_1'^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1x'_1 - y_1y_1'^* & x_1y'_1 + y_1x_1'^* \\ -x_1^*y_1'^* - y_1^*x'_1 & x_1^*x_1'^* - y_1^*y'_1 \end{pmatrix} \tag{51}$$

– матрицы типа $A_{1,0}$;

$$A_{20,20'} = A_{2,0}A'_{2,0} = \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ y_2^* & -x_2^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_2 & y'_2 \\ y_2'^* & -x_2'^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2x'_2 + y_2y_2'^* & x_2y'_2 - x_2'^*y_2 \\ y_2^*x'_2 - x_2^*y_2'^* & y_2^*y'_2 + x_2^*x_2'^* \end{pmatrix} \tag{52}$$

– матрицы типа $A_{1,0}$;

$$A_{10,20} = A_{1,0}A_{2,0} = \begin{pmatrix} x_1x_2 + y_1y_2^* & x_1y_2 - y_1x_2^* \\ -y_1^*x_2 + x_1^*y_2^* & -y_1^*y_2 - x_1^*x_2^* \end{pmatrix} \tag{53}$$

– матрицы типа $A_{2,0}$;

$$A_{20,10} = A_{2,0}A_{1,0} = \begin{pmatrix} x_2x_1 - y_2y_1^* & x_2y_1 + y_2x_1^* \\ y_2^*x_1 + x_2^*y_1^* & y_2^*y_1 - x_1^*x_2^* \end{pmatrix} \tag{54}$$

– матрицы типа $A_{2,0}$; легко показать, что матрицы, обратные матрицам $A_{1,0}$ и $A_{2,0}$, также являются матрицами типа $A_{1,0}$ и $A_{2,0}$ соответственно. Матрицы $A_{1,0}$ и $A_{2,0}$ составляют, таким образом, гипертело второго порядка, причем матрицы $A_{1,0}$ (без нуля) – нормальный делитель мультипликативной группы.

3) Квазиунитарные матрицы второго порядка с кватернионными матричными элементами и измененными законами умножения.

Рассмотрим произведение матриц n-го порядка $A_{(1)}$ и $A_{(2)}$ с измененным законом умножения:

$$D_{ik} = (A_{(1)} \circ A_{(2)})_{ik} = \sum_l A_{(1)il}P_{il,\,lk}A_{(2)lk}, \tag{55}$$

где $P_{il,\,lk}$ – оператор,

$$P_{il,\,lk} = \begin{cases} 1 \text{ для } A_{(1)il} \text{ и } A_{(2)lk}, \text{ которые не переставляются,} \\ p \text{ для } A_{(1)il} \text{ и } A_{(2)lk}, \text{ которые переставляются,} \end{cases} \tag{56}$$

т. е.

$$A_{(1)il}pA_{(2)lk} = A_{(2)lk}A_{(1)il}. \tag{57}$$

Нетрудно показать, что рассматриваемое изменение закона умножения матриц не нарушает дистрибутивных законов. Получим также условия, при которых выполняется правило сопряжения произведения матриц:

$$D^+ = (A_{(1)} \circ A_{(2)})^+ = A_{(2)}^+ \circ A_{(1)}^+, \quad (D = A_{(1)} \circ A_{(2)}). \tag{a}$$

Имеем:

$$D_{ik} = (A_{(1)} \circ A_{(2)})_{ik} = \sum_l A_{(1)il}P_{il,lk}A_{(2)lk}, \quad D_{ki} = \sum_l A_{(1)kl}P_{kl,li}A_{(2)li}.$$

Поскольку $(D^+)_{ik} = D^+_{ki}$, получим:

$$(D^+)_{ik} = ((A_{(1)} \circ A_{(2)})^+)_{ik} = \sum_l (A_{(2)li})^+ P_{kl,li} (A_{(1)kl})^+. \tag{58$'$}$$

С другой стороны,

$$((A^+_{(2)} \circ A_{(1)})^+)_{ik} = \sum_l (A^+_{(2)})_{il} P_{il,lk} (A^+_{(1)})_{lk} = \sum_l (A_{(2)li})^+ P_{il,lk} (A_{(1)kl})^+. \tag{58$''$}$$

Приравнивая правые части (58$'$) и (58$''$), получаем условия выполнения соотношения (a):

$$P_{il,lk} = P_{kl,li}. \tag{58}$$

Рассмотрим теперь матрицы второго порядка вида (40), но теперь x, y – кватернионы. Если потребовать, чтобы $-y^+e^{i\varphi}, x^+e^{i\varphi}$ также были кватернионами, то $e^{i\varphi}$ должно быть действительным числом, что возможно только при $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$. Таким образом, будем считать, что φ принимает только два значения, причем $e^{i\pi} = e^{-i\pi} = -1$. При этом $e^{i\varphi}$ перестановочно с кватернионами. Для A^+_φ имеем:

$$A^+_\varphi = \begin{pmatrix} x^+ & -ye^{-i\varphi} \\ y^+ & xe^{-i\varphi} \end{pmatrix}. \tag{59}$$

Далее,

$$A_\varphi A^+_\varphi = \begin{pmatrix} |x|^2 + |y|^2 & (-xy + yx)e^{-i\varphi} \\ (-y^+x^+ + x^+y^+)e^{i\varphi} & |y|^2 + |x|^2 \end{pmatrix}. \tag{60}$$

В силу некоммутативности x и y, а также x^+, y^+ недиагональные элементы матрицы $A_\varphi A^+_\varphi$ не обращаются в нуль, поэтому A_φ не квазиунитарна при обычном законе умножения матриц. Введем теперь операторы $P_{il,lk}$ в закон умножения матриц вида (40), подобрав их таким образом, чтобы матрицы A_φ стали квазиунитарными. Выпишем коэффициенты $P_{il,lk}$ в виде матрицы

$$P = \begin{pmatrix} P_{11,11} & P_{12,21} & P_{11,12} & P_{12,22} \\ P_{21,11} & P_{22,21} & P_{21,12} & P_{22,22} \end{pmatrix}. \tag{61}$$

Существует восемь значений матрицы P, при которых матрицы A квазиунитарны и составляют квазиунитарные группоид. Для этих вариантов матрицы P равны:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & p \\ 1 & p & p & p \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & p & 1 \\ p & 1 & p & p \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} p & 1 & 1 & p \\ 1 & p & p & 1 \end{pmatrix}, \quad P_4 = \begin{pmatrix} p & 1 & p & 1 \\ p & 1 & p & 1 \end{pmatrix},$$
$$P_5 = \begin{pmatrix} 1 & p & 1 & p \\ 1 & p & 1 & p \end{pmatrix}, \quad P_6 = \begin{pmatrix} 1 & p & p & 1 \\ p & 1 & 1 & p \end{pmatrix}, \quad P_7 = \begin{pmatrix} p & p & 1 & p \\ 1 & p & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_8 = \begin{pmatrix} p & p & p & 1 \\ p & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{62}$$

Во всех вариантах, как следует из формул, которые приведены в дополнении, квазиунитарные матрицы представляют собой гиперкольца. Эти гиперкольца, как можно показать, состоят из двух аддитивных векторных пространств, представляемых матрицами $A\big|_{\varphi=0}$ и $A\big|_{\varphi=\pi}$, и являются гипералгебрами второго порядка восьмого ранга над полем действительных чисел. Легко проверяется выполнение условия

$$(A_{\varphi 1} \circ A_{\varphi 2})^+ = A^+_{\varphi 2} A^+_{\varphi 1} \tag{63}$$

для всех вариантов. В шестом варианте матрицы $A\big|_{\varphi=0}$ представляют собой алгебру Кэли [1] (матрицы $A\big|_{\varphi=0}$, как известно и легко показать, альтернативны [1], однако этого нельзя сказать о всех матрицах второго порядка с кватернионными матричными элементами и законом умножения (55)). Матрицы A_φ в данном случае представляют собой гипералгебру второго порядка восьмого ранга над полем действительных чисел с делением. Нетрудно показать, что не только для алгебры Кэли, но и для всей гипералгебры матриц A_φ выполняется соотношение

$$|A_{\varphi 1} \circ A_{\varphi 2}| = |A_{\varphi 1}| \cdot |A_{\varphi 1}|. \tag{64}$$

В остальных семи вариантах $|A_{\varphi 1} \circ A_{\varphi 2}| \neq |A_{\varphi 1}| \cdot |A_{\varphi 1}|$.

4) а. Квазиортогональные вещественные матрицы третьего порядка вида

$$A_{00} = \begin{pmatrix} x & y & 0 \\ -y & x & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{x^2+y^2} \end{pmatrix} \quad (a), \qquad A_{10} = \begin{pmatrix} x' & y' & 0 \\ y' & -x' & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{x'^2+y'^2} \end{pmatrix} \quad (b), \tag{65}$$

$$A_{01} = \begin{pmatrix} x'' & y'' & 0 \\ -y'' & x'' & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{x''^2+y''^2} \end{pmatrix} \quad (a), \quad A_{11} = \begin{pmatrix} x''' & y''' & 0 \\ y''' & -x''' & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{x'''^2+y'''^2} \end{pmatrix} \quad (b). \tag{66}$$

Сами по себе матрицы (65) – (66) квазиортогональны, но квазиортогональность теряется, если складывать друг с другом эти матрицы даже одного типа по обычным правилам. Это положение может быть исправлено, если изменить правила сложения.

Для сокращения выкладок запишем матрицы (65) – (66) в компактном виде

$$A^l_{ik} = \begin{pmatrix} x_l & y_l & 0 \\ (-1)^{i+1} y_l & (-1)^i x_l & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^k \sqrt{x_l^2+y_l^2} \end{pmatrix}, \quad (i,k=0,1). \tag{67}$$

Определим теперь сумму двух матриц одного типа A^1_{ik} и A^2_{ik} следующим образом:

$$A^0_{ik} = A^1_{ik}(+)A^2_{ik} = \begin{pmatrix} x_1+x_2 & y_1+y_2 & 0 \\ (-1)^{i+1}(y_1+y_2) & (-1)^i(x_1+x_2) & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^k\sqrt{(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2} \end{pmatrix}. \tag{68}$$

Из формулы (68) видно, что определенный ею закон сложения является ассоциативным. Также очевидно, что определенная формулой (68) суммарная матрица остается квазиортогональной. Матрицам (65) – (66), как квазиортогональным, соответствуют обратные матрицы. При умножении матриц типа (65) – (66), или (67), получаются матрицы тех же типов со следующей таблицей умножения

$-$	A''_{00}	A''_{10}	A''_{01}	A''_{11}
A'_{00}	$\tilde{A}_{00}$	$\tilde{A}_{10}$	$\tilde{A}_{01}$	$\tilde{A}_{11}$
A'_{10}	$\tilde{A}_{10}{}'$	$\tilde{A}_{00}{}'$	$\tilde{A}_{11}{}'$	$\tilde{A}_{01}{}'$
A'_{01}	$\tilde{A}_{01}$	$\tilde{A}_{11}$	$\tilde{A}_{00}$	$\tilde{A}_{10}$
A'_{11}	$\tilde{A}_{11}{}'$	$\tilde{A}_{01}{}'$	$\tilde{A}_{10}{}'$	$\tilde{A}_{00}{}'$

Таблица № 1

(*Ремарка.* Первый множитель берется в первом столбце, второй – в верхней строке, произведение – на пересечении соответствующих строк и столбцов; например, $A'_{10}\cdot A''_{01} = \tilde{A}_{11}$ и т. д.)

Следовательно, матрицы типа (65) – (66), или (67) (кроме нуля) составляют группу, матрицы типа (65a) (кроме нуля) – нормальный делитель этой группы (как содержащие единичную матрицу); матрицы типа (65b) – (66b) (кроме нуля) – смежные классы по нормальному делителю. Они, как совокупности, вместе с нормальным делителем, но без нуля, являются (см. таблицу 1) элементами коммутативной факторгруппы [1,3]. Таблица 1 дает закон умножения факторгруппы – нормального делителя типа A_{00} и классов смежности типа A_{10}, A_{01} и A_{11}. Матрицы типа (67) представляют собой аддитивные группы согласно правилу сложения (68), поскольку сумма двух матриц одного типа – матрица того же типа; имеется 0 (нулевая матрица) и есть противоположная матрица

$$-A^l_{ik}(x,y) = A^l_{ik}(-x,-y.)$$

Покажем, что для матриц типа (67) с правилом сложения (68) выполняются законы дистрибутивности. Действительно,

$$A^1_{ik} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 0 \\ (-1)^{i+1}y_1 & (-1)^i x_1 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^k\sqrt{x_1^2+y_1^2} \end{pmatrix}, \tag{69}$$

$$A^2_{ik} = \begin{pmatrix} x_2 & y_2 & 0 \\ (-1)^{i+1}y_2 & (-1)^i x_2 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^k\sqrt{x_2^2+y_2^2} \end{pmatrix}, \tag{70}$$

$$A^1_{ik}(+)A^2_{ik} = \begin{pmatrix} x_1+x_2 & y_1+y_2 & 0 \\ (-1)^{i+1}(y_1+y_2) & (-1)^i(x_1+x_2) & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^k\sqrt{(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2} \end{pmatrix}. \tag{71}$$

$$A^3_{lm} = \begin{pmatrix} x_3 & y_3 & 0 \\ (-1)^{l+1}y_3 & (-1)^l x_3 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^m\sqrt{x_3^2+y_3^2} \end{pmatrix}, \tag{72}$$

$$\begin{gathered}\bigl(A^1_{ik}(+)A^2_{ik}\bigr)A^3_{lm} = \\ \begin{pmatrix} (x_1+x_2)x_3+(y_1+y_2)y_3(-1)^{l+1} & (x_1+x_2)y_3+(y_1+y_2)x_3(-1)^l & 0 \\ (-1)^{i+1}(y_1+y_2)x_3+(-1)^{i+l+1}(x_1+x_2)y_3 & (-1)^{i+1}(y_1+y_2)y_3+(x_1+x_2)x_3(-1)^{i+l} & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^{k+m}\sqrt{[(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2](x_3^2+y_3^2)} \end{pmatrix}.\end{gathered} \tag{73}$$

Далее,

$$\begin{gathered}A^r_{ik}A^3_{lm} = \\ \begin{pmatrix} (x_rx_3+y_ry_3(-1)^{l+1} & x_ry_3+y_rx_3(-1)^l & 0 \\ (-1)^{i+1}y_rx_3+(-1)^{i+l+1}y_3x_r & (-1)^{i+1}y_3y_r+(-1)^{i+l}x_rx_3 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^{k+m}\sqrt{(x_r^2+y_r^2)(x_3^2+y_3^2)} \end{pmatrix}.\end{gathered} \tag{74}$$

$(r = 1, 2)$. В результате несложных вычислений получим:

$$A^1_{ik}A^3_{lm}(+)A^2_{ik}A^3_{lm} =$$
$$\left(\begin{matrix} (x_1+x_2)x_3+(y_1+y_2)y_3(-1)^{l+1} & (x_1+x_2)y_3+(y_1+y_2)x_3(-1)^{l} \\ (x_1+x_2)y_3(-1)^{i+l+1}+(y_1+y_2)x_3(-1)^{i+1} & (x_1+x_2)x_3(-1)^{i+l}+(y_1+y_2)y_3(-1)^{i+1} \\ 0 & 0 \end{matrix}\right.$$
$$\left.\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ (-1)^{k+m}\sqrt{[(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2](x_3^2+y_3^2)} \end{matrix}\right). \quad (75)$$

Из (73) и (75) следует:

$$A^1_{ik}A^3_{lm}(+)A^2_{ik}A^3_{lm} = \big(A^1_{ik}(+)A^2_{ik}\big)A^3_{lm}, \quad (76)$$

т. е. правое правило дистрибутивности. Левое правило дистрибутивности доказывается аналогично.

Мы видим, что квазиортогональные матрицы A_{ik} при фиксированных i, k являются аддитивными группами, а их совокупность (кроме нуля) представляет собой мультипликативную группу. При этом, матрицы A_{00}, как легко показать, изоморфны комплексным числам, если при суммировании использовать знак $(+)$, но не знак $+$. Матрицы A_{ik}, взятые в отдельности при фиксированных i, k, как легко показать, представляют собой векторные двухмерные пространства над полем действительных чисел. Таким образом, совокупность матриц третьего порядка A_{ik} представляет собой гипер态алгебру четвертого порядка второго ранга с делением над полем действительных чисел, если сложение производить согласно формуле (68).

b. Легко показать с помощью таблицы 1, что каждая из совокупностей матриц $A_{00}, A_{10}; A_{00}, A_{01}; A_{00}, A_{11}$ представляет собой гиперподалгебру второго порядка второго ранга с делением. (Таблицы 2,3,4 – таблицы умножения для этих совокупностей, причем факторгруппы мультипликативных групп всех трех гиперподалгебр изоморфны.)

$-$	A''_{00}	A''_{10}
A'_{00}	$\tilde{A}_{00}$	$\tilde{A}_{10}$
A'_{10}	$\tilde{A}_{10}{}'$	$\tilde{A}_{00}{}'$

$-$	A''_{00}	A''_{01}
A'_{00}	$\tilde{A}_{00}$	$\tilde{A}_{01}$
A'_{01}	$\tilde{A}_{01}$	$\tilde{A}_{00}$

$-$	A''_{00}	A''_{11}
A'_{00}	$\tilde{A}_{00}$	$\tilde{A}_{11}$
A'_{11}	$\tilde{A}_{11}{}'$	$\tilde{A}_{00}{}'$

Таблицы 2 – 4

Отметим в связи со сказанным изоморфизм всех конечных групп заданного простого порядка [1].

Если индексы i, k в A_{ik} считать элементами конечного поля Z_2 [2], принимающими значения $0, 1$, причем $0+0=0$, $0+1=1+0=1$, $1+1=0$ $(mod\, 2)$, то совокупность i, k представляет собой двухмерный вектор над этим полем. Из таблицы 1 и таблиц 2,3,4 видно, что всегда выполняется условие

$$A_{i,k}A_{l,m} = A_{i+l,\,k+m}. \quad (77)$$

Следовательно, если составить из совокупностей матриц $A_{i,k}$ прямую сумму

$$\widetilde{A} = \widetilde{A}_{00} \oplus \widetilde{A}_{10} \oplus \widetilde{A}_{01} \oplus \widetilde{A}_{11},$$

а умножение ее элементов A производить согласно дистрибутивному закону и формуле (77), то получим стандартную градуированную алгебру [5].

5) Гипералгебра с делением над полем действительных чисел, соответствующая кольцу формальных действительных степенных рядов.

Рассмотрим кольцо формальных действительных степенных рядов M [1]:

$$M = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \tag{78}$$

где a_k – действительные числа.

Совокупность аддитивных групп A_k с элементами $a_k x^k$ представляет собой, очевидно, гипералгебру бесконечного порядка первого ранга с делением над полем действительных чисел.

6) Гипералгебра с делением над полем комплексных чисел, соответствующая кольцу формальных комплексных рядов Фурье вида

$$F(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k e^{ikx}, \tag{79}$$

где f_k – комплексные числа, k – целые числа, x – действительный аргумент. Совокупность аддитивных групп F_k с элементами $f_k e^{ikx}$ представляет собой гипералгебру бесконечного порядка первого ранга с делением над полем комплексных чисел.

7) Действительная и мнимая оси в стандартной групповой гиперкомплексной системе n-ранга является гипералгеброй n порядка первого ранга с делением над полем действительных чисел по этим осям.

8) a) *Прямые на комплексной плоскости, проходящие через начало координат.*

Рассмотрим совокупность прямых:

$$z = x + iy = \rho e^{i(\varphi + k\pi)}, \tag{80}$$

k – целое, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$, $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$.

При четном k имеем луч

$$z_1 = \rho e^{i\varphi,} \tag{81}$$

при нечетном – луч

$$z_2 = -\rho e^{i\varphi,}. \tag{80$'$}$$

Каждая прямая (φ задано) представляет собой аддитивную группу, действительная ось

$$z = \rho e^{ik\pi} \tag{82}$$

представляет собой поле действительных чисел, являясь (кроме нуля) нормальным делителем всех прямых комплексной плоскости, содержащих нуль, кроме нуля. Таким образом, легко видеть, что комплексная плоскость представляет собой гипералгебру бесконечного порядка первого ранга с делением над полем действительных чисел по прямым, проходящим через начало координат (и, разумеется, алгебру второго ранга с делением над полем действительных чисел).

b) *Действительная и мнимая оси комплексной плоскости.*

Уравнения этих прямых запишутся соответственно

$$z_1 = \rho_1 e^{ik_1\pi} - \tag{83}$$

действительные числа,

$$z_2 = \rho_2 e^{i(\pi/2+k_2\pi)} - \tag{84}$$

мнимые числа (k_1 и k_2 – целые числа).

Каждая из этих прямых – аддитивная группа.

Далее, имеем:

$$z_1 \cdot z_1' = \rho_1 \rho_1' e^{i(k_1+k_1')\pi} - \tag{85}$$

действительные числа,

$$z_2 \cdot z_2' = \rho_2 \rho_2' e^{i[\pi+(k_2+k_2')\pi]} = \rho_2 \rho_2' e^{i(k_2+k_2'+1)\pi} - \tag{86}$$

действительные числа,

$$z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1 = \rho_1 \rho_2 e^{[\pi/2+i(k_1+k_2)\pi]} - \tag{87}$$

мнимые числа. Кроме того, обратные действительным числам суть

$$1/z_1 = 1/\rho_1 e^{-ik_1\pi} - \tag{88}$$

действительные числа; обратные мнимым числам –

$$1/z_2 = 1/\rho_2 e^{i(-\pi/2-k_2\pi)} = 1/\rho_2 e^{i[\pi/2-(k_2+1)\pi]} - \tag{89}$$

мнимые числа.

Чисто действительные и чисто мнимые числа (кроме нуля) представляют собой мультипликативную группу, действительные числа – нормальный делитель этой группы.

Таким образом, действительная и мнимая оси совместно являются гипералгеброй второго порядка первого ранга (по этим осям) с делением над полем действительных чисел.

9) *Действительная и мнимая оси кватернионов* являются гипералгеброй 4-го порядка 1-го ранга с делением над полем действительных чисел.

10) *Множество именованных (размерных) действительных чисел, применяемых в физике и геометрии.*

Числа, не имеющие размерности, являются частным случаем таких чисел. Как известно, суммируются только числа, имеющие одинаковую размерность, и, в частности, числа, не имеющие размерности. Таким образом, числа с одинаковой размерностью (в том числе числа, не имеющие размерности), представляют собой пересекающиеся только в нуле аддитивные группы, а вся совокупность действительных чисел, кроме нуля, представляет собой мультипликативную группу. Безразмерные действительные числа (кроме нуля) представляют собой нормальный делитель всей мультипликативной группы. Следовательно, размерные и безразмерные действительные числа в совокупности представляет собой гипералгебру бесконечного порядка первого ранга с делением над полем безразмерных действительных чисел. Таким образом, физические величины "не укладываются" в кольцо.

11) Совокупность размерных и безразмерных целых чисел представляет собой гиперкольцо бесконечного порядка, поскольку указанная совокупность представляет собой только мультипликативную полугруппу [1] (целые числа не всегда можно делить друг на друга).

12) Трехмерное вещественное векторное пространство, в котором в качестве произведения векторов берется их векторное произведение [1]. Аддитивными группами множества M являются векторные пространства полярных и аксиальных векторов. Поскольку аксиальные и полярные векторы друг с другом обычно напрямую не складываются, сумма полярных и аксиальных векторов, как правило, не является кольцом. Произведение двух полярных векторов является аксиальным вектором; произведение двух аксиальных векторов – также аксиальный вектор, а произведение полярного вектора на аксиальный (в любом порядке) – полярный вектор. Следовательно, рассматриваемое множество является гипералгеброй второго порядка третьего ранга над полем действительных чисел. Пространство аксиальных векторов, как легко видеть, является кольцом. Таким образом, представление о векторном умножении как об умножении в кольце неполно.

Заметим, что во всех приведенных примерах фактор-группоиды и фактор-группы были коммутативными. Отметим также, что фактор-группы в примерах 1, 2b, 7b как группы простого (второго) порядка изоморфны.

Список примеров гипертел (гиперполей, гиперколец) можно было бы продолжить. Как известно, гиперкомплексные системы представляют собой действительные алгебры n-го ранга с единицей, $n > 2$ и конечно. Если включить в гиперкомплексные системы бинарные (со сложением и умножением) дистрибутивные алгебраические структуры с единицей над полем действительных чисел, содержащие более чем одно векторное пространство, то действительные гиперкольца с единицей также являются обобщенными гиперкомплексными системами, если они не сводятся к кольцам.

Заключение

Понятия гиперкольца, гипертела, гиперполя, гипералгебры являются непосредственным обобщением понятий кольца, тела, поля, алгебры, где определены две бинарные операции – сложение и умножение, связанные левым и правым дистрибутивными законами.

Для нужд физики имеет смысл подчеркнуть важность того, что:

1) физические величины не являются подмножеством кольца;

2) операция векторного умножения в множестве полярных и аксиальных векторов, вообще говоря, не является умножением в кольце.

Дополнение

Произведение квазиунитарных матриц второго порядка $A_{\varphi 1} \cdot A_{\varphi 2}$ с кватернионными матричными элементами и измененными законами умножения.

$$A_{\varphi_1} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ -y_1^+ e^{i\varphi_1} & x_1^+ e^{i\varphi_1} \end{pmatrix}, \quad A_{\varphi_2} = \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ -y_2^+ e^{i\varphi_2} & x_2^+ e^{i\varphi_2} \end{pmatrix}$$

$$1)\ P_1,\ A_{\varphi_1} \cdot A_{\varphi_2} = \begin{pmatrix} x_1 x_2 - y_1 y_2^+ e^{i\varphi_2} & x_1 y_2 + x_2^+ y_1 e^{i\varphi_2} \\ -y_1^+ x_2 e^{i\varphi_1} - y_2^+ x_1^+ e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} & -y_2 y_1^+ e^{i\varphi_1} + x_2^+ x_1^+ e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} \end{pmatrix}.$$

$$2)\ P_2,\ A_{\varphi_1} \cdot A_{\varphi_2} = \begin{pmatrix} x_1 x_2 - y_1 y_2^+ e^{i\varphi_2} & y_2 x_1 + y_1 x_2^+ e^{i\varphi_2} \\ -x_2 y_1^+ e^{i\varphi_1} - x_1^+ y_2^+ e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} & -y_2 y_1^+ e^{i\varphi_1} + x_2^+ x_1^+ e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} \end{pmatrix}.$$

$$3)\ P_3,\ A_{\varphi_1} \cdot A_{\varphi_2} = \begin{pmatrix} x_2 x_1 - y_1 y_2^+ e^{i\varphi_2} & x_1 y_2 + x_2^+ y_1 e^{i\varphi_2} \\ -y_1^+ x_2 e^{i\varphi_1} - y_2^+ x_1^+ e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} & -y_2 y_1^+ e^{i\varphi_1} + x_1^+ x_2^+ e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} \end{pmatrix}.$$

$$4)\ P_4,\ A_{\varphi_1}\cdot A_{\varphi_2}=\begin{pmatrix} x_2x_1-y_1y_2^+e^{i\varphi_2} & y_2x_1+y_1x_2^+e^{i\varphi_2} \\ -x_2y_1^+e^{i\varphi_1}-x_1^+y_2^+e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} & -y_2y_1^+e^{i\varphi_1}+x_1^+x_2^+e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} \end{pmatrix}.$$

$$5)\ P_5,\ A_{\varphi_1}\cdot A_{\varphi_2}=\begin{pmatrix} x_1x_2-y_2^+y_1e^{i\varphi_2} & x_1y_2+x_2^+y_1e^{i\varphi_2} \\ -y_1^+x_2e^{i\varphi_1}-y_2^+x_1^+e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} & -y_1^+y_2e^{i\varphi_1}+x_2^+x_1^+e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} \end{pmatrix}.$$

$$6)\ P_6,\ A_{\varphi_1}\cdot A_{\varphi_2}=\begin{pmatrix} x_1x_2-y_2^+y_1e^{i\varphi_2} & y_2x_1+y_1x_2^+e^{i\varphi_2} \\ -x_2y_1^+e^{i\varphi_1}-x_1^+y_2^+e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} & -y_1^+y_2e^{i\varphi_1}+x_2^+x_1^+e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} \end{pmatrix}.$$

$$7)\ P_7,\ A_{\varphi_1}\cdot A_{\varphi_2}=\begin{pmatrix} x_2x_1-y_2^+y_1e^{i\varphi_2} & x_1y_2+x_2^+y_1e^{i\varphi_2} \\ -y_1^+x_2e^{i\varphi_1}-y_2^+x_1^+e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} & -y_1^+y_2e^{i\varphi_1}+x_1^+x_2^+e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} \end{pmatrix}.$$

$$8)\ P_8,\ A_{\varphi_1}\cdot A_{\varphi_2}=\begin{pmatrix} x_2x_1-y_2^+y_1e^{i\varphi_2} & y_2x_1+y_1x_2^+e^{i\varphi_2} \\ -x_2y_1^+e^{i\varphi_1}-x_1^+y_2^+e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} & -y_1^+y_2e^{i\varphi_1}+x_1^+x_2^+e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} \end{pmatrix}.$$

Литература

[1] Курош А. Г. "Лекции по общей алгебре", ГИФМЛ, М., 1962 г.

[2] Курош А. Г. "Курс высшей алгебры", 2-е изд., ГИТТЛ, М.-Л., 1949 г.

[3] М. И. Петрашень, Е. Д. Трифонов. "Применение теории групп в квантовой механике". "Наука", ГРФМЛ, М., 1967 г.

[4] Э. Маделунг. "Математический аппарат физики". Справочное руководство. Пер. с 6-го немецкого издания под ред. В. И. Левина. 2-е изд., "Наука", ГРФМЛ, М., 1968.

[5] С. Ленг. "Алгебра". Пер. с англ. под ред. А. И. Кострикина. "Мир", М., 1968.

On several distributive universal algebras

L. G. Solovey

lgsolovey@gmail.com

The paper studies certain sets, which are not necessarily rings, but which are - in a certain sense, close to the latter. Such sets - called *hyper-rings*, consist of several additive groups whose intersection is just the zero element, and which are also grupoids (i.e., groups, if the zero element is removed). Distributive laws are shown to hold true.

The rings (in particular, the fields) provide particular examples of such sets. Illustrative examples certify the extensiveness of such sets. As example, one can represent the real physical objects as embedded within a ring, which is regarded as a subset of a hyper-ring.

Real hyper-rings with unity (which do not reduce to a ring), whose additive groups are vector spaces, can be viewed as generalizations of hypercomplex systems, if for these systems one provides real binary (with addition and multiplication) distributive algebraic structures with unity, where the number of constitutive vector spaces is greater than one and finite.

As typical examples of hyper-rings, which motivate their study, are the second order matrices, similar to the unitary and orthogonal ones, but which are not normed to unity, but to an arbitrary non-negative number. The complex numbers and the quaternions can be represented as such matrices, and can be regarded as corresponding subsets.

Key-words: hyper-ring, hypercomplex system, vector spaces, grupoids, matrices.

MSC: 16B99, 16S99.

ПРИНЦИП ДЕФОРМАЦИИ КАК ОСНОВА ФИЗИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ К ГЕОМЕТРИИ ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ

Ю. А. Рылов

Институт проблем механики РАН, Москва
rylov@ipmnet.ru
http : //rsfq1.physics.sunysb.edu/˜rylov/yrylov.htm
http : //gasdyn − ipm.ipmnet.ru/˜rylov/yrylov.htm

Физическая геометрия изучает взаимное расположение геометрических объектов и точек в пространстве или в пространстве-времени, которое описывается функцией расстояния d, или мировой функцией $\sigma = d^2/2$. Предлагается новый общий метод построения геометрии. Собственно евклидова геометрия записывается в терминах ее мировой функции σ_{E}. Любая физическая геометрия $\mathcal{G}$ получается из евклидовой геометрии как результат замены евклидовой мировой функции σ_{E} мировой функцией σ физической геометрии $\mathcal{G}$. Этот метод очень прост и эффективен. Он вводит новое свойство геометрии: невырожденность. Используя этот метод, можно построить детерминированную геометрию пространства-времени с изначально стохастическим движением свободных частиц и геометризованной массой частиц. Такая пространственно-временна́я геометрия, определенная надлежащим образом (с квантовой постоянной как атрибутом пространства-времени), позволяет объяснить квантовые эффекты как результат статистического описания стохастического движения частиц (без использования принципов квантовой механики).

Ключевые слова: физическая геометрия, стохастическое движение, квантовые эффекты, мировая функция.

Введение

Геометрия лежит в основании физики и правильная концепция геометрии очень важна для последовательного развития физики. Принято считать, что все проблемы обоснования геометрии решены много лет назад. Это верно, но это касается геометрии, рассматриваемой как логическое построение. Физиков интересует геометрия, как наука о взаимном расположении геометрических объектов в пространстве или в пространстве-времени. Эти два аспекта совершенно различны, и можно говорить о двух различных геометриях, используя для них различные названия. Геометрия как логическое построение – это всегда однородная геометрия, где все точки имеют одинаковые свойства. Известный математик Феликс Клейн [1] считал, что только однородные геометрии заслуживают названия геометрии. По его мнению, риманову геометрию (вообще говоря, неоднородную) следует называть римановой географией, или римановой топографией. Другими словами, Феликс Клейн рассматривал геометрию главным образом как логическое построение. Мы будем называть такую геометрию математической геометрией.

Геометрию, рассматриваемую как науку о взаимном расположении геометрических объектов, мы будем называть физической геометрией, потому что в этом аспекте геометрии заинтересованы главным образом физики. Физические геометрии, вообще говоря, неоднородны, хотя они могут быть и однородными тоже. Например, собственно евклидова геометрия, с одной стороны, является физической геометрией, но, с другой стороны, она является логическим построением, потому что она однородна и может быть построена из простых элементов (точек, прямых, плоскостей и т. д.). Все элементы евклидовой геометрии имеют одинаковые свойства в разных местах. Эти свойства могут быть описаны с помощью аксиом. Одинаковость геометрических элементов позволяет построить математическую (однородную) геометрию с помощью логических рассуждений. Собственно евклидова геометрия была построена много лет назад Евклидом. Непротиворечивость этого построения была исследована и доказана в [2]. Такое построение очень сложно даже в случае собственно евклидовой геометрии, потому что простые геометрические объекты используются для построения более сложных объектов, и сложный геометрический объект $\mathcal{O}$ нельзя построить без построения более простых составляющих этого объекта $\mathcal{O}$.

Заметим, что строя свою геометрию, Евклид не использовал координат для маркировки точек пространства. Его описание однородной геометрии было бескоординатным. Это означает, что координаты не являются необходимым атрибутом геометрии. Система координат есть метод описания, который может использоваться или не использоваться. *Применение координат и других средств описания ставит проблему отделения свойств геометрии от свойств средств описания.* Обычно разделение свойств геометрии и свойств системы координат осуществляется следующим образом. Геометрия описывается во всех возможных системах координат. Преобразования от одной системы координат к другой образуют группу преобразований. Инварианты этой группы преобразований имеют одни и те же значения во всех системах координат, и следовательно, они описывают свойства рассматриваемой геометрии.

В этом месте мы должны сделать важное замечание. *Любая геометрия есть совокупность всех геометрических объектов $\mathcal{O}$ и всех отношений $\mathcal{R}$ между ними.* Всякий геометрический объект $\mathcal{O}$ есть подмножество точек некоторого точечного множества Ω, на котором задана геометрия. В римановой геометрии (и других неоднородных геометриях) множество Ω есть n-мерное многообразие, точки P которого маркируются n координатами $x = \{x^1, x^2, ...x^n\}$. Эта маркировка (арифметизация пространства) рассматривается как необходимый атрибут римановой геометрии. Большинство геометров полагают, что риманова геометрия (и, вообще, физическая геометрия) не может быть построена без введения многообразия. Иначе говоря, они полагают, что многообразие есть атрибут римановой геометрии (и, вообще, любой непрерывной геометрии). Эта вера основана на том факте, что риманова геометрия всегда строится на некотором многообразии. Однако, это заблуждение. Тот факт, что мы всегда строим физическую геометрию на некотором многообразии, не означает, что физическая геометрия не может быть построена без ссылки на многообразие или систему координат. Разумеется, некоторая маркировка точек пространства удобна, но она не имеет отношения к построению геометрии, и *физическую геометрию следует строить без ссылки на систему координат.* Использование системы координат налагает ограничения на свойства построенной физической геометрии. Например, если мы используем непрерывную систему координат (многообразие), мы можем построить только непрерывную физическую геометрию. Чтобы построить дискретную физическую геометрию, построение геометрии не должно содержать ссылки на систему координат.

Здесь мы представляем метод построения физической геометрии, который не содержит ссылки на систему координат и другие средства описания. Он содержит ссылку только на функцию расстояния d, которая является существенной характеристикой физической геометрии.

Если геометрия неоднородна, и прямые, находящиеся в разных местах, имеют различные свойства, то нельзя описать свойства этих прямых с помощью аксиом, потому что нет таких аксиом, которые были бы справедливы для всей геометрии. Взаимное расположение точек в физической (неоднородной) геометрии, заданной на множестве Ω точек P, описывается с помощью функции расстояния $d\,(P,Q)$

$$d: \qquad \Omega\times\Omega\rightarrow\mathbf{R}, \qquad d\,(P,P)=0, \qquad \forall P\in\Omega \tag{1}$$

где $\mathbf{R}$ – множество всех вещественных чисел. Функция расстояния d является главной характеристикой физической геометрии. Кроме того функция расстояния d есть *единственная характеристика* любой физической геометрии. Функция расстояния d полностью определяет физическую геометрию. Это утверждение очень важно для построения физической геометрии. Ниже оно будет доказано. Любая физическая геометрия $\mathcal{G}$ строится из собственно евклидовой геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ с помощью деформации, т. е. заменой евклидовой функции расстояния d_{E} на функцию расстояния нужной геометрии. Например, строя риманову геометрию, мы заменяем бесконечно малое евклидово расстояние $dS_{\mathrm{E}}=\sqrt{g_{\mathrm{E}ik}dx^{i}dx^{k}}$ римановым бесконечно малым расстоянием $dS=\sqrt{g_{ik}dx^{i}dx^{k}}$. По-видимому, нет метода построения неоднородной физической геометрии, отличного от деформации евклидовой геометрии (или некоторой другой однородной геометрии), которая строится как математическая геометрия на основе аксиоматики и логики. К сожалению, традиционный метод построения римановой геометрии содержит ссылку на систему координат. Однако, эта ссылка может быть устранена, если использовать конечное расстояние d вместо бесконечно малого расстояния dS.

Для описания физической геометрии используется мировая функция σ [3], которая связана с функцией расстояния d с помощью соотношения $\sigma\,(P,Q)=\frac{1}{2}d^{2}\,(P,Q)$. Мировая функция определяется соотношением

$$\sigma: \qquad \Omega\times\Omega\rightarrow\mathbf{R}, \qquad \sigma\,(P,P)=0, \qquad \forall P\in\Omega \tag{2}$$

где $\mathbf{R}$ – множество всех вещественных чисел. Использование мировой функции более удобно в том отношении, что мировая функция вещественна даже тогда, когда функция расстояния d мнима и не удовлетворяет определению (1). Это важно при рассмотрении геометрии пространства-времени как физической геометрии.

Вообще говоря, физическая геометрия не может быть построена как логическая конструкция, потому что любое изменение мировой функции сопровождается изменением аксиоматики. Логическое построение практически нереально, потому что множество физических геометрий континуально. Содержит ли мировая функция всю информацию, необходимую для построения физической геометрии? Это очень важный вопрос. Например, можно ли извлечь информацию о размерности пространства из мировой функции для случая евклидовой геометрии? Несколько ниже мы дадим положительный ответ на этот вопрос. Сейчас мы сформулируем метод построения физической геометрии.

Представим себе, что собственно евклидова геометрия $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ может быть описана в терминах и только в терминах евклидовой мировой функции σ_{E}. Такое описание называется *σ-имманентным.* Это означает, что любой геометрический объект $\mathcal{O}_{\mathrm{E}}$ и любое соотношение $\mathcal{R}_{\mathrm{E}}$ между геометрическими объектами в геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ может быть описано в терминах σ_{E} в виде $\mathcal{O}_{\mathrm{E}}\,(\sigma_{\mathrm{E}})$ и $\mathcal{R}_{\mathrm{E}}\,(\sigma_{\mathrm{E}})$. Чтобы получить соответствующий геометрический объект $\mathcal{O}$ и соответствующее соотношение $\mathcal{R}$ между геометрическими объектами в другой физической геометрии $\mathcal{G}$, достаточно заменить евклидову мировую функцию σ_{E} мировой функцией σ физической геометрии $\mathcal{G}$ в описании $\mathcal{O}_{\mathrm{E}}\,(\sigma_{\mathrm{E}})$ и $\mathcal{R}_{\mathrm{E}}\,(\sigma_{\mathrm{E}})$.

$$\mathcal{O}_{\mathrm{E}}\,(\sigma_{\mathrm{E}})\rightarrow\mathcal{O}_{\mathrm{E}}\,(\sigma)\,, \qquad \mathcal{R}_{\mathrm{E}}\,(\sigma_{\mathrm{E}})\rightarrow\mathcal{R}_{\mathrm{E}}\,(\sigma)$$

Индекс 'E' показывает, что геометрический объект построен на основе евклидовой аксиоматики. При таком построении не нужны ни аксиомы, ни логические рассуждения. Не нужно никаких средств описания (топологических структур, непрерывности, многообразия, размерности и т. д.). Фактически используется аксиоматика евклидовой геометрии, которая деформируется заменой $\sigma_{\mathrm{E}} \to \sigma$. Эта замена может быть интерпретирована как деформация евклидова пространства. Отсутствие ссылок на средства описания является большим преимуществом рассматриваемого метода построения геометрии. Кроме того, нет необходимости строить всю геометрию $\mathcal{G}$. Мы можем построить и исследовать только интересующую нас часть геометрии $\mathcal{G}$. Любая физическая геометрия может быть построена как результат деформации евклидовой геометрии.

Геометрический объект $\mathcal{O}$ описывается с помощью каркас-оболочного метода [4]. Это означает, что любой геометрический объект $\mathcal{O}$ рассматривается как множество объединений и пересечений элементарных геометрических объектов (ЭГО).

Конечное множество $\mathcal{P}^n \equiv \{P_0, P_1, ..., P_n\} \subset \Omega$ параметров оболочной функции $f_{\mathcal{P}^n}$ образует *каркас* элементарного объекта (ЭГО) $\mathcal{E} \subset \Omega$. Множество $\mathcal{E} \subset \Omega$ точек, образующих ЭГО называется *оболочкой* его каркаса $\mathcal{P}^n$. Для непрерывной физической геометрии оболочка $\mathcal{E}$ представляет собой обычно непрерывное множество точек. Оболочная функция $f_{\mathcal{P}^n}$, определяющая ЭГО, есть функция текущей точки $R \in \Omega$ и параметров $\mathcal{P}^n \subset \Omega$. Оболочная функция $f_{\mathcal{P}^n}$ есть алгебраическая функция s аргументов $w = \{w_1, w_2, ...w_s\}$, $s = (n+2)(n+1)/2$. Каждый из аргументов $w_k = \sigma(Q_k, L_k)$ есть мировая функция от двух аргументов $Q_k, L_k \in \{R, \mathcal{P}^n\}$, либо принадлежащих каркасу $\mathcal{P}^n$, либо совпадающих с текущей точкой R. Таким образом, элементарный геометрический объект $\mathcal{E}$ определяется своим каркасом и своей оболочной функцией.

Например, сфера $\mathcal{S}(P_0, P_1)$ с центром в точке P_0 определяется соотношением

$$\mathcal{S}(P_0, P_1) = \{R | f_{P_0P_1}(R) = 0\}, \qquad f_{P_0P_1}(R) = \sqrt{2\sigma(P_0, P_1)} - \sqrt{2\sigma(P_0, R)}, \tag{3}$$

где P_1 – точка, принадлежащая сфере. Элементарный объект $\mathcal{E}$ определяется сразу во всех физических геометриях. В частности, он определяется в собственно евклидовой геометрии, где мы можем получить его истолкование. Мы интерпретируем элементарные геометрические объекты $\mathcal{E}$, используя наше знание собственно евклидовой геометрии. Таким образом, *собственно евклидова геометрия используется как эталонная геометрия для интерпретации любой физической геометрии.*

Мы не пытаемся повторять предписания Евклида для построения геометрии. Вместо этого мы берем геометрические объекты и соотношения между ними, полученные в рамках евклидовой геометрии, и записываем их в терминах мировой функции. После этого мы деформируем их, заменяя евклидову мировую функцию σ_{E} мировой функцией σ строящейся геометрии. На практике построение элементарного геометрического объекта сводится к представлению соответствующего евклидова геометрического объекта в σ-имманентном виде, т. е. в терминах евклидовой мировой функции. Последняя проблема есть проблема собственно евклидовой геометрии. Проблема представления геометрического объекта (или соотношения между объектами) в σ-имманентном виде есть действительная проблема построения физической геометрии.

Очень важно, что такое построение не использует координат и других методов описания, потому что использование методов описания накладывает ограничения на построенную геометрию. Всякое средство описания есть некоторая структура St, заданная на базовой евклидовой геометрии с мировой функцией σ_{E}. Замена $\sigma_{\mathrm{E}} \to \sigma$ достаточна для построения единственной физической геометрии $\mathcal{G}_\sigma$. Если мы используем дополнительную структуру St для построения физической геометрии, мы получаем, вообще говоря, другую геометрию $\mathcal{G}_{St}$, которая совпадает с $\mathcal{G}_\sigma$ не для всех σ, а только для некоторых мировых функций σ. Таким образом, использование дополнительных средств описания ограничивает список возможных физических геометрий. Например, если мы используем координатное описание при построении физической геометрии, то полученная геометрия оказывается непрерывной, потому что описание с помощью координат эффективно только для непрерывных геометрий, где число координат совпадает с размерностью геометрии.

Строя геометрию $\mathcal{G}$ с помощью деформации, мы существенно используем тот факт, что евклидова геометрия $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ есть математическая геометрия, которая была построена на основе евклидовой аксиоматики и логических рассуждений.

Мы будем называть этот метод построения физической геометрии *принципом деформации* и понимать деформацию в широком смысле этого слова. В частности, деформация евклидова пространства может преобразовывать евклидову поверхность в точку и евклидову точку в поверхность. Такая деформация может удалять некоторые точки евклидова пространства, нарушая его непрерывность или уменьшая число его измерений. Такая деформация может добавлять точки к евклидову пространству, увеличивая число его измерений. Другими словами, принцип деформации – это очень общий метод построения физической геометрии.

Принцип деформации как метод построения физической геометрии имеет две стадии:

(i) Представление геометрических объектов $\mathcal{O}$ и соотношений $\mathcal{R}$ евклидовой геометрии в σ-имманентной форме, т. е. в терминах и только в терминах мировой функции σ_{E}.

(ii) Замена евклидовой функции σ_{E} мировой функцией σ искомой геометрии.

Физическая геометрия, построенная с помощью только принципа деформации (т. е. без использования других методов) называется *Т-геометрией (трубчатой геометрией, tubular geometry)* [5, 4, 6]. Т-геометрия есть наиболее общий вид физической геометрии.

Применение принципа деформации как метода построения физической геометрии ограничено двумя условиями.

1. Описывая евклидовы геометрические объекты $\mathcal{O}\left(\sigma_{\mathrm{E}}\right)$ и евклидовы соотношения $\mathcal{R}\left(\sigma_{\mathrm{E}}\right)$ в терминах σ_{E}, мы не должны использовать специальные свойства евклидовой мировой функции σ_{E}. В частности, определения объектов $\mathcal{O}\left(\sigma_{\mathrm{E}}\right)$ и соотношений $\mathcal{R}\left(\sigma_{\mathrm{E}}\right)$ должны иметь один и тот же вид в евклидовых геометриях разных размерностей. Они не должны зависеть от размерности евклидова пространства.

2. Принцип деформации должен применяться отдельно от других методов построения геометрии. В частности, нельзя применять топологические структуры при построении физической геометрии. При построении физической геометрии нельзя использовать геометрические структуры, потому что для эффективного использования принципа деформации построенная физическая геометрия должна определяться только мировой функцией (метрикой).

Описание собственно евклидова пространства в терминах мировой функции

Ключевой точкой построения физической геометрии является описание евклидовой геометрии в терминах евклидовой мировой функции σ_{E}. Мы будем называть такое описание *σ-имманентным описанием.* К сожалению, оно не было известно в течении многих лет, хотя все физики знали, что бесконечно малый интервал $dS=\sqrt{g_{ik}dx^{i}dx^{k}}$ есть единственная существенная характеристика геометрии пространства-времени, и изменяя это выражение, мы изменяем геометрию пространства-времени. С физической точки зрения σ-имманентное описание очень разумно, поскольку оно не содержит никакой посторонней информации. σ-имманентное описание не ссылается на средства описания (размерность, многообразие, систему координат). Отсутствие ссылок на средства описания важно в том отношении, что *не возникает необходимости отделять информацию о* *самой геометрии от информации о средствах описания.* σ-имманентное описание содержит только существенную характеристику геометрии: ее мировую функцию. Впервые σ-имманентное описание было получено в 1990 году [5].

Первый вопрос, касающийся σ-имманентного описания такой. Содержит ли мировая функция информацию, достаточную для описания физической геометрии? Ответ положительный, по крайней мере, в случае собственно евклидовой геометрии, и этот ответ дается доказательством следующей теоремы.

Пусть σ-пространство $V = \{\sigma, \Omega\}$ есть множество Ω точек P с заданной на нем мировой функцией σ

$$\sigma : \qquad \Omega \times \Omega \to \mathbf{R}, \qquad \sigma(P, P) = 0, \qquad \forall P \in \Omega, \tag{4}$$

где $\mathbf{R}$ – множество всех вещественных чисел. Пусть вектор $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 = \{P_0, P_1\}$ – упорядоченное множество из двух точек P_0, P_1, и его длина $|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1|$ определяется соотношением $|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1|^2 = 2\sigma(P_0, P_1)$.

Теорема

σ-пространство $V = \{\sigma, \Omega\}$ есть n-мерное собственно евклидово пространство, если и только если мировая функция σ удовлетворяет следующим условиям, записанным в терминах мировой функции σ.

I. Условие симметрии:

$$\sigma(P, Q) = \sigma(Q, P), \qquad \forall P, Q \in \Omega. \tag{5}$$

II. Определение размерности:

$$\exists \mathcal{P}^n \equiv \{P_0, P_1, ...P_n\} : \qquad F_n(\mathcal{P}^n) \neq 0, \qquad F_k\left(\Omega^{k+1}\right) = 0, \qquad k > n, \tag{6}$$

где $F_n(\mathcal{P}^n)$ – определитель Грама

$$F_n(\mathcal{P}^n) = \det ||(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i \cdot \mathbf{P}_0\mathbf{P}_k)|| = \det ||g_{ik}(\mathcal{P}^n)||, \qquad i, k = 1, 2, ... n. \tag{7}$$

Скалярное произведение $(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1)$ двух векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$ определяется соотношением

$$(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1) = \sigma(P_0, Q_1) + \sigma(P_1, Q_0) - \sigma(P_0, Q_0) - \sigma(P_1, Q_1). \tag{8}$$

Векторы $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i$, $i = 1, 2, ... n$ суть базисные векторы прямолинейной системы координат K_n с началом координат в точке P_0. Метрические тензоры $g_{ik}(\mathcal{P}^n)$, $g^{ik}(\mathcal{P}^n)$, $i, k = 1, 2, ... n$ в K_n определяются соотношениями

$$\sum_{k=1}^{k=n} g^{ik}(\mathcal{P}^n) g_{lk}(\mathcal{P}^n) = \delta_l^i, \qquad g_{il}(\mathcal{P}^n) = (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i \cdot \mathbf{P}_0\mathbf{P}_l), \qquad i, l = 1, 2, ... n. \tag{9}$$

III. Линейная структура евклидова пространства:

$$\sigma(P, Q) = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{i,k=n} g^{ik}(\mathcal{P}^n)(x_i(P) - x_i(Q))(x_k(P) - x_k(Q)), \qquad \forall P, Q \in \Omega, \tag{10}$$

где координаты $x_i(P)$ точки P суть ковариантные координаты вектора $\mathbf{P}_0\mathbf{P}$, определенные соотношением

$$x_i(P) = (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i . \mathbf{P}_0\mathbf{P}), \qquad i = 1, 2, ... n. \tag{11}$$

IV: Матрица метрического тензора $g_{lk}\left(\mathcal{P}^n\right)$ имеет только положительные собственные значения

$$g_k > 0, \qquad k = 1, 2, ..., n. \tag{12}$$

V. Условие непрерывности: система уравнений

$$(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_0\mathbf{P}) = y_i \in \mathbf{R}, \qquad i = 1, 2, ... n. \tag{13}$$

рассматриваемая как система уравнений для определения точки P как функции координат $y = \{y_i\}$, $i = 1, 2, ... n$, всегда имеет одно и только одно решение. Условия II – V содержат ссылку на размерность n евклидова пространства.

Поскольку возможно σ-имманентное описание собственно евклидовой геометрии, то оно возможно и для любой T-геометрии, потому что любой геометрический объект $\mathcal{O}$ и любое соотношение $\mathcal{R}$ в физической геометрии $\mathcal{G}$ получается из соответствующего геометрического объекта $\mathcal{O}_{\mathrm{E}}$ и из соответствующего соотношения $\mathcal{R}_{\mathrm{E}}$ в собственно евклидовой геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ с помощью замены $\sigma_{\mathrm{E}} \to \sigma$ в описании объекта $\mathcal{O}_{\mathrm{E}}$ и соотношения $\mathcal{R}_{\mathrm{E}}$. Для того, чтобы такая замена была возможна, описание объекта $\mathcal{O}_{\mathrm{E}}$ и соотношения $\mathcal{R}_{\mathrm{E}}$ не должно ссылаться на специальные свойства мировой функции σ_{E}, описываемые условиями II – V. Формальным признаком применения условий II – V является ссылка на размерность n, потому что любое из условий II – V содержит ссылку на размерность n собственно евклидова пространства.

Если, тем не менее, мы используем одно из специальных свойств II – V евклидова пространства в σ-имманентном описании геометрического объекта $\mathcal{O}$, или соотношения $\mathcal{R}$, мы ссылаемся на размерность n и в конечном счете на систему координат, которая является только средством описания.

Покажем это на примере определения прямой в n-мерном евклидовом пространстве. Прямая $\mathcal{T}_{P_0Q}$ в собственно евклидовом пространстве определяется двумя ее точками P_0 и Q $(P_0 \neq Q)$ как множество точек R

$$\mathcal{T}_{P_0Q} = \left\{R \mid \mathbf{P}_0\mathbf{Q}||\mathbf{P}_0\mathbf{R}\right\}, \tag{14}$$

где условие $\mathbf{P}_0\mathbf{Q}||\mathbf{P}_0\mathbf{R}$ означает, что векторы $\mathbf{P}_0\mathbf{Q}$ и $\mathbf{P}_0\mathbf{R}$ коллинеарны, т. е. скалярное произведение $(\mathbf{P}_0\mathbf{Q}.\mathbf{P}_0\mathbf{R})$ этих двух векторов удовлетворяет соотношению

$$\mathbf{P}_0\mathbf{Q}||\mathbf{P}_0\mathbf{R}: \qquad (\mathbf{P}_0\mathbf{Q}\cdot\mathbf{P}_0\mathbf{R})^2 = (\mathbf{P}_0\mathbf{Q}\cdot\mathbf{P}_0\mathbf{Q})\,(\mathbf{P}_0\mathbf{R}\cdot\mathbf{P}_0\mathbf{R}), \tag{15}$$

где скалярное произведение определяется соотношением (8). Таким образом, прямая линия $\mathcal{T}_{P_0Q}$ определяется σ-имманентно, т. е. в терминах мировой функции σ. Мы будем использовать два различных названия (прямая и трубка) для геометрического объекта $\mathcal{T}_{P_0Q}$. Мы будем использовать термин "прямая", когда хотим подчеркнуть, что $\mathcal{T}_{P_0Q}$ есть результат деформации евклидовой прямой. Мы будем использовать термин "трубка", когда хотим подчеркнуть, что $\mathcal{T}_{P_0Q}$ может быть многомерной поверхностью.

В евклидовой геометрии можно использовать другое определение коллинеарности. Векторы $\mathbf{P}_0\mathbf{Q}$ и $\mathbf{P}_0\mathbf{R}$ коллинеарны, если составляющие векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{Q}$ и $\mathbf{P}_0\mathbf{R}$ в некоторой системе координат пропорциональны. Например, в n-мерной евклидовой геометрии можно ввести прямолинейную систему координат, выбрав $n{+}1$ точек $\mathcal{P}^n = \{P_0, P_1, ...P_n\}$ и образовав n базисных векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i$, $i = 1, 2, ... n$. Тогда условие коллинеарности может быть записано в виде n уравнений

$$\mathbf{P}_0\mathbf{Q}||\mathbf{P}_0\mathbf{R}: \qquad (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i\cdot\mathbf{P}_0\mathbf{Q}) = a\,(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i\cdot\mathbf{P}_0\mathbf{R}), \qquad i = 1, 2, ... n, \tag{16}$$

где a – некоторая вещественная постоянная. Соотношения (16) являются соотношениями для ковариантных составляющих векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{Q}$ и $\mathbf{P}_0\mathbf{R}$ в рассматриваемой системе координат с базисными векторами $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i$, $i = 1, 2, \ldots n$. Пусть точки $\mathcal{P}^n$ выбраны таким образом, что $(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{P}_0\mathbf{Q}) \neq 0$. Тогда, исключая параметр a из соотношений (16), получаем $n-1$ независимых соотношений, и геометрический объект

$$\mathcal{T}_{Q\mathcal{P}^n} = \{R \mid \mathbf{P}_0\mathbf{Q} || \mathbf{P}_0\mathbf{R}\} = \bigcap_{i=2}^{i=n} \mathcal{S}_i, \tag{17}$$

$$\mathcal{S}_i = \left\{ R \left| \frac{(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i \cdot \mathbf{P}_0\mathbf{Q})}{(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{P}_0\mathbf{Q})} = \frac{(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i \cdot \mathbf{P}_0\mathbf{R})}{(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{P}_0\mathbf{R})} \right. \right\}, \qquad i = 2, 3, \ldots n, \tag{18}$$

определенный в соответствии с (16), зависит от $n+2$ точек $Q, \mathcal{P}^n$. Этот геометрический объект $\mathcal{T}_{Q\mathcal{P}^n}$ определен σ-имманентно. Он является комплексом, состоящим из прямой линии и системы координат, представленной $n+1$ точками $\mathcal{P}^n = \{P_0, P_1, \ldots P_n\}$. В евклидовом пространстве зависимость от выбора системы координат и от $n+1$ точек $\mathcal{P}^n$, определяющих эту систему координат, фиктивна. Геометрический объект $\mathcal{T}_{Q\mathcal{P}^n}$ зависит только от двух точек P_0, Q и совпадает с прямой линией $\mathcal{T}_{P_0Q}$. Однако, при деформации евклидова пространства геометрические объекты $\mathcal{T}_{Q\mathcal{P}^n}$ и $\mathcal{T}_{P_0Q}$ деформируются различно. Точки $P_1, P_2, \ldots P_n$ перестают быть фиктивными в определении объекта $\mathcal{T}_{Q\mathcal{P}^n}$, и геометрические объекты $\mathcal{T}_{Q\mathcal{P}^n}$ и $\mathcal{T}_{P_0Q}$ становятся различными, вообще говоря, геометрическими объектами. Однако, будучи, вообще говоря, различными, они могут совпадать в некоторых частных случаях.

Какой из двух геометрических объектов в деформированной геометрии следует рассматривать как прямую линию, проходящую через точки P_0 и Q в геометрии $\mathcal{G}$? Разумеется, это $\mathcal{T}_{P_0Q}$, потому что ее определение не содержит ссылки на систему координат, тогда как определение величины $\mathcal{T}_{Q\mathcal{P}^n}$ зависит от выбора системы координат, представленной точками $\mathcal{P}^n$. Вообще говоря, определения геометрических объектов и соотношений между ними не должны ссылаться на средства описания.

Однако, в данном случае геометрический объект $\mathcal{T}_{P_0Q}$ является, вообще говоря, $(n-1)$-мерной поверхностью, тогда как объект $\mathcal{T}_{Q\mathcal{P}^n}$ является пересечением $(n-1)$ поверхностей размерности $(n-1)$, т. е. $\mathcal{T}_{Q\mathcal{P}^n}$ является, вообще говоря, одномерной кривой. Одномерная кривая $\mathcal{T}_{Q\mathcal{P}^n}$ лучше соответствует нашим идеям о прямой линии, чем $(n-1)$-мерная поверхность $\mathcal{T}_{P_0Q}$. Тем не менее, в физической геометрии $\mathcal{G}$ именно $\mathcal{T}_{P_0Q}$ является аналогом евклидовой прямой линии.

Очень трудно преодолеть нашу традиционное представление, что евклидова прямая не может быть деформирована в многомерную поверхность, и *эта идея многие годы препятствовала построению Т-геометрий.* На практике использовались такие физические геометрии, где деформация евклидова пространства преобразовывала евклидовы прямые в одномерные линии. Это означает, что выбирались геометрии, в которых геометрические объекты $\mathcal{T}_{P_0Q}$ и $\mathcal{T}_{Q\mathcal{P}^n}$ совпадали

$$\mathcal{T}_{P_0Q} = \mathcal{T}_{Q\mathcal{P}^n}. \tag{19}$$

Условие (19) совпадения объектов $\mathcal{T}_{P_0Q}$ и $\mathcal{T}_{Q\mathcal{P}^n}$, наложенное на Т-геометрию, ограничивает список возможных Т-геометрий.

Рассмотрим метрическую геометрию, заданную на множестве Ω точек. Метрическое пространство $M = \{\rho, \Omega\}$ задается метрикой (расстоянием) ρ.

$$\rho \ : \quad \Omega \times \Omega \to [0, \infty) \subset \mathbf{R}, \tag{20}$$

$$\rho(P, P) = 0, \qquad \rho(P, Q) = \rho(Q, P), \qquad \forall P, Q \in \Omega, \tag{21}$$

$$\rho(P, Q) \geq 0, \qquad \rho(P, Q) = 0, \quad \text{iff } P = Q, \qquad \forall P, Q \in \Omega, \tag{22}$$

$$0 \leq \rho(P, R) + \rho(R, Q) - \rho(P, Q), \qquad \forall P, Q, R \in \Omega, \tag{23}$$

где $\mathbf{R}$ – множество всех вещественных чисел. На первый взгляд, метрическое пространство есть частный случай σ-пространства (4), и метрическая геометрия является специальным случаем Т-геометрии с дополнительными ограничениями (22), (23), налагаемыми на мировую функцию $\sigma = \frac{1}{2}\rho^2$. Однако, это не так, потому что метрическая геометрия не использует принцип деформации. Тот факт, что евклидова геометрия может быть описана σ-имманентно, так же как условия (6) – (13), были неизвестны до 1990 года. Дополнительные (по отношению к σ-пространству) условия (22), (23) налагаются для того, чтобы исключить ситуацию, когда прямая не является одномерной линией. Дело в том, что в метрической геометрии кратчайшая (прямая) может быть построена только в том случае, когда она одномерна.

Рассмотрим множество $\mathcal{EL}(P,Q,a)$ точек R

$$\mathcal{EL}(P,Q,a) = \{R|f_{P,Q,a}(R) = 0\}, \qquad f_{P,Q,a}(R) = \rho(P,R) + \rho(R,Q) - 2a. \tag{24}$$

Если метрическое пространство совпадает с собственно евклидовым пространством, это множество точек является эллипсоидом с фокусами в точках P,Q и большой полуосью a. Соотношения $f_{P,Q,a}(R) > 0$, $f_{P,Q,a}(R) = 0$, $f_{P,Q,a}(R) < 0$ определяют соответственно внешние точки, граничные точки и внутренние точки эллипсоида. Если $\rho(P,Q) = 2a$, то получается вырожденный эллипсоид, который совпадает с сегментом $\mathcal{T}_{[PQ]}$ прямой линии, проходящей через точки P, Q. В собственно евклидовой геометрии вырожденный эллипсоид является одномерным сегментом прямой линии, но совсем не очевидно, что одномерность будет иметь место в случае произвольной метрической геометрии. Для того, чтобы такой вырожденный эллипсоид был одномерным в любом метрическом пространстве необходимо, чтобы любой вырожденный эллипсоид $\mathcal{EL}(P,Q,\rho(P,Q)/2)$ не имел внутренних точек. Это условие записывается в виде

$$f_{P,Q,\rho(P,Q)/2}(R) = \rho(P,R) + \rho(R,Q) - \rho(P,Q) \geq 0. \tag{25}$$

Сравнивая соотношение (25) с соотношением (23), мы видим, что ограничение (23) вводится для того, чтобы сделать прямую (кратчайшую) линию одномерной (отсутствие внутренних точек в геометрическом объекте, определяемом двумя точками).

Поскольку метрическая геометрия не использует принцип деформации, то это – бедная геометрия. В рамках этой геометрии нельзя построить скалярное произведение двух векторов, определить линейную зависимость векторов и построить такие геометрические объекты как плоскости. Все эти объекты, так же как и другие, строятся на основе деформации евклидовой геометрии.

Обобщая метрическую геометрию, Менгер [7] и Блюменталь [8] отбросили аксиому треугольника (23). Они пытались построить *дистантную геометрию,* которая была бы более общей геометрией, чем метрическая. Поскольку они не использовали принцип деформации, они не могли определить кратчайшую (прямую) линию без ссылки на топологическое понятие кривой $\mathcal{L}$, определенной как непрерывное отображение

$$\mathcal{L}: \qquad [0,1] \to \Omega, \tag{26}$$

которое не может быть выражено только через расстояние. В результате дистантная геометрия не получилась чисто метрической геометрией, какой является Т-геометрия.

Условия применения принципа деформации

Римановы геометрии удовлетворяют условию (19). Риманова геометрия является разновидностью неоднородной геометрии, и следовательно она использует принцип деформации. При построении римановой геометрии бесконечно малое евклидово расстояние деформируется в бесконечно малое риманово расстояние. Деформация выбрана таким образом, что евклидова прямая $\mathcal{T}_{\mathrm{E}P_0Q}$, проходящая через точку P_0, коллинеарно вектору $\mathbf{P}_0\mathbf{Q}$, преобразовывалась бы в геодезическую $\mathcal{T}_{P_0Q}$, проходящую через точку P_0, коллинеарно вектору $\mathbf{P}_0\mathbf{Q}$ в римановом пространстве.

Заметим, что в Т-геометрии, удовлетворяющей условию (19) для всех точек $Q, \mathcal{P}^n$, прямая линия

$$\mathcal{T}_{Q_0;P_0Q} = \{R \mid \mathbf{P}_0\mathbf{Q}||\mathbf{Q}_0\mathbf{R}\}, \tag{27}$$

проходящая через точку Q_0 коллинеарно вектору $\mathbf{P}_0\mathbf{Q}$, вообще говоря, не является одномерной кривой. Если бы римановы геометрии были Т-геометриями, они должны были бы содержать неодномерные геодезические (прямые). Но римановы геометрии не являются Т-геометриями, потому что при их построении был использован не только принцип деформации, а были использованы также другие методы, содержащие ссылку на средства описания. В частности, в римановых геометриях, вообще говоря, отсутствует абсолютный параллелизм, и нельзя определить прямую линию (27), потому что соотношение $\mathbf{P}_0\mathbf{Q}||\mathbf{Q}_0\mathbf{R}$ не определено, если точки P_0 и Q_0 не совпадают. С одной стороны, отсутствие абсолютного параллелизма позволяет обойти проблему неодномерности прямых линий. Но с другой стороны, это делает римановы геометрии непоследовательными, поскольку они перестают быть Т-геометриями, которые последовательны по построению (см. детали в [9]).

Дело в том, что использование *одного только принципа деформации достаточно для построения физической геометрии.* Кроме того, такое построение последовательно, поскольку исходная евклидова геометрия последовательна и, деформируя ее, мы не используем никаких логических рассуждений. Если мы вводим некоторую дополнительную структуру (например, топологическую структуру), мы получаем обогащенную физическую геометрию, т. е. физическую геометрию с дополнительной структурой на ней. Физическая геометрия с дополнительной структурой на ней – более содержательная конструкция, чем просто физическая геометрия. Однако, это верно только в том случае, если дополнительная структура рассматривается как дополнение к физической геометрии. Если же мы используем дополнительную структуру в построении геометрии, то мы отождествляем эту дополнительную структуру с одной из структур физической геометрии. Если же мы требуем, чтобы эта дополнительная структура была одной из структур физической геометрии, мы ограничиваем применение принципа деформации и ограничиваем список возможных физических геометрий. Ведь совпадение дополнительной структуры с некоторой структурой физической геометрии возможно не для всех физических геометрий, а только для некоторых из них.

Пусть, например, мы используем понятие кривой $\mathcal{L}$ (26) для построения физической геометрии. Понятие кривой $\mathcal{L}$, рассматриваемой как непрерывное отображение, есть топологическая структура, которая не может быть выражена через расстояние или мировую функцию. Введение отображения (26) требует введения топологического пространства и, в частности, понятия непрерывности. Если мы отождествляем топологическую кривую (26) с "метрической" кривой, определенной как ломаная линия

$$\mathcal{T}_{\mathrm{br}} = \bigcup_i \mathcal{T}_{[P_iP_{i+1}]}, \quad \mathcal{T}_{[P_iP_{i+1}]} = \left\{R| \sqrt{2\sigma\left(P_i, P_{i+1}\right)} - \sqrt{2\sigma\left(P_i, R\right)} - \sqrt{2\sigma\left(R, P_{i+1}\right)}\right\}, \tag{28}$$

состоящая из отрезков $\mathcal{T}_{[P_iP_{i+1}]}$ прямой линии между точками P_i, P_{i+1}, мы ограничиваем список возможных геометрий, потому что такое отождествление возможно только в некоторых геометриях. Отождествляя (26) и (28), мы исключаем все дискретные физические геометрии и те непрерывные физические геометрии, где сегмент $\mathcal{T}_{[P_iP_{i+1}]}$ прямой линии есть поверхность, а не одномерное множество точек. Таким образом, дополнительные структуры могут приводить к (i) обогащенным физическим геометриям, (ii) ограниченным физическим геометриям и (iii) ограниченным обогащенным геометриям. Результат зависит от метода использования дополнительной структуры.

Заметим, что некоторые ограничения (непрерывность, выпуклость, отсутствие абсолютного параллелизма), налагаемые на физические геометрии являются результатом несогласованности применяемых методов построения геометрии. В Т-геометрии, которая использует только принцип деформации, таких ограничений нет. Кроме того Т-геометрия обладает некоторым новым свойством физической геометрии, которое традиционно не принимается другими версиями геометрии. Это свойство, называемое *невырожденностью геометрии,* следует прямо из применения произвольных деформаций собственно евклидовой геометрии.

Геометрия вырождена в точке P_0 в направлении вектора $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}$, $|\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}| \neq 0$, если соотношения

$$\mathbf{Q}_0\mathbf{Q} \uparrow\uparrow \mathbf{P}_0\mathbf{R}: \qquad (\mathbf{Q}_0\mathbf{Q} \cdot \mathbf{P}_0\mathbf{R}) = \sqrt{|\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}| \cdot |\mathbf{P}_0\mathbf{R}|}, \qquad |\mathbf{P}_0\mathbf{R}| = a \neq 0, \tag{29}$$

рассматриваемые как уравнения для определения точки R, имеют не более одного решения для любых значений $a \neq 0$. В противном случае геометрия невырождена в точке P_0 в направлении вектора $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}$. Заметим, что первое уравнение (29) есть условие параллельности векторов $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}$ и $\mathbf{P}_0\mathbf{R}$.

Собственно евклидова геометрия вырождена, т. е. она вырождена во всех точках в направлении всех векторов.

Рассматривая геометрию Минковского, следует различать геометрию Минковского и Т-геометрию Минковского. Эти две геометрии описываются одной и той же мировой функцией, но различаются определением параллельности. В Т-геометрии Минковского параллельность двух векторов $\mathbf{Q_0Q}$ и $\mathbf{P_0R}$ определяется первым уравнением (29). Это определение основано на принципе деформации. В геометрии Минковского параллельность определяется соотношением типа (16)

$$\mathbf{Q}_0\mathbf{Q} \uparrow\uparrow \mathbf{P}_0\mathbf{R}: \qquad (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i \cdot \mathbf{Q}_0\mathbf{Q}) = a\left(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i \cdot \mathbf{P}_0\mathbf{R}\right), \qquad i = 1, 2, ... n, \qquad a > 0, \tag{30}$$

где точки $\mathcal{P}^n = \{P_0, P_1, ... P_n\}$ определяют прямолинейную систему координат с базисными векторами $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i$, $i = 1, 2, ... n$ в n-мерной геометрии Минковского (n-мерная псевдоевклидова геометрия индекса 1). Зависимость определения (30) от точек $(P_1, P_2, ... P_n)$ фиктивна, но зависимость от числа $n + 1$ точек $\mathcal{P}^n$ существенна. Таким образом, определение (30) зависит от метода описания геометрии.

Т-геометрия Минковского вырождена во всех точках в направлении всех времениподобных векторов, и она невырождена, вообще говоря, во всех точках в направлении всех пространственноподобных векторов. Геометрия Минковского вырождена во всех точках в направлении всех векторов. Традиционно используют геометрию Минковского, игнорируя невырожденность в пространственноподобных направлениях.

Рассматривая собственно риманову геометрию, следует делать различие между римановой Т-геометрией и римановой геометрией. Эти две геометрии описываются одной и той же мировой функцией и различаются в определении параллелизма. В римановой Т-геометрии параллелизм двух векторов $\mathbf{Q_0Q}$ и $\mathbf{P_0R}$ определяется первым соотношением (29). В римановой геометрии параллелизм двух векторов $\mathbf{Q_0Q}$ и $\mathbf{P_0R}$ определен только в случае, когда точки P_0 и Q_0 совпадают. Параллелизм удаленных векторов $\mathbf{Q_0Q}$ и $\mathbf{P_0R}$, вообще говоря, не определен. Этот факт известен как отсутствие абсолютного параллелизма.

Собственно риманова Т-геометрия локально вырождена, т. е. она вырождена во всех точках P_0 в направлении всех векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{Q}$. В общем случае, когда $P_0 \neq Q_0$, риманова Т-геометрия, вообще говоря, невырождена. Собственно риманова геометрия вырождена, потому что она вырождена локально, тогда как нелокальная невырожденность не определена в римановой геометрии из-за отсутствия абсолютного параллелизма. Традиционно используется риманова геометрия, а свойство невырожденности полностью игнорируется.

С точки зрения традиционного подхода к физической геометрии невырожденность есть нежелательное свойство физической геометрии, хотя с точки зрения логики и с точки зрения принципа деформации невырожденность является естественным свойством физической геометрии. Нелокальная невырожденность изгоняется из собственно римановой геометрии отрицанием существования параллельности удаленных векторов. Невырожденность в направлении пространственноподобных векторов изгоняется из геометрии Минковского с помощью переопределения понятия параллельности двух векторов. Однако, невырожденность есть важное свойство реальной геометрии пространства-времени. Чтобы осознать это, рассмотрим пример.

Простой пример невырожденной геометрии пространства-времени

Т-геометрия [4] определяется на σ-пространстве $V = \{\sigma, \Omega\}$, где Ω есть произвольное множество точек и мировая функция σ определяется соотношениями

$$\sigma: \qquad \Omega \times \Omega \to \mathbf{R}, \qquad \sigma(P,Q) = \sigma(Q,P), \qquad \sigma(P,P) = 0, \qquad \forall P, Q \in \Omega, \tag{31}$$

где $\mathbf{R}$ – множество всех вещественных чисел. Геометрические объекты (вектор $\mathbf{PQ}$, скалярное произведение $(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1)$, коллинеарность $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 || \mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$ векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$, $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$, сегмент прямой линии $\mathcal{T}_{[P_0P_1]}$, и т. д.) определяются в σ-пространстве точно так же, как они σ-имманентно определяются в собственно евклидовом пространстве. Практически используется принцип деформации, хотя он не упоминается в определениях.

Рассмотрим простой пример геометрии пространства-времени $\mathcal{G}_\mathrm{d}$, описываемый Т-геометрией на четырехмерном многообразии $\mathcal{M}_{1+3}$. Мировая функция σ_d описывается соотношением

$$\sigma_\mathrm{d} = \sigma_\mathrm{M} + D(\sigma_\mathrm{M}) = \begin{cases} \sigma_\mathrm{M} + d & \text{если } \sigma_0 < \sigma_\mathrm{M} \\ \left(1 + \frac{d}{\sigma_0}\right)\sigma_\mathrm{M} & \text{если } 0 \leq \sigma_\mathrm{M} \leq \sigma_0 \\ \sigma_\mathrm{M} & \text{если } \sigma_\mathrm{M} < 0, \end{cases} \tag{32}$$

где $d \geq 0$ и $\sigma_0 > 0$ суть некоторые постоянные. Величина σ_M есть мировая функция в пространственно-временно́й геометрии Минковского $\mathcal{G}_\mathrm{M}$. В ортогональной прямолинейной (инерциальной) системе координат $x = (t, \mathbf{x})$ мировая функция σ_M имеет вид

$$\sigma_\mathrm{M}(x, x') = \frac{1}{2}\left(c^2(t - t')^2 - (\mathbf{x} - \mathbf{x}')^2\right), \tag{33}$$

где c – скорость света.

Сравним ломаную линию (28) в геометрии Минковского $\mathcal{G}_\mathrm{M}$ и в геометрии $\mathcal{G}_\mathrm{d}$ с дисторсией $D(\sigma_\mathrm{M})$. Мы предполагаем, что $\mathcal{T}_\mathrm{br}$ есть времениподобная ломаная линия, и все звенья $\mathcal{T}_{[P_iP_{i+1}]}$ ломаной $\mathcal{T}_\mathrm{br}$ времениподобны и имеют одну и ту же длину

$$|\mathbf{P}_i\mathbf{P}_{i+1}|_\mathrm{d} = \sqrt{2\sigma_\mathrm{d}(P_i, P_{i+1})} = \mu_\mathrm{d} > 0, \qquad i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \tag{34}$$

$$|\mathbf{P}_i\mathbf{P}_{i+1}|_\mathrm{M} = \sqrt{2\sigma_\mathrm{M}(P_i, P_{i+1})} = \mu_\mathrm{M} > 0, \qquad i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \tag{35}$$

где индексы "d" и "M" означают, что величина подсчитывается с помощью σ_d и σ_M соответственно. Вектор $\mathbf{P}_i\mathbf{P}_{i+1}$ интерпретируется как импульс частицы на сегменте $\mathcal{T}_{[P_iP_{i+1}]}$, величина $|\mathbf{P}_i\mathbf{P}_{i+1}| = \mu$ интерпретируется как ее (геометрическая) масса. Из определения (8) и соотношения (32) следует, что для времениподобных векторов $\mathbf{P}_i\mathbf{P}_{i+1}$ с $\mu > \sqrt{2\sigma_0}$

$$|\mathbf{P}_i\mathbf{P}_{i+1}|_{\mathrm{d}}^2 = \mu_{\mathrm{d}}^2 = \mu_{\mathrm{M}}^2 + 2d, \qquad \mu_{\mathrm{M}}^2 > 2\sigma_0, \tag{36}$$

$$(\mathbf{P}_{i-1}\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_i\mathbf{P}_{i+1})_{\mathrm{d}} = (\mathbf{P}_{i-1}\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_i\mathbf{P}_{i+1})_{\mathrm{M}} + d. \tag{37}$$

Расчет формы сегмента $\mathcal{T}_{[P_0P_1]}(\sigma_{\mathrm{d}})$ в геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{d}}$ дает соотношение

$$r^2(\tau) = \begin{cases} \tau^2\mu_{\mathrm{d}}^2 \frac{1-\frac{\tau d}{2(\sigma_0+d)}\quad{}^{2}}{1-\frac{2d}{\mu_{\mathrm{d}}^2}} - \frac{\tau^2\mu_{\mathrm{d}}^2\sigma_0}{(\sigma_0+d)}, & 0 < \tau < \frac{\sqrt{2(\sigma_0+d)}}{\mu_{\mathrm{d}}} \\ \frac{3d}{2} + 2d\,(\tau-1/2)^2\left(1-\frac{2d}{\mu_{\mathrm{d}}^2}\right)^{-1}, & \frac{\sqrt{2(\sigma_0+d)}}{\mu_{\mathrm{d}}} < \tau < 1 - \frac{\sqrt{2(\sigma_0+d)}}{\mu_{\mathrm{d}}} \\ (1-\tau)^2\,\mu_{\mathrm{d}}^2\left[\frac{1-\frac{(1-\tau)d}{2(\sigma_0+d)}\quad{}^{2}}{1-\frac{2d}{\mu_{\mathrm{d}}^2}} - \frac{\sigma_0}{(\sigma_0+d)}\right], & 1 - \frac{\sqrt{2(\sigma_0+d)}}{\mu_{\mathrm{d}}} < \tau < 1, \end{cases} \tag{38}$$

где $r\,(\tau)$ – пространственный радиус сегмента $\mathcal{T}_{[P_0P_1]}(\sigma_{\mathrm{d}})$ в системе координат, где точки P_0 и P_1 имеют координаты $P_0 = \{0,0,0,0\}$, $P_1 = \{\mu_{\mathrm{d}},0,0,0\}$, а τ есть параметр вдоль сегмента $\mathcal{T}_{[P_0P_1]}(\sigma_{\mathrm{d}})$ $(\tau\,(P_0) = 0,\ \tau\,(P_1) = 1)$. Можно усмотреть из (38), что характерная величина радиуса сегмента равна $\sqrt{d}$.

Пусть ломаная трубка $\mathcal{T}_{\mathrm{br}}$ описывает "мировую линию" свободной частицы. Это по определению означает, что каждое звено $\mathbf{P}_{i-1}\mathbf{P}_i$ параллельно смежному звену $\mathbf{P}_i\mathbf{P}_{i+1}$

$$\mathbf{P}_{i-1}\mathbf{P}_i \uparrow\uparrow \mathbf{P}_i\mathbf{P}_{i+1}: \qquad (\mathbf{P}_{i-1}\mathbf{P}_i\cdot\mathbf{P}_i\mathbf{P}_{i+1}) - |\mathbf{P}_{i-1}\mathbf{P}_i|\,|\mathbf{P}_i\mathbf{P}_{i+1}| = 0. \tag{39}$$

Определение параллельности различно в геометриях $\mathcal{G}_{\mathrm{M}}$ и $\mathcal{G}_{\mathrm{d}}$. В результате звенья, параллельные в геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{M}}$, не параллельны в геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{d}}$ и наоборот.

Пусть $\mathcal{T}_{\mathrm{br}}(\sigma_{\mathrm{M}})$ описывает мировую линию свободной частицы в геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{M}}$. Угол ϑ_{M} между смежными звеньями в $\mathcal{G}_{\mathrm{M}}$ определяется соотношением

$$\cosh\vartheta_{\mathrm{M}} = \frac{(\mathbf{P}_{-1}\mathbf{P}_0\cdot\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1)_{\mathrm{M}}}{|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1|_{\mathrm{M}}\cdot|\mathbf{P}_{-1}\mathbf{P}_0|_{\mathrm{M}}} = 1. \tag{40}$$

Угол $\vartheta_{\mathrm{M}} = 0$, и геометрический объект $\mathcal{T}_{\mathrm{br}}(\sigma_{\mathrm{M}})$ есть времениподобная прямая на многообразии $\mathcal{M}_{1+3}$.

Пусть теперь $\mathcal{T}_{\mathrm{br}}(\sigma_{\mathrm{d}})$ описывает мировую линию свободной частицы в геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{d}}$. Угол ϑ_{d} между смежными звеньями в $\mathcal{G}_{\mathrm{d}}$ определяется соотношением

$$\cosh\vartheta_{\mathrm{d}} = \frac{(\mathbf{P}_{i-1}\mathbf{P}_i\cdot\mathbf{P}_i\mathbf{P}_{i+1})_{\mathrm{d}}}{|\mathbf{P}_i\mathbf{P}_{i+1}|_{\mathrm{d}}\cdot|\mathbf{P}_{i-1}\mathbf{P}_i|_{\mathrm{d}}} = 1. \tag{41}$$

Угол $\vartheta_{\mathrm{d}} = 0$ также. Если нарисовать ломаную трубку $\mathcal{T}_{\mathrm{br}}(\sigma_{\mathrm{d}})$ на многообразии $\mathcal{M}_{1+3}$, используя координаты опорных точек P_i, и измерить угол ϑ_{dM} между смежными звеньями в геометрии Минковского $\mathcal{G}_{\mathrm{M}}$, мы получим для угла ϑ_{dM} следующее соотношение

$$\cosh\vartheta_{\mathrm{dM}} = \frac{(\mathbf{P}_{i-1}\mathbf{P}_i\cdot\mathbf{P}_i\mathbf{P}_{i+1})_{\mathrm{M}}}{|\mathbf{P}_i\mathbf{P}_{i+1}|_{\mathrm{M}}\cdot|\mathbf{P}_{i-1}\mathbf{P}_i|_{\mathrm{M}}} = \frac{(\mathbf{P}_{i-1}\mathbf{P}_i\cdot\mathbf{P}_i\mathbf{P}_{i+1})_{\mathrm{d}} - d}{|\mathbf{P}_i\mathbf{P}_{i+1}|_{\mathrm{d}}^2 - 2d}. \tag{42}$$

Подставляя величину $(\mathbf{P}_{i-1}\mathbf{P}_i\cdot\mathbf{P}_i\mathbf{P}_{i+1})_{\mathrm{d}}$, взятую из (41), мы получим

$$\cosh\vartheta_{\mathrm{dM}} = \frac{\mu_{\mathrm{d}}^d - d}{\mu_{\mathrm{d}}^2 - 2d} \approx 1 + \frac{d}{\mu_{\mathrm{d}}^2}, \qquad d \ll \mu_{\mathrm{d}}^2\,. \tag{43}$$

Таким образом, $\vartheta_{\mathrm{dM}} \approx \sqrt{2d}/\mu_{\mathrm{d}}$. Это означает, что смежное звено расположено на конусе с углом $\sqrt{2d}/\mu_{\mathrm{d}}$, и вся линия $\mathcal{T}_{\mathrm{br}}(\sigma_{\mathrm{d}})$ имеет случайную форму, потому что каждое звено вихляет с характерным углом $\sqrt{2d}/\mu_{\mathrm{d}}$. Характерный угол вихляния зависит от дисторсии пространства-времени d и от массы частицы μ_{d}. Угол вихляния мал для частиц большой массы. Случайное смещение конца сегмента порядка $\mu_{\mathrm{d}}\vartheta_{\mathrm{dM}} = \sqrt{2d}$, т. е. того же порядка, что и толщина сегмента. Это вполне понятно, поскольку оба явления имеют одну и ту же причину – дисторсию D пространства-времени.

Следует заметить, что влияние геометрии пространства-времени на стохастичность движения частицы нелокально в том смысле, что вид мировой функции (32) для значений $\sigma_{\mathrm{M}} < \frac{1}{2}\mu_{\mathrm{d}}^2$ несущественен для стохастичности движения частицы массы μ_{d}.

Ситуация, когда мировая линия свободной частицы стохастична при детерминированной геометрии и эта стохастичность зависит от массы частицы, кажется экзотичной и неправдоподобной. Но эксперименты показывают, что движение реальных частиц малой массы действительно стохастично, и эта стохастичность возрастает, если масса частицы уменьшается. С физической точки зрения, желательно теоретическое обоснование стохастичности, и многие исследователи изобретают стохастические геометрии, некоммутативные геометрии и другие экзотические геометрические построения для того, чтобы получить квантовую стохастичность. Но в римановой геометрии пространства-времени свободное движение частицы не зависит от ее массы, и в рамках римановой геометрии пространства-времени трудно объяснить стохастичность свойствами пространства-времени. Геометрия $\mathcal{G}_{\mathrm{d}}$ с дисторсией непринужденно объясняет стохастичность и ее зависимость от массы частицы. Кроме того, при надлежащем выборе дисторсии d статистическое описание стохастических мировых трубок $\mathcal{T}_{\mathrm{br}}$ приводит к квантовому описанию (уравнению Шредингера) [10]. Достаточно положить

$$d = \frac{\hbar}{2bc}, \tag{44}$$

где $\hbar$ есть квантовая постоянная, c – скорость света и b есть некоторая универсальная постоянная, связывающая геометрическую массу μ с обычной массой m частицы с помощью соотношения

$$m = b\mu\,. \tag{45}$$

Другими словами, пространственно-временна́я геометрия $\mathcal{G}_{\mathrm{d}}$ с дисторсией (32) ближе к реальной геометрии пространства-времени, чем геометрия Минковского $\mathcal{G}_{\mathrm{M}}$.

Статистическое описание случайных мировых трубок

Статистическое описание мировых линий не может быть вероятностным статистическим описанием, потому что число мировых линий может быть отрицательным. В самом деле, плотность мировых линий в окрестности пространственно-временно́й точки x определяется соотношением

$$dN = j^k dS_k, \tag{46}$$

где dN – поток мировых линий через пространственноподобную площадку dS_k. 4-вектор $j^k = j^k\,(x)$ описывает плотность мировых линий в окрестности точки x. Величина dN может быть интерпретирована как число мировых линий в окрестности точки x. Это число может быть отрицательным.

В нерелятивистском случае соотношение (46) превращается в соотношение

$$dN = j^0 dS_0 = \rho dV, \tag{47}$$

где плотность частиц $j^0 = \rho \geq 0$, и ρ может служить основой для введения плотности вероятности. В релятивистском случае нельзя ввести плотность вероятности, потому что плотность мировых линий описывается 4-вектором j^k.

Для статистического описания случайных мировых линий мы используем динамическую концепцию статистического описания (ДКСО), которое не использует понятия плотности вероятности [11].

Пусть $\mathcal{S}_{\rm st}$ есть стохастическая частица, состояние X которой описывается переменными $\left\{\mathbf{x}, \frac{d\mathbf{x}}{dt}\right\}$, где $\mathbf{x}$ описывает положение частицы. Эволюция состояния частицы случайна и не существует динамических уравнений для $\mathcal{S}_{\rm st}$. Эволюция состояния частицы $\mathcal{S}_{\rm st}$ содержит как регулярную, так и случайную составляющие. Для выделения регулярной составляющей мы рассмотрим множество (статистический ансамбль) $\mathcal{E}\left[\mathcal{S}_{\rm st}\right]$ из многих одинаковых независимых случайных частиц $\mathcal{S}_{\rm st}$. Все случайные частицы $\mathcal{S}_{\rm st}$ стартуют из одного и того же состояния. Это означает, что все $\mathcal{S}_{\rm st}$ приготовляются одним и тем же способом. Если число N таких частиц $\mathcal{S}_{\rm st}$ очень велико, случайные элементы эволюции компенсируют друг друга, а регулярные накапливаются. В пределе $N \to \infty$ статистический ансамбль $\mathcal{E}\left[\mathcal{S}_{\rm st}\right]$ превращается в динамическую систему, чье состояние эволюционирует в соответствии с некоторыми динамическими уравнениями.

Пусть статистический ансамбль $\mathcal{E}_{\rm d}\left[\mathcal{S}_{\rm d}\right]$ классических детерминированных частиц $\mathcal{S}_{\rm d}$ описывается действием $\mathcal{A}_{\mathcal{E}_{\rm d}\left[\mathcal{S}_{\rm d}(P)\right]}$, где P суть параметры, описывающие $\mathcal{S}_{\rm d}$ (например, масса, заряд). Пусть под влиянием некоторого стохастического агента детерминированная частица $\mathcal{S}_{\rm d}$ превращается в стохастическую частицу $\mathcal{S}_{\rm st}$. Действие $\mathcal{A}_{\mathcal{E}_{\rm st}\left[\mathcal{S}_{\rm st}\right]}$ для статистического ансамбля $\mathcal{E}_{\rm st}\left[\mathcal{S}_{\rm st}\right]$ приводится к действию $\mathcal{A}_{\mathcal{S}_{\rm red}\left[\mathcal{S}_{\rm d}\right]} = \mathcal{A}_{\mathcal{E}_{\rm st}\left[\mathcal{S}_{\rm st}\right]}$ для некоторого множества $\mathcal{S}_{\rm red}\left[\mathcal{S}_{\rm d}\right]$ одинаковых взаимодействующих детерминированных частиц $\mathcal{S}_{\rm d}$. Действие $\mathcal{A}_{\mathcal{S}_{\rm red}\left[\mathcal{S}_{\rm d}\right]}$ как функционал от состояния детерминированных частиц $\mathcal{S}_{\rm d}$ имеет вид $\mathcal{A}_{\mathcal{E}_{\rm d}\left[\mathcal{S}_{\rm d}(P_{\rm eff})\right]}$, где параметры $P_{\rm eff}$ являются параметрами P детерминированной частицы $\mathcal{S}_{\rm d}$, усредненными по статистическому ансамблю, и это усреднение описывает взаимодействие частиц $\mathcal{S}_{\rm d}$ во множестве $\mathcal{S}_{\rm red}\left[\mathcal{S}_{\rm d}\right]$. Это означает, что

$$\mathcal{A}_{\mathcal{E}_{\rm st}\left[\mathcal{S}_{\rm st}\right]} = \mathcal{A}_{\mathcal{S}_{\rm red}\left[\mathcal{S}_{\rm d}(P)\right]} = \mathcal{A}_{\mathcal{E}_{\rm d}\left[\mathcal{S}_{\rm d}(P_{\rm eff})\right]}. \tag{48}$$

Другими словами, стохастичность частиц $\mathcal{S}_{\rm st}$ в ансамбле $\mathcal{E}_{\rm st}\left[\mathcal{S}_{\rm st}\right]$ заменяется взаимодействием частиц $\mathcal{S}_{\rm d}$ в $\mathcal{S}_{\rm red}\left[\mathcal{S}_{\rm d}\right]$, и это взаимодействие описывается заменой

$$P \to P_{\rm eff} \tag{49}$$

в действии $\mathcal{A}_{\mathcal{E}_{\rm d}\left[\mathcal{S}_{\rm d}(P)\right]}$.

Свободная частица имеет единственных параметр – свою массу m, и действие $\mathcal{A}_{\mathcal{S}_{\rm d}}$ для свободной детерминированной частицы имеет вид

$$\mathcal{S}_{\rm d}: \qquad \mathcal{A}_{\mathcal{S}_{\rm d}}\left[\mathbf{x}\right] = \int \frac{m}{2}\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right)^2 dt, \tag{50}$$

где $\mathbf{x} = \mathbf{x}\left(t\right) = \left\{x^1\left(t\right), x^2\left(t\right), x^3\left(t\right)\right\}$, а время t является независимой переменной.

Действие $\mathcal{A}_{\mathcal{E}_{\rm d}\left[\mathcal{S}_{\rm d}(P)\right]}$ для чистого статистического ансамбля $\mathcal{E}_{\rm d}\left[\mathcal{S}_{\rm d}\right]$ свободных детерминированных частиц $\mathcal{S}_{\rm d}$ имеет вид

$$\mathcal{E}_{\rm d}\left[\mathcal{S}_{\rm d}\right]: \qquad \mathcal{A}_{\mathcal{E}_{\rm d}\left[\mathcal{S}_{\rm d}\right]}\left[\mathbf{x}\right] = \int \frac{m}{2}\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right)^2 dt\, d\xi, \tag{51}$$

где $\mathbf{x} = \mathbf{x}\left(t,\xi\right) = \left\{x^1\left(t,\xi\right), x^2\left(t,\xi\right), x^3\left(t,\xi\right)\right\}$. Независимые переменные $\xi = \left\{\xi_1, \xi_2, \xi_3\right\}$ маркируют элементы $\mathcal{S}_{\rm d}$ статистического ансамбля $\mathcal{E}_{\rm d}\left[\mathcal{S}_{\rm d}\right]$. Переменные ξ известны как лагранжевы координаты. Статистический ансамбль $\mathcal{E}_{\mathrm{d}}\left[\mathcal{S}_{\mathrm{d}}\right]$ есть непрерывная динамическая система, имеющая бесконечное число степеней свободы, тогда как частица $\mathcal{S}_{\mathrm{d}}$ есть дискретная динамическая система, имеющая шесть степеней свободы.

Если частицы стохастические, действие $\mathcal{A}_{\mathcal{E}_{\mathrm{st}}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]}$ для чистого статистического ансамбля $\mathcal{E}_{\mathrm{st}}\left[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}\right]$ свободных квантово-стохастических частиц $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$ имеет вид

$$\mathcal{E}_{\mathrm{st}}\left[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}\right]: \qquad \mathcal{A}_{\mathcal{E}_{\mathrm{st}}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]}\left[\mathbf{x},\mathbf{u}\right]=\int\left\{\frac{m}{2}\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right)^2+\frac{m}{2}\mathbf{u}^2-\frac{\hbar}{2}\nabla\mathbf{u}\right\}dt\,d\xi, \tag{52}$$

где $\mathbf{u}=\mathbf{u}\left(t,\mathbf{x}\right)$ есть векторная функция от аргументов $t,\mathbf{x}$ (а не от t,ξ), и $\mathbf{x}=\mathbf{x}\left(t,\xi\right)$ есть векторная функция от независимых переменных t,ξ. 3-вектор $\mathbf{u}$ описывает среднее значение стохастической составляющей движения частицы, которое является функцией переменных $t,\mathbf{x}$. Первый член $\frac{m}{2}\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right)^2$ описывает энергию регулярной составляющей движения стохастической частицы. Второй член $m\mathbf{u}^2/2$ описывает энергию случайной составляющей скорости. Составляющие $\frac{d\mathbf{x}}{dt}$ и $\mathbf{u}$ полной скорости связаны с разными степенями свободы, и их энергии должны быть представлены в виде суммы в выражении для плотности функции Лагранжа. Последний член $-\hbar\nabla\mathbf{u}/2$ описывает взаимодействие между регулярной составляющей $\frac{d\mathbf{x}}{dt}$ и случайной $\mathbf{u}$. Заметим, что $m\mathbf{u}^2/2$ является функцией от $t,\mathbf{x}$. Она влияет на регулярную составляющую $\frac{d\mathbf{x}}{dt}$ как потенциальная энергия $U\left(t,\mathbf{x},\nabla\mathbf{x}\right)=-m\mathbf{u}^2/2$, порожденная случайной составляющей.

Динамическая система (52) является статистическим ансамблем, потому что плотность функции Лагранжа в действии (52) не зависит явно от ξ, и мы можем представить действие для отдельной системы $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$

$$\mathcal{S}_{\mathrm{st}}: \qquad \mathcal{A}_{\mathcal{S}_{\mathrm{st}}}\left[\mathbf{x},\mathbf{u}\right]=\int\left\{\frac{m}{2}\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right)^2+\frac{m}{2}\mathbf{u}^2-\frac{\hbar}{2}\nabla\mathbf{u}\right\}dt. \tag{53}$$

К сожалению, выражение для действия (53) является только символическим, потому что дифференциальный оператор $\nabla=\left\{\partial/\partial x^\alpha\right\}$, $\alpha=1,2,3$ определен в непрерывной окрестности точки $\mathbf{x}$, а не для одной точки $\mathbf{x}$. Выражение (53) перестает быть символическим, если только $\hbar=0$. В этом случае последний член, содержащий ∇, обращается в ноль. Вариация действия (53) по $\mathbf{u}$ дает $\mathbf{u}=0$, и действие (53) совпадает с действием (51) для $\mathcal{S}_{\mathrm{d}}$. Если $\hbar\neq0$, выражение для действия (53) не является хорошо определенным, и динамические уравнения для $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$ не существуют.

Динамическое уравнение для $\mathbf{u}$ получается из функционала действия (52) с помощью вариации по $\mathbf{u}$. Если квантовая постоянная $\hbar=0$, то из динамического уравнения для $\mathbf{u}$ следует, что $\mathbf{u}=0$, и действие (52) приводится к виду (51). В общем случае $\hbar\neq0$ мы должны перейти к независимым переменным $\mathbf{x}$, потому что $\mathbf{u}$ является функцией от $t,\mathbf{x}$. Мы получаем вместо (52)

$$\mathcal{E}_{\mathrm{st}}\left[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}\right]: \qquad \mathcal{A}_{\mathcal{E}_{\mathrm{st}}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]}\left[\mathbf{x},\mathbf{u}\right]=\int\left\{\frac{m}{2}\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right)^2+\frac{m}{2}\mathbf{u}^2-\frac{\hbar}{2}\nabla\mathbf{u}\right\}\rho\,dt\,d\mathbf{x}, \tag{54}$$

$$\rho=\frac{\partial\left(\xi_1,\xi_2,\xi_3\right)}{\partial\left(x^1,x^2,x^3\right)}=\left(\frac{\partial\left(x^1,x^2,x^3\right)}{\partial\left(\xi_1,\xi_2,\xi_3\right)}\right)^{-1}. \tag{55}$$

Вариация (55) по $\mathbf{u}$ дает

$$\frac{\delta\mathcal{A}_{\mathcal{E}_{\mathrm{st}}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]}}{\delta\mathbf{u}}=m\rho\mathbf{u}+\frac{\hbar}{2}\nabla\rho=0. \tag{56}$$

Разрешая динамическое уравнение (56) относительно $\mathbf{u}$ в виде

$$\mathbf{u} = -\frac{\hbar}{2m}\nabla \ln \rho \tag{57}$$

можно исключить среднюю стохастическую скорость $\mathbf{u}$ из действия (54). Получаем вместо (54)

$$\mathcal{E}_{\mathrm{st}}\left[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}\right]: \qquad \mathcal{A}_{\mathcal{E}_{\mathrm{st}}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]}\left[\mathbf{x}\right] = \int \left\{ \frac{m}{2}\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right)^2 - U\left(\rho, \nabla\rho\right) \right\} \rho \, dt \, d\mathbf{x}, \tag{58}$$

где

$$\rho U\left(\rho, \nabla\rho\right) = -\frac{\hbar^2}{8m}\frac{\left(\nabla\rho\right)^2}{\rho} - \frac{\hbar^2}{4m}\rho\nabla^2 \ln \rho \tag{59}$$

и ρ определяется выражением (55). Исключая дивергенцию, получаем вместо (59)

$$U\left(\rho, \nabla\rho\right) = \frac{\hbar^2}{8m}\frac{\left(\nabla\rho\right)^2}{\rho^2} + \frac{\hbar^2}{4m}\frac{1}{\rho}\nabla^2\rho. \tag{60}$$

Последний член в (60) не дает вклада в динамические уравнения и может быть опущен. Действие (58) превращается в

$$\mathcal{E}_{\mathrm{st}}\left[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}\right]: \qquad \mathcal{A}_{\mathcal{E}_{\mathrm{st}}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]}\left[\xi\right] = \int \left\{ \frac{m}{2}\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right)^2 - \frac{\hbar^2}{8m}\frac{\left(\nabla\rho\right)^2}{\rho^2} \right\} \rho \, dt \, d\mathbf{x}, \tag{61}$$

где переменные $t, \mathbf{x}$ являются независимыми переменными, а переменные ξ рассматриваются как зависимые переменные. Величины ρ и $\frac{d\mathbf{x}}{dt}$ являются функциями производных от зависимых переменных ξ по t и $\mathbf{x}$

$$\rho = \frac{\partial\left(\xi_1, \xi_2, \xi_3\right)}{\partial\left(x^1, x^2, x^3\right)}, \tag{62}$$

$$\frac{dx^\alpha}{dt} = \frac{\partial\left(x^\alpha, \xi_1, \xi_2, \xi_3\right)}{\partial\left(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3\right)} = \rho^{-1}\frac{\partial\left(x^\alpha, \xi_1, \xi_2, \xi_3\right)}{\partial\left(t, x^1, x^2, x^3\right)}, \qquad \alpha = 1, 2, 3. \tag{63}$$

Динамические уравнения, порожденные действием (61), довольно сложны. Однако, в терминах волновой функции, действие (61) принимает более простой вид [12].

В терминах двухкомпонентной волновой функции ψ

$$\psi = \left\{\psi_1, \psi_2\right\}, \qquad \psi^* = \left\{ \begin{array}{c} \psi_1^* \\ \psi_2^* \end{array} \right\}, \qquad \rho \equiv \psi^*\psi \equiv \psi_1^*\psi_1 + \psi_2^*\psi_2, \tag{64}$$

действие (63) принимает вид

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\mathrm{st}}\left[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}\right] \ : \qquad \mathcal{A}_{\mathcal{E}_{\mathrm{st}}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]}\left[\psi, \psi^*\right] = \int \Bigg\{ & \frac{ib_0}{2}\left(\psi^*\partial_0\psi - \partial_0\psi^* \cdot \psi\right) - \frac{b_0^2}{2m}\nabla\psi^*\nabla\psi \\ & + \frac{b_0^2}{8m}\sum_{\alpha=1}^{\alpha=3}(\nabla s_\alpha)^2\rho + \frac{b_0^2 - \hbar^2}{8\rho m}(\nabla\rho)^2 \Bigg\} dt \, d\mathbf{x}, \end{aligned} \tag{65}$$

где

$$s_\alpha \equiv \frac{\psi^*\sigma_\alpha\psi}{\rho}, \qquad \alpha = 1, 2, 3, \tag{66}$$

и σ_α суть матрицы Паули

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{67}$$

Здесь постоянная b_0 является произвольной постоянной. Переход от действия (61) к действию (65) с помощью замены переменных сопровождается интегрированием динамических уравнений и появлением трех произвольных функций $\mathbf{g}(\xi) = \{g^1(\xi), g^2(\xi), g^3(\xi)\}$.

Замена переменных, связывающая зависимые переменные ξ и ψ, имеет вид (смотри Приложение А или [12])

$$\psi_\alpha = \sqrt{\rho}e^{i\varphi}u_\alpha(\xi), \qquad \psi^*_\alpha = \sqrt{\rho}e^{-i\varphi}u^*_\alpha(\xi), \qquad \alpha = 1, 2, \ldots, n, \tag{68}$$

$$\psi^*\psi \equiv \sum_{\alpha=1}^{n} \psi^*_\alpha\psi_\alpha, \tag{69}$$

где (*) означает комплексное сопряжение. Величины $u_\alpha(\xi)$, $\alpha = 1, 2, ... n$ являются функциями только переменных ξ и удовлетворяют соотношениям

$$-\frac{i}{2}\sum_{\alpha=1}^{n}\left(u^*_\alpha\frac{\partial u_\alpha}{\partial \xi_\beta} - \frac{\partial u^*_\alpha}{\partial \xi_\beta}u_\alpha\right) = g^\beta(\xi), \qquad \beta = 1, 2, 3, \qquad \sum_{\alpha=1}^{n} u^*_\alpha u_\alpha = 1. \tag{70}$$

Здесь φ – новая зависимая переменная, возникшая из фиктивной временнóй лагранжевой координаты ξ_0, а b_0 есть произвольная постоянная. Число n есть такое натуральное число, что уравнения (70) допускают решение. Вообще говоря, n зависит от вида произвольных функций $\mathbf{g} = \{g^\beta(\xi)\}$, $\beta = 1, 2, 3$.

Смысл волновой функции ψ не ясен, и интерпретация производится на основе действия (54) или (61), где смысл всех величин ясен. Действие (54) описывает течение некоторой жидкости с плотностью ρ, определяемой соотношением (55), и с плотностью потока

$$\mathbf{j} = \rho\frac{d\mathbf{x}}{dt}. \tag{71}$$

В терминах волновой функции ψ эти величины имеют вид

$$\rho = \psi^*\psi, \qquad \mathbf{j} = -\frac{ib_0}{2m}\left(\psi^*\nabla\psi - \nabla\psi^* \cdot \psi\right). \tag{72}$$

Функции $\mathbf{g}$ определяют завихренность течения жидкости. Если $\mathbf{g} = 0$, уравнения (70) имеют решение $u_1 = 1$, $u_\alpha = 0$, $\alpha = 2, 3, ... n$. В этом случае функция ψ может иметь один компонент (остальные обращаются в нуль), и течение жидкости потенциальное. Функция ψ имеет вид

$$\psi = \sqrt{\rho}e^{i\varphi}, \qquad \psi^* = \sqrt{\rho}e^{-i\varphi} \tag{73}$$

и скорость жидкости

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{j}}{\rho} = \nabla\frac{b_0\varphi}{m} \tag{74}$$

имеет потенциал $b_0\varphi/m$.

В частном случае потенциального течения жидкости

$$s_\alpha \equiv \frac{\psi^*\sigma_\alpha\psi}{\rho} = \text{const}, \qquad \alpha = 1, 2, 3 \tag{75}$$

и действие (65) превращается действие

$$\mathcal{A}_{\mathcal{S}_\mathrm{q}}\left[\psi,\psi^*\right]=\int\left\{\frac{ib_0}{2}\left(\psi^*\partial_0\psi-\partial_0\psi^*\cdot\psi\right)-\frac{b_0^2}{2m}\nabla\psi^*\nabla\psi+\frac{b_0^2-\hbar^2}{8\rho m}(\nabla\rho)^2\right\}dt\,d\mathbf{x}. \qquad (76)$$

Если выбрать произвольную постоянную b_0 в виде $b_0=\hbar$, действие (76) превращается в действие

$$\mathcal{A}_{\mathcal{S}_\mathrm{q}}\left[\psi,\psi^*\right]=\int\left\{\frac{i\hbar}{2}\left(\psi^*\partial_0\psi-\partial_0\psi^*\cdot\psi\right)-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla\psi^*\nabla\psi\right\}dt\,d\mathbf{x}, \qquad (77)$$

имеющее уравнение Шредингера

$$i\hbar\partial_0\psi=-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi \qquad (78)$$

в качестве динамического уравнения. Выражения (72) для плотности частиц и плотности тока частиц превращаются в традиционные выражения

$$\rho=\psi^*\psi,\qquad \mathbf{j}=-\frac{i\hbar}{2m}\left(\psi^*\nabla\psi-\nabla\psi^*\cdot\psi\right). \qquad (79)$$

Интерпретация всех величин получается на основе того факта, что квантовое описание в терминах уравнения Шредингера есть частный случай статистического описания в терминах статистического ансамбля (52).

Можно ли получить статистический ансамбль (52) из статистического ансамбля (51) с помощью замены $m\rightarrow m_\mathrm{eff}$? Да, это возможно, если представить нерелятивистское действие (51) как нерелятивистское приближение

$$\mathcal{E}_\mathrm{d}\left[\mathcal{S}_\mathrm{d}\right]:\qquad \mathcal{A}_{\mathcal{E}_\mathrm{d}[\mathcal{S}_\mathrm{d}]}\left[\mathbf{x}\right]=\int\left\{-mc^2+\frac{m}{2}\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right)^2\right\}dt\,d\xi \qquad (80)$$

релятивистского действия

$$\mathcal{E}_\mathrm{d}\left[\mathcal{S}_\mathrm{d}\right]:\qquad \mathcal{A}_{\mathcal{E}_\mathrm{d}[\mathcal{S}_\mathrm{d}]}\left[\mathbf{x}\right]=-\int mc^2\sqrt{1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right)^2}dt\,d\xi. \qquad (81)$$

Действие (52) получается из действия (80) как результат замены

$$m\rightarrow m_\mathrm{eff}=m\left(1-\frac{\mathbf{u}^2}{2c^2}+\frac{\hbar}{2mc^2}\nabla\mathbf{u}\right). \qquad (82)$$

Практически замена производится только в первом члене действия (80), потому что замена во втором члене дает дополнительный член порядка c^{-2}, который мал в нерелятивистском приближении. Другой вариант замены в действии (80) имеет вид

$$m\rightarrow m_\mathrm{eff}=m\left(1-\frac{\hbar^2}{8m^2c^2}\frac{(\nabla\rho)^2}{\rho^2}-\frac{\hbar^2}{4m^2c^2}\frac{1}{\rho}\nabla^2\rho\right) \qquad (83)$$

или

$$m\rightarrow m_\mathrm{eff}=m\left(1+\frac{\hbar^2}{8m^2c^2}\frac{(\nabla\rho)^2}{\rho^2}\right). \qquad (84)$$

Соотношение (83) получается из соотношения (82) после подстановки (57). Производя замену (84) в действии (80), получаем в нерелятивистском приближении действие (61).

В релятивистском случае вместо замены (82) получаем

$$m^2 \to m_{\mathrm{eff}}^2 = m^2 \left(1 + u_l u^l + \lambda \partial_l u^l\right), \qquad \lambda = \frac{\hbar}{mc}, \tag{85}$$

где переменные $u^k = u^k(x) = u^k(t, \mathbf{x})$, $k = 0, 1, 2, 3$ являются новыми зависимыми переменными, описывающими среднее значение случайной составляющей 4-скорости частицы. Замена (85) в действии (81) для статистического ансамбля свободных релятивистских частиц приводит в конце концов к действию [13]

$$\mathcal{A}[\psi, \psi^*] = \int \left\{\hbar^2 \partial_k \psi^* \partial^k \psi - m^2 c^2 \rho - \frac{\hbar^2}{4} \left(\partial_l s_\alpha\right) \left(\partial^l s_\alpha\right) \rho\right\} d^4 x, \tag{86}$$

где ψ есть двухкомпонентная волновая функция (68)–(70). Переменные ρ, s_α определяются соотношением (72) и кроме того постоянная $b_0 = \hbar$. Действие (86) является действием для статистического ансамбля свободных стохастических релятивистских частиц. В случае потенциального течения, когда волновая функция ψ может быть однокомпонентной, $s_\alpha = const$ и динамическое уравнение для действия (86) представляет собой уравнение Клейна-Гордона.

$$\hbar^2 \partial_k \partial^k \psi + m^2 c^2 \psi = 0. \tag{87}$$

Определение эффективной массы

Мы намерены показать, что замена (84) следует из вида мировой функции (32). На самом деле в работе [10] была решена обратная задача. Какой должна быть геометрия однородного пространства-времени, если статистическое описание свободных нерелятивистских частиц приводит к квантовому описанию в терминах уравнения Шредингера? Решив эту задачу, мы получили мировую функцию (32). Сейчас мы покажем, что эффективная масса m_{eff} нерелятивистской частицы определяется соотношением (84).

Математический формализм теоретической физики приспособлен для работы в пространстве-времени Минковского. Математического формализма для работы в искаженном пространстве-времени V_{d} с мировой функцией (32) в настоящее время еще нет. Мы вынуждены работать в пространстве-времени Минковского, используя традиционный формализм и принимая во внимание искажение пространства времени с помощью некоторых поправок.

Введем понятие *приведенного вектора* $\vec{p} = \vec{p}(a, P_0, P_1)$ как единства вещественного или мнимого числа a и двух точек $\{P_0, P_1\}$

$$\vec{p} = \vec{p}(a, P_0, P_1) = a\left(\mathbf{P}_0 \mathbf{P}_1\right) = a \mathbf{P}_0 \mathbf{P}_1. \tag{88}$$

Число a назовем *масштабом* приведенного вектора. Вектор $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ является частным случаем приведенного вектора $a\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ с масштабом $a = 1$. Скалярное произведение двух приведенных векторов $a_1\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ и $a_2\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$ определяется соотношением

$$\left(a_1 \mathbf{P}_0 \mathbf{P}_1 \cdot a_2 \mathbf{Q}_0 \mathbf{Q}_1\right) = a_1 a_2 \left(\mathbf{P}_0 \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{Q}_0 \mathbf{Q}_1\right). \tag{89}$$

Рассмотрим статистический ансамбль релятивистских частиц, описываемый действием (81) с ориентированной массой m_{o}, определенной соотношением

$$m_{\mathrm{o}} = b\mu_{\mathrm{o}}, \qquad \mu_{\mathrm{o}} = \left(\mathbf{P}_0 \mathbf{P}_1 . \vec{u}(R)\right), \tag{90}$$

где $\vec{u}=\vec{u}\,(R)$ – единичный приведенный вектор 4-скорости в точке $R\in\mathcal{T}_{[P_0P_1]}$, $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ – вектор импульса, деленный на скорость света c. Величина m_o называется *ориентированной массой,* потому что она зависит от взаимной ориентации векторов импульса и 4-скорости. Ориентированная масса имеет разный знак для частицы и античастицы.

4-скорость $\vec{u}=\vec{u}\,(R)$ является единичным приведенным вектором внутри сегмента $\mathcal{T}_{[P_0P_1]}$ в пространстве-времени V_d

$$\vec{u}\,(R)=\left|\mathbf{P}_0\mathbf{R}\right|_\text{d}^{-1}\mathbf{P}_0\mathbf{R}=\left(\mathbf{P}_0\mathbf{R}.\mathbf{P}_0\mathbf{R}\right)_\text{d}^{-1/2}\mathbf{P}_0\mathbf{R},\qquad R\in\mathcal{T}_{[P_0P_1]},\tag{91}$$

$$\left(\vec{u}\,(R)\,.\vec{u}\,(R)\right)_\text{d}=1.\tag{92}$$

Масса частицы, определенная соотношением (90), различна в V_d и в V_M. Поскольку $R\in\mathcal{T}_{[P_0P_1]}$ и, следовательно, $\mathbf{P}_0\mathbf{R}\uparrow\uparrow_\text{d}\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$

$$\left(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\cdot\mathbf{P}_0\mathbf{R}\right)_\text{d}=\left|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\right|_\text{d}\cdot\left|\mathbf{P}_0\mathbf{R}\right|_\text{d},\tag{93}$$

получаем для m_od

$$\begin{aligned}m_\text{od}&=b\left(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\vec{u}\,(R)\right)_\text{d}=b\left|\mathbf{P}_0\mathbf{R}\right|_\text{d}^{-1}\left(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_0\mathbf{R}\right)_\text{d}\\&=b\left|\mathbf{P}_0\mathbf{R}\right|_\text{d}^{-1}\cdot\left|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\right|_\text{d}\cdot\left|\mathbf{P}_0\mathbf{R}\right|_\text{d}=b\left|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\right|_\text{d}=b\mu_\text{d},\end{aligned}\tag{94}$$

где b – постоянная, определенная соотношением (45).

Если точка R на сегменте $\mathcal{T}_{[P_0P_1]}$ не слишком близка к концам P_0 и P_1, (т. е. $\left|\mathbf{P}_0\mathbf{R}\right|_\text{d}^2>2\sigma_0$, $\left|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\right|_\text{d}^2>2\sigma_0$) и выполняется соотношение (37), получаем для ориентированной массы m_oM в V_M

$$\begin{aligned}m_\text{oM}&=b\left(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\vec{u}\,(R)\right)_\text{M}=b\left|\mathbf{P}_0\mathbf{R}\right|_\text{d}^{-1}\left(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_0\mathbf{R}\right)_\text{M}\\&=b\left|\mathbf{P}_0\mathbf{R}\right|_\text{d}^{-1}\left(\left(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_0\mathbf{R}\right)_\text{d}-2d\right)\\&=b\left|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\right|_\text{d}-2db\left|\mathbf{P}_0\mathbf{R}\right|_\text{d}^{-1}=b\mu_\text{d}-\frac{2bd}{\left|\mathbf{P}_0\mathbf{R}\right|_\text{d}}.\end{aligned}\tag{95}$$

Таким образом, масса частицы m_oM, определенная соотношением (90) и вычисленная в V_M, зависит от точки R на поверхности сегмента $\mathcal{T}_{[P_0P_1]}$. В действии (81) используется некоторая эффективная масса m_eff, вычисленная в соответствии с (95) в пространстве-времени Минковского V_M с помощью соотношения

$$m_\text{eff}=b\left(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\vec{u}_\text{eff}\right)_\text{M},\tag{96}$$

где приведенный вектор $\vec{u}_\text{eff}$ является средней 4-скоростью внутри сегмента $\mathcal{T}_{[P_0P_1]}$.

Пусть точка P является центром сегмента $\mathcal{T}_{[P_0P_1]}$, как это показано на рис. 1. Точки P' и P'' являются центрами сегментов $\mathcal{T}_{\left[P_0'P_1'\right]}$, $\mathcal{T}_{\left[P_0''P_1''\right]}$, смежных мировых трубок статистического ансамбля. Рассмотрим нерелятивистский случай. Тогда векторы $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_0'\mathbf{P}_1'$, $\mathbf{P}_0''\mathbf{P}_1''$ можно считать параллельными в V_M. Пусть сегменты $\mathcal{T}_{[P_0P_1]}$, $\mathcal{T}_{\left[P_0'P_1'\right]}$, $\mathcal{T}_{\left[P_0''P_1''\right]}$ расположены таким образом, что $P\in\mathcal{T}_{\left[P_0'P_1'\right]}$, $P\in\mathcal{T}_{\left[P_0''P_1''\right]}$. 4-скорость сегмента $\mathcal{T}_{\left[P_0'P_1'\right]}$, определяемая вектором $\mathbf{P}_0'\mathbf{P}$, и 4-скорость сегмента $\mathcal{T}_{\left[P_0''P_1''\right]}$, определяемая вектором $\mathbf{P}_0''\mathbf{P}$**,** дают вклад в эффективную 4-скорость $\vec{u}_\text{eff}$ сегмента $\mathcal{T}_{[P_0P_1]}$. Поместим начало приведенного вектора эффективной 4-скорости $\vec{u}_\text{eff}$ в точку P. Пусть пространственное расстояние между точками P,P' и P,P'' равно l. В соответствии с соотношением (38) получаем

$$l=\sqrt{-\left|\mathbf{PP}'\right|^2}=\sqrt{-\left|\mathbf{PP}''\right|^2}=r\,(0.5)=\sqrt{\frac{3d}{2}}=\sqrt{\frac{3\hbar}{4bc}}.\tag{97}$$

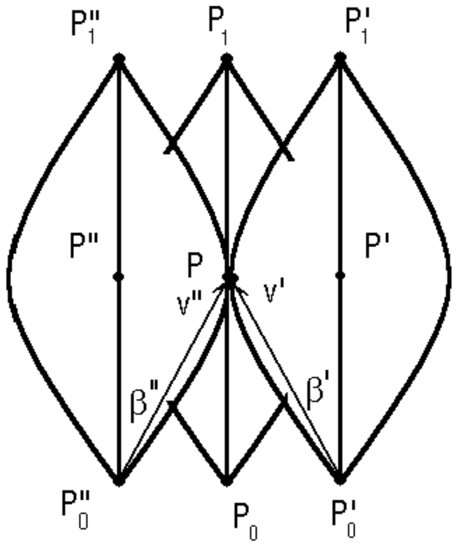


Рис. 1:

Выберем систему координат с началом в точке P и с временно́й осью, направленной вдоль вектора $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$. В этой системе координат в пространстве-времени V_{M} ковариантные компоненты вектора $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ имеют вид

$$\left(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\right)_k = \left\{\mu_{\mathrm{d}} c, 0, \right\}. \tag{98}$$

Ковариантные компоненты 4-скорости сегмента $\mathcal{T}_{[P'_0P'_1]}$ имеют вид

$$u^k = \left\{u^0, \mathbf{u}\right\} = \left\{ \frac{1}{c\sqrt{1-\frac{\mathbf{v}^2}{c^2}}}, -\frac{\mathbf{v}}{c\sqrt{1-\frac{\mathbf{v}^2}{c^2}}} \right\}, \qquad \mathbf{v} = -\frac{2\mathbf{x}}{\mu_{\mathrm{d}}} c, \tag{99}$$

где $\mathbf{x}$ суть пространственные координаты точки P'. Эффективная 4-скорость в точке P представляет собой сумму вкладов всех сегментов $\mathcal{T}_{[P'_0P'_1]}$

$$u^0_{\mathrm{eff}} = A \int \rho(\mathbf{x})\, \delta\left(l^2 - \mathbf{x}^2\right) u^0(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}, \tag{100}$$

$$l = \sqrt{\frac{3\hbar}{4bc}}, \tag{101}$$

$$\mathbf{u}_{\mathrm{eff}} = A \int \rho(\mathbf{x})\, \delta\left(l^2 - \mathbf{x}^2\right) \mathbf{u}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = -A \int \frac{\rho(\mathbf{x})\, \delta\left(l^2 - \mathbf{x}^2\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{2\mathbf{x}}{\mu_{\mathrm{d}}}\right)^2}} \frac{2\mathbf{x}}{\mu_{\mathrm{d}}} d\mathbf{x}, \tag{102}$$

где величина ρ – плотность мировых трубок в статистическом ансамбле, а величина A определяется из условия нормировки приведенного вектора $\vec{u}_{\mathrm{eff}}(P)$

$$c^2 \left(u^0_{\mathrm{eff}}\right)^2 - \mathbf{u}^2_{\mathrm{eff}} = 1. \tag{103}$$

Предполагая, что $\rho(\mathbf{x})$ изменяется медленно и разлагая $\rho(\mathbf{x})$ в ряд по степеням $\mathbf{x}$, получаем из (100), (102)

$$u^0_{\mathrm{eff}} = A \int \frac{\rho}{c\sqrt{1-\left(\frac{2\mathbf{x}}{\mu_{\mathrm{d}}}\right)^2}} \delta\left(l^2 - \mathbf{x}^2\right) d\mathbf{x} = \frac{2\pi A \rho l}{c\sqrt{1-\left(\frac{2l}{\mu_{\mathrm{d}}}\right)^2}}, \tag{104}$$

$$\mathbf{u}_{\text{eff}} = -A\int \frac{(\mathbf{x}\nabla)\rho}{\sqrt{1-\left(\frac{2\mathbf{x}}{\mu_{\text{d}}}\right)^2}}\delta\left(l^2-\mathbf{x}^2\right)\frac{2\mathbf{x}}{\mu_{\text{d}}}cd\mathbf{x} = -\frac{4\pi Al^3\nabla\rho}{3\mu_{\text{d}}\sqrt{1-\left(\frac{2l}{\mu_{\text{d}}}\right)^2}}, \tag{105}$$

где ρ – значение плотности в точке P. Подставляя (104), (105) в (103) и используя (101), получаем

$$A = \frac{\sqrt{1-\left(\frac{2l}{\mu_{\text{d}}}\right)^2}}{2\pi l\rho\sqrt{1-\left(\frac{\hbar}{2m_{\text{d}}c}\nabla\ln\rho\right)^2}}. \tag{106}$$

Подставляя (106) в (104), получаем

$$u_{\text{eff}}^0 = \frac{1}{c\sqrt{1-\left(\frac{\hbar}{2m_{\text{d}}c}\nabla\ln\rho\right)^2}}. \tag{107}$$

Из соотношений (96), (98) и (107) следует

$$m_{\text{eff}} = m_{\text{d}}cu_{\text{eff}}^0 = m_{\text{d}}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{\hbar}{2m_{\text{d}}c}\nabla\ln\rho\right)^2}} = m_{\text{d}}\left(1+\frac{\hbar^2}{8m_{\text{d}}^2c^2}\left(\nabla\ln\rho\right)^2\right). \tag{108}$$

Этот результат совпадает с соотношением (84).

Мы допускаем, что существуют другие методы расчета величины m_{eff}, которые дают другой результат. В этом случае следует выбрать другую мировую функцию пространства-времени V_{d}, которая приводит к результату (108), потому что мы знаем, что эффективная масса, определяемая соотношением (108), согласуется с экспериментальными данными. Мы знаем о геометрии искаженного пространства-времени только то, что оно порождает стохастическое движение свободных частиц. Информация о его мировой функции получается из требования, чтобы мировая функция приводила к эффективной массе, определяемой соотношением (108).

Дальнейшее развитие статистического описания геометрической стохастичности приводит к созданию *модельной концепции квантовых явлений* (МККЯ), которая относится к традиционной теории квантовых явлений примерно так же, как статистическая физика относится к аксиоматической термодинамике. МККЯ является хорошо определенной релятивистской концепцией с эффективными методами исследования [14], тогда как традиционная квантовая теория не является хорошо определенной, поскольку она использует неправильную геометрию пространства-времени. Неправильность геометрии компенсируется дополнительными гипотезами (принципами квантовой механики). Кроме того, имеются проблемы с применением формализма нерелятивистской квантовой механики к релятивистским явлениям.

Геометрия $\mathcal{G}_{\text{d}}$ так же однородна, как геометрия Минковского, потому что мировая функция σ_{d} инвариантна относительно всех преобразований координат, относительно которых инвариантна мировая функция σ_{M}. В этой связи возникает вопрос, нельзя ли придумать аксиоматику для $\mathcal{G}_{\text{d}}$ и получить геометрию $\mathcal{G}_{\text{d}}$ из этой аксиоматики с помощью надлежащих логических рассуждений. Заметим, что такая аксиоматика должна зависеть от параметра d, потому что мировая функция σ_{d} зависит от этого параметра. Если $d = 0$, эта аксиоматика совпадает с аксиоматикой геометрии Минковского $\mathcal{G}_{\text{M}}$. Если $d \neq 0$, эта аксиоматика не может совпадать с аксиоматикой геометрии $\mathcal{G}_{\text{M}}$, потому что некоторые аксиомы геометрии $\mathcal{G}_{\text{M}}$ не выполняются в этом случае.

Вообще говоря, изобретение аксиоматики, зависящей от параметра d и в общем случае от функции дисторсии D, представляется очень трудной задачей. Кроме того, зачем изобретать аксиоматику? Мы получили аксиоматику для собственно евклидовой геометрии, которая была построена раньше. Нет необходимости повторять этот процесс всякий раз, когда мы строим новую геометрию. Достаточно применить принцип деформации к уже построенной евклидовой геометрии, записанной в σ-имманентном виде. Применение принципа деформации к евклидовой геометрии – очень простая и очень общая процедура, которая не ограничена условиями непрерывности, выпуклости и другими искусственными ограничениями, порожденными предвзятым подходом к физической геометрии. (Предвзятость подхода заключается в априорном допущении об одномерности прямой линии в любой физической геометрии, которое напоминает мнение древних египтян, что все реки текут на север).

Итак, мы видим, что невырожденность физической геометрии, так же как неодномерность прямой линии, являются свойствами реальных физических геометрий. Собственно евклидова геометрия является основой для всех физических геометрий, и она вырождена полностью. Однако, это не причина для отрицания существования невырожденных физических геометрий.

Принцип деформации вместе с σ-имманентным описанием оказывается очень эффективным математическим инструментом для построения физических геометрий:

1. Принцип деформации использует результаты, полученные при построении собственно евклидовой геометрии, и не добавляет каких-нибудь дополнительных предположений о свойствах геометрических объектов.

2. Принцип деформации использует только действительную характеристику физической геометрии – ее мировую функцию и не использует каких-нибудь дополнительных средств описания.

3. Принцип деформации очень прост и позволяет исследовать только ту часть геометрии, которая нам интересна.

4. Применение принципа деформации позволяет получить истинную геометрию пространства-времени, неожиданные свойства которой не могут быть получены при традиционном подходе к физической геометрии.

Приложение.

Преобразование действия для статистического ансамбля.

Чтобы преобразовать действие (61) к описанию в терминах волновой функции, перепишем его в виде

$$\mathcal{E}_{\rm st}\left[\mathcal{S}_{\rm st}\right]: \qquad \mathcal{A}_{\mathcal{E}_{\rm st}\left[\mathcal{S}_{\rm st}\right]}\left[\mathbf{x}\right]=\int\left\{\frac{m}{2}\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right)^{2}-\frac{\hbar^{2}}{8m}\frac{\left(\nabla\rho\right)^{2}}{\rho^{2}}\right\}dt\,d\xi, \tag{109}$$

где

$$\rho=\frac{\partial\left(\xi_{1},\xi_{2},\xi_{3}\right)}{\partial\left(x^{1},x^{2},x^{3}\right)}=\left(\frac{\partial\left(x^{1},x^{2},x^{3}\right)}{\partial\left(\xi_{1},\xi_{2},\xi_{3}\right)}\right)^{-1}. \tag{110}$$

Введем независимую переменную ξ_0 вместо переменной $t=x^0$ и перепишем действие (109) в виде

$$\mathcal{A}_{\mathcal{E}_{\rm st}\left[\mathcal{S}_{\rm st}\right]}\left[x\right]=\int\left\{\frac{m\dot{x}^{\alpha}\dot{x}^{\alpha}}{2\dot{x}^{0}}-\frac{\hbar^{2}}{8m}\frac{\left(\nabla\rho\right)^{2}}{\rho^{2}}\right\}d^{4}\xi, \qquad \dot{x}^{k}\equiv\frac{\partial x^{k}}{\partial\xi_{0}}, \tag{111}$$

где $\xi = \{\xi_0, \boldsymbol{\xi}\} = \{\xi_k\}$, $k = 0,1,2,3$, $x = \left\{x^k(\xi)\right\}$, $k = 0,1,2,3$. Здесь и далее производится суммирование по повторяющимся греческим индексам (1−3).

Будем рассматривать переменные $\xi = \xi(x)$ в (111) как зависимые переменные, а переменные x как независимые переменные. Пусть якобиан

$$J = \frac{\partial(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3)}{\partial(x^0, x^1, x^2, x^3)} = \det\left|\left|\xi_{i,k}\right|\right|, \qquad \xi_{i,k} \equiv \partial_k \xi_i, \qquad i,k = 0,1,2,3 \tag{112}$$

рассматривается как полилинейная функция от переменных $\xi_{i,k}$. Тогда

$$d^4\xi = Jd^4x, \qquad \dot{x}^i \equiv \frac{\partial x^i}{\partial \xi_0} \equiv \frac{\partial(x^i, \xi_1, \xi_2, \xi_3)}{\partial(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3)} = J^{-1}\frac{\partial J}{\partial \xi_{0,i}}, \qquad i = 0,1,2,3. \tag{113}$$

После преобразования к зависимым переменным ξ действие (111) принимает вид

$$\mathcal{A}_{\mathcal{E}_{\mathrm{st}}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]}[\xi] = \int \left\{\frac{m}{2}\frac{\partial J}{\partial \xi_{0,\alpha}}\frac{\partial J}{\partial \xi_{0,\alpha}}\left(\frac{\partial J}{\partial \xi_{0,0}}\right)^{-1} - \frac{\hbar^2}{8m}\frac{(\nabla\rho)^2}{\rho}\right\} d^4x, \tag{114}$$

Здесь зависимая переменная ξ_0 фиктивна.

Введем новые переменные

$$j^k = \frac{\partial J}{\partial \xi_{0,k}}, \qquad k = 0,1,2,3, \qquad \rho = j^0 \tag{115}$$

с помощью множителей Лагранжа p_k

$$\mathcal{A}_{\mathcal{E}_{\mathrm{st}}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]}[\xi, j, p] = \int \left\{\frac{m}{2}\frac{j^\alpha j^\alpha}{j^0} - \frac{\hbar^2}{8m}\frac{(\nabla\rho)^2}{\rho} + p_k\left(\frac{\partial J}{\partial \xi_{0,k}} - j^k\right)\right\} d^4x. \tag{116}$$

Здесь и далее производится суммирование $(0-3)$ по повторяющимся латинским индексам.

Заметим, что в соответствии с (113), соотношения (115) могут быть записаны в виде

$$j^k = \left\{\frac{\partial J}{\partial \xi_{0,0}}, \frac{\partial J}{\partial \xi_{0,0}}\left(J^{-1}\frac{\partial J}{\partial \xi_{0,\alpha}}\right)\left(J^{-1}\frac{\partial J}{\partial \xi_{0,0}}\right)^{-1}\right\} = \left\{\rho, \rho\frac{dx^\alpha}{dt}\right\}, \qquad \rho \equiv \frac{\partial J}{\partial \xi_{0,0}}. \tag{117}$$

Из (117) очевидно, что j^k есть 4-поток частиц, причем $j^0 = \rho$ является плотностью частиц.

Вариация действия (116) по ξ_i дает

$$\frac{\delta \mathcal{A}_{\mathcal{E}_{\mathrm{st}}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]}}{\delta \xi_i} = -\partial_l\left(p_k\frac{\partial^2 J}{\partial \xi_{0,k}\partial \xi_{i,l}}\right) = -\frac{\partial^2 J}{\partial \xi_{0,k}\partial \xi_{i,l}}\partial_l p_k = 0, \qquad i = 0,1,2,3. \tag{118}$$

Используя тождества

$$\frac{\partial^2 J}{\partial \xi_{0,k}\partial \xi_{i,l}} \equiv J^{-1}\left(\frac{\partial J}{\partial \xi_{0,k}}\frac{\partial J}{\partial \xi_{i,l}} - \frac{\partial J}{\partial \xi_{0,l}}\frac{\partial J}{\partial \xi_{i,k}}\right), \tag{119}$$

$$\frac{\partial J}{\partial \xi_{i,l}}\xi_{k,l} \equiv J\delta_k^i, \qquad \partial_l\frac{\partial^2 J}{\partial \xi_{0,k}\partial \xi_{i,l}} \equiv 0 \tag{120}$$

можно проверить прямой подстановкой, что общее решение линейных уравнений (118) имеет вид

$$p_k = \frac{b_0}{2}\left(\partial_k\varphi + g^\alpha(\xi)\,\partial_k\xi_\alpha\right), \qquad k = 0,1,2,3, \tag{121}$$

где $b_0 \neq 0$ есть произвольная постоянная, $g^\alpha(\xi)$, $\alpha = 1,2,3$ суть произвольные функции переменных $\xi = \{\xi_1,\xi_2,\xi_3\}$, и φ есть динамическая переменная ξ_0, которая перестала быть фиктивной. Именно это концептуальное интегрирование позволяет ввести волновую функцию. Подставим (121) в (116). Член вида $\partial_k\varphi\partial J/\partial\xi_{0,k}$ приводится к якобиану и не дает вклада в динамическое уравнение. Члены вида $\xi_{\alpha,k}\partial J/\partial\xi_{0,k}$ обращаются в нуль в силу тождеств (120). Получаем

$$\mathcal{A}_{\mathcal{E}_{\mathrm{st}}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]}[\varphi,\xi,j] = \int\left\{\frac{m}{2}\frac{j^\alpha j^\alpha}{j^0} - j^k p_k - \frac{\hbar^2}{8m}\frac{(\nabla\rho)^2}{\rho}\right\}d^4x, \qquad j^0 = \rho, \tag{122}$$

где величины p_k определяются соотношениями (121).

Варьирование действия (122) по j^k дает

$$p_0 = -\frac{m}{2}\frac{j^\alpha j^\alpha}{\rho^2} + \frac{\hbar^2}{8m}\left(\frac{(\nabla\rho)^2}{\rho^2} + 2\nabla\frac{(\nabla\rho)}{\rho}\right), \tag{123}$$

$$p_\beta = m\frac{j^\beta}{\rho}, \qquad \beta = 1,2,3. \tag{124}$$

Исключим теперь переменные $\mathbf{j} = \{j^1,j^2,j^3\}$ из действия (122), используя соотношение (124). Получаем

$$\mathcal{A}_{\mathcal{E}_{\mathrm{st}}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]}[\rho,\varphi,\xi] = \int\left\{-p_0 - \frac{p_\beta p_\beta}{2m} - \frac{\hbar^2}{8m}\frac{(\nabla\rho)^2}{\rho^2}\right\}\rho d^4x, \tag{125}$$

где величины p_k определяются соотношением (121).

Теперь вместо зависимых переменных ρ,φ,ξ введем n-компонентную комплексную функцию ψ, определив ее соотношениями (68) – (70).

Функция ψ следующим образом построена из переменной φ, плотности жидкости ρ и лагранжевых координат ξ, рассматриваемых как функции от $(t,\mathbf{x})$, [12]. n-компонентная комплексная функция $\psi = \{\psi_\alpha\}$, $\alpha = 1,2,\ldots,n$ определяется соотношениями

$$\psi_\alpha = \sqrt{\rho}e^{i\varphi}u_\alpha(\xi), \qquad \psi_\alpha^* = \sqrt{\rho}e^{-i\varphi}u_\alpha^*(\xi), \qquad \alpha = 1,2,\ldots,n, \tag{126}$$

$$\psi^*\psi \equiv \sum_{\alpha=1}^{n}\psi_\alpha^*\psi_\alpha, \tag{127}$$

где (*) означает комплексное сопряжение. Величины $u_\alpha(\xi)$, $\alpha = 1,2,\ldots,n$ суть функции только переменных ξ, и удовлетворяют соотношениям

$$-\frac{i}{2}\sum_{\alpha=1}^{n}\left(u_\alpha^*\frac{\partial u_\alpha}{\partial\xi_\beta} - \frac{\partial u_\alpha^*}{\partial\xi_\beta}u_\alpha\right) = g^\beta(\xi), \qquad \beta = 1,2,3, \qquad \sum_{\alpha=1}^{n}u_\alpha^*u_\alpha = 1. \tag{128}$$

Число n есть такое натуральное число, что уравнения (128) допускают решение. Вообще говоря, n зависит от вида произвольных функций $\mathbf{g} = \{g^\beta(\xi)\}$, $\beta = 1,2,3$. Функции $\mathbf{g}$ определяют завихренность течения жидкости.

Легко проверить, что

$$\rho = \psi^*\psi, \qquad \rho p_0\left(\varphi, \xi\right) = -\frac{ib_0}{2}(\psi^*\partial_0\psi - \partial_0\psi^* \cdot \psi), \tag{129}$$

$$\rho p_\alpha\left(\varphi, \xi\right) = -\frac{ib_0}{2}(\psi^*\partial_\alpha\psi - \partial_\alpha\psi^* \cdot \psi), \qquad \alpha = 1, 2, 3. \tag{130}$$

Вариационная проблема с функционалом действия (125) оказывается эквивалентной вариационной проблеме с функционалом действия

$$\mathcal{A}_{\mathcal{E}_{\mathrm{st}}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]}[\psi, \psi^*] = \int \left\{ \frac{ib_0}{2}(\psi^*\partial_0\psi - \partial_0\psi^* \cdot \psi) + \right. \\ \left. + \frac{b_0^2}{8m\rho}(\psi^*\nabla\psi - \nabla\psi^* \cdot \psi)^2 - \frac{\hbar^2}{8m}\frac{(\nabla\rho)^2}{\rho} \right\} \mathrm{d}^4x. \tag{131}$$

Мы надеемся, что в случае $n = 2$ уравнения (128) имеют решение для любых функций $\mathbf{g}$, потому что в этом случае число (четыре) вещественных составляющих функции ψ совпадает с числом гидродинамических переменных j^k $(k = 0, 1, 2, 3)$. (Однако, это утверждение пока не доказано). Для двухкомпонентной функции ψ $(n = 2)$ выполняются следующие тождества

$$(\nabla\rho)^2 - (\psi^*\nabla\psi - \nabla\psi^* \cdot \psi)^2 \equiv 4\rho\nabla\psi^*\nabla\psi - \rho^2 \sum_{\alpha=1}^{\alpha=3} \left(\nabla s_\alpha\right)^2, \tag{132}$$

$$\rho \equiv \psi^*\psi, \qquad s \equiv \frac{\psi^*\sigma\psi}{\rho}, \qquad \sigma = \{\sigma_\alpha\}, \qquad \alpha = 1, 2, 3, \tag{133}$$

где σ_α суть матрицы Паули. В силу тождества (132) действие (131) приводится к виду

$$\mathcal{E}_{\mathrm{st}}\left[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}\right] : \qquad \mathcal{A}_{\mathcal{E}_{\mathrm{st}}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]}\left[\psi, \psi^*\right] = \int \left\{ \frac{ib_0}{2}\left(\psi^*\partial_0\psi - \partial_0\psi^* \cdot \psi\right) - \frac{b_0^2}{2m}\nabla\psi^*\nabla\psi \right. \\ \left. + \frac{b_0^2}{8m}\sum_{\alpha=1}^{\alpha=3}(\nabla s_\alpha)^2\rho + \frac{b_0^2 - \hbar^2}{8\rho m}(\nabla\rho)^2 \right\} d^4x, \tag{134}$$

где $\mathbf{s}$ и ρ определяются соотношениями (133). Таким образом, мы доказали соотношение (65).

Литература

[1] F. Klein, *Vorlesungen über die Entwicklung die Mathematik im 19. Jahrhundert* teil 1, Berlin, Springer 1926.

[2] D. Hilbert, *Grundlagen der Geometrie*. 7 Auflage, ed. B.G.Teubner, Leipzig, Berlin, 1930.

[3] J. L. Synge, *Relativity: The General Theory*, North-Holland, Amsterdam, 1960..

[4] Yu. A. Rylov, Geometry without topology as a new conception of geometry. *Int. Jour. Mat. & Mat. Sci.* **30**, iss. 12, 733-760, (2002), (available at http:// arXiv.org/abs/math.MG/0103002).

[5] Yu. A. Rylov, Extremal properties of Synge's world function and discrete geometry. *J. Math. Phys.* **31**, 2876-2890, (1990).

[6] Yu. A. Rylov, Asymmetric nondegenerate geometry. (In preparation, available at http:// arXiv.org/abs/math.MG/0205061).

[7] K. Menger, Untersuchen über allgemeine Metrik, *Mathematische Annalen,* **100**, 75-113, (1928).

[8] L. M. Blumenthal, *Theory and Applications of Distance Geometry*, Oxford, Clarendon Press, 1953.

[9] Yu. A. Rylov, Deformation principle and problem of parallelism in geometry and physics. *(*In preparation, available at http://arXiv.org/abs/math.GM/0210413)

[10] Yu. A. Rylov, Non-Riemannian model of space-time responsible for quantum effects. *J. Math. Phys.* **32**, 2092-2098, (1991).

[11] Yu. A. Rylov, Dynamics of stochastic systems and peculiarities of measurements in them. (Available at http://arXiv.org/abs/physics/0210003).

[12] Yu. A. Rylov, Spin and wave function as attributes of ideal fluid. *J. Math. Phys.* **40**, No.1, 256-278, (1999).

[13] Yu. A. Rylov, Classical description of pair production. (Available at http:// arXiv.org/abs/physics/0301020).

[14] Yu. A. Rylov, Model conception of quantum phenomena: logical structure and investigation methods. (In preparation, available at http://arXiv.org/abs /physics/0310050, v2).

The deformation principle as foundation of physical geometry and its applications to Geometry of Space-Time

Yu. A. Rylov

Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia
rylov@ipmnet.ru

Physical geometry studies mutual disposition of geometrical objects and points in space, or space-time, which is described by the distance function d, or by the world function $\sigma = d^2/2$. One suggests a new general method of the physical geometry construction. The proper Euclidean geometry is described in terms of its world function σ_{E}. Any physical geometry $\mathcal{G}$ is obtained from the Euclidean geometry as a result of replacement of the Euclidean world function σ_{E} by the world function σ of $\mathcal{G}$. This method is very simple and effective. It introduces a new geometric property: nondegeneracy of geometry. Using this method, one can construct deterministic space-time geometries with primordially stochastic motion of free particles and geometrized particle mass. Such a space-time geometry defined properly (with quantum constant as an attribute of geometry) allows one to explain quantum effects as a result of the statistical description of the stochastic particle motion (without a use of quantum principles).

Key-words: Physical Geometry, stochastic motion, geometric object, quantum effects, world function.
MSC: 51K05, 58B32, 60D05, 81S10, 81S20.

НИЛЬПОТЕНТНЫЙ ВАКУУМ[1]

П. Роуландс

Department of Physics, University of Liverpool, Oliver Lodge Laboratory
p.rowlands@liverpool.ac.uk

Вектор фермионного состояния, который является нильпотентным, или квадратным корнем из нуля, представляет собой наиболее удобное средство для объединения таких фундаментальных физических понятий как время, масса и заряд в одной величине. Он удобен и в качестве суперсимметричного квантовополевого оператора, который задает единственным образом одновременно амплитуду и фазу любого фермионного состояния, и объединяет в одной записи все специфические аспекты, требуемые при БРСТ-квантовании полей. Математическая структура вектора состояния непосредственно порождает вакуумные члены, относящиеся ко всем четырем фундаментальным взаимодействиям, и объясняет нарушение симметрии между ними. Включив все вакуумные аспекты в наше понимание фермиона, мы получаем "теорию струн без струн". Операторы нильпотентного вакуума приводят к связям со многими известными вакуумными эффектами, включая эффект Казимира и нулевую энергию.

Ключевые слова: фермионное состояние, кватернионы, эффект Казимира.

1. Вектор нильпотентного состояния

Фермионное состояние является наиболее эффективной формой объединения или упаковки в одну величину четырех фундаментальных параметров физики: времени, пространства, массы и заряда. В процессе упаковки соответствующие псевдоскалярные, векторные и скалярные единицы первых трех величин объединяются посредством применения одной из трех кватернионных единиц (quaternion charge units) по отдельности к каждой другой. Таким образом,

время	пространство	масса	заряд
i	$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$	1	$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$

строятся как новые псевдоскалярные, векторные и скалярные величины, энергия, импульс и масса покоя $(E, \mathbf{p}, m)$:

$i\boldsymbol{k}$	$\mathbf{i}\boldsymbol{i}\ \mathbf{j}\boldsymbol{i}\ \mathbf{k}\boldsymbol{i}$	$1\boldsymbol{j}$
E	$\mathbf{p}$	$m.$

В то же время, симметрия между кватернионными единицами нарушается для создания слабого, сильного и электрического зарядов (w, s, e) с соответствующими псевдоскалярными, векторными и скалярными характеристиками.

$$w \qquad s \qquad e$$

Отсюда следует, что составное дираковское состояние $(\pm \boldsymbol{k}E \pm i\boldsymbol{i}\mathbf{p} + i\boldsymbol{j}m)$ (где члены повсюду условно умножены на i) должно выражаться как через зарядовое состояние фермиона, так и через его энергетическое состояние. В действительности, процесс упаковки

---

[1] Перевод Р. Михайлова.

одновременно создает зарядовое пространство $(w - s - e)$, которое дуально фазовому пространству $(E - \mathbf{p} - m)$.

Составное фермионное или дираковское состояние $(\pm \boldsymbol{k}E \pm i\boldsymbol{i}\mathbf{p} + i\boldsymbol{j}m)$ является нильпотентным, или квадратным корнем из нуля, ввиду того что соотношение $(\pm \boldsymbol{k}E \pm i\boldsymbol{i}\mathbf{p} + i\boldsymbol{j}m)(\pm \boldsymbol{k}E \pm i\boldsymbol{i}\mathbf{p} + i\boldsymbol{j}m) = E^2 - p^2 - m^2 = 0$ – это просто стандартное релятивистское соотношение между энергией, импульсом и массой покоя. Здесь вектор импульса $\mathbf{p}$ рассматривается как многозначный, учитывая идею спина. В этом случае $\mathbf{pp} = \mathbf{p}.\mathbf{p} + i\mathbf{p} \times \mathbf{p} = (\sigma.\mathbf{p})(\sigma.\mathbf{p}) = pp = p^2$. Создание нильпотентного состояния как одного пакета требует одновременного порождения фундаментальных констант $\hbar, c$ и G, чтобы обеспечить подходящее масштабное соответствие членов. На деле, нильпотентная структура требует одновременного участия специальной относительности и квантования, а также их взаимной необходимости, – это единственный способ достижения данной цели. Члены E и $\mathbf{p}$ в состоянии могут представлять либо собственные значения, либо операторы, в зависимости от того, выбираем ли мы консервативное или неконсервативное представление состояния. Используя операторную версию состояния $(\pm \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial t} \pm i\boldsymbol{i}\nabla + i\boldsymbol{j}m)$, мы можем выписать эквивалентную *сопряженную метрику* $(\pm \boldsymbol{k}t \pm i\boldsymbol{i}\mathbf{r} \pm i\boldsymbol{j}\tau)$, где τ – собственное время. В классическом пределе это превращается в определение специальной относительности в нильпотентной форме.

Нильпотент в операторной форме задает состояние в целом, и амплитуду и фазу, ввиду того, что фазовый член однозначно задается требованием нильпотентности собственного значения (или амплитуды). Это дополнительное ограничивающее условие возникает лишь в нильпотентной формулировке и приводит к тому, что для описания состояния не нужно ни уравнение Дирака, ни какое-либо другое. Это особенно важно в случае, когда операторы E и $\mathbf{p}$ заменяются ковариантными производными, или производными, содержащими полевые члены, ввиду того, что применяется тот же самый принцип. Решение уравнения Дирака в данном случае заменяется процессом нахождения фазового члена, который делает амплитуду дираковского состояния нильпотентной. В частном случае точечного заряда любого рода, со сферической симметрией как минимальным требованием, требование нильпотентности приводит к минимальному условию, эквивалентному обратному линейному (кулоновскому) потенциалу.

Благодаря включению дополнительных симметрий, возникших из-за нильпотентности, фермионное состояние становится автоматически вторично-квантованным, с встроенной суперсимметрией. Амплитуда и фаза задаются однозначно тем же оператором, и тем же способом являются квантованными. Знаки ± перед членами $\boldsymbol{k}E$ и $i\boldsymbol{i}\mathbf{p}$ представляют четыре одновременных "решения" для дираковского фермионного состояния: фермион / антифермион $(\pm \boldsymbol{k}E)$, спин вверх / спин вниз $(\pm i\boldsymbol{i}\mathbf{p})$, – и полное представление нильпотентного оператора является 4-компонентным вектором-строкой или столбцом, таким же образом, как и стандартный дираковский спинор. Отсюда мы можем определить антифермионное состояние, как состояние, имеющее форму $(\mp \boldsymbol{k}E \pm i\boldsymbol{i}\mathbf{p} + i\boldsymbol{j}m)$. Фермион с перевернутым спином будет $(\pm \boldsymbol{k}E \mp i\boldsymbol{i}\mathbf{p} + i\boldsymbol{j}m)$; бозон со спином 1: $(\pm \boldsymbol{k}E \pm i\boldsymbol{i}\mathbf{p} + i\boldsymbol{j}m)(\mp \boldsymbol{k}E \pm i\boldsymbol{i}\mathbf{p} + i\boldsymbol{j}m)$ и бозон со спином 0: $(\pm \boldsymbol{k}E \pm i\boldsymbol{i}\mathbf{p} + i\boldsymbol{j}m)(\mp \boldsymbol{k}E \mp i\boldsymbol{i}\mathbf{p} + i\boldsymbol{j}m)$. Конденсированное состояние Бозе-Эйнштейна, пара Купера, или их "бозонный" двуфермионный эквивалент примут форму $(\pm \boldsymbol{k}E \pm i\boldsymbol{i}\mathbf{p} + i\boldsymbol{j}m)(\pm \boldsymbol{k}E \mp i\boldsymbol{i}\mathbf{p} + i\boldsymbol{j}m)$. В случае барионов, мы особым образом используем векторную структуру оператора $\mathbf{p}$ и строим смешанное (entangled) состояние, в котором первый ряд в спиноре имеет вид $(\boldsymbol{k}E \pm i\boldsymbol{i}p_x + i\boldsymbol{j}m)(\boldsymbol{k}E \pm i\boldsymbol{i}p_y + i\boldsymbol{j}m)(\boldsymbol{k}E \pm i\boldsymbol{i}p_z + i\boldsymbol{j}m)$. Барионное состояние, таким образом, имеет три компоненты (условно описываемые как "кварки"), представляющие шесть возможных "фаз" узнаваемой $SU(3)$ симметрии, в которых $\mathbf{p}$ есть соответственно $\pm i\mathbf{i}p_x, \pm i\mathbf{i}p_y, \pm i\mathbf{i}p_z$. Три компоненты составного бариона будут тогда иметь обычные свойства, соответствующие компонентам векторов, и могут быть разъединены не в большей мере, чем размерности пространства или импульса. Калибровочно инвариантный нелокальный "перенос" $\mathbf{p}$ между фазами будет происходить с постоянной скоростью, независимо от любой концепции физического разделения. Такая постоянная скорость изменения импульса эквивалентна постоянной силе или потенциалу, линейному по расстоянию.

Нильпотентное состояние естественным образом подчиняется принципу несовместности Паули, ввиду того, что $(\pm\boldsymbol{k}E \pm i\boldsymbol{i}\mathbf{p} + i\boldsymbol{j}m)(\pm\boldsymbol{k}E \pm i\boldsymbol{i}\mathbf{p} + i\boldsymbol{j}m) = 0$, и нелокальность является другим автоматическим следствием. КЭД, КХД, КФД выводимы непосредственным образом, причем пропагаторы, определенные через нильпотентные состояния, устраняют инфракрасные расходимости [3]. Особое квантование поля становится ненужным, ввиду того что нильпотентные члены уже являются вторично проквантованными полевыми операторами. Они являются также точно суперсимметричными, с операторами $Q = (\pm\boldsymbol{k}E \pm i\boldsymbol{i}\mathbf{p} + i\boldsymbol{j}m)$ и $Q^+ = (\mp\boldsymbol{k}E \pm i\boldsymbol{i}\mathbf{p} + i\boldsymbol{j}m)$, обращающими бозоны в фермионы, и фермионы в бозоны или бозоны в антифермионы соответственно. Точная суперсимметрия означает отождествление частиц с их собственными суперсимметричными партнерами, что предполагает вакуумную связь. Преобразования C, P, T могут быть представлены как:

$$\begin{aligned}
&-\boldsymbol{j}(\boldsymbol{k}E + i\boldsymbol{i}\mathbf{p} + i\boldsymbol{j}m)\boldsymbol{j} = (-\boldsymbol{k}E - i\boldsymbol{i}\mathbf{p} + i\boldsymbol{j}m);\\
&\boldsymbol{i}(\boldsymbol{k}E + i\boldsymbol{i}\mathbf{p} + i\boldsymbol{j}m)\boldsymbol{i} = (\boldsymbol{k}E - i\boldsymbol{i}\mathbf{p} + i\boldsymbol{j}m);\\
&\boldsymbol{k}(\boldsymbol{k}E + i\boldsymbol{i}\mathbf{p} + i\boldsymbol{j}m)\boldsymbol{k} = (-\boldsymbol{k}E + i\boldsymbol{i}\mathbf{p} + i\boldsymbol{j}m),
\end{aligned}$$

с CPT-инвариантностью, как легко выводимым следствием. Полуцелость спина фермионов может быть получена стандартным формальным путем, например:

$$\begin{aligned}
[\hat{\sigma}, \mathcal{H}] &= [-\mathbf{1}, -\boldsymbol{j}(\mathbf{i}p_1 + \mathbf{j}p_2 + \mathbf{k}p_3) + i\boldsymbol{k}m] = 2i\boldsymbol{j}\mathbf{1} \times \mathbf{p}\\
[\mathbf{L}, \mathcal{H}] &= -\boldsymbol{k}\boldsymbol{i}[\mathbf{r}, \mathbf{1}.\mathbf{p}] \times \mathbf{p} = -\boldsymbol{j}[\mathbf{r}, \mathbf{1}.\mathbf{p}] \times \mathbf{p} = -i\boldsymbol{j}\mathbf{1} \times \mathbf{p},
\end{aligned}$$

так как $[\mathbf{r}, \mathbf{1}.\mathbf{p}]\psi = i\mathbf{1}\psi$. Тогда $[\mathbf{L} + \hat{\sigma}/2, \mathcal{H}] = 0$, что делает $\mathbf{L} + \hat{\sigma}/\mathbf{2}$ константой движения.

Однако, значение полуцелого спина в физическом смысле представляется таким, как это подразумевается естественной точной суперсимметрией: чисто фермионное состояние в некотором смысле может рассматриваться как неполное без своего вакуумного партнера.

2. Операторы дираковского вакуума

Четырехкомпонентный спинор, представляющий нильпотентное дираковское состояние, включает в себя четыре оператора рождения/уничтожения:

создание фермиона со спином вверх =
уничтожение антифермиона со спином вниз $(\boldsymbol{k}E + i\boldsymbol{i}\mathbf{p} + i\boldsymbol{j}m)$,
создание фермиона со спином вниз =
уничтожение антифермиона со спином вверх $(\boldsymbol{k}E - i\boldsymbol{i}\mathbf{p} + i\boldsymbol{j}m)$,
создание антифермиона со спином вверх =
уничтожение фермиона со спином вниз $(-\boldsymbol{k}E - i\boldsymbol{i}\mathbf{p} + i\boldsymbol{j}m)$,
создание антифермиона со спином вниз =
уничтожение фермиона со спином вверх $(-\boldsymbol{k}E + i\boldsymbol{i}\mathbf{p} + i\boldsymbol{j}m)$.

Взяв любой из этих операторов, мы можем также указать вакуумные операторы, которые (предполагая подходящую нормализацию) оставляют состояние неизменным. Например, $(\boldsymbol{k}E+\boldsymbol{i}i\mathbf{p}+\boldsymbol{i}\boldsymbol{j}m)$ остается неизменным после перемножения на $\boldsymbol{k}(\boldsymbol{k}E+\boldsymbol{i}i\mathbf{p}+\boldsymbol{i}\boldsymbol{j}m)$ любое число раз:

$$(\boldsymbol{k}E+\boldsymbol{i}i\mathbf{p}+\boldsymbol{i}\boldsymbol{j}m)\boldsymbol{k}(\boldsymbol{k}E+\boldsymbol{i}i\mathbf{p}+\boldsymbol{i}\boldsymbol{j}m)\boldsymbol{k}(\boldsymbol{k}E+\boldsymbol{i}i\mathbf{p}+\boldsymbol{i}\boldsymbol{j}m)\ldots$$

Однако, $\boldsymbol{k}(\boldsymbol{k}E+\boldsymbol{i}i\mathbf{p}+\boldsymbol{i}\boldsymbol{j}m)\mathbf{k}$ идентичен оператору рождения антифермиона $(-\boldsymbol{k}E+\boldsymbol{i}i\mathbf{p}$ $+\boldsymbol{i}\boldsymbol{j}m)$, поэтому мы можем также записать это выражение с альтернативными членами, соответствующими рождению фермионов/антифермионов:

$$(\boldsymbol{k}E+\boldsymbol{i}i\mathbf{p}+\boldsymbol{i}\boldsymbol{j}m)(-\boldsymbol{k}E+\boldsymbol{i}i\mathbf{p}+\boldsymbol{i}\boldsymbol{j}m)(\mathbf{k}E+\boldsymbol{i}i\mathbf{p}+\boldsymbol{i}\boldsymbol{j}m)(-\boldsymbol{k}E+\boldsymbol{i}i\mathbf{p}+\boldsymbol{i}\boldsymbol{j}m)\ldots,$$

либо как процесс альтернативного рождения фермионов/бозонов через операторы суперсимметрии $QQ^{+}QQ^{+}\ldots$ Состояние рождения антифермиона здесь действует как вакуумное "отражение" состояния рождения фермиона и обратно, в то время как настоящий фермион и его виртуальный двойник в комбинации создают суперсимметричного бозонного партнера, что идентично оригинальному фермионному рождению. Мы можем расширить данное рассуждение до утверждения, что действительное состояние рождения бозона, такое как $(\boldsymbol{k}E+\boldsymbol{i}i\mathbf{p}+\boldsymbol{i}\boldsymbol{j}m)(-\boldsymbol{k}E+\boldsymbol{i}i\mathbf{p}+\boldsymbol{i}\boldsymbol{j}m)$, будет порождать одновременно суперсимметричные виртуальные антифермионные и фермионные состояния как соответствующие вакуумные отражения компонент операторов рождения $(\boldsymbol{k}E+\boldsymbol{i}i\mathbf{p}+\boldsymbol{i}\boldsymbol{j}m)$ и $(-\boldsymbol{k}E+\boldsymbol{i}i\mathbf{p}+\boldsymbol{i}\boldsymbol{j}m)$.

Выражение $\boldsymbol{k}(\boldsymbol{k}E+\boldsymbol{i}i\mathbf{p}+\boldsymbol{i}\boldsymbol{j}m)$, однако, не единственно для определения "вакуумного" состояния: $\boldsymbol{i}(\boldsymbol{k}E+\boldsymbol{i}i\mathbf{p}+\boldsymbol{i}\boldsymbol{j}m)$ и $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{k}E+\boldsymbol{i}i\mathbf{p}+\boldsymbol{i}\boldsymbol{j}m)$ обладают теми же самыми свойствами, и также должны быть рассмотрены как вакуумные операторы. В случае $\boldsymbol{i}(\boldsymbol{k}E+\boldsymbol{i}i\mathbf{p}+\boldsymbol{i}\boldsymbol{j}m)$ вакуумное "отражение" требует изменения ориентации спина. В случае же $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{k}E+\boldsymbol{i}i\mathbf{p}+\boldsymbol{i}\boldsymbol{j}m)$, фермион отражается как антифермион с дополнительным изменением спина. Каждый из этих трех случаев порождает суперсимметричные состояния бозонного типа, которые являются спин 1, спин 0 и конденсацией Бозе-Эйнштейна, для коэффициентов $\boldsymbol{k}$,$\boldsymbol{j}$ и $\boldsymbol{i}$ соответственно. Однако, не существует *дискретного* вакуумного эквивалента для $1(\boldsymbol{k}E+\boldsymbol{i}i\mathbf{p}+\boldsymbol{i}\boldsymbol{j}m)$, потому что это исключается принципом Паули:

$$(\boldsymbol{k}E+\boldsymbol{i}i\mathbf{p}+\boldsymbol{i}\boldsymbol{j}m)1(\boldsymbol{k}E+\boldsymbol{i}i\mathbf{p}+\boldsymbol{i}\boldsymbol{j}m)=0.$$

В то же время, два различных вакуумных состояния могут лишь комбинационным образом создать третье посредством физической части коэффициентов, то есть $E,\mathbf{p}$ или m.

Определение вакуумных состояний через коэффициенты $\boldsymbol{k}$,$\boldsymbol{j}$ и $\boldsymbol{i}$ приводит к новому пониманию четырех "решений", характеризующих дираковское состояние. Первый ряд спинора представляет фермионное/антифермионное состояние, в то время как остальные три ряда являются тремя дискретными отражениями вакуума. Три коэффициента могут также рассматриваться как последствия концепции дискретного (точечного) заряда.

$$\begin{array}{lcll}
\boldsymbol{k}(\boldsymbol{k}E+\boldsymbol{i}i\mathbf{p}+\boldsymbol{i}\boldsymbol{j}m) & \text{или} & i\boldsymbol{k}E(\boldsymbol{k}E+\boldsymbol{i}i\mathbf{p}+\boldsymbol{i}\boldsymbol{j}m) & \text{слабый вакуум,}\\
\boldsymbol{i}(\boldsymbol{k}E+\boldsymbol{i}i\mathbf{p}+\boldsymbol{i}\boldsymbol{j}m) & \text{или} & \boldsymbol{i}\mathbf{p}(\boldsymbol{k}E+\boldsymbol{i}i\mathbf{p}+\boldsymbol{i}\boldsymbol{j}m) & \text{сильный вакуум,}\\
\boldsymbol{j}(\boldsymbol{k}E+\boldsymbol{i}i\mathbf{p}+\boldsymbol{i}\boldsymbol{j}m) & \text{или} & \boldsymbol{j}m(\boldsymbol{k}E+\boldsymbol{i}i\mathbf{p}+\boldsymbol{i}\boldsymbol{j}m) & \text{электрический вакуум.}
\end{array}$$

Заряд в данной интерпретации является проявлением вакуума, и как в случае зарядов, три вакуума (vacua) совершенно независимы друг от друга, ничего не зная о существования остальных.

Вектор нильпотентного состояния включает в себя действительную и виртуальные компоненты, таким же образом, как он включает в себя массу и заряд, и zitterbewegung[2] может быть интерпретирован как переключение между ними. Это является причиной того, что векторы состояния суперсимметричны. Действительный фермион и множество его дуальных вакуумных образов в комбинации дают однозначное состояние бозонного спина, аналогичное консервативной физической системе, одновременно включающей в себя действие и противодействие согласно третьему закону Ньютона или вириальное удвоение кинетической энергии в потенциальной энергии. По этой причине фермионные и антифермионные векторы состояний имеют идентичные компоненты, с единственным отличием – какое из состояний, с энергией $+E$ или $-E$, действительно реализуемо.

Рождение "действительного" фермиона отличается своим действительным коэффициентом (1) от "образных" вакуумных состояний, которые индуцируются слабыми, электрическими и сильными элементами, и описываются посредством кватернионных коэффициентов. Поэтому первый член дираковского 4-спинора имеет иной статус, чем остальные, как и временная координата имеет иной статус, чем пространственные координаты, в стандартном 4-векторе Минковского. В случае свободного фермиона (или бозона), этот статус особо важен. Вакуумные члены тогда не дают вклада в энергию частицы, учитывая, что ренормализация не является необходимой, как показывает нильпотентная версия квантовой электродинамики. При ренормализации уничтожается воздействие лишь "образных" члены, воздействие "действительного" члена остается неизменным.

3. БРСТ-квантование

Нильпотентный оператор Дирака, являющийся автоматически вторично-квантованным, уже включает в себя полное представление квантового поля. Тем не менее, более стандартные подходы к квантованию полей могут быть использованы для иллюстрации связи между операторами заряда и энергии, необходимой для построения нильпотентного формализма. Условно, взаимодействия совершаются посредством поглощения и испускания виртуальных бозонных квантов слабых, сильных и электрических полей. Процессы расширяются до бесконечности в вакууме, с бесконечной последовательностью "петлевых диаграмм" в фейнмановском формализме. Бесконечные процессы порождают расходимости, которые могут быть устранены посредством ренормализации, с переопределением значений массы и заряда в соответствии с силой взаимодействия. Однако, в нильпотентной формулировке свободный невзаимодействующий фермион не имеет определеного значения заряда, и бесконечная последовательность точно суперсимметричных бозонных или фермионных петель автоматически обращается в нуль [3]. "Ренормализация" предстает как просто механизм "пересчета" для фиксации значений при разных мощностях взаимодействий, которые при вычислении возмущений ограничены энергией обрезания, равной планковской массе.

Нильпотентные операторы специального вида используются и в стандартной квантовой теории поля, и было бы полезно представить связь между ними и членами формы $(\pm \boldsymbol{k}E \pm i\boldsymbol{i}\mathbf{p} + i\boldsymbol{j}m)$, рассмотренными как операторы энергии и одновременно заряда. Каноническое квантование электромагнитного поля использует кулоновскую калибровку, но это влечет нарушение лоренцевой инвариантности. Подход интеграла по путям позволяет нам использовать любую калибровку, и поэтому сохранять инвариантность Ло-

---

[2] Zitterbewegung (нем.) – квантовое дрожание (букв. "пугливое, дрожащее движение") – термин, введенный Шредингером для обозначения специфического движения микрочастиц.

ренца, но проблема теперь состоит во введении нефизических или "фиктивных" полей духов Фаддеева-Попова. Версия, используемая в теории струн (БРСТ), устраняет духовые поля посредством объединения всей информации в единый оператор, примененный к лагранжиану. Существенно, что БРСТ оператор (δ_{BRST}) является нильпотентным. Этот оператор может быть использован для создания нетерового тока (J_μ), соответствующего сохраняющемуся нильпотентному БРСТ фермионному заряду (Q_{BRST}). Условие для определения физического состояния принимает вид:

$$Q_{BRST}|\psi\rangle = 0.$$

В дираковской нильпотентной формулировке оператор ($\pm \boldsymbol{k}E \pm i\boldsymbol{i}\mathbf{p} + i\boldsymbol{j}m$), который применяется только к физическим состояниям (на массовой оболочке), уже является вторично проквантованным и нильпотентным оператором формы δ_{BRST}. Он также является нильпотентным оператором *заряда,* формы Q_{BRST}, но расширенным для включения не только электромагнитных, но и слабых, сильных зарядов. В конечном итоге, он в форме собственных значений идентичен $|\psi\rangle$. Таким образом, три возможных понимания выражения ($\pm \boldsymbol{k}E \pm i\boldsymbol{i}\mathbf{p} + i\boldsymbol{j}m$), применяются соответственно к: E и $\mathbf{p}$, интерпретируемым как дифференциальные операторы во времени и пространстве; $E, \mathbf{p}$ и m как к коэффициентам, определяющим природу зарядов, заданных посредством $\boldsymbol{k}$,$\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{j}$; E и $\mathbf{p}$, интерпретируемым как собственные значения энергии и импульса. Поэтому нильпотентный оператор Дирака доставляет одновременно все характеристики, которые нужны для раздельных БРСТ-членов δ_{BRST}, Q_{BRST} и $|\psi\rangle$.

4. Слабый вакуум

Мы можем рассмотреть функцию заряда как "разбиение" непрерывного вакуума, которое мы никогда непосредственно не наблюдаем, в отличие от дискретного случая. Заряд становится видом вакуумного состояния, соответствующего квантово-полевой природе вектора состояния. Различные заряды соответствуют качественно разным вакуумным состояниям посредством их соотнесения с псевдоскалярными, векторными и скалярными коэффициентами. Три дискретные вакуумные структуры (discrete vacua) описывают только часть вакуума, которую воспринимает только соответствующий тип заряда.

Полный вакуум, который порождает зарядовое разбиение, есть выражение непрерывной или несчетной природы энергии-массы. Непрерывность неизбежно делает массу-энергию одномерными и однополярными, и, ввиду действительности, ограничивает ее одним математическим знаком, который чаще всего берется положительным. Мы можем интерпретировать это как следствие несимметричности основного состояния, или заполненного вакуума, который представляется отрицательной энергией или антифермионами. Физически это проявляет себя в поле Хиггса, которое нарушает симметрию зарядового сопряжения для слабых взаимодействий и дает массу покоя фермионам и слабым калибровочным бозонам.

Использование члена $\boldsymbol{k}E$ для слабого вакуума обеспечивает то, что мы для всего вакуума выразим непрерывность энергии-массы и одновременно необратимость времени. Никакое физическое состояние не может быть соотнесено с $-E$, хотя зарядово-сопряженное состояние $-i\boldsymbol{k}E$ может быть определено изменением знака оператора $i\boldsymbol{k}$. В принципе, это приводит к нарушению слабого зарядового сопряжения, что означает, что слабое взаимодействие безразлично к знаку слабого заряда, и может различать лишь фермионы и антифермионы. Для сохранения CPT-симметрии либо четность, либо симметрия обращения времени также должны быть нарушены.

Ввиду того, что оператор $\boldsymbol{k}$ меняет заряды фермиона на антифермион, слабый вакуум – единственный, который связан с уничтожением/рождением фермиона/антифермиона. Псевдоскалярный аспект означает, что вакуумное или зарядовое состояние, или потенциал, могут быть комплексными, что необходимо для нарушения CP. Псевдоскалярное представление также естественным образом предполагает биполярность, ввиду фундаментальной математической двойственности $\pm i$, и неразличимости знаков при нарушении слабого зарядового сопряжения. Это особое свойство слабого взаимодействия возникает как конечная причина различных фаз материи и фазовых переходов, когда неразличимость знака допускается для эффективного устранения слабой компоненты в фермион-фермионных комбинациях, и таким образом преодолевает аспекты принципа запрета Паули.

Предполагая, что требование непрерывности энергии вакуума обеспечивает физическое преобладание материи над антиматерией, мы получаем, что вакуум должен обладать слабым дипольным моментом, проявляющимся как одностороннее вращение, представляемое как $1/2\hbar\omega$ мода колебания нулевого уровня энергии. В принципе, на это можно взглянуть как на причину появления лево-ориентированных фермионных спинов, где фермион создается одновременно со своим вакуумным отражением. Если слабый вакуум находится в непрерывном состоянии, или в состоянии, объявленном заполненным, посредством рождения слабых диполей, которые имеют дипольный момент или специфическую ориентацию, то мы можем также ожидать, что "флуктуации" в этом вакууме будут соответствовать рождению или уничтожению слабой дипольной фермион-антифермионной пары, каждый со спином 1/2, посредством гармонического осцилляторного механизма рождения-уничтожения. Флуктуации такого вида соответствуют силе Казимира или ван дер Ваальса с энергией нулевого уровня, в соответствии с потенциалом для флуктуации диполь-дипольного взаимодействия.

Наполненный слабый вакуум, необходимый для непрерывного состояния энергии, приводит к механизму Хиггса, посредством которого фермионы и слабо взаимодействующие бозоны приобретают массу. Чистый слабый заряд, может быть, в целом, лево-ориентированным, но мера противоположной ориентации появится, когда будут применены другие условия, которые при сохранении лоренц-инвариантности, эквивалентны появлению массы покоя. Типичное условие появляется, когда возникают не только слабые заряды. Заряд и инерционная масса являются эффективно различными локализациями вакуума.

5. Сильный вакуум

Сильное взаимодействие, как мы его знаем, проявляется посредством нелокального глюонного моря, с переключением компонент импульса в членах как знака, так и направления, что включает шесть фаз. Это в точности то, что обеспечивается членом $\pm i\boldsymbol{i}\mathbf{p}$ в векторе состояния. Замечено, что барионная структура является, по существу, аффинной, распадаясь на компоненты глюонов и комбинации виртуальных барионов ad infinitum[3]. Это в точности то, что мы можем ожидать от аффинной природы оператора $\mathbf{p}$, компоненты которого могут быть разъединены (или зафиксированы) не более, чем соответственно размерности пространства.

Векторная природа сильного оператора также означает, что сильный вакуум – единственный, который имеет определенные относительные фазы. В сильно взаимодействующих системах, фазы связаны с наличием или отсутствием компонент электрического или слабого заряда. Там, где фазы, ассоциированные с этими компонентами,

---

[3] Ad infinitum – (лат.) до бесконечности.

совпадают не остается возможности для различения фаз, а следовательно, нет сильного взаимодействия.

6. Электрический вакуум

Фермионные состояния относятся к состояниям со слабыми зарядами. Однако, существуют два типа фундаментальных фермионных состояний: кварк и лептон. Для кварков фазы **p** определены, и s заряды наличествуют; для лептонов они неопределенные, а s заряды отсутствуют. Как различные типы зарядов и вакуум существуют полностью независимо друг от друга, слабый заряд не должен отличаться в зависимости от присутствия или отсутствия сильного заряда. Таким образом, распределения слабых и электрических зарядов для кварков и фермионов должно следовать той же модели; поэтому, дробные электрические заряды, распределенные по кваркам, являются просто выражениями совершенной калибровочной инвариантности сильного взаимодействия, аналогично процессу создания дробного заряда в квантовом эффекте Холла, – и не являются собственными аспектами структуры кварка. В то же время, слабый заряд должен быть независим относительно присутствия или отсутствия e.

Фермионные состояния с электрическим зарядом и без него, стандартно описываются как $SU(2)_L$ состояния (вверх / вниз, нейтрино, электрон, и т. д.); они должны возникать как *явно* неразличимые относительно слабого взаимодействия. Обычно мы используем третью компоненту слабого изоспина (t_3), по аналогии с $SU(2)$ спина, как квантовое число для различия этих состояний. Для двух изоспиновых состояний, $t_3 = \pm 1/2$, но только для половины полного числа состояний (только для лево-ориентированных). Для свободных фермионов, квантовое число электрической силы принимает значение $Q = -1$, где представлен электрический заряд $(-e)$ (и взят, как обычно, с отрицательным знаком), снова для половины числа состояний (хотя и для другой половины). Если слабое и электрическое взаимодействия описаны некоторой калибровочной группой Великого Объединения, ортогональность и условия нормализации требуют смешанного соотношения, вводимого как $sin^2\theta_W$, определяемого посредством $Tr(t_3^2)/Tr(Q^2)$, и равного в данном случае 0.25.

Однако, соотношение не может быть применено только к свободным фермионам, если слабые взаимодействия независимы от присутствия или отсутствия сильного заряда. Таким образом, в точности та же пропорция смешения, с $sin^2\theta_W = 0.25$, должна существовать и для кварковых состояний, и по отдельности для каждой "цветовой" фазы, или направления импульса; так что слабое взаимодействие не может обнаруживаться посредством "цвета". Интерпретация "цвета" через фазы или направления импульса допускает мгновенное существование лишь одной кварковой фазы в трех. Таким образом мы получаем, что вариация заряда $0\ 0\ -e$ должна быть взята в противоположность как пустому фону, или "электрическому вакууму" $(0\ 0\ 0)$, так и заполненному фону $(e\ e\ e)$, так что два состояния слабого изоспина в трех цветах становятся:

$$\begin{matrix} e & e & 0 \\ 0 & 0 & -e. \end{matrix}$$

Наиболее ясное проявление электрического вакуума должно, следовательно, входить в $SU(2)_L$ для слабого взаимодействия. Слабый вакуум, который полон и не может быть обратим, эффективно контрастирует с электрическим вакуумом, который может быть заполнен или опустошен, либо обращен для антифермионов. Однако, в то время как структуры $SU(3)$ и $U(1)$ прямо возникают из вектора **p** и скалярных m членов в дираковском состоянии, структура $SU(2)$ для слабого взаимодействия связана лишь с $SU(2)$-спин структурой, относящейся косвенным образом к псевдоскаляру E. Это происходит потому, что член E, входящий в уравнение, не представляет асимметрию физического E полным образом. $SU(2)$ для E является и $SU(2)$ для спиральности, и связано с $SU(2)_L$ для слабого изоспина лишь посредством матрицы (подобной CKM матрицы), включающей массу покоя. Это зависимость массы, связанная с заполненной природой вакуума в механизме Хиггса, который превращает $SU(2) \to SU(2)_L$.

Смешивание членов E и $\mathbf{p}$, или право- и лево-ориентированных компонент в нильпотентном векторе состояния, также эквивалентно смешиванию e и w зарядов, или электрических и слабых вакуумных структур, но это смешивание не может, по существу, влиять на слабое взаимодействие, которое не обладает право-ориентированными компонентами для фермионов. Таким образом, слабое взаимодействие должно быть одновременно лево-ориентированным для фермионных состояний и независимым относительно существования или отсутствия электрического заряда, который вводит право-ориентированный элемент.

7. Гравитационный вакуум

Три члена дираковского 4-спинора представляют три его дискретные вакуумные "отражения" фермиона; четвертый же (стандартно размещаемый в первом ряду), представляет само создание частицы. Ввиду того, что три вакуумные отражения порождаются членами, которые являются также операторами заряда, естественно заключить, что заряд является фундаментальным вакуумным генератором. В то же время, масса фермиона и соответствующая энергия вакуума могут быть рассмотрены как "порожденные" оператором "массы" (1). Так, мы можем рассмотреть гравитацию, силу, порожденную массой, как представляемой вакуумным оператором формы $1(\pm i\boldsymbol{k}E \pm \boldsymbol{i}\mathbf{p} + \boldsymbol{j}m)$. Однако, более вероятно, что гравитационный вакуум имеет форму $-1(\boldsymbol{k}E + i\boldsymbol{i}\mathbf{p} + i\boldsymbol{j}m)$, член, аннулирующий дираковское состояние.

Многие полагали, что гравитация является дискретной силой. Однако, она возникает из непрерывного вакуума и является единственным серьезным кандидатом на роль нелокальности для мгновенной квантовой корреляции дираковского состояния, и для источника бесконечного спектра нуль-энергии. Использование коэффициента 1 может быть взято как эквивалент утверждению о том, что гравитационный вакуум не может быть проквантован непосредственно. Одним из путей представления этого состоит в том, чтобы определить гравитационную энергию как отрицательную (ввиду силы отталкивания) и соотнести заполненный вакуум с отрицательным состоянием энергии, как предлагается в оригинальной теории позитрона Дирака, и как объясняется отсутствие антиматерии из основного состояния Вселенной.

Тем не менее, существует дискретное вакуумное представление, связанное с массой. Это инерционная компонента, связанная с дискретной массой покоя, которая проявляет себя в структуре фермионного и бозонного заряда. В механизме Хиггса это знаменуется нелокальным конечным уровнем энергии для слабого вакуума. Инерционная компонента может быть рассмотрена как дискретная локальная реакция, заданная посредством $1(\pm i\boldsymbol{k}E \pm \boldsymbol{i}\mathbf{p} + \boldsymbol{j}m)$ на непрерывную нелокальную гравитационную энергию, заданную посредством $-1(\boldsymbol{k}E + i\boldsymbol{i}\mathbf{p} + i\boldsymbol{j}m)$. Можно сказать, что полная нуль-энергия "вселенной" появляется как комбинация положительного нильпотента (инерции, суммы зарядов) с отрицательным (гравитацией).

8. Сферически симметричные потенциалы, примененные к фермионному состоянию

Если мы определяем заряды как точечные источники, они, по определению, имеют сферическую симметрию. Введение сферической симметрии пространства, несомненно, является эквивалентным путем выражения сохранения углового момента, и мы можем показать, что три групповые симметрии, относящиеся к слабому, сильному и электрическому взаимодействиям, связаны с тремя независимыми аспектами сферической симметрии или сохранением углового момента. $SU(2)$ симметрия (слабая) означает независимость сохранения от направления вращения; $SU(3)$ симметрия (сильная) означает ее независимость от выбора осей; $U(1)$ симметрия (электрическая) означает ее независимость от длины радиус-вектора. На деле, дираковский нильпотент может быть выбран как выражение, содержащее всю необходимую информацию для получения полного углового момента, который описывает состояние. Три симметрии, и три раздельных закона сохранения углового момента вытекают из одного факта, что три части вектора фермионного состояния определяются соответственно псевдоскалярным, векторным и скалярным операторами.

Используя полярные координаты, мы можем записать вектор нильпотентного состояния фермиона,находящегося под воздействием потенциала $V(r)$ точечного источника в форме:

$$\Big(\boldsymbol{k}(E - V(r)) + \boldsymbol{i}(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \frac{1}{r} \pm i\frac{j+1/2}{r}) + i\boldsymbol{j}m\Big),$$

где $j+1/2$ – полный угловой момент. Целью теперь является найти фазовый член, к которому может быть применен данный оператор, чтобы сделать амплитуду нильпотентной, для всех типов потенциала $V(r)$. Фактически, мы уже знаем типы потенциалов, которые должны применяться для слабых, сильных и электрических сил, и также можем показать, что это именно те, которые допускают нильпотентные решения [1], [6].

Минимальным условием для сферической симметрии является обратный линейный (кулоновский) потенциал, $V = -A/r$, связанный с $\boldsymbol{k}E$. Это соотносится со скаляром $U(1)$ компоненты. В чистом случае, это соотносится с электрическим взаимодействием и дает нам характерное решение "водородного атома". Однако, кулоновский член является неотъемлемым аспектом как сильной, так и слабой силы, ввиду того, что каждый заряд с необходимостью имеет скалярную компоненту – эквивалент константы связи. Никакое нильпотентное решение не является возможным без нее, так как обратные линейные члены, ассоциированные с $\boldsymbol{i}$ кватернионным оператором, требуют присутствия члена того же самого типа, ассоциированного с $\boldsymbol{k}$ кватернионом. (Это является дополнительным требованием для $U(1)$ члена в слабом взаимодействии, и его связь с массой, которая эффективно меняет группу $SU(2)$ спина на $SU(2)_L$ слабого изоспина.)

В дополнении к кулоновскому члену, сильное взаимодействие требует, как мы видели, чтобы линейный потенциал $(-Br)$ допускал бы переключение между компонентами $\pm i\boldsymbol{i}p_x, \pm i\boldsymbol{i}p_y, \pm i\boldsymbol{i}p_z$ вектора импульса. Применение данного принципа к вектору состояния дает нам нильпотентные решения, имеющие фазовыми членами только члены вида $exp(\mp iEr \pm iqBr^2/2)r^{\pm iqA-1}$. Для малых r это приводит к асимптотической свободе, а при больших r – к инфракрасному пленению. "Активный" член в конфайнменте является векторной частью потенциала взаимодействия $(-Br)$, в то время как скалярная часть $(-A/r)$ остается "пассивной".

Для псевдоскалярного слабого взаимодействия необходим дипольный или мультипольный член $(-Cr^s)$, где $-3 \geq s$, в потенциале в дополнение к кулоновскому выражению. Однако, любая зависимость полиномиального типа r для потенциала, отличная от $s = \pm 1$, после комбинирования с обратным линейным членом, необходимым для сферической симметрии, дает решение гармонического осциллятора, безотносительно к специфике r зависимости. Т. о., состояние энергии принимает вид

$$E = \left(\frac{m}{j+1/2}\right)(\pm iA + n'),$$

где n' – целое. Беря минимальное условие на A, фазовый член, необходимый для сферической симметрии, или случайное направление фермионного спина, как полуцелой величины $\pm 1/2i$, получаем решение:

$$E = \left(\frac{m}{j+1/2}\right)(1/2 + n').$$

Естественно, слабое взаимодействие имеет в точности эти характеристики, создавая и уничтожая из вакуума пары фермион/антифермион спина 1/2, используя подходящие операторы рождения или уничтожения, способом, присущим гармоническому осциллятору. Мы даже можем представить воздействие слабого дипольного момента как *причину* появления комбинаций фермион-антифермион из вакуумы или как обратный процесс взаимной аннигиляции. В дополнение, решение позволяет членам в выражении потенциала быть комплексными, что приводит к возможности нарушения CP, к комплексной константе связи или потенциалу, вводящих комплексность в лагранжиан, и, следовательно, в CKM матрицу.

Нильпотентная природа оператора Дирака на самом деле требует, чтобы один из трех зарядов или $E - \mathbf{p} - m$ членов был комплексным; таким образом, спин 1/2, или нильпотентное состояние, невозможен в принципе без введения комплексного аспекта. Комплексность члена, в этом смысле, приводит к рождению диполярного поля, алгебры, требующей одновременно положительных и отрицательных решений и никаких предпочтений. Другими словами, мы можем рассмотреть слабый заряд, как производящий не только фазовый член с двумя решениями, ни одно из которых не имеет привилегированного положения с математической точки зрения, но и механизм осцилляции между ними. Поэтому диполярная структура слабой силы существенным образом связана с комплексными аспектами слабого заряда. Комплексные числа не имеют привилегий в смысле знака, и слабый заряд имеет тенденцию вести себя независимо от знака: в то время как фермион и антифермион различимы, $+w$ и $-w$ не различимы. Комплексные уравнения с необходимостью имеют дуальные (комплексно-сопряженные) решения, и мы можем рассматривать слабый заряд, как несущий вместе с собой и заряд с другим знаком в качестве вакуумного образа. Создаваемый таким образом дипольный момент устанавливает ориентацию, которая обеспечивает киральность. Однако, физические соображения требуют преимущества материальных условий над заполненным слабым вакуумом, что обеспечивается соответствующим электромагнитным вакуумом, который либо является пустым, либо заполненным в одном из двух допустимых $SU(2)$ состояний.

9. Теория струн без струн

Модели суперструн и мембран позиционируются в физике как наиболее правдоподобные кандидаты на роль Теорий Великого Объединения. Однако, существует распространенное мнение, что теория великого объединения не совпадет ни с одним из пяти известных классов теории струн, но предстанет как более фундаментальная, объединяющая теория, для которой эти известные классы окажутся модельно-зависимыми приближениями при дополнительных предположениях. Поэтому в идеальной теории струн или мембран должны исчезнуть модельно-зависимые предположения, фактически она должна стать струнной теорией без струн. Десять измерений пространства-времени, по-видимому, необходимы для построения квантовой полевой теории суперструн, в которой сокращаются все аномалии, в то время как расширение до одиннадцатого измерения необходимо для вложения в супермембраны всех классов теории струн. Нильпотентная дираковская теория удовлетворяет этим требованиям. Каждый нильпотент представляет 10 сохраняющихся величин и, поэтому, может быть построен в 10-ти мерном дуальном фазовом/зарядовом пространстве:

энергия	слабый заряд
3 компоненты импульса	3 компоненты сильного заряда
масса покоя	электрический заряд.

Это множество 10 "размерностей" соединяет в себе фундаментальную дуальность, включающую вакуум. Все частицы дуальны вакууму и существуют только в соотношении с ним (zitterbewegung становится динамическим проявлением этого), поэтому нам требуется десять порций информации одновременно для полного описания состояния частицы. Компоненты энергии и заряда появляются как взаимно исключающие заполнители вакуума или аспекты материи. В целом, одно множество из пяти компонент описывает частицу, а другое – дуальное вакуумное состояние, или одно множество представляет амплитуду, а другое – фазу. Однако, для задания состояния необходимы все десять компонент, а для преобразования из фазового пространства в "реальное" пространство мы можем просто использовать сопряженную метрику $\pm \boldsymbol{k}t \pm i\boldsymbol{i}\mathbf{r} + i\boldsymbol{j}\tau)$. Существенным является то, что шесть "размерностей" (все, за исключением E и $\mathbf{p}$) являются фиксированными или компактифицированными, в точности в соответствии с требованиями теории струн. Также они ограничены симметриями, которые по своей природе являются сферическими, как, например $U(1)$-симметрия в теории Калуцы-Клейна, которая соответствует здесь частному случаю электрического заряда.

Одиннадцатое, или "мембранное" измерение является коммутативным гильбертовым пространством, связывающим все нильпотенты, которое существенным образом связано с гравитацией и мгновенными корреляциями. Тем не менее, мы должны осознать, что обе модели, 10-ти и 11-ти мерная, являются в действительности проявлениями более фундаментальной 3-мерности, заданной посредством трех кватернионных операторов $\boldsymbol{k},\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}$. Квантовая нильпотентная структура всегда может быть задана 3-мерным представлением, через аффинную природу $\mathbf{p}$ или s оператора. Только одно направления спина и только одно состояние для цветного заряда является корректно-заданным. Данное понимание позволяет нам построить ренормализуемую теорию квантовой гравитации или квантовой гравитационной инерции.

Теории струн, по определению, являются также суперсимметричными. Это, конечно же, ненарушенная суперсимметрия дираковского нильпотента, которая позволяет задать состояния энергии и заряда одновременно. В принципе, ненарушенная суперсимметрия требует нулевой полной энергии вакуума, что мы и ожидаем, если связанная с материей полная энергия компенсируется отрицательной гравитационной энергией. Спонтанное нарушение симметрии в данной интерпретации вызвано не общим состоянием вакуума, а слабым дискретным вакуумом, который в силу механизма Дирака-Хиггса предпочитает состояния $+E$ состояниям $-E$ *дискретной* материи. Существенно, что суперпространство, необходимое для суперсимметрии, постулирует четыре антисимметричные координаты как суперпартнеры пространства-времени; здесь они становятся массой и тремя зарядами. Вместе восемь координат составляют суперпространство, которое в данном формализме принимает характер нильпотентной алгебры Дирака.

10. Нуль-энергия и эффект Казимира

Одной из интерпретаций вакуума является "остальная Вселенная" (the rest of the Universe), "реакционная" половина третьего закона Ньютона. Это показывает, как мы можем определить вакуум ссылаясь на "образ" заряда или "отражение" дискретного источника. Для дискретного слабого, сильного или электрического вакуума, это означает, что часть остальной Вселенной распознается посредством подходящего заряда, и это является эффективным отрицанием данной компоненты. Однако, полный вакуум является *непрерывным* вакуумом, производимым посредством действительной (гравитационной) компоненты, и для любого заданного фермиона, он создает вектор состояния, эквивалентный $-1(\boldsymbol{k}E + i\boldsymbol{i}\mathbf{p} + i\boldsymbol{j}m)$, с отрицательной энергией. Комбинация фермиона и полного вакуума порождает нуль-тотальность и нулевой вектор состояния. "Непрерывность" в данном контексте может означать лишь отсутствие дискретных уровней энергии, и именно это свойство приводит к возникновению бесконечной плотности виртуальной энергии и виртуальной энергии $1/2\hbar\omega$ для всех возможных мод колебаний, так называемого нулевого уровня энергии. Непрерывный вакуум поэтому составляется зеркальными образными состояниями всевозможных фермионных состояний, и именно такой непрерывный вакуум делает возможным нелокальную связь, предполагаемую принципом запрета Паули. Каждое возможное состояние дает виртуальную вакуумную энергию $1/2\hbar\omega$, как основное состояние гармонического осциллятора, которым, конечно, в точности и является. Для создания действительного фермионного состояния мы возбуждаем виртуальное вакуумное состояние $-1/2\hbar\omega$ до уровня $1/2\hbar\omega$, используя квант полной энергии $\hbar\omega$. Непрерывный вакуум, однако же, никогда не может быть подвергнут прямому точному наблюдению, ввиду своей непрерывности, и поэтому, понятие непрерывности с неизбежностью останется "потенциальным", или виртуальным.

Проявление непрерывности вакуума, которое мы наблюдаем, является широко известной силой Казимира отталкивания между незаряженными пластинками металла площади A, на малом расстоянии d:

$$F = \frac{\pi hcA}{480d^4}.$$

Ввиду зависимости от $1/d^4$, эта сила проявляет себя вне области 1 μm как диполь-дипольное взаимодействие, в точности того же типа, что и сила Ван дер Ваальса сцепления молекул. Эта интерпретация предполагает нуль-флуктуации виртуальных фотонов в пространстве между пластинками или молекулами; но такой же результат возможно получить, используя нуль-флуктуации электронов в металлических поверхностях [7]. В данном случае это становится Лондоновским дисперсионным взаимодействием. Согласно другой картине (Хеллмана-Фейнмана), облака квантовых зарядов на двух пластинах, молекулах или других объектах по мере их приближения становятся деформированными в соответствии с изменением значения вероятности их распределения заряда. В этом случае, сила идентична причине химического соединения, вызванного классической электростатической силой [7].

Ввиду вышесказанного, сила Казимира является не отдельным феноменом, а аспектом классического электромагнитного взаимодействия. В то время как Петерсон и Метзгер [7] используют это в качестве средства устранения из вывода формулы таких неосмыслимых вещей как квантовые флуктуации, мы можем повернуть ход рассуждений таким образом, что обычная электромагнитная сила станет вакуумной проекцией. Обратно пропорциональная четвертому порядку сила Казимира между объектами, которые глобально электрически нейтральны, но локально образованы электростатическими диполями, должна предполагать обратный квадрат силы между отдельными заряженными частицами, из которых образованы эти объекты. И родственные эффекты конденсированной материи, такие как ядерные силы, должны описываться в подобных терминах как проявления казимировского типа фермионных или бозонных вакуумных флуктуаций, так же, как и взаимодействия между дискретными зарядами, определяемые вероятностными распределениями.

Если мы описываем силы, вызванные дискретными зарядами (электрическими, сильными, слабыми), как казимировского типа проявления вакуума, мы получаем прямую физическую интерпретацию для соответствующего использования квантовых операторов $\boldsymbol{j},\boldsymbol{i},\boldsymbol{k}$ как для этих трех зарядов, так и для операции соответствующего электрического, сильного и слабого вакуума (vacua) посредством $\boldsymbol{j}(\pm i\boldsymbol{k}E \pm \boldsymbol{i}\mathbf{p} + \boldsymbol{j}m)$, $\boldsymbol{i}(\pm i\boldsymbol{k}E \pm \boldsymbol{i}\mathbf{p} + \boldsymbol{j}m)$, $\boldsymbol{k}(\pm i\boldsymbol{k}E \pm \boldsymbol{i}\mathbf{p} + \boldsymbol{j}m)$. Ввиду того, что операторы прикреплены соответственно к псевдоскаляру E, вектору $\mathbf{p}$ и скаляру m в векторе состояния, их вакуумы будут разными, и силы также будут вести себя различным образом. Однако, ключевым механизмом во всех казимировских вычислениях является то, что они предстают как результат выделения *дискретных* объектов из *непрерывной* среды, и имеют смысл лишь в контексте пар объектов. Создание пары дискретных объектов на некотором конечном расстоянии, порождает силу, поскольку создается пространств, защищенное от некоторых мод вакуумных колебаний вне этого пространства. В принципе, следовательно, все взаимодействия между дискретными заряженными объектами и даже величины констант связи могут быть рассмотрены как результат существования покоя вселенной как вакуумного состояния, в направлении принципа ренормализации и принципа Маха для параллельного случая инерционных масс.

В данной интерпретации, казимировский и связанные с ним эффекты становятся путем, на котором дискретный заряженный вакуум проявляет их в соотношении с непрерывным полным вакуумным фоном; они представляют разделение вакуума в соответствии с тремя типами зарядовых состояний. Число заполнения зарядовых состояний (то есть, имеют ли заряды единичные или нулевые значения) устанавливается на основе относительных фаз между компонентами вектора состояния. Это определяет тип частицы и возможные взаимодействия. Вакуум, однако же, становится механизмом, посредством которого данный процесс проявляется. Создание дискретных единиц с ненулевым числом заполнения порождает "искажения" вакуума, которые мы называем взаимодействиями, так же, как наличие дискретных источников порождает вакуумный отклик или искажение односвязного пространства, которое порождает эффект Ааронова-Бома и фазу Берри.

Литература

[1] P. Rowlands: arXiv: quant-ph/0301071.

[2] P. Rowlands: arXiv: physics/0106054.

[3] P. Rowlands and J. P. Cullerne: arXiv: quant-ph/0109069.

[4] M. Kaku: *Quantum Field Theory*, Oxford University Press, 1993.

[5] I. J. R. Aitchison and A. J. G. Hey: *Gauge theories in partical physics*, Adam Hilger, 1989.

[6] P. Rowlands: AIP Conference Proceedings (in press).

[7] R. Peterson and R. M. Metzger, *Int. J. Chem.,* **7**, 1–4, 2004.

The Nilpotent Vacuum

Peter Rowlands

University of Liverpool, Oliver Lodge Laboratory, Liverpool, UK
p.rowlands@liverpool.ac.uk

A fermionic state vector which is a nilpotent or square root of zero appears to be the most convenient packaging of the fundamental physical parameters space, time, mass and charge into a single unit. It also has the advantage of being a supersymmetric quantum field operator, which uniquely and simultaneously specifies both amplitude and phase for any fermionic state, and incorporates all the specific aspects required in BRST field quantization into a single package. The mathematical structure of the state vector immediately generates vacuum terms relevant to all four fundamental interactions, and explains the symmetry-breaking between them. By incorporating the vacuum aspects into our understanding of the fermion, we generate a 'string theory without strings'. The nilpotent vacuum operators suggest links with many well-known vacuum phenomena, including the Casimir effect and zero-point energy.

Key-words: fermionic state, quaternion, Casimir effect.

АЛГЕБРА С ДЕЛЕНИЕМ, ОБОБЩЕННЫЕ СУПЕРСИММЕТРИИ И ОКТОНИОННАЯ М-ТЕОРИЯ[1]

Ф. Топпан

CBPF – CCP, Рио де Жанейро, Бразилия
toppan@cbpf.br

Данная работа освещает исследования, проводимые автором и его коллегами, направленные на изучение взаимоотношения между понятиями алгебр с делением, представлений алгебр Клиффорда, обобщенных суперсимметрий с введением альтернативного описания М-алгебры в терминах неассоциативных октонионных структур. Излагаемые результаты были представлены на конференции "Число, время и относительность", проходившей в Техническом Университете им. Баумана (Москва) в августе 2004 года.

Ключевые слова: алгебры с делением, октонионы, алгебры Клиффорда, обобщенные суперсимметрии, М-теория.

Введение

В наши дни программа объединения, нацеленная на общее описание известных взаимодействий совместно с непротиворечивой квантовой формулировкой гравитации, в основном возлагает надежду на многомерные суперсимметричные теории. На данный момент, самой многообещающей, но, в то же время, остающейся лишь гипотетической, является теория, рассматриваемая в одиннадцатимерных пространствах, которая носит имя М-теории [1]. Требования теоретической (и феноменологической) согласованности, накладываемые на любого допустимого кандидата на роль объединенной теории, обязательно приводят к систематическому исследованию свойств алгебр Клиффорда и спиноров в пространстве-времени произвольной размерности и сигнатуры. Обобщенные суперсимметрии, идущие дальше стандартной HŁS схемы [2], допускают существование бозонных абелевых тензорных центральных зарядов, связанных с динамикой расширенных объектов (бран). Со времен работы [3] стало широко известно, что суперсимметрии связаны с алгебрами с делением. На самом деле, даже для обобщенных суперсимметрий, классификационные схемы базируются на ассоциативных алгебрах с делением (**R**, **C**, **H**). Несравненно меньше известно относительно оставшейся делимой алгебры октонионов, что связано с осложнениями, проистекающими из неассоциативности. Несмотря на это, октонионная структура была рассмотрена в работах [4, 5] в рамках применения к теории суперструн.

Октонионы возникают не только как курьез. Они представляют собой максимальную алгебру с делением. Уже один этот факт показывает, что октонионы должны занять место, подобное тому, которое занимает, скажем, максимальная супергравитация. Однако, они важны не только поэтому. Октонионы являются сердцевиной многих исключительных структур в математике и ответственны за их существование. Среди этих исключительных структур мы можем упомянуть 5 исключительных алгебр Ли и исключительные йордановы алгебры. На самом деле, алгебра Ли G_2 является группой

---

[1] Перевод Р. Михайлова.

автоморфизмов октонионов, в то время как F_4 есть группа автоморфизмов 3×3 октонионнозначных эрмитовых матриц, реализующих исключительную йорданову алгебру $J_3(\mathbf{O})$. Алгебра F_4 и оставшиеся исключительные алгебры Ли E_6, E_7, E_8 получаются из так называемой "конструкции магического квадрата Титса", которая сопоставляет алгебру Ли любой паре алгебр с делением, в случае если как минимум одна из алгебр этой пары совпадает с октонионной алгеброй [6].

Неоднократно отмечалось ([7, 8]), что исключительные алгебры Ли хорошо соответствуют сценарию Великого объединения. Более того, алгебра Ли E_8 вводит через тензорное произведение $E_8 \times E_8$ теорию гетеротических струн без аномалий, в то время как G_2 голономия семимерных многообразий требуется, на феноменологическом уровне, для создания 4-мерной $N = 1$ суперсимметричной теории поля посредством компактификации одиннадцатимерия. Это лишь часть списка разрозненных доводов (в том числе, см. [8]), наводящих на мысль, что по каким-то глубоким причинам, Природа, похоже, предпочитает исключительные структуры. В данном контексте заслуживает упоминания исключительная йорданова алгебра $J_3(\mathbf{O})$, которая не только связана с единственной последовательной квантово-механической системой (в подходе Йордана, см. [9]), основанной на неассоциативной алгебре, но и также связана с уникальной матричной теорией Черна-Саймонса йорданова типа (см. [10]).

В данной работе я буду обсуждать исследования, изложенные в работах [11, 12], посвященные вопросу возможности реализации общей суперсимметрии в терминах неассоциативной алгебры октонионов. В частности, в работе [11] было показано, что M-алгебра, предположительно обозначающая M-теорию, возникает в двух (и только двух, ввиду отсутствия комплексных и кватернионных структур) вариантах. Помимо стандартной реализации M-алгебры, включающей вещественные спиноры и, следовательно, использующей вещественную структуру, также может использоваться альтернативная формулировка, требующая введения октонионной структуры. Это возможно благодаря существованию октонионного описания алгебры Клиффорда, которое определяет 11-мерное пространство-время Минковского и связанные с ним спиноры. Особенности второго варианта, а именно, октонионной M-супералгебры, озадачивает. Не слишком удивительно, что эта алгебра содержит меньшее число бозонных генераторов, 52, в сравнении с 528-ю в случае стандартной M-алгебры (это, все-таки, можно ожидать, ввиду того, что наложение дополнительной структуры налагает ограничение на теорию). Что действительно является полной неожиданностью, так это появление новых условий, отсутствующих в стандартной M-теории. Эти условия означают, что различные секторы бран более не независимы. Одна октонионная 5-брана содержит целое множество степеней свободы, и следовательно, эквивалентна октонионным секторам $M1$ и $M2$. Символически мы можем записать эту эквивалентность как $M5 \equiv M1 + M2$. Этот результат, действительно, является интригующим. Он означает появление совершенно нетривиальных структур при исследовании октонионных конструкций в M-теории. Весьма заманчиво думать, что упомянутые выше исключительные структуры должны раскрываться более полно с помощью октонионного варианта M-алгебры, нежели с помощью стандартной вещественной M-алгебры.

Другой подход состоит в определении замкнутой алгебраической структуры, реализующей октонионную суперконформную M-алгебру. Получается, что суперконформная алгебра $OSp(1, 64)$ вещественной M-теории заменяется в октонионном случае на супералгебру суперматриц $OSp(1, 8|\mathbf{O})$ с октонионнозначными элементами и общим числом $7 + 232 = 239$ бозонных генераторов.

Об алгебрах Клиффорда

Классификация обобщенных суперсимметрий требует предварительной классификации алгебр Клиффорда, спиноров и их соотношений с алгебрами с делением.

Для замкнутости (самодостаточности) изложения, в данной части работы мы приведем обзор классификации алгебр Клиффорда, связанных с ассоциативными алгебрами с делением **R**,**C**, **H**, следуя работам [13] и [14].

Наиболее общие неприводимые *вещественные* матричные представления алгебры Клиффорда

$$\Gamma^\mu\Gamma^\nu + \Gamma^\nu\Gamma^\mu \; = \; 2\eta^{\mu\nu}, \tag{1}$$

где $\eta^{\mu\nu}$ – диагональная матрица сигнатуры (p,q) (т. е. p положительных $+1$ и q отрицательных -1 диагональных элементов)[1] могут быть классифицированы согласно свойствам самой общей S матрицы, коммутирующей со всеми Γ ($[S,\Gamma^\mu]=0$ для всех μ). В случае, когда самая общая S матрица является кратной тождественной, мы получаем нормальный (**R**) случай. В противном случае, S может быть суммой двух матриц, вторая из которых является кратным квадратного корня из -1 (что представляет почти комплексный, **C** случай) или линейной комбинацией 4 матриц, замыкающих кватернионную алгебру (это случай **H**). Согласно [13], *вещественные* неприводимые представления **R**, **C**, **H** типа строятся в соответствии со следующей таблицей, элементы которой представляют значения $p-q\ mod\ 8$

R	**C**	**H**
$0,2$		$4,6$
1	$3,7$	5

(2)

Вещественное неприводимое представление всегда единственно при $p-q\ mod\ 8 = 1,5$. В этих сигнатурах представлены два неэквивалентных вещественных представления, второе из которых восстанавливается переключением знака у всех Γ ($\Gamma^\mu \mapsto -\Gamma^\mu$).

Обозначим через $C(p,q)$ неприводимое представление алгебры Клиффорда, соответствующее сигнатуре (p,q). Нормальный (**R**), почти комплексный (**C**) и кватернионный (**H**) типы соответствующих неприводимых представлений алгебры Клиффорда могут также быть рассмотрены следующим образом. В то время, как в **R**-случае, матрицы, реализующие неприводимое представление, обязательно имеют вещественные элементы, в **C**-случае могут использоваться матрицы с комплексными элементами, а в **H**-случае – с кватернионными.

Обсудим простейшие примеры. Алгебра Клиффорда $C(0,1)$ **C**-типа может быть представлена как посредством вещественно-значных 2×2 матриц $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, так и с помощью мнимого числа i.

С другой стороны, алгебра Клиффорда $C(0,3)$ **H**-типа может быть реализована следующим образом:
i) тремя 4×4 вещественно-значными матрицами, заданными с помощью тензорного произведения $\tau_A\otimes\tau_1$, $\tau_A\otimes\tau_2$ и $\mathbf{1}_2\otimes\tau_A$, где матрицы τ_A, τ_1 и τ_2 реализуют вещественное неприводимое представление $C(2,1)$

---

[1] В рамках данной работы мы будем считать, что положительные собственные значения соотносятся с пространственно-подобными направлениями, а негативные – с времениподобными.

$(\tau_A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tau_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix})$,

ii) тремя 2×2 комплексно-значными матрицами $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$,

iii) тремя мнимыми кватернионами e_i (более детально см. часть **3**).

Формулы в пунктах *i)* и *ii)* представляют вещественное и комплексное представления, соответственно, для мнимых кватернионов. Они могут быть непосредственно расширены для получения вещественных и комплексных представлений алгебр Клиффорда **H**-типа посредством подстановки вместо кватернионных элементов соответствующих представлений (кватернионная единица заменяется в комплексном представлении единичной 2×2 матрицей $\mathbf{1}_2$ и единичной 4×4 матрицей $\mathbf{1}_4$ в вещественном представлении).

Стоит отметить, что в данных сигнатурах $p - q \ mod\ 8 = 0, 4, 6, 7$ без ограничения общности матрицы Γ^μ могут быть выбраны блочно антидиагональными (матрицы обобщенного вейлевского типа), т. е. имеющими форму

$$\Gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \tilde{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Следовательно, в данных сигнатурах возможно ввести вейлевские проективные спиноры, число компонент которых равно половине размера соответствующих Γ-матриц[2].

Очень удобная форма неприводимых представлений алгебр Клиффорда, построенная с помощью алгоритма отбора (в произвольной сигнатуре пространства-времени) представителя (с точностью до смены знака $\Gamma^\mu \leftrightarrow -\Gamma^\mu$) в каждом неприводимом классе представлений гамма-матриц Клиффорда, приведена в работе [14]. Мы приведем и расширим здесь результаты, представленные в [14], устанавливая явную связь между максимальными алгебрами Клиффорда в таблице (6) ниже и свойствами соответствующих алгебр с делением.

Конструкция состоит в следующем. В начале доказывается, что из представления гамма-матриц Клиффорда, соответствующего заданной размерности D пространства-времени, с помощью двух алгоритмов можно рекурсивно построить гамма-матрицы Клиффорда, соответствующие размерности $D + 2$ пространства-времени. На самом деле, очень просто проверить, что если γ_i обозначают d-мерные гамма-матрицы $D = p + q$ пространства-времени с сигнатурой (p, q) (обеспечивающие именно представление алгебры Клиффорда $C(p, q)$), то $2d$-мерные $D + 2$ гамма-матрицы (обозначаемые как Γ_j) $D + 2$ пространства-времени представляются в соответствии с

$$\begin{aligned} \Gamma_j &\equiv \begin{pmatrix} 0 & \gamma_i \\ \gamma_i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1}_d \\ -\mathbf{1}_d & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{1}_d & 0 \\ 0 & -\mathbf{1}_d \end{pmatrix} \\ (p, q) &\mapsto (p + 1, q + 1). \end{aligned} \tag{4}$$

или

$$\begin{aligned} \Gamma_j &\equiv \begin{pmatrix} 0 & \gamma_i \\ -\gamma_i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1}_d \\ \mathbf{1}_d & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{1}_d & 0 \\ 0 & -\mathbf{1}_d \end{pmatrix} \\ (p, q) &\mapsto (q + 2, p). \end{aligned} \tag{5}$$

---

[2] Понятие вейлевского спинора, удобное для наших целей, отличается от принятого, связанного с *комплексно*-значными алгебрами Клиффорда и было введено в [14].

Следует отметить, что три введенные ранее матрицы τ_A, τ_1, τ_2, реализующие алгебру Клиффорда $C(2,1)$ получаются посредством применения либо (4), либо (5) к числу 1, т. е. одномерной реализации $C(1,0)$.

Все алгебры Клиффорда **R**-типа получаются рекурсивным применением алгоритмов (4) и (5) к алгебре Клиффорда $C(1,0)$ ($\equiv$ 1) и алгебрам Клиффорда серий $C(0,7{+}8m)$ (с неотрицательным целым m), которые уже известны на предыдущем шаге рекурсии. Подобным образом, все алгебры Клиффорда **H**-типа получаются рекурсивным применением алгоритмов к алгебрам Клиффорда $C(0,3{+}8m)$, а алгебры Клиффорда **C**-типа получаются рекурсивным применением алгоритмов к алгебрам Клиффорда $C(0,1+8m)$ и $C(0,5+8m)$. Это согласуется с приведенной ниже схемой, взятой из [14]. Мы имеем

Таблица максимальных алгебр Клиффорда (до $d = 256$).

	1	*	2	*	4	*	8	*	16	*	32	*	64	*	128	*	256	*
R	(1, 0)	⇒	(2, 1)	⇒	(3,2)	⇒	(4,3)	⇒	(5,4)	⇒	(6,5)	⇒	(7,6)	⇒	(8,7)	⇒	(9,8)	⇒
					(1,2)	→	(2,3)	→	(3,4)	→	(4,5)	→	(5,6)	→	(6,7)	→	(7,8)	→
				↗														
C			(0,1)															
				↘														
					(3,0)	→	(4,1)	→	(5,2)	→	(6,3)	→	(7,4)	→	(8,5)	→	(9,6)	→
							(1,4)	→	(2,5)	→	(3,6)	→	(4,7)	→	(5,8)	→	(6,9)	→
						↗												
H					(0,3)													
						↘												
							(5,0)	→	(6,1)	→	(7,2)	→	(8,3)	→	(9,4)	→	(10,5)	→
									(1,6)	→	(2,7)	→	(3,8)	→	(4,9)	→	(5,10)	→
								↗										
C							(0,5)											
								↘										
									(7,0)	→	(8,1)	→	(9,2)	→	(10,3)	→	(11,4)	→
									(1,8)	→	(2,9)	→	(3,10)	→	(4,11)	→	(5,12)	→
								↗										
R/O							(0,7)											
								↘										
									(9,0)	→	(10,1)	→	(11,2)	→	(12,3)	→	(13,4)	→

	1	*	2	*	4	*	8	*	16	*	32	*	64	*	128	*	256	*
C													(1,10)	→	(2,11)	→	(3,12)	→
												↗						
											$\underline{(0,9)}$							
												↘						
													(11,0)	→	(12,1)	→	(13,2)	→
H															(1,12)	→	(2,13)	→
														↗				
													$\underline{(0,11)}$					
														↘				
															(13,0)	→	(14,1)	→
C																	(1,14)	→
																↗		
															$\underline{(0,13)}$			
																↘		
																	(15,0)	→
R/O																	(1,16)	→
																↗		
															$\underline{(0,15)}$			
																↘		
																	(17,0)	→

(6)

Необходимо добавить несколько замечаний относительно приведенной таблицы. Столбцы нумеруются размером матрицы d (в вещественных компонентах) максимальных алгебр Клиффорда. Их сигнатура обозначается парами (p, q). Далее, подчеркнутые алгебры Клиффорда в данной таблице могут быть названы "примитивными максимальными алгебрами Клиффорда". Оставшиеся в таблице максимальные алгебры Клиффорда являются "максимальными потомственными алгебрами Клиффорда". Они получаются из примитивных максимальных алгебр Клиффорда итеративным применением рекурсивных алгоритмов (4) и (5). Кроме того, любая немаксимальная алгебра Клиффорда получается из данной максимальной алгебры Клиффорда удалением некоторого числа гамма-матриц (данный момент детально излагается в [14] и не будет рассматриваться здесь).

Максимальные алгебры Клиффорда, порожденные $C(0, 7 + 8m)$ сериями, связаны как с вещественными (**R**), так и октонионными (**O**) алгебрами с делением, (см. (1)), поскольку для $(0, 7 + 8m)$-сигнатуры они могут быть реализованы как ассоциативно (в нормальном, **R**, случае), так и неассоциативно посредством октонионов (см. [14] и [16]).

Примитивные максимальные алгебры Клиффорда $C(0, 3)$ и $C(0, 7)$ могут быть явно реализованы посредством трех 4×4 матриц (как уже отмечалось) и семи 8×8 матриц соответственно:

$$C(0,3) \equiv \begin{array}{c} \tau_A \otimes \tau_1, \\ \tau_A \otimes \tau_2, \\ \mathbf{1}_2 \otimes \tau_A, \end{array} \quad \text{и} \quad C(0,7) \equiv \begin{array}{c} \tau_A \otimes \tau_1 \otimes \mathbf{1}_2, \\ \tau_A \otimes \tau_2 \otimes \mathbf{1}_2, \\ \mathbf{1}_2 \otimes \tau_A \otimes \tau_1, \\ \mathbf{1}_2 \otimes \tau_A \otimes \tau_2, \\ \tau_1 \otimes \mathbf{1}_2 \otimes \tau_A, \\ \tau_2 \otimes \mathbf{1}_2 \otimes \tau_A, \\ \tau_A \otimes \tau_A \otimes \tau_A. \end{array} \tag{7}$$

Комплексные примитивные максимальные алгебры Клиффорда $C(0,1)$ и $C(0,5)$ могут быть получены из $C(1,2)$ и $C(0,7)$, соответственно, удалением двух гамма-матриц. В $C(0,7)$ мы можем, в том числе, рассмотреть последний тензорно умноженный столбец, устранить два члена, содержащие τ_1 и τ_2, и заменяя $\mathbf{1}_2 \mapsto 1$, $\tau_A \mapsto i$, получить

$$C(0,5) \equiv \begin{array}{c} \tau_A \otimes \tau_1, \\ \tau_A \otimes \tau_2, \\ i\tau_1 \otimes \mathbf{1}_2, \\ i\tau_2 \otimes \mathbf{1}_2, \\ i\tau_A \otimes \tau_A. \end{array} \tag{8}$$

Стоит отметить, что $C(0,1)$ и $C(0,5)$ серии были вполне корректно рассмотрены в [14] как "потомственные", ввиду того, что они могут быть получены из $C(1,2)$, $C(0,7)$ после стирания лишних гамма-матриц. Однако, здесь мы находим более удобным явно включить их в таблицу (6) и рассматривать их как "примитивные", из-за того, что они допускают иную структуру алгебры с делением (они почти комплексные, $\mathbf{C}$); что касается нормального ($\mathbf{R}$) типа максимальных алгебр Клиффорда, они выводятся отсюда.

Оставшиеся примитивные максимальные алгебры Клиффорда $C(0, x+8m)$, для положительных целых $m = 1, 2, \ldots$ и $x = 1, 3, 5, 7$, могут быть восстановлены с помощью *mod* 8 свойств гамма-матриц. Пусть $\overline{\tau}_i$ – реализация $C(0,x)$ для $x = 1, 3, 5, 7$. Применяя алгоритм (4) к $C(0,7)$, мы сначала строим матрицы 16×16, реализующие $C(1,8)$ (матрица с положительной сигнатурой обозначается γ_9, ${\gamma_9}^2 = \mathbf{1}$, в то время как восемь матриц с отрицательными сигнатурами обозначаются через γ_j, $j = 1, 2 \ldots, 8$, ${\gamma_j}^2 = -\mathbf{1}$). Теперь мы находимся в положении работы [14] для явной конструкции целой серии примитивных максимальных алгебр Клиффорда $C(0, x{+}8n)$, посредством формул

$$C(0, x+8n) \equiv \begin{array}{ll} \overline{\tau}_i \otimes \gamma_9 \otimes \ldots & \ldots \quad \ldots \otimes \gamma_9, \\ \mathbf{1}_4 \otimes \gamma_j \otimes \mathbf{1}_{16} \otimes \ldots & \ldots \quad \ldots \otimes \mathbf{1}_{16}, \\ \mathbf{1}_4 \otimes \gamma_9 \otimes \gamma_j \otimes \mathbf{1}_{16} \otimes \ldots & \ldots \quad \ldots \otimes \mathbf{1}_{16}, \\ \mathbf{1}_4 \otimes \gamma_9 \otimes \gamma_9 \otimes \gamma_j \otimes \mathbf{1}_{16} \otimes \ldots & \ldots \quad \ldots \otimes \mathbf{1}_{16}, \\ \ldots & \ldots \qquad \ldots, \\ \mathbf{1}_4 \otimes \gamma_9 \otimes \ldots & \ldots \ \otimes \gamma_9 \otimes \gamma_j, \end{array} \tag{9}$$

Здесь тензорное произведение 16-ти мерного представления берется n раз.

Об алгебрах с делением

В предыдущей части мы описали алгоритм явного построения любого неприводимого представления алгебры Клиффорда определенного делимо-алгебраического типа.

Для удобства приведем здесь основные свойства алгебр с делением, которые нам понадобятся в дальнейшем.

Четыре алгебры с делением: вещественных (**R**) и комплексных (**C**) чисел, кватернионы (**H**) и октонионы (**O**) имеют соответственно 0, 1, 3 и 7 мнимых элементов e_i, удовлетворяющих соотношениям

$$e_i \cdot e_j \;=\; -\delta_{ij} + C_{ijk}e_k, \tag{10}$$

(i, j, k принимают значение 1 комплексном случае, $1, 2, 3$ в кватернионном случае и $1, 2, \ldots, 7$ в октонионном; кроме того, по повторяющимся индексам предполагается суммирование).

C_{ijk} представляют собой полностью антисимметричные структурные константы алгебр с делением. Октонионная алгебра с делением максимальна, ввиду того, что кватернионы, комплексные и вещественные числа могут быть получены как ее ограничения. Полностью антисимметричные октонионные структурные константы могут быть выражены как

$$C_{123} = C_{147} = C_{165} = C_{246} = C_{257} = C_{354} = C_{367} = 1 \tag{11}$$

(и обращаются в нуль в иных случаях).

Октонионы являются единственной неассоциативной, однако альтернативной (см. [17]), алгеброй с делением.

Вследствие антисимметричности C_{ijk} очевидно, что мы можем реализовать (1) посредством сопоставления сигнатур $(0, 3)$ и $(0, 7)$ мнимым кватернионам и октонионам соответственно.

Для дальнейшего изложения важную роль играет понятие главного сопряжения в алгебре с делением. Любой элемент X в заданной алгебре с делением может быть представлен как сумма

$$X \;=\; x_0 + x_i e_i, \tag{12}$$

где x_0 и x_i вещественны, по повторяющимся индексам предполагается суммирование, и положительные числа i ограничены 1, 3 и 7 в **C**, **H** и **O** случаях соответственно. Главное сопряжение X^* элемента X определяется как

$$X^* \;=\; x_0 - x_i e_i. \tag{13}$$

Это позволяет ввести норму в алгебре с делением посредством произведения X^*X. Ограничение единичной нормировки $X^*X = 1$ выделяет три параллелизуемые[3] сферы S^1, S^3 и S^7 в связи с **C**, **H** и **O** соответственно.

Дальнейшее рассмотрение алгебр с делением и их связи с алгебрами Клиффорда содержится в работах [14] и [17].

О фундаментальных спинорах

В части **2** мы обсудили свойства неприводимых представлений алгебр Клиффорда, показав метод их явного построения, а также отметили их делимо-алгебраическую структуру. Стоит напомнить, что делимо-алгебраический характер фундаментальных спиноров не обязательно (в зависимости от данного пространства-времени) совпадает с

---

[3] Доб. пер. Многообразие называется параллелизуемым, если его касательное расслоение тривиально.

делимо-алгебраическим типом соответствующего неприводимого представления алгебры Клиффорда.

Фундаментальные спиноры реализуют представление обобщенной Лоренцевой группы с минимальным числом вещественных компонент в соответствии с максимальной, совместимой, допустимой делимо-алгебраической структурой.

Следующая таблица, взятая из результатов [18] и [13], (см. также [14]), сравнивает между собой делимо-алгебраические свойства неприводимых представлений Клиффорда ($\mathbf{\Gamma}$) и фундаментальных спиноров ($\mathbf{\Psi}$), в различном пространстве-времени, параметризованном посредством $\rho = s - t \quad mod \quad 8$. Имеем

ρ	$\mathbf{\Gamma}$	$\mathbf{\Psi}$
0	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$
1	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$
2	$\mathbf{R}$	$\mathbf{C}$
3	$\mathbf{C}$	$\mathbf{H}$
4	$\mathbf{H}$	$\mathbf{H}$
5	$\mathbf{H}$	$\mathbf{H}$
6	$\mathbf{H}$	$\mathbf{C}$
7	$\mathbf{C}$	$\mathbf{R}$

(14)

Из приведенной таблицы ясно, что для $\rho = 2, 3$, фундаментальные спиноры могут допускать более широкую делимо-алгебраическую структуру, нежели соответствующее неприводимое представление алгебр Клиффорда. Для $\rho = 6, 7$ верно обратное: неприводимые представления Клиффорда допускают более широкую делимо-алгебраическую структуру, нежели соответствующие спиноры. В некоторых случаях это несовпадение делимо-алгебраических структур играет важную роль. Например, в [11] был разработан метод построения суперконформных алгебр, основанный на минимальной делимо-алгебраической структуре, общей как для неприводимых представлений алгебры Клиффорда, так и для фундаментальных спиноров. Этот метод может быть напрямую преобразован для построения расширенных суперконформных алгебр, основанных на наибольшей делимо-алгебраической структуре. За такое обобщение приходится платить введением для $\rho = 2, 3$ приводимых представлений алгебры Клиффорда, и обратно, для $\rho = 6, 7$ – введением неминимальных спиноров.

Причина такого несовпадения может быть легко объяснена на основе алгоритмической конструкции части **2** и таблицы (6). Действительно, все максимальные потомственные алгебры Клиффорда, входящие в таблицу (6), имеют блочно антидиагональные гамма-матрицы, за исключением единственной гамма-матрицы, задающейся как $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} \end{pmatrix}$. Следовательно, все немаксимальные алгебры Клиффорда, получающиеся посредством удаления этой дополнительной гамма-матрицы (детальное обсуждение данного вопроса содержится в [14]), имеют блочно антидиагональную форму. Напомним, что фундаментальные спиноры реализуют представление обобщенной группы Лоренца, генераторы которой задаются как коммутаторы гамма-матриц $[\Gamma_i, \Gamma_j]$. При рассмотрении немаксимальных алгебр Клиффорда, все эти коммутаторы имеют блочно-диагональную 2×2 форму, позволяющую ввести (обобщенную в смысле работы [14]) проекцию Вейля для фундаментальных спиноров с ненулевыми верхними и нижними компонентами.

Удобно непосредственно рассмотреть простейшие случаи пространств Минковского, в которых возникает несовпадение (общая процедура может быть напрямую получена из таблицы (6)). В обычном $(3,1)$ пространстве-времени, $(\mathbf{R})$ неприводимое представление алгебры Клиффорда получается как немаксимальная алгебра Клиффорда $(3,1) \subset (3,2)$, полученная из максимальной $(\mathbf{R})$ $(3,2)$ после удаления времениподобных гамма-матриц. С другой стороны, фундаментальные комплексные спиноры получаются из приводимых представлений алгебры Клиффорда $(3,1) \subset (4,1)$, посредством удаления пространственноподобных гамма-матриц из $(\mathbf{C})$ неприводимого представления алгебры Клиффорда $(4,1)$.

В других случаях пространств Минковского имеем

i) $(4,1)$: $\mathbf{\Gamma}$ совпадает с максимальным клиффордовым представлением $(4,1)$ $(\mathbf{C})$, в то время как $\mathbf{\Psi}$ строится в терминах приводимого, немаксимального представления Клиффорда $(4,1) \subset (6,1)$ $(\mathbf{H})$,

ii) $(7,1)$: $\mathbf{\Gamma}$ совпадает с немаксимальным клиффордовым представлением $(7,1) \subset (7,2)$ $(\mathbf{H})$, в то время как $\mathbf{\Psi}$ строится в терминах приводимого, немаксимального представления Клиффорда $(7,1) \subset (8,1)$ $(\mathbf{C})$,

iii) $(8,1)$: $\mathbf{\Gamma}$ совпадает с максимальным клиффордовым представлением $(8,1)$ $(\mathbf{C})$, в то время как $\mathbf{\Psi}$ строится в терминах приводимого, немаксимального представления Клиффорда $(8,1) \subset (10,1)$ $(\mathbf{R})$.

Обобщенные суперсимметрии: примеры M и F алгебр

Необходимо ввести три матрицы, A, B, C, для описания трех сопряжений (эрмитова, комплексного и транспозиции), действующих на гамма-матрицах [3]. Ввиду того, что только две из этих матриц независимы, мы, следуя [14], будем работать лишь с A и C. A играет роль времениподобной матрицы Γ^0 в пространстве-времени Минковского и используется для введения сопряженных спиноров (barred spinors). C, с другой стороны, является матрицей зарядового сопряжения. С точностью до общего знака, в общем (s,t) пространство-времени A и C задаются как произведения всех времениподобных и, соответственно, всех симметричных (или антисимметричных) гамма-матриц[4]. Свойства A и C немедленно следуют из их явной конструкции, см. [3] и [14].

В представлении алгебры Клиффорда, реализованном матрицами с действительными элементами, сопряжение действует как тождественное преобразование, см. (13). В этом случае пространственноподобные гамма-матрицы симметричны, в то время как времениподобные гамма-матрицы антисимметричны, таким образом, A может быть отождествлена с матрицей зарядового сопряжения C_A.

Для наших целей, важность матрицы A и матрицы зарядового сопряжения C следует из того, что в D-мерном пространстве-времени $(D = s+t)$, натянутом на $d \times d$ гамма-матрицы, они позволяют строить базис для $d \times d$ (анти)эрмитовых и (анти)симметричных матриц соответственно. Легко доказать, что в вещественном и комплексном случаях (кватернионный случай отличается), все $\begin{pmatrix} D \\ k \end{pmatrix}$ антисимметризованные произведения k гамма-матриц $A\Gamma^{[\mu_1 \cdots \mu_k]}$, являются эрмитовыми или антиэрмитовыми, в зависимости от значения $k \leq D$. Аналогично, антисимметризованные произведения $C\Gamma^{[\mu_1 \cdots \mu_k]}$ все симметричны или все антисимметричны.

---

[4] В зависимости от заданного пространства-времени (см. [3] и [14]), существуют не более двух матриц зарядового сопряжения C_S, C_A, задаваемых как произведение всех симметричных и всех антисимметричных гамма-матриц соответственно. В специальных сигнатурах пространства-времени они сливаются в одну матрицу C.

Что касается M-алгебры, 32-компонентные вещественные спиноры $(10,1)$-пространства-времени допускают антикоммутаторы $\{Q_a, Q_b\}$, которые являются 32×32 симметричными вещественными матрицами с, не более чем, $32+\frac{32\times 31}{2} = 528$ компонентами. Расширяя r.h.s.[5] в терминах антисимметризированного произведения гамма-матриц, мы получаем, что оно может быть насыщено посредством так называемой M-алгебры

$$\{Q_a, Q_b\} \;=\; (A\Gamma_\mu)_{ab} P^\mu + \;\left(A\Gamma_{[\mu\nu]}\right)_{ab} Z^{[\mu\nu]} + \;\left(A\Gamma_{[\mu_1\ldots\mu_5]}\right)_{ab} Z^{[\mu_1\ldots\mu_5]}. \tag{15}$$

Действительно, $k = 1, 2, 5$ секторов r.h.s. доставляют $11 + 55 + 462 = 528$ общих компонент. Помимо сдвигов P^μ, в r.h.s. возникают антисимметричные абелевы тензорные центральные заряды ранга-2 и ранга-5 $Z^{[\mu\nu]}$ и $Z^{[\mu_1\cdots\mu_5]}$ соответственно.

Насыщенная M-алгебра (15) допускает конечное число подалгебр, которые согласуются с лоренцевыми свойствами одиннадцати измерений сигнатуры Минковского. Существует 6 таких подалгебр, которые восстанавливаются обнулением одного или двух среди трех тензорных центральных зарядов P^μ, $Z^{[\mu\nu]}$, $Z^{[\mu_1\cdots\mu_5]}$ (полностью вырожденная подалгебра получается посредством обнуления r.h.s. целиком).

То, что фундаментальные спиноры в $(10,2)$-пространстве-времени также допускают 32 компоненты, следует из существования проекции Вейля. Из этого вытекает, что насыщенная M-алгебра допускает $(10,2)$ пространственно-временное представление, так называемую F-алгебру, в терминах $(10,2)$ майорано-вейлевских спиноров $\tilde{Q}_{\tilde{a}}$, $\tilde{a} = 1, 2, \ldots, 32$.

В случае вейль-спроецированных спиноров, r.h.s. необходимо перестроить с помощью оператора проекции, который выбирает верхний левый блок в 2×2 блочном разложении. Более точно, если $\mathcal{M}$ матрично разложена на 2×2 блоки как $\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \mathcal{M}_1 & \mathcal{M}_2 \\ \mathcal{M}_3 & \mathcal{M}_4 \end{pmatrix}$, мы можем определить

$$P(\mathcal{M}) \;\equiv\; \mathcal{M}_1. \tag{16}$$

Насыщенная M-алгебра (15) может, следовательно, быть переписана как

$$\left\{\tilde{Q}_{\tilde{a}}, \tilde{Q}_{\tilde{b}}\right\} \;=\; P\left(\tilde{A}\tilde{\Gamma}_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}}\right)_{\tilde{a}\tilde{b}} \tilde{Z}^{[\tilde{\mu}\tilde{\nu}]} + P\left(\tilde{A}\tilde{\Gamma}_{[\tilde{\mu}_1\ldots\tilde{\mu}_6]}\right)_{\tilde{a}\tilde{b}} \tilde{Z}^{[\tilde{\mu}_1\ldots\tilde{\mu}_6]}, \tag{17}$$

где все тильды ссылаются к соответствующим $(10,2)$ величинам. Матрицы в r.h.s. симметричны при замене $\tilde{a} \leftrightarrow \tilde{b}$. В этот момент возникают ранга-2 и самодуальные ранга-6 антисимметричные абелевы тензорные заряды, $\tilde{Z}^{[\tilde{\mu}\tilde{\nu}]}$ и соответственно $\tilde{Z}^{[\tilde{\mu}_1\cdots\tilde{\mu}_6]}$. Общее число их компонент $66 + 462 = 528$, что доказывает насыщенность r.h.s. Уравнение насыщения (17) называется F-алгеброй.

Вещественные, комплексные и кватернионные обобщенные суперсимметрии

Для вещественных n-компонентных спиноров Q_a, наиболее общая алгебра суперсимметрий представима как

$$\{Q_a, Q_b\} \;=\; \mathcal{Z}_{ab}, \tag{18}$$

где матрица $\mathcal{Z}$ возникающая в r.h.s., является наиболее общей $n \times n$ симметричной матрицей с общим числом компонент $\frac{n(n+1)}{2}$. Для любого заданного пространства-времени,

---

[5] r.h.s. – right hand side – правая сторона, например, мир правых спиноров.

мы легко можем посчитать соответствующее разложение $\mathcal{Z}$ в терминах антисимметризованных произведений k-гамма-матриц, а именно

$$\mathcal{Z}_{ab} = \sum_k (A\Gamma_{[\mu_1\ldots\mu_k]})_{ab} Z^{[\mu_1\ldots\mu_k]}, \tag{19}$$

где значения k, входящие в сумму r.h.s., ограничены требованием симметрии при замене $a \leftrightarrow b$ и специфичны для данного пространства-времени. Коэффициенты $Z^{[\mu_1\ldots\mu_k]}$ являются абелевыми тензорными центральными зарядами ранга k.

В случае, когда фундаментальные спиноры комплексные или кватернионные, они могут быть объединены в комплексные (для **C** и **H** случаев) и кватернионные (для **H** случая) мультиплеты, элементы которых являются комплексные числа и кватернионы соответственно.

Вещественная обобщенная алгебра суперсимметрии (18) теперь может быть заменена на более общие комплексную или кватернионную алгебры суперсимметрии, задаваемые антикоммутаторами среди фундаментальных спиноров Q_a и их сопряженных ${Q^*}_{\dot a}$ (где сопряжение использует главное сопряжение в данной алгебре с делением, см. (13)). В этом случае, имеем

$$\{Q_a, Q_b\} = \mathcal{Z}_{ab}, \qquad \{{Q^*}_{\dot a}, {Q^*}_{\dot b}\} = {\mathcal{Z}^*}_{\dot a\dot b}, \tag{20}$$

вместе с

$$\{Q_a, {Q^*}_{\dot b}\} = \mathcal{W}_{a\dot b}, \tag{21}$$

где матрица $\mathcal{Z}_{ab}$ (${\mathcal{Z}^*}_{\dot a\dot b}$ является ее сопряженной и не содержит новых степеней свободы) симметрична поскольку $\mathcal{W}_{a\dot b}$ эрмитова.

Максимальное число допустимых компонент в r.h.s. задается для комплексных фундаментальных спиноров с n комплексными компонентами посредством:

ia) $n(n+1)$ (вещественных) бозонных компонент, входящих в симметричную $n \times n$ комплексную матрицу $\mathcal{Z}_{ab}$ плюс

iia) n^2 (вещественных) бозонных компонент, входящих в эрмитову $n \times n$ комплексную матрицу $\mathcal{W}_{a\dot b}$.

Аналогично, максимальное число допустимых компонент в r.h.s. для кватернионных фундаментальных спиноров с n кватернионными компонентами, задается как

ib) $2n(n+1)$ (вещественных) бозонных компонент, входящих в симметричную $n \times n$ кватернионную матрицу $\mathcal{Z}_{ab}$ плюс

iib) $2n^2 - n$ (вещественных) бозонных компонент, входящих в эрмитову $n \times n$ кватернионную матрицу $\mathcal{W}_{a\dot b}$.

Приведенные числа не обязательно означают, что соответствующая обобщенная суперсимметрия действительно насыщена. Это верно, в частности, в кватернионном случае, см. [15].

Любая вещественная обобщенная суперсимметрия, допускающая комплексную структуру, может быть переписана в комплексном формализме с n-компонентными комплексными спинорами и общим числом $n(2n+1)$ (вещественных) бозонных компонент, разбитых на $n(n+1)$ компонент, входящих в симметричную матрицу $\mathcal{Z}$ и n^2 компонент, входящих в эрмитову матрицу $\mathcal{W}$. По иному обстоит дело в кватернионном случае. Кватернионная структура требует ограничения общего числа бозонных порождающих. n-компонентные кватернионные спиноры могут быть описаны как $4n$-компонентные вещественные спиноры. Однако, r.h.s. кватернионной (20) и (21) супералгебры допускает не более чем $4n^2 + n$ бозонных компонент, вместо $8n^2 + 2n$ в случае наиболее общей суперсимметричной вещественной алгебры. Лоренц-ковариантность далее ограничивает число бозонных порождающих в кватернионной алгебре суперсимметрии.

Мы завершаем эту часть упоминанием о двух больших классах подалгебр, отвечающих лоренц-инвариантности, которые могут быть получены из (20) и (21) как в комплексном, так и в кватернионном случае. Они получаются посредством обнуления либо $\mathcal{Z}$, либо $\mathcal{W}$, а именно,

I) $\mathcal{Z}_{ab} \equiv \mathcal{Z}^*{}_{\dot a\dot b} \equiv 0$, так что лишь бозонные степени свободы входят в эрмитову матрицу $\mathcal{W}_{a\dot b}$ или, обратно,

II) $\mathcal{W}_{a\dot b} \equiv 0$, так что лишь бозонные степени свободы входят в $\mathcal{Z}_{ab}$ и сопряженную матрицу $\mathcal{Z}^*{}_{\dot a\dot b}$.

Соответственно, в будущем мы будем ссылаться на (комплексные или кватернионные) обобщенные суперсимметрии, удовлетворяющие ограничению *I)*, как на "эрмитовы" (или "типа I") обобщенные суперсимметрии, в то время как на (комплексные или кватернионные) обобщенные суперсимметрии, удовлетворяющие ограничению *II)*, будем ссылаться, как на "голоморфные" (или "типа II") обобщенные суперсимметрии.

Обобщенные суперсимметрии и октонионная M-супералгебра

Как уже отмечалось, в $D = 11$ пространстве-времени Минковского, где должна быть найдена M-теория, спиноры вещественны и имеют 32 компоненты. Так как наиболее общая симметричная 32×32 матрица допускает 528 компонент, легко доказать, что наиболее общая алгебра суперсимметрии в $D = 11$ может быть представлена как

$$\{Q_a, Q_b\} = (C\Gamma_\mu)_{ab}P^\mu + (C\Gamma_{[\mu\nu]})_{ab}Z^{[\mu\nu]} + (C\Gamma_{[\mu_1\dots\mu_5]})_{ab}Z^{[\mu_1\dots\mu_5]} \tag{22}$$

(где C – матрица зарядового сопряжения), $Z^{[\mu\nu]}$ и $Z^{[\mu_1\dots\mu_5]}$ – полностью антисимметричные тензорные центральные заряды, ранга 2 и 5 соответственно, которые соответствуют расширенным объектам [21, 22], p-бранам. Отметим, что общее число 528 получено в r.h.s. как сумма трех различных секторов, т. е.

$$528 \;=\; 11 + 66 + 462. \tag{23}$$

Алгебра (15) называется M-алгеброй. Она дает обобщение обычной алгебры суперсимметрии, восстанавливаемой посредством отождествления $Z^{[\mu\nu]} \equiv Z^{[\mu_1\dots\mu_5]} \equiv 0$.

Октонионная M-супералгебра вводится в предположении октонионной структуры спиноров, которые в $D = 11$ пространстве-времени Минковского представляют собой октонионнозначные 4-компонентные векторы. Алгебра, заменяющая (15), задается как

$$\{Q_a, Q_b\} = \{Q^*{}_a, Q^*{}_b\} = 0, \qquad \{Q_a, Q^*{}_b\} = Z_{ab}, \tag{24}$$

где $*$ обозначает главное сопряжение в октонионной алгебре с делением и, как результат, бозонная абелева алгебра на r.h.s. ограничивается до эрмитовой

$$Z_{ab} \;=\; Z_{ba}{}^*, \tag{25}$$

оставляющей лишь 52 независимые компоненты.

Матрица Z_{ab} может быть представлена либо как $11 + 41$ бозонных генераторов, входящих в

$$Z_{ab} = P^\mu (C\Gamma_\mu)_{ab} + Z^{\mu\nu}_{\mathbf{O}}(C\Gamma_{\mu\nu})_{ab}, \tag{26}$$

либо как 52 бозонных генератора, входящих в

$$Z_{ab} = Z^{[\mu_1\dots\mu_5]}_{\mathbf{O}}(C\Gamma_{\mu_1\dots\mu_5})_{ab}\,. \tag{27}$$

Вследствие неассоциативности октонионов, в отличие от вещественного случая, сектора, определенные через (26) и (27), не являются зависимыми. Более того, как мы уже видели для $k = 2$, в антисимметричных произведениях k октонионнозначных матриц, некоторое их количество является излишним (для $k = 2$ из-за автоморфизмов G_2 14 таких произведений должны быть аннулированы). В общем случае [14], можно составить таблицу, выражающую число независимых компонент в D нечетно-мерном пространстве-времени октонионной реализации алгебры Клиффорда, принимая во внимание, что среди D гамма-матриц, 7 из них являются октонионнозначными, в то время как остальные $D-7$ чисто вещественными. Мы получаем следующую таблицу, в которой столбцы отмечены числами k – количеством антисимметричных гамма-матриц, а строки нумеруются посредством размерности D (до $D = 13$)

$D \setminus k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
7	1	7	7	1	1	7	7	1						
9	1	9	22	22	10	10	22	22	9	1				
11	1	11	41	75	76	52	52	76	75	41	11	1		
13	1	13	64	168	267	279	232	232	279	267	168	64	13	1

(28)

Октонионная эквивалентность различных секторов может быть символически выражена для различных нечетных размерностей пространства-времени таблицей

$D = 7$	$M0 \equiv M3$
$D = 9$	$M0 + M1 \equiv M4$
$D = 11$	$M1 + M2 \equiv M5$
$D = 13$	$M2 + M3 \equiv M6$
$D = 15$	$M3 + M4 \equiv M0 + M7$

(29)

В $D = 11$ размерности соотношение между $M1 + M2$ и $M5$ может быть получено явно следующим образом. 11 векторных индексов μ разбиваются на 4 вещественных индекса, обозначаемых $a, b, c, \ldots$, и 7 октонионных индексов, обозначаемых $i, j, k, \ldots$. 52 независимые компоненты восстанавливаются из $52 = 4 + 2 \times 7 + 6 + 28$, в соответствии с

4	$M1_a$	$M5_{[aijkl]} \equiv M5_a$
7	$M1_i$, $M2_{[ij]} \equiv M2_i$	$M5_{[abcdi]} \equiv M5_i$,$M5_{[ijklm]} \equiv \widetilde{M5}_i$
6	$M2_{[ab]}$	$M5_{[abijk]} \equiv M5_{[ab]}$
$4 \times 7 = 28$	$M2_{[ai]}$	$M5_{[abcij]} \equiv M5_{[ai]}$

(30)

Октонионная суперконформная M-алгебра

Конформная алгебра октонионной М-теории может быть введена [12] адаптированием к одиннадцатимерию процедуры, обсуждаемой в [5] для 10-ти мерного случая. Это требует отождествления конформной алгебры октонионной $D = 11$ M-алгебры с обобщенной алгеброй Лоренца в $(11, 2)$-мерном пространстве-времени. В таком пространстве-времени октонионные гамма-матрицы Клиффорда являются 8-мерными. Базис эрмитовых генераторов задается 64-мя антисимметричными два-тензорами $C\Gamma_{[\mu_1\mu_2]}\mathcal{Z}^{\mu_1\mu_2}$ и 168 антисимметричными три-тензорами $C\Gamma_{[\mu_1\mu_2\mu_3]}\mathcal{Z}^{\mu_1\mu_2\mu_3}$ (или, эквивалентно, 232 антисимметричными шесть-тензорами $C\Gamma_{[\mu_1\ldots\mu_6]}\mathcal{Z}^{\mu_1\cdots\mu_6}$). Это подсказывает, что общее число генераторов в конформной алгебре равно 232. Мы покажем, что это так.

В соответствии с [5], конформная алгебра может быть введена как алгебра преобразований, оставляющих инвариантным скалярное произведение дираковских спиноров. В $(11,2)$ оно задается посредством $\psi^\dagger C\eta$, где матрица C, аналог Γ^0, задаваемая как произведение двух пространственно-подобных гамма-матриц Клиффорда, является вещественнозначной и полностью антисимметричной. Следовательно, конформные преобразования реализуются как октонионнозначные 8-мерные матрицы $\mathcal{M}$, оставляющие C инвариантным, т. е. удовлетворяющие

$$\mathcal{M}^\dagger C+C\mathcal{M} \;=\; 0. \tag{31}$$

Это позволяет отождествить (квази)-группу конформных преобразований с (квази)-группой симплектических преобразований. Действительно, после простой замены переменных, C может быть приведена к форме

$$\Omega \;=\; \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1}_4 \\ -\mathbf{1}_4 & 0 \end{pmatrix}. \tag{32}$$

Наиболее общая октонионнозначная матрица, оставляющая инвариантным Ω, может быть представлена через

$$\mathbf{M} \;=\; \begin{pmatrix} D & B \\ C & -D^\dagger \end{pmatrix}, \tag{33}$$

где 4×4 октонионные матрицы B, C эрмитовы

$$B=B^\dagger, \qquad\qquad C=C^\dagger. \tag{34}$$

Легко видеть, что общее число независимых компонент в (33) есть в точности 232, как и ожидалось, исходя из предыдущих рассмотрений.

Стоит отметить, что множество матриц $\mathbf{M}$ типа (33) образуют замкнутую алгебраическую структуру посредством обычного матричного коммутирования. Действительно, $[\mathbf{M},\mathbf{M}]\subset\mathbf{M}$ обеспечивает структуру $Sp(8|\mathbf{O})$ на $\mathbf{M}$. Для суперсимметричного расширения суперконформной алгебры, мы должны поместить 64-вещественно-компонентные (или 8-октонионно) спиноры из $(11,2)$ в суперматрицу расширенной $Sp(8|\mathbf{O})$. Это может быть достигнуто следующим образом. Два 4-рядных октонионных спинора α и β могут быть помещены в суперматрицу следующей формы

$$\left(\begin{array}{c|cc} 0 & -\beta^\dagger & \alpha^\dagger \\ \hline \alpha & 0 & 0 \\ \beta & 0 & 0 \end{array}\right). \tag{35}$$

После антикоммутирования, нижний бозонный диагональный блок редуцируется к $Sp(8|\mathbf{O})$. С другой стороны, дополнительные семь генераторов, соответствующие 1-мерной антиэрмитовой матрице A

$$A^\dagger \;=\; -A, \tag{36}$$

т. е. представляющие семь мнимых октонионов, получаются в верхнем бозонном диагональном блоке. Следовательно, общий (generic) бозонный элемент принимает форму

$$\left(\begin{array}{c|cc} A & 0 & 0 \\ \hline 0 & D & B \\ 0 & C & -D^{\dagger} \end{array}\right), \tag{37}$$

где A, B и C удовлетворяют (36) и (34).

Замкнутая супералгебраическая структура с (35) как общим (generic) фермионным элементом и (37) как общим бозонным элементом, будет обозначаться $OSp(1,8|\mathbf{O})$. Это суперконформная алгебра M-теории, которая допускает общее число 239 бозонных генераторов.

Выводы

Мы увидели, что, вопреки общепринятому убеждению, может быть последовательно введена альтернативная формулировка M супералгебры и M суперконформной алгебры, на основе неассоциативной максимальной делимой алгеброй октонионов. При этом возникают необычные свойства, такие как отсутствие независимости различных октонионных секторов бран, что является отражением антисимметричных октонионных тензорных тождеств высокого ранга, обсуждаемых в части **5**. Существование такого второго варианта M алгебры озадачивает. В конечном счете, это может быть связано с появлением исключительных структур (исключительных алгебр Ли и йордановых алгебр) в "Теории Всего" [19].

Так как мнимые октонионы допускают геометрическое описание в терминах семимерной сферы S^7, вполне можно предположить, что высокоразмерные октонионные структуры, в том числе и одиннадцатимерные, соответствуют компактификациям одиннадцатимерной M теории на $AdS_4 \times S^7$. Эта компактификация соответствует естественному решению для 11-мерной супергравитации, см. [20].

Октонионная суперконформная алгебра $OSp(1,8|\mathbf{O})$ была получена явно. Она соответствует суперсимметричному расширению бозонной конформной алгебры, которая интересна с математической точки, ввиду того, что она связана с замкнутой алгебраической структурой, которая выходит за рамки стандартного понимания конформной алгебры заданной йордановой алгебры, см. [12].

Помимо этого аспекта, было представлено понятие эрмитовой (комплексной или кватернионной) и голоморфной (комплексной и кватернионной) суперсимметрии, как последовательного делимо-алгебраического ограничения обобщенной суперсимметрии.

Физические следствия этих математических структур вполне очевидны. Классификация обобщенных суперсимметрий позволяет понять паутину взаимосвязанных дуальностей различных классов теорий, которые могут быть либо аналитически продолжены (скажем, на евклидовый случай), либо восстановлены посредством размерной редукции.

Как пример, мы можем упомянуть, что аналитическое продолжение M алгебры, как было доказано в [23], соответствует одиннадцатимерной комплексной голоморфной суперсимметрии. Более того, в [15] показано, что эта же алгебра допускает 12-мерное евклидово представление в терминах вейль-проективных спиноров. Эти два примера евклидовых суперсимметрий могут найти свои приложения в функционально-интегральных формулировках многомерных суперсимметричных моделей.

Существует интересный класс моделей, который хорошо вписывается в изложенную здесь схему и подвергается активному изучению. Это класс суперчастичных моделей, впервые введенных в [24] и изучавшихся в [25], бозонные координаты которых соответствуют тензорным центральным зарядам. В работе [26] было показано, что 4-мерная теория подобного рода приводит к башне безмассовых состояний высшего спина, конкретно осуществляя предложение Фронсдала [27] по введению бозонных тензорных координат для описания теорий безмассовых высших спинов (допускающих гелевость больше двойки). Это область активных исследований, основная мотивация которых – изучение пределов теории суперструн без напряжений, соответствующих башне безмассовых частиц высокой гелевости (см. [28]).

В каком-нибудь "ортогональном" направлении, класс теорий, которые могут быть изучены на данном пути, является классом суперсимметричных расширений супергравитаций Черна-Саймонса в высших размерностях, требующих в качестве базисной составляющей супералгебры Ли, допускающей оператор Казимира подходящего порядка, см. [29].

Литература

[1] E. Bergshoeff and A. Van Proeyen, Class. Quant. Grav. **17**, 3277 (2000).

[2] R. Haag, J. Łopuszański and M. Sohnius, Nucl. Phys. **B 88**, 257 (1975).

[3] T. Kugo and P. Townsend, Nucl. Phys. **B 221**, 357 (1983).

[4] D. B. Fairlie and A. C. Manogue, Phys. Rev. **D 34**, 1832 (1986).

[5] K. W. Chung and A. Sudbery, Phys. Lett. **B 198**, 161 (1987).

[6] C. A. Barton and A. Sudbery, math.RA/0203010.

[7] E. Witten, "Quest For Unification", hep-ph/0207124.

[8] P. Ramond, "Algebraic Dreams", hep-th/0112261.

[9] M. Günaydin, C. Piron and H. Ruegg, *Comm. Math. Phys.* **61** (1978), 69.

[10] L. Smolin, hep-th/0104050.

[11] J. Lukierski and F. Toppan, Phys. Lett. **B 539**, (2002), 266.

[12] J. Lukierski and F. Toppan, Phys. Lett. **B 567**, 125 (2003).

[13] S. Okubo, J. Math. Phys. **32**, 1657 (1991); *ibid.* **32**, 1669 (1991).

[14] H. L. Carrion, M. Rojas and F. Toppan, JHEP04 (2003) 040.

[15] F. Toppan, JHEP09 (2004) 016.

[16] H. L. Carrion, M. Rojas and F. Toppan, Mod. Phys. Lett. **A 18**, 787 (2003).

[17] J. Baez, "The Octonions", math.RA/0105155.

[18] R. D'Auria, S. Ferrara, M.A. Lledo and V.S. Varadarajan, J. Geom. Phys. **40** 101 (2001); R. D'Auria, S. Ferrara and M. A. Lledo, Lett. Math. Phys. **57**, 123 (2001); S. Ferrara and M. A. Lledo, Rev. Math. Phys. **14**, 519 (2002).

[19] L. Boya, "Octonions and M-theory", hep-th/0301037.

[20] M. J. Duff and C. N. Pope, "Kaluza-Klein supergravity and the seven-sphere" in Supersymmetry and Supergravity 82, Trieste proceedings; M. J. Duff, B. E. W. Nilsson and C. N. Pope, *Phys. Rep.* **130** (1986), 1.

[21] E. Bergshoeff, E. Sezgin, P, Townsend, *Ann. Phys.* **18**, 330 (1987).

[22] M. J. Duff. R. R. Khuri, J. X. Lu, *Phys. Rep.* **259**, 213 (1995).

[23] J. Lukierski and F. Toppan, Phys. Lett. **B 584**, 315 (2004).

[24] E. Sezgin and I. Rudychev, "Superparticles, *p*-form coordinates and the BPS condition", hep-th/9711128.

[25] I. Bandos and J. Lukierski, Mod. Phys. Lett. **A 14** 1257 (1999).

[26] I. Bandos, J. Lukierski, C. Preitschopf and D. Sorokin, Phys. Rev. **D 61** (2000) 065009.

[27] C. Fronsdal, "Massless Particles, Ortosymplectic Symmetry and Another Type of Kaluza-Klein Theory", in "Essays on Supersymmetry", Reidel (1986) (Math. Phys. Studies, v. 8).

[28] D. Sorokin, "Introduction to the Classical Theory of Higher Spin", hep-th/0405069.

[29] M. Hassaine, R. Troncoso and J. Zanelli, "Eleven-dimensional supergravity as a gauge-theory for the M-algebra", hep-th/0306258.

Division Algebra, Generalized Supersymmetries and Octonionic M-Theory

Francesco Toppan

CBPF - CCP, Rio de Janeiro, Brazil
toppan@cbpf.br

This is the report of the talk given at the conference “Number, Time and Relativity", held at the Bauman University, Moscow, August 2004, concerning the recent research activity of the author and his collaborators about the inter-relation of the concepts of division algebras, representations of Clifford algebras, generalized supersymmetries with the introduction of an alternative description of the M-algebra in terms of the non-associative structure of the octonions.

Key-words: division algebras, octonions, Clifford algebras, generalized supersymmetries, M-theory.

КВАТЕРНИОННЫЙ АНАЛИЗ[1]

Энтони Садбери

as2@mailer.york.ac.uk

Ключевые слова: кватернионы, кватернионный анализ, теорема Коши, интегральная формула Коши, теория Фютера, регулярные функции.

1. *Введение*

Богатство теории функций комплексного переменного делает естественным поиск подобной теории для единственной иной нетривиальной ассоциативной алгебры с делением, называемой кватернионами. Такая теория существует, но она достаточно труднодоступна и еще по-видимому мало известна. Она не развивалась почти столетие после открытия кватернионов Гамильтоном. Гамильтон (1) и его основные последователи и интерпретаторы, Тэйт (2) и Джоли (3), лишь развили теорию функций кватернионных переменных настолько, насколько это было возможно посредством общих методов теории функций многих действительных переменных (основные идеи этой теории появились в их современной форме первый раз в работе Гамильтона о кватернионах). Среди всех кватернионнозначных функций кватернионных переменных они не выделили специальный класс регулярных функции аналогично регулярным функциям комплексной переменной.

Это произошло из-за того, что распространение никакого из двух фундаментальных определений аналитической функции комплексной переменной на кватернионы не дает интересных следствий; одно слишком узко, другое недостаточно узко. Функции кватернионных переменных, которые имеют кватернионные производные в очевидном смысле, есть лишь константы и линейные функции (причем не все из них); функции, которые могут быть представлены посредством кватернионных степенных рядов, есть именно те, которые могут быть представлены как степенные ряды из четырех действительных переменных.

В 1935 Р. Фютер (4) предложил определение "регулярности" кватернионных функций посредством аналогии с уравнениями Коши-Римана. Он показал, что это определение привело к тесной аналогии с теоремой Коши, интегральной формулой Коши и разложением Лорана (5). В последующие 12 лет Фютер и его сотрудники развили теорию кватернионного анализа. Полная библиография этой работы содержится в (6), и простая сводка (на английском) по элементарным разделам этой теории дана Деворсом (7).

Теория, развитая Фютером и его школой, не завершена по нескольким направлениям и многие из их теорем не являются ни столь общими, ни столь строго доказанными, как требуют современные стандарты описания в комплексном анализе. Цель данной работы заключается в представлении замкнутого обзора главного направления кватернионного анализа, который исправляет эти недостатки, заодно добавляя некоторое число новых результатов. Используя внешнее дифференциальное исчисление мы готовы предоставить новые и простые доказательства большинства основных теорем и разъяснить связь между кватернионным анализом и комплексным анализом.

---

[1] *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* (1979), **85**, 199-225. Пер. А. Виноградовой под ред. А. Элиовича.

В разделе 2 этой статьи мы устанавливаем свои обозначения для кватернионов и вводим кватернионные дифференциальные формы dq, $dq\wedge dq$ и Dq, которые играют фундаментальную роль в кватернионном анализе. 1-форма dq и 3-форма Dq имеют простые геометрические интерпретации как касательная к кривой и нормаль к гиперповерхности соответственно.

Раздел 3 касается определения регулярной функции. Здесь развиты замечания второго параграфа этого введения о возможных аналогиях в определении комплексно-аналитической функции (этот материал по-видимому широко известен, но трудно доступен в литературе); затем показано, что определение Фютера регулярной функции, посредством аналогии с уравнениями Коши-Римана, эквивалентно существованию некоторого типа кватернионной производной. Точно так же, как для функции $f\colon \mathbb{C}\to\mathbb{C}$, уравнение Коши-Римана $\partial f/\partial x + i\partial f/\partial y = 0$ (переменная имеет вид $z = x + iy$) эквивалентно существованию комплексного числа $f'(z)$ такого что $df = f'(z)dz$, так и для функции $f\colon \mathbb{H}\to\mathbb{H}$, уравнение Коши-Римана-Фютера

$$\frac{\partial f}{\partial t} + i\frac{\partial f}{\partial x} + j\frac{\partial f}{\partial y} + k\frac{\partial f}{\partial z} = 0 \tag{1.1}$$

(переменная имеет вид $q = t + ix + jy + kz$) эквивалентно существованию кватерниона $f'(q)$ такого, что $d\,(dq\wedge dqf) = Dqf'(q)$.

Раздел 4 посвящен кватернионным версиям теоремы Коши и интегральной формулы Коши. Если функция f непрерывно дифференцируема и удовлетворяет (1.1), то можно применить теорему Гаусса, чтобы показать, что

$$\int_{\partial C} Dqf = 0, \tag{1.2}$$

где C – некоторое гладкое замкнутое 3-мерное многообразие в $\mathbb{H}$, и что если q_0 лежит внутри C, то

$$f(q_0) = \frac{1}{2\pi^2}\int_{\partial C}\frac{(q-q_0)^{-1}}{|\,q-q_0|^2}\,Dqf(q). \tag{1.3}$$

Мы покажем, что метод Гурса может быть использован для ослабления условий на контур C и функцию f, так что необходимо лишь потребовать спрямляемости C и производные функции f не обязательно должны быть непрерывными. Из интегральной формулы (1.3) следует, что как и в комплексном анализе, если f – регулярная функция на открытом множестве U, то она разлагается в степенной ряд в каждой точке множества U. Таким образом, поточечная дифференцируемость вместе с четырьмя действительными условиями (1.1) на шестнадцать частных производных функции f являются достаточным для обеспечения вещественной аналитичности.

В главе 5 мы показываем, как регулярные функции могут быть созданы из функций более обычного типа, а именно из гармонических функций четырех действительных переменных и аналитических функций комплексной переменной, и как регулярная функция порождает другие при конформных преобразованиях переменной.

Однородные компоненты в степенных рядах, представляющих регулярную функцию, сами являются регулярными; поэтому важно изучать регулярные однородные полиномы, базовые функции, через которые строятся все регулярные функции. Соответствующие функции комплексной переменной есть просто степени переменной, но ситуация с кватернионами более сложна. Множество однородных регулярных функций степени n формирует кватернионное векторное пространство размерности $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$; это справедливо для любого целого n, если подразумевается, что для отрицательных n

функции определены и регулярны везде исключая 0. Функции с отрицательной степенью однородности соответствуют отрицательным степеням комплексной переменной и встречаются в кватернионном ряду Лорана, который существует для любой функции, регулярной на открытом множестве кроме одной точки. Фютер нашел два естественных базиса для множества однородных функций которые играют двоякую роль в исчислении вычетов. (Он на самом деле только доказал, что эти базисы формируют остовы (натянутые множества, spanning sets)). В разделе 6 мы изучаем однородные регулярные функции при помощи гармонического анализа на единичной сфере в $\mathbb{H}$, которая формирует группу изоморфную $SU(2)$; это имеет такое же отношение к кватернионному анализу, как теория рядов Фурье – к комплексному анализу. В разделе 7 мы исследуем степенные ряды, представляющие регулярные функции, и получаем аналоги теоремы Лорана и теоремы вычетов.

Многие алгебраические и геометрические свойства комплексных аналитических функций не представлены в кватернионном анализе. Из-за того, что кватернионы не коммутируют, регулярные функции кватернионных переменных не могут быть перемножены или скомбинированы для создания новых регулярных функций. Поскольку кватернионы являются четырехмерными, не существует аналога геометрическому описанию комплексных аналитических функций как конформных отображений. Нули кватернионной регулярной функции не обязательно являются изолированными, а ее область значений не обязательно открыта; ни одно из этих множеств не обязано даже быть подмногообразием $\mathbb{H}$. В соответствии с этим возникает сложность в структуре особенностей кватернионной регулярной функции; что было описано Фютером (9), но без четкой формулировки утверждений или доказательств. Эта тема не исследуется в настоящей работе.

2. *Предварительные соображения*

Обозначим четырехмерную действительную ассоциативную алгебру кватернионов через $\mathbb{H}$, ее единицу как 1; будем считать, что $\mathbb{R}$ вложено в $\mathbb{H}$ посредством отождествления $t \in \mathbb{R}$ с $1 \in \mathbb{H}$. Тогда мы имеем прямую сумму векторного пространства $\mathbb{H} = \mathbb{R} \bigoplus P$, где P – ориентированное трехмерное евклидово векторное пространство; в обычной системе обозначений для трехмерных векторов произведение двух элементов из P представляется в виде

$$\mathbf{ab} = -\mathbf{a}.\mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{b}. \tag{2.1}$$

Мы выбираем ортонормированный положительно ориентированный базис i, j, k для P и записываем типичный кватернион как

$$q = t + ix + jy + kz \qquad (t, x, y, z \in \mathbb{R}). \tag{2.2}$$

Иногда мы будем обозначать базис кватернионов i, j, k через e_i и координаты x, y, z через x_i $(i = 1, 2, 3)$ и использовать правило суммирования для повторяющихся индексов. Тогда (2.2) принимает вид

$$q = t + e_i x_i \tag{2.3}$$

и умножение дается соотношением

$$e_i e_j = -\delta_{ij} + \epsilon_{ijk} e_k. \tag{2.4}$$

Будем также иногда отождествлять поле, натянутое на 1 и i, с комплексным полем $\mathbb{C}$ и записывать

$$q = v + jw \qquad (v, w \in \mathbb{C}), \tag{2.5}$$

где $v = t + ix$ и $w = y - iz$. Правило умножения тогда записывается

$$vj = j\bar{v} \tag{2.6}$$

для всех $v \in \mathbb{C}$.

Мы будем писать

$$\bar{q} = t - ix - jy - kz, \tag{2.7}$$

$$\mid q \mid = \sqrt{q\bar{q}} = \sqrt{t^2 + x^2 + y^2 + z^2} \in \mathbb{R}, \tag{2.8}$$

$$Re\, q = \frac{1}{2}(q + \bar{q}) = t \in \mathbb{R} \tag{2.9}$$

$$Pu\, q = \frac{1}{2}(q - \bar{q}) = ix + jy + kz \in P, \tag{2.10}$$

$$Un\, q = \frac{q}{\mid q \mid} \in S, \tag{2.11}$$

где S – единичная сфера в $\mathbb{H}$; и

$$\langle q_1, q_2 \rangle = Re(q_1\bar{q}_2) = t_1t_2 + x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2. \tag{2.12}$$

Тогда имеем

$$\overline{q_1q_2} = \bar{q}_2\bar{q}_1, \tag{2.13}$$

$$|q_1q_2| = \mid q_1 \mid \cdot \mid q_2|, \tag{2.14}$$

$$Re(q_1q_2) = Re(q_2q_1) \tag{2.15}$$

и

$$q^{-1} = \frac{\bar{q}}{|q|^{\,2}}. \tag{2.16}$$

Заметим, что если u_1 и u_2 – единичные кватернионы, т. е. $|u_1| = |u_2| = 1$, отображение $q \mapsto u_1qu_2$ является ортогональным относительно скалярного произведения (2.12) и имеет определитель 1; обратно, любое вращение $\mathbb{H}$ имеет форму $q \mapsto u_1qu_2$ с некоторыми $u_1, u_2 \in \mathbb{H}$ (смотри например (**10**)), раздел 10).

Скалярное произведение (2.12) порождает $\mathbb{R}$-линейное отображение $\Gamma : \mathbb{H}^* \to \mathbb{H}$, где

$$\mathbb{H}^* = Hom_{\mathbb{R}}(\mathbb{H}, \mathbb{R})$$

– дуальное к $\mathbb{H}$ векторное пространство, заданное посредством

$$\langle \Gamma(\alpha), q \rangle = \alpha(q) \tag{2.17}$$

для $\alpha \in \mathbb{H}^*$, $q \in \mathbb{H}$. Так как $\{1, i, j, k\}$ – ортонормированный базис на $\mathbb{H}$, имеем

$$\Gamma(\alpha) = \alpha(1) + i\alpha(i) + j\alpha(j) + k\alpha(k).$$

Множество $\mathbb{R}$-линейных отображений из $\mathbb{H}$ в $\mathbb{H}$ формирует двустороннее векторное пространство на $\mathbb{H}$ размерности 4, которое будем обозначать как F_1. Оно порождается (на $\mathbb{H}$) $\mathbb{H}^*$, так что отображение Γ может быть расширено по линейности на правое $\mathbb{H}$-линейное отображение $\Gamma_r : F_1 \to \mathbb{H}$ и левое линейное отображение

$$\Gamma_l : F_1 \to \mathbb{H}.$$

Это задается посредством

$$\Gamma_r(\alpha) = \alpha(1) + i\alpha(i) + j\alpha(j) + k\alpha(k) \tag{2.18}$$

и

$$\Gamma_l(\alpha) = \alpha(1) + i\alpha(i) + j\alpha(j) + k\alpha(k) \tag{2.19}$$

для любого $\alpha \in F_1$.

Ниже дана геометрическая терминология, используемая в настоящей статье:

Ориентированный k-параллелепипед в $\mathbb{H}$ есть отображение $C\colon I^k \to \mathbb{H}$, где $I^k \subset \mathbb{R}^k$ – замкнутый единичный k-куб, формы

$$C(t_1, \dots, t_k) = q_0 + t_1 h_1 + \dots + t_k h_k.$$

$q_0 \in \mathbb{H}$ называется *исходной вершиной* параллелепипеда, $h_1, \dots, h_k \in \mathbb{H}$ – *векторами его боковых ребер*. Параллелепипед *невырожден*, если его вектора боковых ребер линейно независимы (над $\mathbb{R}$). Невырожденный 4-параллелепипед является *положительно ориентированным*, если

$$v(h_1, \dots, h_4) > 0,$$

отрицательно ориентированным, если $v(h_1, \dots, h_4) < 0$, где v – объемная форма, определенная ниже (уравнение (2.26)).

Мы будем иногда упрощать запись, обозначая отображение $C(I^k)$ как просто С.

Кватернионные дифференциальные формы. Будем говорить, когда это необходимо во избежание путаницы с другими обозначениями дифференцируемости, что функция $f : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ *действительно дифференцируема*, если она дифференцируема в обычном смысле. Ее дифференциал в точке $q \in \mathbb{H}$ тогда будет $\mathbb{R}$-линейным отображением $df_q : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$. Идентифицируя касательное пространство в каждой точке $\mathbb{H}$ с самим $\mathbb{H}$, мы можем рассматривать дифференциал как кватернионнозначную 1-форму

$$df = \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{dz}dz. \tag{2.20}$$

Обратно, любая кватернионнозначная 1-форма $\theta = a_0 dt + a_i dx_i$ $(a_0, a_i \in \mathbb{H})$ может быть рассмотрена как $\mathbb{R}$-линейное отображение $\theta : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ представимое как

$$\theta(t + x_i e_i) = a_0 t + a_i x_i \tag{2.21}$$

Аналогично, кватернионнозначная r-форма может рассматриваться как отображение из $\mathbb{H}$ на пространство кососимметричных $\mathbb{R}$-полилинейных отображений из $\mathbb{H} \times \dots \times \mathbb{H}$ (r раз) на $\mathbb{H}$. Определим внешнее произведение таких форм обычным способом: если θ – r-форма и ϕ – s-форма, то

$$\theta \wedge \phi(h_1, \dots, h_{r+s}) = \frac{1}{r!s!} \sum_{\rho} \epsilon(\rho)\theta(h_{\rho(1)}, \dots, h_{\rho(r)}))\phi(h_{\rho(r+1)}, \dots, h_{\rho(r+s)}), \tag{2.22}$$

где сумма производится по всем перестановкам ρ $r + s$ объектов, и $\epsilon(\rho)$ – знак ρ. Тогда множество всех r-форм есть двустороннее кватернионное векторное пространство, и мы имеем

$$\left.\begin{aligned} a(\theta \wedge \phi) &= (a\theta) \wedge \phi, \\ (\theta \wedge \phi)a &= \theta \wedge (\phi a), \\ (\theta a) \wedge \phi &= \theta \wedge (a\phi) \end{aligned}\right\} \tag{2.23}$$

для всех кватернионов a, r-форм θ и s-форм ϕ. Пространство кватернионных r-форм имеет базис действительных r-форм, состоящий из внешних произведений действительных 1-форм dt, dx, dy, dz; для таких форм левое и правое умножение на кватернионы совпадают. Заметим, что так как внешнее произведение определено в терминах кватернионного умножения, которое не является коммутативным, вообще говоря, неверно, что $\theta \wedge \phi = -\phi \wedge \theta$ для кватернионных 1-форм θ и ϕ.

Внешняя производная кватернионной дифференциальной формы определена с помощью обычной рекурсивной формулы, а теорема Стокса остается в силе в обычной форме для кватернионных интегралов.

Следующие специальные дифференциальные формы будут часто использоваться на протяжении всей статьи. Дифференциал тождественной функции имеет вид

$$dq = dt + idx + jdy + kdz \tag{2.24}$$

и рассматривается как $\mathbb{R}$-линейное преобразование $\mathbb{H}$, dq – тождественное отображение. Его внешнее произведение с самим собой есть

$$dq \wedge dq = \frac{1}{2}\,\epsilon_{ijk} e_i dx_j \wedge dx_k = idy \wedge dz + jdz \wedge dx + kdx \wedge dy, \tag{2.25}$$

которое, как антисимметричная функция на $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$, является коммутатором своих аргументов. Для постоянной (а по существу единственной) действительной 4-формы используем сокращение

$$v = dt \wedge dx \wedge dy \wedge dz, \tag{2.26}$$

так что $v(1,i,j,k) = 1$. Наконец, 3-форма Dq определяется как кососимметричная $\mathbb{R}$-трилинейная функция посредством

$$\langle h_1, Dq(h_2,h_3,h_4)\rangle = v(h_1,h_2,h_3,h_4) \tag{2.27}$$

для всех $h_1,\dots,h_4 \in \mathbb{H}$. Таким образом $Dq(i,j,k) = 1$ и $Dq(1,e_i,e_j) = -\epsilon_{ijk}e_k$. В координатах выражение для Dq есть

$$\begin{gathered} Dq = dx \wedge dy \wedge dz - \frac{1}{2}\,\epsilon_{ijk} e_i dt \wedge dx_j \wedge dx_k = \\ dx \wedge dy \wedge dz - idt \wedge dy \wedge dz - jdt \wedge dz \wedge dx - kdt \wedge dx \wedge dy. \end{gathered} \tag{2.28}$$

Геометрически, $Dq(a,b,c)$ – это кватернион, который перпендикулярен к a, b и c и имеет величину, равную объему 3-мерного параллелепипеда с ребрами a, b и c. Он имеет также следующее алгебраическое выражение:

Утверждение 1. $Dq(a,b,c) = \frac{1}{2}(c\bar{a}b - b\bar{a}c)$.

Доказательство. Для любого единичного кватерниона u отображение $q \longmapsto uq$ является ортогональным преобразованием $\mathbb{H}$ с детерминантом 1; следовательно

$$Dq(ua,ub,uc) = uDq(a,b,c).$$

Взяв $u = |\,a|\,a^{-1}$ и используя $\mathbb{R}$-трилинейность Dq, получим

$$Dq(a,b,c) = |\,a|^2 a Dq(1, a^{-1}b, a^{-1}c). \tag{2.29}$$

Теперь, так как

$$Dq(1,e_i,e_j) = -\epsilon_{ijk}e_k = \frac{1}{2}(e_j e_i - e_i e_j),$$

то при линеаризации имеем

$$Dq(1,h_1,h_2) = \frac{1}{2}(h_2 h_1 - h_1 h_2) \tag{2.30}$$

для всех $h_1, h_2 \in \mathbb{H}$. Следовательно

$$Dq(a,b,c) = \frac{1}{2}|\,a|^2 a(a^{-1}ca^{-1}b - a^{-1}ba^{-1}c) = \frac{1}{2}(c\bar{a}b - b\bar{a}c). \ \square$$

В ходе этого доказательства были получены две полезные формулы. Рассуждение, приведшее к (2.29), может быть обобщено, используя тот факт, что отображение $q \longmapsto uqv$ есть вращение для любой пары единичных кватернионов u и v, на

$$Dq(ah_1b, ah_2b, ah_3b) = |a|^2|b|^2 aDq(h_1, h_2, h_3)b; \tag{2.31}$$

и формула (2.30) может быть записана как

$$1 \rfloor Dq = -\frac{1}{2} dq \wedge dq, \tag{2.32}$$

где $\rfloor$ обозначает обычное скалярное произведение между дифференциальными формами и векторными полями и 1 обозначает постоянное векторное поле, величина которого равна 1.

Так как дифференциал кватернионнозначной функции на H является элементом F_1, отображение Γ_r может быть применена к нему. Результатом будет

$$\Gamma_r(df) = \frac{\partial f}{\partial t} + i\frac{\partial f}{\partial x} + j\frac{\partial f}{\partial y} + k\frac{\partial f}{\partial z}. \tag{2.33}$$

Введем следующие обозначения для дифференциального оператора, записанного в (2.33), и для других связанных с ним дифференциальных операторов:

$$\left.\begin{aligned} \bar{\partial}_l f = \frac{1}{2}\Gamma_r(df) &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial t} + e_i\frac{\partial f}{\partial x_i}\right), \\ \partial_l f &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial t} - e_i\frac{\partial f}{\partial x_i}\right), \\ \bar{\partial}_r f = \frac{1}{2}\Gamma_l(df) &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x_i}e_i\right), \\ \partial_r f &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\partial f}{\partial x_i}e_i\right), \\ \triangle f &= \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}. \end{aligned}\right\} \tag{2.34}$$

Отметим, что $\partial_l, \bar{\partial}_l, \partial_r$ и $\bar{\partial}_r$ все коммутируют и что

$$\triangle = 4\partial_r\bar{\partial}_r = 4\partial_l\bar{\partial}_l. \tag{2.35}$$

3. Регулярные функции

Требование того, что функция комплексной переменной $z = x + iy$ должна быть комплексным полиномом, т. е. суммой членов $a_n z^n$, выделяет собственное подмножество полиномных функций $f(x,y) + ig(x,y)$. Соответствующее условие для функции кватернионных переменных $q = t + ix + jy + kz$, а именно чтобы она была суммой мономов $a_0qa_1\dots a_{r-1}qa_r$, не накладывает ограничение на функцию; в противоположность комплексному случаю координаты t, x, y, z могут самостоятельно быть записаны как кватернионные полиномы:

$$\left.\begin{aligned} t &= \frac{1}{4}(q - iqi - jqj - kqk),\\ x &= \frac{1}{4i}(q - iqi + jqj + kqk),\\ y &= \frac{1}{4j}(q + iqi - jqj + kqk),\\ z &= \frac{1}{4k}(q + iqi + jqj - kqk),\end{aligned}\right\} \tag{3.1}$$

и поэтому каждый действительный полином в t, x, y, z является кватернионным полиномом в q. Поэтому теория кватернионных степенных рядов будет тождественна теории действительных аналитических функций на $\mathbb{R}^4$.

С другой стороны, требование того, чтобы функция кватернионной переменной имела бы кватернионную производную в очевидном смысле, является слишком сильным для получения интересных следствий, как мы сейчас покажем.

Определение. Функция $f : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ *кватернионно-дифференцируема слева* в q, если предел

$$\frac{df}{dq} = \lim_{h\to 0}[h^{-1}\{f(q+h) - f(q)\}]$$

существует.

ТЕОРЕМА 1. Предположим, что функция f определена и кватернионно-дифференцируема слева на всем связном открытом множестве U. Тогда на U f имеет форму

$$f(q) = a + qb$$

для некоторых $a, b \in \mathbb{H}$.

Доказательство. Из определения следует, что если f кватернионно-дифференцируема слева в q, она действительно-дифференцируема в q и ее дифференциал является линейным отображением умножения справа на $\partial f/\partial q$:

$$df_q(h) = h\frac{df}{dq},$$

то есть

$$df_q = dq\frac{df}{dq}. \tag{3.2}$$

Приравнивая коэффициенты при dt, dx, dy и dz, получим

$$\frac{df}{dq} = \frac{\partial f}{\partial t} = -i\frac{\partial f}{\partial x} = -j\frac{\partial f}{\partial y} = -k\frac{\partial f}{\partial z}. \tag{3.3}$$

Положим $q = v + jw$, где $v = t + ix$ и $w = y - iz$, и пусть $f(q) = g(v,w) + jh(v,w)$, где g и h – комплекснозначные функции двух комплексных переменных v и w; тогда (3.3) может быть разделено на два набора комплексных уравнений

$$\frac{\partial g}{\partial t} = -i\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial y} = i\frac{\partial h}{\partial z},$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = i\frac{\partial h}{\partial x} = -\frac{\partial g}{\partial y} = i\frac{\partial g}{\partial z}.$$

В терминах комплексных производных это может быть записано как

$$\frac{\partial g}{\partial \bar{v}} = \frac{\partial h}{\partial \bar{w}} = \frac{\partial h}{\partial v} = \frac{\partial g}{\partial w} = 0, \tag{3.4}$$

$$\frac{\partial g}{\partial v} = \frac{\partial h}{\partial w} \tag{3.5}$$

и

$$\frac{\partial h}{\partial \bar{v}} = -\frac{\partial g}{\partial \bar{w}}. \tag{3.6}$$

Уравнение (3.4) показывает, что g является комплексной аналитической функцией переменных v и $\bar{w}$, h – комплексной аналитической функцией переменных $\bar{v}$ и w. Отсюда согласно теореме Хартога ((**11**), стр. 133) g и h имеют непрерывные частные производные всех порядков, и таким образом из (3.5) вытекает

$$\frac{\partial^2 g}{\partial v^2} = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial h}{\partial \bar{w}}\right) = \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{\partial h}{\partial v}\right) = 0.$$

Предположим сначала, что U – выпуклое. Тогда можно заключить, что g – линейное по $\bar{w}, h$ – линейное по w и h – линейное по $\bar{v}$. Таким образом

$$g(v,w) = \alpha + \beta v + \gamma\bar{w} + \delta v\bar{w},$$

$$h(v,w) = \epsilon + \zeta\bar{v} + \eta w + \theta\bar{v}w,$$

где греческими буквами обозначены комплексные константы. Теперь (3.5) и (3.6) дают следующие соотношения между этими константами:

$$\beta = \eta, \quad \zeta = -\gamma, \quad \delta = \theta = 0.$$

Тогда

$$\begin{aligned} f &= g + jh = \alpha + j\epsilon + (v + jw)(\beta - j\gamma) \\ &= a + qb, \end{aligned}$$

где $a = \alpha + j\epsilon$ и $b = \beta - j\gamma$; итак, f имеет указанную форму, если U – выпуклое. Произвольное связное открытое множество может быть покрыто выпуклыми множествами, любые два из которых могут быть связаны цепью попарно перекрывающихся выпуклых множеств; сравнивая формы функций f на перекрытиях, мы видим, что $f(q) = a + qb$ с теми же константами a, b на всем U. □

Теперь дадим определение "регулярности" для кватернионной функции, которая обеспечивается большим классом функций и которая приводит к развитию теории, подобной теории регулярных функций комплексной переменной.

Определение. Функция $f\colon \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ *лево-регулярная* в $q \in \mathbb{H}$, если она действительно-дифференцируема в q и там существует кватернион $f'_l(q)$ такой что

$$d(dq \wedge dqf) = Dqf'_l(q). \tag{3.7}$$

Она является *право-регулярной*, если там существует кватернион $f'_r(q)$ такой что

$$d(fdq \wedge dq) = f'_r(q)Dq.$$

Ясно, что теория лево-регулярных функций полностью эквивалентна теории право-регулярных функций. Для определенности мы рассмотрим только лево-регулярные функции, которые назовем просто *регулярными.* Запишем $f'_l(q) = f'(q)$ и назовем ее *производной* функции f в q.

Приложение теоремы Стокса дает следующее определение производной регулярной функции как предела разностного отношения:

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. *Предположим, что f регулярна в q_0 и непрерывно дифференцируема в окрестности q_0. Тогда при данном $\epsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такие, что если C – невырожденный ориентированный 3-параллелепипед с $q_0 \in C(I^3)$ и $q \in C(I^3) \Rightarrow |q - q_0| < \delta$, то*

$$\left| \left(\int_C Dq \right)^{-1} \left(\int_{\partial C} dq \wedge dqf \right) - f'(q_0) \right| < \epsilon.$$

Соответствующее определение производной в терминах значений функции в конечном числе точек есть

$$\begin{aligned} f'(q_0) = \lim_{h_1,h_2,h_3 \to 0} [Dq(h_1,h_2,h_3)^{-1}\{ & (h_1h_2 - h_2h_1)(f(q_0+h_3) - f(q_0)) \\ & + (h_2h_3 - h_3h_2)(f(q_0+h_1) - f(q_0)) \\ & + (h_3h_1 - h_1h_3)(f(q_0+h_2) - f(q_0))\}]. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Выражение обоснованно, если подразумевается, что h_1, h_2, h_3 кратны трем фиксированным линейно независимым кватернионам, $h_i = t_i H_i$, и предел берется как $t_1, t_2, t_3 \to 0$.

Переписав (3.7) в виде

$$dq \wedge dq \wedge df = Dqf'(q)$$

и выразив эти трилинейные функции через аргументы (i, j, k) и $(1, i, j)$, мы получаем два уравнения, которые дают выражение для производной

$$f' = -2\partial_l f = -\frac{\partial f}{\partial t} + i\frac{\partial f}{\partial x} + j\frac{\partial f}{\partial y} + k\frac{\partial f}{\partial z} \tag{3.9}$$

и также

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. *(Уравнения Коши-Римана-Фютера).*

Действительно-дифференцируемая функция f регулярна в q тогда и только тогда, когда $\bar{\partial}_l f = 0$, т. е.

$$\frac{\partial f}{\partial t} + i\frac{\partial f}{\partial x} + j\frac{\partial f}{\partial y} + k\frac{\partial f}{\partial z} = 0. \tag{3.10}$$

Если мы напишем $q = v + jw$, $f(q) = g(v,w) + jh(v,w)$ как в Теореме 1, выражение (3.10) становится парой комплексных уравнений

$$\frac{\partial g}{\partial \bar{v}} = \frac{\partial h}{\partial \bar{w}}, \qquad \frac{\partial g}{\partial w} = -\frac{\partial h}{\partial v}, \tag{3.11}$$

которые могут рассматриваться как комплексификация уравнений Коши-Римана для функции комплексной переменной.

Из Утверждения 3 и (2.35) следует, что, если f регулярна и дважды дифференцируема, то $\triangle f = 0$, то есть f – гармоническая функция. В следующем разделе мы увидим, что регулярная функция с необходимостью является бесконечно дифференцируемой, так что все регулярные функции гармонические.

4. Теорема Коши и интегральная формула

Интегральные теоремы для регулярных кватернионных функций имеют столь же широкую область справедливости, как их аналоги для регулярных комплексных функций, которая значительно шире, чем область справедливости интегральных теорем для гармонических функций. Теорема Коши справедлива для любого спрямляемого контура интегрирования; интегральная формула, которая подобна формуле Пуассона в том смысле, что она дает значение функции внутри области через значения на ее границе, справедлива в общем случае спрямляемой границы, и в этом заключается явное решение основной проблемы Дирихле.

Алгебраическим базисом этих теорем является уравнение

$$\begin{aligned} d(gDqf) &= dq \wedge Dqf - gDq \wedge df \\ &= \{(\bar{\partial}_r g)f + g(\bar{\partial}_l f)\}v, \end{aligned} \tag{4.1}$$

которое справедливо для любых дифференцируемых функций f и g. Взяв $g = 1$ и используя Утверждение 3, имеем:

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. *Дифференцируемая функция f регулярна в q тогда и только тогда, когда*

$$Dq \wedge df_q = 0.$$

Отсюда, вместе с теоремой Стокса, следует, что если f регулярна и непрерывно дифференцируема в области D с дифференцируемой границей, то

$$\int_{\partial D} Dqf = 0.$$

Как в комплексном анализе, однако, условия, накладываемые на f, могут быть ослаблены при использовании метода разбиений (dissection argument) Гурса. Применяя его к параллелепипеду, получим.

ЛЕММА 1.*Если f регулярна в каждой точке 4-параллелепипеда C,*

$$\int_{\partial C} Dqf = 0. \tag{4.2}$$

Метод разбиений может также быть использован для доказательства интегральной формулы Коши-Фютера для параллелепипеда:

ЛЕММА 2.*Если f регулярна в каждой точке положительно ориентированного 4-параллелепипеда C, и q_0 – точка внутри C, то*

$$f(q_0) = \frac{1}{2\pi^2} \int_{\partial C} \frac{(q-q_0)^{-1}}{|q-q_0|^2} Dqf(q). \tag{4.3}$$

Доказательство. В (4.1) возьмем $g(q) = \frac{(q-q_0)^{-1}}{|q-q_0|^2} = -\partial_r(\frac{1}{|q-q_0|^2})$.

Тогда g дифференцируема всюду, исключая q_0, и $\overline{\partial}_r g = 0$; отсюда, если f регулярна, то $d(gDqf) = 0$ всюду, исключая q_0. Метод сечений теперь показывает, что в выше приведенном интеграле C может быть заменен на любой меньший 4-параллелепипед C' с $q_0 \in int\, C' \subset C$, и так как f непрерывна в q_0, мы можем выбрать C' столь малым, что $f(q)$ может быть заменено на $f(q_0)$. Так как 3-форма gDq замкнута и непрерывно дифференцируема в $\mathbb{H} - \{q_0\}$, мы можем заменить $\int_{\partial C'} gDq$ на интеграл по 3-сфере S с центром в q_0, на которой

$$Dq = \frac{(q-q_0)}{|q-q_0|} dS,$$

где dS – обычный евклидовый элемент объема на 3-сфере. Следовательно

$$\int_{\partial C} \frac{(q-q_0)^{-1}}{|q-q_0|^2} Dqf(q) = \int_C \frac{dS}{|q-q_0|^3} = 2\pi^2 f(q_0). \ \square$$

Мы будем использовать следующее специальное обозначение для функции, встречающейся в интегральной формуле:

$$G(q) = \frac{q^{-1}}{|q|^2}.$$

Эта функция действительно-аналитична всюду, кроме начала координат; поэтому в (4.3) подынтегральное выражение есть непрерывная функция (q, q_0) в $\partial C \times int\, C$ и, для каждого фиксированного $q \in \partial C$, действительно-аналитическая функция от q_0 в $int\, C$. Следовательно, ((**12**), стр. 7) этот интеграл есть действительно-аналитическая функция q_0 в $int\, C$. Поэтому мы имеем

ТЕОРЕМА 1. *Функция, регулярная на открытом множестве U, является действительно-аналитической в U.*

Это делает обоснованным применение теоремы Стокса и таким образом дает возможность получить теорему Коши для границы любой дифференцируемой 4-цепи. Все это может быть затем расширено на спрямляемые контуры, определенные ниже как:

Определение. Пусть $C : I^3 \to \mathbb{H}$ – непрерывное отображение единичного 3-куба в $\mathbb{H}$ и пусть $P : 0 = s_0 < s_1 < \ldots < s_p = 1$, $Q : 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_q = 1$ и

$$R : 0 = u_0 < u_1 < \ldots < u_r = 1$$

являются тремя разбиениями единичного интервала I. Определим

$$\begin{aligned}\sigma(C; P, Q, R) = \sum_{l=0}^{p-1} \sum_{m=0}^{q-1} \sum_{n=0}^{r-1} Dq(&C(s_{l+1}, t_m, u_n) - C(s_l, t_m, u_n),\\ &C(s_l, t_{m+1}, u_n) - C(s_l, t_m, u_n),\\ &C(s_l, t_m, u_{n+1}) - C(s_l, t_m, u_n)).\end{aligned}$$

C является *спрямляемой 3-ячейкой*, если существует действительное число M, такое что $\sigma(C; P, Q, R) < M$ для всех частей P, Q, R. В этом случае наименьшая верхняя грань чисел $(C; P, Q, R)$ называется *протяженностью* C и обозначается как $\sigma(C)$.

Пусть f и g – кватернионнозначные функции, определенные на $C(I^3)$. Будем говорить, что $fDqg$ *интегрируема* над C, если сумма

$$\begin{aligned}\sum_{l=0}^{p-1} \sum_{m=0}^{q-1} \sum_{n=0}^{r-1} f(C(\bar{s}_l, \bar{t_m}, \bar{u_n}))Dq(&C(s_{l+1}, t_m, u_n) - C(s_l, t_m, u_n),\\ &C(s_l, t_{m+1}, u_n) - C(s_l, t_m, u_n),\\ &C(s_l, t_m, u_{n+1}) - C(s_l, t_m, u_n))g(C(\bar{s}, \bar{t_m}, \bar{u_n})),\end{aligned}$$

где $s_l \le \bar{s}_l \le s_{l+1}, t_m \le \bar{t_m} \le t_{m+1}$ и $u_n \le \bar{u_n} \le u_{n+1}$, имеет предел в смысле интегрирования по Риману-Стилтьесу как $|P|, |Q|, |R| \to 0$, где

$$|P| = \max_{0 \le l \le p-1} |s_{l+1} - s_l|$$

является мерой грубости разбиения P. Если этот предел существует, обозначим его как $\int_C fDqg$.

Мы расширим эти определения, чтобы определить спрямляемые 3-цепи и интегралы на спрямляемых 3-цепях обычным способом.

Точно так же, как для спрямляемых кривых, мы можем показать, что $fDqg$ интегрируема над 3-цепью C, если f и g непрерывны и C спрямляема, и

$$\left|\int_C fDqg\right| \leq (\max_C |f|)(\max_C |g|)\sigma(C).$$

Кроме того, мы имеем следующую слабую форму теоремы Стокса:

ТЕОРЕМА СТОКСА ДЛЯ СПРЯМЛЯЕМОГО КОНТУРА. *Пусть C – спрямляемая 3-цепь в $\mathbb{H}$ с $\partial C = 0$, и предположим, что f и g – непрерывные функции, определенные в окрестности U образа C, и что $fDqg = d\omega$, где ω есть 2-форма U. Тогда*

$$\int_C fDqg = 0.$$

Доказательство происходит с помощью аппроксимации C цепью 3-параллелепипедов с вершинами в точках $C_a(s_l, t_m, u_n)$, где C_a – 3-ячейка в C и (s_l, t_m, u_n) – точки разбиения в I. Теорема Стокса справедлива для этой цепи 3-параллелепипедов и мы можем использовать такое же рассуждение для спрямляемых кривых (смотри, например, (**13**), стр. 103).

Теперь мы можем дать наиболее общие формы теоремы Коши и интегральной формулы.

ТЕОРЕМА 2.*(Теорема Коши для спрямляемого контура). Предположим, что f регулярна на открытом множестве U, и пусть C будет спрямляемой 3-цепью, которая гомологична 0 в сингулярной гомологии U. Тогда*

$$\int_C Dqf = 0.$$

Доказательство. Сначала мы докажем теорему в случае, когда U – стягиваемая. В этом случае, так как $d(Dqf) = 0$ и f – непрерывно дифференцируема (по Теореме 1), применима лемма Пуанкаре и мы имеем $Dqf = d\omega$ для некоторой 2-формы ω на D. Но $\partial C = 0$, поэтому по теореме Стокса $\int_C Dqf = 0$.

В общем случае, предполагаем $C = \partial C^*$, где C^* – 4-цепь в U. Мы можем разбить C^* на

$$C^* = \sum_n C_n^*,$$

где каждая C_n^* – 4-ячейка, лежащая внутри открытого шара, содержащегося в U, причем C_n^* – спрямляема. Отсюда, по первой части теоремы $\int_{\partial C_n^*} Dqf = 0$, и поэтому

$$\int_C Dqf = \sum_n \int_{\partial C_n^*} Dqf = 0. \quad \square$$

Для общей формы интегральной формулы нам нужен аналог понятия числа оборотов кривой вокруг точки на плоскости. Пусть q – любой кватернион и пусть C – 3-цикл в $\mathbb{H} - \{q\}$. Тогда C – гомологичен $n\partial C_0$, где C_0 – положительно ориентированный 4-параллелепипед в $\mathbb{H} - \{q\}$ и n – целое (независимо от выбора C_0), которое мы назовем *числом оборотов* C вокруг q.

ТЕОРЕМА 3 *(Интегральная формула для спрямляемого контура).*

Предположим, что f – регулярная функция на открытом множестве U. Пусть q_0 – точка в U, и пусть C – спрямляемая 3-цепь, которая гомологична, в сингулярной гомологии $U - \{q_0\}$, дифференцируемой 3-цепи, образ которой есть ∂B для некоторого шара $B \subset U$. Тогда

$$\frac{1}{2\pi^2}\int_C \frac{(q-q_0)^{-1}}{|q-q_0|^2} Dqf(q) = nf(q_0)$$

где n – число оборотов C вокруг q_0.

Многие стандартные теоремы комплексного анализа зависят только от интегральной формулы Коши и поэтому они также справедливы для кватернионных регулярных функций. Наглядными примерами являются теорема о максимуме модуля (смотри, например, (**14**), стр. 165 (первое доказательство)) и теорема Лиувилля ((**14**), стр. 85 (второе доказательство)). Теорема Морера также справедлива для кватернионных функций, но в этом случае обычное доказательство не может быть легко адаптировано. Она может быть доказана (**8**) при помощи метода разбиений (dissection argument), показывающего, что если f непрерывна на открытом множестве U и удовлетворяет

$$\int_{\partial C} Dqf = 0$$

для любого 4-параллелепипеда C, содержащегося в U, то f удовлетворяет интегральной формуле; и далее рассуждая, как при доказательстве аналитичности регулярной функции.

5. Построение регулярных функций

Регулярные функции могут быть созданы из гармонических функций двумя способами. Первый: если f – гармоническая, то (2.35) показывает, что $\partial_l f$ – регулярная. Второй: любая действительно-значная гармоническая функция является, по крайней мере локально, действительной частью регулярной функции:

ТЕОРЕМА 4. *Пусть u – действительно-значная функция, определенная на звездном открытом множестве $U \subseteq \mathbb{H}$. Если u – гармоническая и имеет непрерывные вторые производные, то существует регулярная функция f, определенная на U, такая что $Ref = u$.*

Доказательство. Не ограничивая общности можем принять, что U содержит начало координат и является звездным относительно него. В этом случае покажем, что функция

$$f(q) = u(q) + 2Pu\int_0^1 s^2 \partial_l u(sq) q ds \tag{5.1}$$

регулярна в U.

Так как

$$\begin{aligned} Re\int_0^1 s^2\partial_l u(sq)qds &= \frac{1}{2}\int_0^1 s^2\left\{t\frac{\partial u}{\partial t}(sq) + x_i\frac{\partial u}{\partial x_i}(sq)\right\}ds \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 s^2\frac{d}{ds}[u(sq)]ds \\ &= \frac{1}{2}u(q) - \int_0^1 su(sq)ds, \end{aligned}$$

мы можем записать

$$f(q)=2\int_0^1 s^2\partial_l u(sq)q ds+2\int_0^1 su(sq)ds. \tag{5.2}$$

Так как u и $\partial_l u$ имеют непрерывные частные производные в U, можно ввести дифференцирование под знак интеграла, чтобы получить для $q\in U$,

$$\bar\partial_l f(q)=2\int_0^1 s^2\bar\partial_l[\partial_l u(sq)]q ds+\int_0^1 s^2\{\partial_l u(sq)+e_i\partial_l u(sq)e_i\}ds+2\int_0^1 s^2\bar\partial_l u(sq)ds.$$

Но $\bar\partial_l[\partial_l u(sq)]=\frac{1}{4}s\triangle u(sq)=0$, так как u – гармоническая в U, и

$$\begin{aligned}\partial_l u(sq)+e_i\partial_l u(sq)e_i &= -\,2\overline{\partial_l u(sq)}\\ &= -\,2\bar\partial_l u(sq)\end{aligned}$$

так как u – действительная. Отсюда $\bar\partial_l f=0$ в U и следовательно f – регулярная. □

Если область U является звездной, относительно не начала координат, а какой-то другой точки a, формулы (5.1) и (5.2) должны быть применены для измененного начала координат так:

$$f(q)=u(q)+2Pu\int_0^1 s^2\partial_l u((1-s)a+sq)(q-a)ds \tag{5.3}$$

$$=2\int_0^1 s^2\partial_l u((1-s)a+sq)(q-a)ds+2\int_0^1 su((1-s)a+sq)ds. \tag{5.4}$$

Пример, который, как можно надеяться, будет важным в случае функции

$$u(q)=|q|^{-2}.$$

Это элементарная потенциальная функция в четырех измерениях, подобно $\log|z|$ на комплексной плоскости, и таким образом, регулярная функция, действительная часть которой равна $|\,q|^{-2}$, является аналогом логарифма комплексной переменной.

Возьмем в качестве U всю $\mathbb{H}$, исключая начало координат и отрицательную часть вещественной оси. Тогда U является звездной по отношению к 1, и $|\,q|^{-1}$ – гармоническая в U. Положим

$$u(q)=\frac{1}{|q|^2},\qquad \partial_l u(q)=\frac{q^{-1}}{|q|^2},\qquad a=1;$$

тогда (5.3) дает

$$\left.\begin{aligned}f(q)&=-(qPu\,q)^{-1}-\frac{1}{|Pu\,q|^2}\arg q\quad \text{если} Pu\,q\neq 0\\ &=\frac{1}{|\,q|^2}\quad \text{если } q \text{ действительная и положительная,}\end{aligned}\right\} \tag{5.5}$$

где

$$\arg q=\log(Un\,q)=\frac{Pu\,q}{|Pu\,q|}\tan^{-1}\left(\frac{|Pu\,q|}{Re\,q}\right), \tag{5.6}$$

который равен i, умноженному на обычный аргумент на комплексной плоскости, порожденный q. (На практике формулы (5.3) и (5.4) не особенно удобны для использования и проще получить (5.5), решая уравнения

$$\nabla.\mathbf{F}=-\frac{2t}{(t^2+r^2)^2}$$

и

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{F} = \frac{2\mathbf{r}}{(t^2+r^2)^2},$$

где $t = Re\, q$, $\mathbf{r} = Pu\, q$ и $r = |\mathbf{r}|$ – здесь выражают тот факт, что $\mathbf{F} : \mathbb{H} \to P$ чисто кватернионная часть регулярной функции, чья реальная часть равна $|\, q|^{-2}$, и допуская, что $\mathbf{F}$ имеет форму $F(r)\mathbf{r}$.)

Обозначим функцию (5.5) через $-2L(q)$. Производная от $L(q)$ может быть наиболее просто подсчитана при записи ее в форме

$$L(q) = -\frac{r^2 + te_i x_i}{2r^2(r^2+t^2)} + \frac{e_i x_i}{2r^3} \tan^{-1}\left(\frac{r}{t}\right); \tag{5.7}$$

в результате получается

$$\partial_l L(q) = G(q) = \frac{q^{-1}}{|\, q|^2}. \tag{5.8}$$

Тогда $L(q)$ есть первообразная для функции, содержащейся в интегральной формуле Коши-Фютера, точно так же, как комплексный логарифм является первообразной для z^{-1}, – функции, содержащейся в интегральной формуле Коши.

Теорема 4 показывает, что регулярных функций кватернионной переменной существует столько же, сколько существует гармонических функций 4-х действительных переменных. Однако, эти функции не включают простые алгебраические функции, такие как степени переменных, которые оказываются аналитическими функциями в случае комплексной переменной. Фютер (**4**) также нашел метод создания регулярной функции кватернионной переменной из аналитической функции комплексной переменной.

Пусть для каждого $q \in \mathbb{H}$ $\eta_q : \mathbb{C} \to \mathbb{H}$ является вложением комплексных чисел в кватернионы, таким, что q есть изображение комплексного числа $\zeta(q)$ лежащего в верхней полуплоскости; то есть

$$\eta_q(x+iy) = x + \frac{Pu\, q}{|Pu\, q|} y, \tag{5.9}$$

$$\zeta(q) = Re\, q + i|Pu\, q|. \tag{5.10}$$

Тогда имеем

ТЕОРЕМА 5. *Предположим, что $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ аналитическая в открытом множестве $U \subseteq \mathbb{C}$ и определим $\tilde{f} : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ посредством*

$$\tilde{f}(q) = \eta_q \circ f \circ \zeta(q). \tag{5.11}$$

Тогда $\triangle \tilde{f}$ регулярна на открытом множестве $\zeta^{-1}(U) \subseteq \mathbb{H}$ и ее производная равна

$$\partial_l(\triangle \tilde{f}) = \triangle \tilde{f}', \tag{5.12}$$

где f' – производная комплексной функции f.

Для доказательства рассмотрим (**7**). Заметим, что если записать $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$, $t = Re\, q$ и $r = Pu\, q$, то

$$\tilde{f}(q) = u(t,r) + \frac{Pu\, q}{r} v(t,r), \tag{5.13}$$

$$\triangle \tilde{f}(q) = \frac{2u_2(t,r)}{r} + \frac{2Pu\, q}{r}\left\{\frac{u_2(t,r)}{r} - \frac{u(t,r)}{r^2}\right\}, \tag{5.14}$$

где нижний индекс 2 означает дифференцирование по второму аргументу.

Функции формы $\tilde{f}$ были взяты как базис в альтернативной теории функций кватернионной переменной Куллена (**15**). Представляют интерес следующие примеры: когда

$$f(z) = z^{-1}, \qquad \triangle\tilde{f}(q) = -4G(q); \tag{5.15}$$

когда

$$f(z) = \log z, \qquad \triangle\tilde{f}(q) = -4L(q); \tag{5.16}$$

Взяв регулярную функцию f, можно сконструировать из нее остальные регулярные функции составлением и применением к ней конформных преобразований. В особенно полезны частные случаи инверсии и вращения:

УТВЕРЖДЕНИЕ 5. (i) *Дана функция* $f : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, *пусть* $If : \mathbb{H} - \{0\} \to \mathbb{H}$ – *функция*

$$If(q) = \frac{q^{-1}}{|\,q|^2} f(q^{-1}). \tag{5.17}$$

Если f *регулярна в* q^{-1}, *то* If – *регулярна в* g.

(ii) *Дана функция* $f : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ *и постоянные кватернионы* a, b, *пусть* $M(a,b)f$ – *функция*

$$[M(a,b)f](q) = bf(a^{-1}qb). \tag{5.18}$$

Если f *регулярна в* $a^{-1}qb$, *то* $M(a,b)f$ – *регулярна в* q.

Доказательство. (i) Согласно утверждению 4, достаточно показать, что

$$Dq \wedge d(If)_q = 0.$$

Теперь $If = G(f \circ i)$, где $G(q) = q^{-1}/|\,q|^2$ и $i : \mathbb{H} - \{0\} \to \mathbb{H}$ есть инверсия $q \longmapsto q^{-1}$. Отсюда

$$\begin{aligned} Dq \wedge d(If)_q &= Dq \wedge dG_q f(q^{-1}) + Dq \wedge G(q) d(f \circ i)_q \\ &= DqG(q) \wedge i_q^* df_{q^{-1}} \end{aligned}$$

так как G – регулярна в $q \neq 0$. Но

$$\begin{aligned} i_q^* Dq(h_1, h_2, h_3) &= Dq(-q^{-1}h_1q^{-1}, -q^{-1}h_2q^{-1}, -q^{-1}h_3q^{-1}) \\ &= -\frac{q^{-1}}{|q|^4} Dq(h_1, h_2, h_3) q^{-1} \end{aligned}$$

согласно (2.31). Тогда

$$DqG(q) = -|q|^2 q i_q^* Dq$$

и таким образом

$$Dq \wedge d(If)_q = i_q^*(Dq \wedge df_{q^{-1}}) = 0$$

если f регулярна в q^{-1}.

(ii) Пусть $\mu : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ является отображением $q \longmapsto aqb$. Тогда согласно (2.31)

$$\mu^* Dq = |\,a|^2 |b|^2 a Dq b$$

и таким образом

$$\begin{aligned} Dq \wedge d[M(a,b)f]_q &= Dq \wedge b\mu_q^* df_{\mu(q)} \\ &= |\,a|^{-2}|b|^{-2} a^{-1} (\mu_q^* Dq) b^{-1} \wedge b\mu_q^* df_{\mu(q)} \\ &= |\,a|^{-2}|b|^{-2} a^{-1} \mu_q^* (Dq \wedge df_{\mu(q)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

если f регулярна в $\mu(q)$. Из Утверждения 4 следует, что $M(a,b)f$ регулярна в q. □

Общее конформное преобразование одноточечного компактного расширения (one-point compactification) $\mathbb{H}$ имеет форму

$$\nu(q) = (aq+b)(cq+d)^{-1} \tag{5.19}$$

где $a^{-1}b \neq c^{-1}d$. Такое преобразование ((**16**), стр. 312) является результатом последовательных преобразований вида, рассмотренного в Утверждении 5, совместно с преобразованиями $q \longmapsto q{+}a$ (которое с очевидностью сохраняет регулярность). Соответствующее преобразование регулярных функций следует из:

ТЕОРЕМА 6. *Задана функция $f : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ и конформное преобразование ν как в (5.19), и пусть $M(\nu)f$ – функция*

$$[M(\nu)f](q) = \frac{1}{|b-ac^{-1}d|^2}\frac{(cq+d)^{-1}}{|cq+d|^2}f(\nu(q)).$$

Если f регулярна в $\nu(q)$, то $M(\nu)f$ регулярна в q.

6. Однородные регулярные функции

В этом разделе мы будем изучать взаимосвязь между регулярными полиномами, гармоническими полиномами и гармоническим анализом на группе S единичных кватернионов, который для кватернионного анализа является тем же, что Фурье анализ для комплексного анализа.

Базисные Фурье функции $e^{in\theta}$ и $e^{-in\theta}$ рассматриваются как функции на единичной окружности комплексной плоскости, каждая из них имеет два расширения к гармоническим функциям на $\mathbb{C} - \{0\}$; таким образом мы имеем четыре функции $z^n, \bar{z}^n, z^{-n}$ и $\bar{z}^{-n}$. Требование аналитичности отбирает половину из них, а именно z^n и z^{-n}. Таким же образом, все базисные гармонические функции на S, а именно матричные элементы матрицы унитарных неприводимых представлений S, имеют два расширения к гармоническим функциям на $\mathbb{H} - \{0\}$, одно с отрицательной степенью однородности и одно с положительной степенью. Мы увидим, что функциональное пространство, принадлежащее к частному унитарному представлению, соответствующему пространству комбинаций $e^{in\theta}$ и $e^{-in\theta}$ для частного значения n, может быть разложено на два взаимно дополнительных подпространства; одно (подобно $e^{in\theta}$) дает регулярную функцию на $\mathbb{H} - \{0\}$ когда умножается на положительную степень $|\,q|$, другое (подобно $e^{-in\theta}$) должно быть умножено на отрицательную степень $|\,q|$.

Пусть U_n – множество функций $f : \mathbb{H} \to \mathbb{H} - \{0\}$, которые регулярны и однородны степени n на $\mathbb{R}$, т. е.

$$f(\alpha q) = \alpha^n f(q) \qquad \text{для} \alpha \in R.$$

Перенос начала координат из области f дает возможность рассмотреть оба случая: положительного и отрицательного n (альтернативная процедура добавления точки на бесконечности к $\mathbb{H}$ наталкивается на трудности, поскольку регулярные полиномы не обязательно допускают непрерывное расширение к $\mathbb{H} \cup \{\infty\} \cong S^4$). Пусть W_n – множество функций $f : \mathbb{H} - \{0\} \to \mathbb{H}$ которые гармоничны и однородны степени n на R. Тогда U_n и W_n являются правыми векторными пространствами над $\mathbb{H}$ (с поточечным сложением и скалярным умножением) и, так как каждая регулярная функция является гармонической, мы имеем $U_n \subseteq W_n$.

Функции в U_n и W_n могут быть изучены посредством их ограничения на единичную сферу $S = \{q : |\,q| = 1\}$. Пусть

$$\tilde{U}_n = \{f|S : f \in U_n\}, \qquad \tilde{W}_n = \{f|S : f \in W_n\};$$

где U_n и $\tilde{U}_n$ – изоморфны (как кватернионные векторные пространства) в силу соответствия

$$f \in U_n \Leftrightarrow \tilde{f} \in \tilde{U}_n, \quad \text{где} \quad f(q) = r^n \tilde{f}(u), \tag{6.1}$$

используя обозначение $r = |\,q| \in \mathbb{R}$, $u = q/|\,q| \in S$.

Аналогично, изоморфны W_n и $\tilde{W}_n$.

Чтобы выразить уравнения Коши-Римана-Фютера в форме, подходящей для полярного разложения $q = ru$, введем следующие векторные поля $X_0, \ldots, X_3$ на $\mathbb{H} - \{0\}$:

$$X_0 f = \frac{d}{d\theta}[f(qe^{\theta})]_{\theta=0}, \tag{6.2}$$

$$X_i f = \frac{d}{d\theta} f[q\exp(e_i\theta)]_{\theta=0} = \frac{d}{d\theta} f[q(\cos\theta + e_i \sin\theta)]_{\theta=0} \quad (i = 1, 2, 3). \tag{6.3}$$

Эти поля формируют базис для действительного векторного пространства левоинвариантных векторных полей на мультипликативной группе в $\mathbb{H}$, и они относятся к декартовым векторным полям $\partial/\partial t$, $\partial/\partial x_i$ как

$$X_0 = t\frac{\partial}{\partial t} + x_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \tag{6.4}$$

$$X_i = -x_i \frac{\partial}{\partial t} + t\frac{\partial}{\partial x_i} - \epsilon_{ijk} x_j \frac{\partial}{\partial x_k}, \tag{6.5}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{r^2}(tX_0 - x_i X_i), \tag{6.6}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{1}{r^2}(\epsilon_{ijk} x_j X_k + tX_i + x_i X_0). \tag{6.7}$$

Их скобки Ли равны

$$[X_0, X_i] = 0, \tag{6.8}$$

$$[X_i, X_j] = 2\epsilon_{ijk} X_k. \tag{6.9}$$

Используя (6.6) и (6.7), дифференциальные операторы $\bar{\partial}_l$ и $\triangle$ могут быть вычислены в терминах X_0 и X_i. Результат равен

$$\bar{\partial}_l = \frac{1}{2}\bar{q}^{-1}(X_0 + e_i X_i), \tag{6.10}$$

$$\triangle = \frac{1}{r^2}\{X_i X_i + X_0(X_0 + 2)\}. \tag{6.11}$$

Следующие факты относительно пространства гармонических функций W_n хорошо известны (и следуют из (6.11); смотри например (**17**), стр. 71):

УТВЕРЖДЕНИЕ 6. (i) $\tilde{W}_n \cong \tilde{W}_{-n-2}$. (ii) $\dim W_n = (n+1)^2$. (iii) *Элементы* W_n *являются полиномами в* q.

Мы можем теперь установить основные факты относительно пространства U_n регулярных функций:

ТЕОРЕМА 7. (i) $\tilde{W}_n = \tilde{U}_n \oplus \tilde{U}_{-n-2}$. (ii) $U_n \cong U_{-n-3}$. (iii) $\dim U_n = \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$.

Доказательство. (i) Уравнение (6.10) показывает, что элементы U_n, которые удовлетворяют $X_0 f = nf$ и $\bar{\partial}_l f = 0$, являются собственными функциями $\Omega = e_i X_i$ с собственными значениями $-n$. Так как векторные поля X_i являются касательными к сфере

S, Ω может рассматриваться как оператор на $\tilde{W}_n$, и $\tilde{U}_n$ состоит из собственных функций из Ω с собственным значением $-n$. Используя (6.9), можно показать, что

$$\Omega^2 - 2\Omega + X_i X_i = 0.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \tilde{f} \in \tilde{W}_n &\Rightarrow \triangle(r^n f) = 0 \\ &\Rightarrow X_i X_i f = -n(n+2)f \\ &\Rightarrow (\Omega - n - 2)(\Omega + n)f = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, $\tilde{W}_n$ является прямой суммой собственных пространств из $\tilde{\Omega}$ с собственными значениями $-n$ и $n+2$ (они являются векторными подпространствами $\tilde{W}_n$, так как собственные значения действительны), т. е.

$$\tilde{W}_n = \tilde{U}_n \oplus \tilde{U}_{-n-2}.$$

(ii) Из утверждения 5 (i) следует, что отображение I является изоморфизмом между U_n и U_{-n-3}.

(iii) Пусть $d_n = \dim U_n$. Согласно (i) и Утверждению 6 (ii)

$$d_n + d_{-n-2} = (n+1)^2$$

и по (ii),

$$d_{-n-2} = d_{n-1}.$$

Тогда

$$d_n + d_{n-1} = (n+1)^2.$$

Решение этого рекурсивного отношения с $d_0 = 1$, есть

$$d_n = \frac{1}{2}(n+1)(n+2). \ \square$$

Существует связь между Утверждением 5 (ii) и тем фактом, что однородные регулярные функции являются собственными функциями Ω. Утверждение 5 (ii) относится к представлению M группы $\mathbb{H}^\times \times \mathbb{H}^\times$, определенной на пространстве действительно-дифференцируемых функций $f : \mathbb{H} - \{0\} \to \mathbb{H}$ посредством

$$[M(a,b)f](q) = bf(a^{-1}qb).$$

Ограничиваясь подгруппой $\{(a,b) : |a| = |b| = 1\}$, которая изоморфна к

$$SU(2) \times SU(2),$$

мы получаем представление $SU(2) \times SU(2)$. Так как отображение $q \longmapsto aqb$ является вращением при $|a| = |b| = 1$, множество W гармонических функций есть инвариантное подпространство в этом представлении. Теперь $W = \mathbb{H} \otimes_{\mathbb{C}} W^C$, где W^C – множество комплекснозначных гармонических функций, и представление $SU(2) \times SU(2)$ может быть записано как

$$M(a,b)(q \otimes f) = (bq) \otimes R(a,b)f$$

где R обозначает квазирегулярное представление, соответствующее действию $q \longmapsto aqb^{-1}$ из $SU(2) \times SU(2)$ на $\mathbb{H} - \{0\}$:

$$[R(a,b)f]q = f(a^{-1}qb).$$

Поэтому $M|W$ есть тензорное произведение представлений $D^0 \times D^1$ и $R|W^C$ из $SU(2) \times SU(2)$, где D^n обозначает $(n+1)$-мерное комплексное представление $SU(2)$. Изотипичные компоненты $R|W^C$ являются однородными подпространствами W_n^C, на которых R действует неприводимо как $D^n \times D^n$. Таким образом, W_n является инвариантным подпространством в представлении M, и $M|W_n$ есть тензорное произведение $(D^0 \times D^1) \otimes (D^n \times D^n)$. W_n следовательно имеет два инвариантных подпространства, на которых M действует как неприводимое представление $D^n \times D^{n+1}$ и $D^n \times D^{n-1}$. Эти подпространства являются собственными пространствами Ω. Чтобы увидеть это, сосредоточим внимание на втором факторе в $SU(2) \times SU(2)$; мы имеем представление

$$M'(b)(q \otimes f) = M(1,b)(q \otimes f) = [D^1(b)q] \otimes [R(1,b)f],$$

где $D^1(b)q = bq$. Бесконечномалые генераторы представления $R(1,b)$ равны дифференциальным операторам X_i; бесконечномалые генераторы $D^1(b)$ равны e_i (под ними мы подразумеваем левое умножение на e_i). Поэтому бесконечномалые операторы тензорного произведения M' равны $e_i + X_i$. Изотипичные компоненты W являются собственными пространствами оператора Казимира

$$(e_i + X_i)(e_i + X_i) = e_i e_i + X_i X_i + 2\Omega.$$

Но $e_i e_i = -3$, и $X_i X_i = -n(n+2)$ на W_n; следовательно

$$(e_i + X_i)(e_i + X_i) = 2\Omega - n^2 - 2n - 3.$$

и таким образом, изотипичные компоненты W_n для представления M' являются собственными пространствами Ω. U_n, пространство однородных регулярных функций степени n, имеет собственное значение $-n$ для Ω, так что $M'|U_n$ есть представление D^{n+1} для $SU(2)$.

Аналогичное рассмотрение приводит к следующему факту:

УТВЕРЖДЕНИЕ 7. *Если f регулярна, то qf – гармонична.*

Представление M $SU(2) \times SU(2)$ может также быть использовано для нахождения базиса регулярных полиномов. Оно принадлежит к классу индуцированных представлений, изучавшихся в (**18**), где процедура дана для разбиения представления на неприводимые компоненты и нахождения базиса для каждой компоненты. Вместо того, чтобы дать строгий эвристический вывод, следуя этой процедуре, которая мало что в этом случае разъясняет, мы установим результат и затем проверим, что он является базисом.

Так как рассматриваемые функции содержат множество факториалов, мы введем обозначение

$$\begin{aligned} z^{[n]} &= \frac{z^n}{n!} \quad \text{если} \quad n \geq 0 \\ &= 0 \quad \text{если} \quad n < 0 \end{aligned}$$

для комплексной переменной z. Это обозначение позволяет ввести удобную формулу

$$\frac{d}{dz} z^{[n]} = z^{[n-1]}, \tag{6.12}$$

$$(z_1 + z_2)^{[n]} = \sum_r z_1^{[r]} z_2^{[n-r]} \tag{6.13}$$

где сумма производится по всем целым r.

Представление D^n из $S \cong SU(2)$ действует на пространстве однородных полиномов степени n от двух комплексных переменных посредством

$$[D^n(u)f](z_1, z_2) = f(z_1', z_2'),$$

где

$$z_1' + jz_2' = u^{-1}(z_1 + jz_2).$$

Записав $u = v + jw$, где $v, w \in \mathbb{C}$ и $|v|^2 + |w|^2 = 1$, мы имеем

$$z_1' = \bar{v}z_1 + \bar{w}z_2, \qquad z_2' = -wz_1 + vz_2.$$

Отсюда матричные элементы $D^n(u)$, соответствующие базису $f_k(z_1, z_2) = z_1^{[k]}z_2^{[n-k]}$ равны

$$D^n_{kl}(u) = (-)^n k!(n-k)!P^n_{kl}(u),$$

где

$$P^n_{kl}(v + jw) = \sum_r (-)^r v^{[n-k-l+r]}\bar{v}^{[r]}w^{[k-r]}\bar{w}^{[l-r]}. \tag{6.14}$$

Функции $P^n_{kl}(q)$ определены для всех кватернионов $q = v + jw$ и для всех целых k, l, n, но они равны нулю при $0 \le k, l \le n$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 8. *В качестве правого векторного пространства над* $\mathbb{H}$, U_n *имеет базис*

$$Q^n_{kl}(q) = P^n_{kl}(q) - jP^n_{k-1,l}(q) \qquad (0 \le k, l \le n).$$

Доказательство. Используя (6.14), легко проверить, что Q^n_{kl} удовлетворяет уравнениям Коши-Римана-Фютера в форме (3.11)

$$\frac{\partial P^n_{kl}}{\partial \bar{v}} = -\frac{\partial P^n_{k-1,l}}{\partial \bar{w}}, \qquad \frac{\partial P^n_{kl}}{\partial w} = \frac{\partial P^n_{k-1,l}}{\partial v}.$$

Так как функции D^n_{kl} независимы над $\mathbb{C}$ как функции на S для $0 \le k, l \le n$, функции P^n_{kl} – независимы над $\mathbb{C}$ как функции на $\mathbb{H}$ для $0 \le k, l \le n$. Следовательно, функции Q^n_{kl} $(0 \le k \le n+1,\ 0 \le l \le n)$ независимы над $\mathbb{C}$ и поэтому покрывают правое векторное пространство над $\mathbb{H}$ размерности как минимум $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$. Так как это пространство есть подпространство U_n, которое имеет размерность $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$, Q^n_{kl} покрывает U_n.

Так как $zj = j\bar{z}$ для любого $z \in \mathbb{C}$, из определения (6.14) следует, что

$$P^n_{kl}j = jP^n_{n-k,n-l}$$

и следовательно

$$Q^n_{kl}j = Q^n_{n-k+1,n-l}.$$

Тогда U_n охватывается Q^n_{kl} $(0 \le k \le l \le n)$, которые следовательно формируют базис для U_n. □

Другой базис для U_n будет дан в следующем разделе.

Мы завершаем этот раздел изучением кватернионной производной ∂_l. Так как ∂_l есть линейное отображение из U_n в U_{n-1} и $\dim U_n > \dim U_{n-1}$, ∂_l должно иметь большое ядро и поэтому мы не можем сделать вывод из $\partial_l f = 0$, что f – константа. Однако, хотя результат отнюдь не однозначен, возможно проинтегрировать регулярные полиномы:

ТЕОРЕМА 8.*Каждый регулярный полином имеет первообразную, то есть* ∂_l *отображает* U_n *на* U_{n-1} *при* $n > 0$.

Доказательство. Предположим, что $f \in U_n$ – такая, что $\partial_l f = 0$. Тогда

$$\frac{\partial f}{\partial t} = e_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0.$$

Таким образом, f может быть рассмотрена как функция на пространстве P чисто мнимых кватернионов. Используя векторные обозначения для элементов из P и записывая $f = f_0 + \mathbf{f}$ с $f_0 \in \mathbb{R}$, $f \in P$, условие $e_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$ превращается в

$$\nabla f_0 + \nabla \times \mathbf{f} = 0, \qquad \nabla.\mathbf{f} = 0.$$

Если $n \geq 0$, можно определить $f(0)$ так, что эти условия будут справедливы на всем P, и поэтому существует функция $\mathbf{F} : P \to P$ такая, что

$$\mathbf{f} = \nabla \times \mathbf{F}, \qquad f_0 = -\nabla.\mathbf{F},$$

то есть

$$f = e_i \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_i}.$$

Тогда $\mathbf{F}$ – гармоническая, т. е. $\nabla^2 \mathbf{F} = 0$.

Пусть T_n – правое кватернионное векторное пространство функций $\mathbf{F} : P \to \mathbb{H}$, однородных степени n и удовлетворяющих $\nabla^2 \mathbf{F} = 0$; тогда $\dim T_n = 2n + 1$. Пусть K_n – подпространство T_n, состоящее из функций, удовлетворяющих $e_i \partial \mathbf{F}/\partial x_i = 0$; тогда $K_n = \ker \partial_l \subset U_n$. Выше показано, что $e_i \partial/\partial x_i : T_{n+1} \to T_n$ отображает T_{n+1} в K_n; его ядро есть K_{n+1} и таким образом,

$$\dim K_n + \dim K_{n+1} = \dim T_{n+1} = 2n + 3.$$

Решение этого рекурсивного соотношения, с $\dim K_0 = 1$, есть $\dim K_n = n + 1$. Но

$$\dim U_n - \dim U_{n-1} = \frac{1}{2}(n+1)(n+2) - \frac{1}{2}n(n+1) = n + 1.$$

Из этого следует, что ∂_l отображает U_n в U_{n-1}. □

ТЕОРЕМА 9. *Если $n < 0$, отображение $\partial_l : U_n \to U_{n-1}$ является взаимно однозначным.*

Доказательство. Введем следующее скалярное произведение между функциями, определенными на единичной сфере S:

$$\langle f, g \rangle = \int_S \overline{f(u)} g(u) du$$

где du обозначает меру Хаара на группе S, нормированную так, что

$$\int_S du = \frac{1}{2}\pi^2.$$

Для функций, определенных на $\mathbb{H}$, можно записать его в виде

$$\langle f, g \rangle = \int_S \overline{f(q)} q^{-1} Dq g(q).$$

Как отображение, $U_n \times U_n \to H$, оно антилинейно по первой переменной и линейно по второй, то есть

$$\langle fa, gb \rangle = \bar{a} \langle f, g \rangle b \qquad \text{для всех}\, a, b \in \mathbb{H}$$

и является невырожденным, поскольку $\langle f, f \rangle = 0 \Leftrightarrow f = 0$.

Теперь пусть $f \in U_n, g \in U_{-n-2}$ и пусть I обозначает отображение $U_n \to U_{-n-3}$, определенное в Утверждении 5 (i). Тогда

$$\begin{aligned}\langle g, I\partial_l f\rangle &= \int_S \overline{g(q)} q^{-1} Dq g^{-1} \partial_l f(q^{-1})\\ &= -\int_S \overline{g(q)} i^*(Dq\partial_l f),\end{aligned}$$

где i обозначает отображение $q \longmapsto q^{-1}$, и мы использовали тот факт, что $i^* Dq = -q^{-1}Dqg^{-1}$ для $q \in S$. Так как f регулярна, $Dq\partial_l f = \frac{1}{2}d(dq \wedge dqf)$ и таким образом

$$\begin{aligned}\langle g, I\partial_l f\rangle &= -\frac{1}{2}\int_S \overline{g(q)} d[i^*(dq \wedge dqf)]\\ &= \frac{1}{2}\int_S \overline{dg} \wedge i^*(dq \wedge dqf), \quad \text{так как} \quad \partial S = 0.\end{aligned}$$

На S инверсия i совпадает с объединением кватернионов; отсюда $i^* dq = d\bar{q}$ и поэтому

$$\begin{aligned}\langle g, I\partial_l f\rangle &= \frac{1}{2}\int_S \bar{g}(q) \wedge d\bar{q} \wedge d\bar{q} f(q^{-1})\\ &= \frac{1}{2}\int_S \overline{dg \wedge dq \wedge dq} f(q^{-1})\\ &= \frac{1}{2}\int_S \overline{Dq \wedge \partial_l g(q)} f(q^{-1})\end{aligned}$$

так как g – регулярная функция. Так как сопряжение есть ортогональное преобразование с детерминантом $-1, Dq(\bar{h}_1, \bar{h}_2, \bar{h}_3) = -\overline{Dq(h_1, h_2, h_3)}$; следовательно, поскольку сопряжение – это то же самое, что инверсия на S,

$$\overline{Dq} = -i^* Dq = q^{-1}Dqq^{-1}.$$

Тогда

$$\begin{aligned}\langle g, I\partial_l f\rangle &= \int_S \overline{\partial_l g(q)} q^{-1} Dq g^{-1} f(q^{-1})\\ &= \langle \partial_l g, If\rangle.\end{aligned}$$

Но I является изоморфизмом, а скалярное произведение невырождено на U_{-n-2}, и ∂_l отображает U_{-n-2} в U_{-n-3} если $n \leq 3$; отсюда следует, что $\partial_l : U_n \to U_{n-1}$ взаимно однозначно. □

В пропущенных случаях $n = -1$ и $n = -2$, обе теоремы 8 и 9 справедливы тривиально, так как $U_{-1} = U_{-2} = \{0\}$.

7. Регулярные степенные ряды

Степенные ряды, представляющие регулярную функцию, и ряды Лорана, представляющие функцию с изолированной особенностью, наиболее естественно выражаются в терминах некоторых специальных однородных функций.

Пусть ν – неупорядоченное множество n целых $\{i_1, \ldots, i_n\}$ с $1 \leq i \leq 3$; ν может также быть задано посредством трех целых n_1, n_2, n_3 с $n_1 + n_2 + n_3 = n$, где n_1 – количество первого в ν, n_2 – количество второго и n_3 – третьего, и мы будем писать $\nu = [n_1 n_2 n_3]$. Существуют $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ таких множеств ν; обозначим множество всех их как σ_n. Они могут быть использованы как метки; когда $n = 0$, так что $\nu = \emptyset$, мы будем использовать нижний индекс 0 вместо $\emptyset$. Запишем ∂_ν для n-го порядка дифференциального оператора

$$\partial_\nu = \frac{\partial^n}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_n}} = \frac{\partial^n}{\partial x^{n_1} \partial y^{n_2} \partial z^{n_3}}.$$

Исследуемые функции есть

$$G_\nu(q) = \partial_\nu G(q) \tag{7.1}$$

и

$$P_\nu(q) = \frac{1}{n!} \sum (te_{i_1} - x_{i_1}) \dots (te_{i_n} - x_{i_n}), \tag{7.2}$$

где сумма берется по всем $n!/(n_1!n_2!n_3!)$ различных порядков n_1 – первого, n_2 – второго и n_3 – третьего. Тогда P_ν является однородной степени n и G_ν – однородна степени $-n-3$.

Как в предыдущем разделе, U_n будет обозначать правое кватернионное векторное пространство однородных регулярных функций степени n.

УТВЕРЖДЕНИЕ 9. *Полиномы $P_\nu(\nu \in \sigma_n)$ являются регулярными и формируют базис для U_n.*

Доказательство. (**17**) Пусть f – регулярный однородный полином степени n. Так как f – регулярная,

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i e_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$$

и так как она однородная,

$$t\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = nf(q).$$

Отсюда

$$nf(q) = \sum_i (x_i - te_i) \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Но $\partial f/\partial x_i$ является регулярной и однородной степени $n-1$, так что мы можем повторно применить рассуждение; после n шагов получим

$$\begin{aligned} f(q) &= \frac{1}{n!} \sum_{i_1 \dots i_n} (x_{i_1} - te_{i_1}) \dots (x_{i_n} - te_{i_n}) \frac{\partial^n f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_n}} \\ &= \sum_{\nu \in \sigma_n} (-1)^n P_\nu(q) \partial_\nu f(q). \end{aligned}$$

Так как f – полином, $\partial_\nu f$ – константа; поэтому любой регулярный однородный полином является линейной комбинацией P_ν. Пусть V_n – правое векторное пространство, покрытое P_ν. Согласно утверждению 6 (iii), элементы из U_n являются полиномами, так $U_n \subseteq V_n$, но

$$\dim V_n \le \frac{1}{2}(n+1)(n+2) = \dim U_n$$

по Теореме 7 (iii). Отсюда $V_n = U_n$. □

Зеркальное отражение этого рассуждения доказывает, что P_ν является также право-регулярным.

Так же, как для комплексного переменного, мы имеем

$$(1-q)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n$$

для $|q| < 1$; ряды сходятся абсолютно и равномерно на любом шаре $|q| \leq r$ с $r < 1$. Это приводит к разложению $G(p-q)$ по степеням $p^{-1}q$; отождествляя его с рядами Тейлора G около p, получаем

УТВЕРЖДЕНИЕ 10. *Разложения*

$$\begin{aligned} G(p-q) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu \in \sigma_n} P_\nu(q) G_\nu(p) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu \in \sigma_n} G_\nu(p) P_\nu(q) \end{aligned}$$

корректны (valid) для $|q| < |p|$*; ряды сходятся равномерно в любой области* $\{(p,q) : |q| \leq r|p|\}$ *из* $\mathbb{H}^2$ *с* $r < 1$.

Теперь те же рассуждения, что и в комплексном анализе, дают:

ТЕОРЕМА 10. *Предположим, что f – регулярная функция вблизи 0. Тогда существует шар B с центром в 0, в котором $f(g)$ представима в виде равномерно сходящихся рядов*

$$f(q) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu \in \sigma_n} P_\nu(q) q_\nu.$$

где коэффициенты a_ν даются выражением

$$\begin{aligned} a_\nu &= \frac{1}{2\pi^2} \int_{\partial B} G_\nu(q) Dq f(q) \\ &= (-1)^n \partial_\nu f(0). \end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ.

$$\frac{1}{2\pi^2} \int_S G_\mu(q) Dq P_\nu(q) = \delta_{\mu\nu},$$

где S – любая сфера, содержащая начало координат.

ТЕОРЕМА 11 *(Ряды Лорана). Предположим, что f – регулярная функция на открытом множестве U за исключением, быть может, $q_0 \in U$. Тогда существует окрестность N точки q_0, такая, что если $q \in N$ и $q \neq q_0$, $f(q)$ может быть представлена в виде ряда*

$$f(q) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu \in \sigma_n} \{P_\nu(q-q_0) a_\nu + G_\nu(q-q_0) b_\nu\}$$

который сходится равномерно в любом полом шаре

$$\{q : r \leq |q-q_0| \leq R\}, \quad \text{с} \quad r > 0, \quad \text{который лежит внутри}\, N.$$

Коэффициенты a_ν и b_ν задаются посредством

$$a_\nu = \frac{1}{2\pi^2} \int_C G_\nu(q-q_0) Dq f(q),$$

$$b_\nu = \frac{1}{2\pi^2} \int_C P_\nu(q-q_0) Dq f(q),$$

где C – любая замкнутая 3-цепь в $U - \{q_0\}$, которая гомологична ∂B для некоторого шара с $q_0 \in B \subset U$ (так что C имеет число оборотов 1 вокруг q_0).

Я признателен за гостеприимство кафедре прикладной математики и теоретической физики Ливерпульского университета, где была сделана часть этой работы и лично доктору P. J. McCarthy и доктору C. J. S. Clarke за весьма плодотворные дискуссии.

Литература

1. Hamilton W. R. Elements of quaternions (London, Longmans Green, 1866).
2. Tait P. G. An elementary treatise on quaternions (Cambridge University Press, 1867).
3. Joly C. J. A manual of quaternions (London, Macmillan, 1905).
4. Fueter R. Die Funktionentheorie der Differentialgleichungen $\triangle u = 0$ und $\triangle\triangle u = 0$ mit vier reellen Variablen. Comment. Math. Helv. **7** (1935), 307-330.
5. Fueter R. Über die analytische Darstellung der regulären Funktionen einer Quaternionenvariablen.Comment. Math. Helv. **8** (1936), 371-378.
6. Haefeli H. Hyperkomplexe Differentiale.Comment. Math. Helv. **20** (1947), 382-420.
7. Deavours C. A. The quaternion calculus. Amer.Math.Monthly **80** (1973), 995-1008.
8. Schuler B. Zur Theorie der regulären Funktionen einer Quaternionen-Variablen. Comment. Math. Helv. 10 (1937), 327-342.
9. Fueter R. Die Singularitäten der regulären Funktionen einer Quaternionen-variablen.Comment. Math. Helv. **9** (1937), 320-335.
10. Porteous I. R. Topological geometry (London, Van Nostrand Reinhold,1969).
11. Cartan H. Elementary theory of analytic functions of one or several complex variables (London, Addison-Wesley, 1963).
12. Herv É M. Several complex variables (Oxford University Press, 1963).
13. Heins M. Complex functio theory (London, Academic Press, 1968).
14. Titchmarsh E. C. The theory of functions, 2nd ed. (Oxford University Press, 1939).
15. Cullen C. G. An integral theorem for analitic intrinsic functions on quaternions. Duke Math. J. **32** (1965), 139-148.
16. Schouten J. A. Ricci-calculus, 2nd ed. (Berlin, Springer-Verlag, 1954).
17. Sugiura M. Unitary representations and harmonic analysis (London, Wiley, 1975).
18. McCarthy P. J. and Sudbery, A. Harmonic analysis of generalised vector functions, generalised spin-weighted functions and induced representations. J. Phys. **A 10** (1977), 331-338.

Quaternionic Analysis

A. Sudbery

University of York, Heslington, York
as2@mailer.york.ac.uk

The richness of the theory of functions over the complex field makes it natural to look for a similar theory for the only other non-trivial real associative division algebra, namely the quaternions. Such a theory exists and is quite far-reaching, yet it seems to be little known. It was not developed until nearly a century after Hamilton s discovery of quaternions. Hamilton him-self and his principal followers and expositors, Tait and Joly, only developed the theory of functions of a quaternion variable as far as it could be taken by the general methods of the theory of functions of several real variables the basic ideas of which appeared in their modern form for the first time in Hamilton's work

on quaternions). They did not delimit a special class of regular functions among quaternion-valued functions of a quaternion variable, analogous to the regular functions of a complex variable.

This may have been because neither of the two fundamental definitions of a regular function of a complex variable has interesting consequences when adapted to quaternions; one is too restrictive, the other not restrictive enough. The functions of a quaternion variable which have quaternionic derivatives, in the obvious sense, are just the constant and linear functions and not all of them); the functions which can be represented by quaternionic power series are just those which can be represented by power series in four real variables.

In 1935 R. Fueter proposed a definition of "regular" for quaternionic functions by means of an analogue of the Cauchy-Riemann equations. He showed that this definition led to close analogues of Cauchy's theorem, Cauchy's integral formula, and the Laurent expansion. In the next twelve years Fueter and his collaborators developed the theory of quaternionic analysis.

The theory developed by Fueter and his school is incomplete in some ways, and many of their theorems are neither so general nor so rigorously proved as present-day standards of exposition in complex analysis would require. The purpose of this paper is to give a self-contained account of the main line of quaternionic analysis which remedies these deficiencies, as well as adding a certain number of new results. By using the exterior differential calculus we are able to give new and simple proofs of most of the main theorems and to clarify the relationship between quaternionic analysis and complex analysis.

Key-words: quaternions, quaternionic analysis, Cauchy's theorem, Cauchy's integral formula, Fueter theory, regular functions.

ИНФОРМАЦИЯ ДЛЯ АВТОРОВ

В журнале печатаются оригинальные и обзорные статьи российских и зарубежных авторов по тематике: а) Гиперкомплексные числа, б) Геометрии, связанные с гиперкомплексными числами, в) Финслеровы пространства, г) Фракталы, основанные на гиперкомплексных числах, д) Применение гиперкомплексных чисел в физике, е) Экспериментальные исследования возможной анизотропии пространства-времени и иных проявлений финслеровой геометрии.

Редколлегия информирует авторов статей о принятых ею правилах:

1. Язык статей – русский или английский.

2. Объем статьи не должен превышать 1,5 печ. листа (36 усл. маш. стр.)

3. Автор предоставляет в редакцию файл статьи в формате LaTeX (версия LaTeX2$_\varepsilon$, для набора формул используется $\mathcal{AMS}$-LaTeX) и файл статьи в формате PostScript или PDF.

4. Принимаемые форматы файлов рисунков: для растровых TIFF, GIF, PNG (должна быть возможна инкапсуляция в EPS); для векторных EPS, PDF, TEX. Каждый рисунок должен быть помещен в отдельный файл. Цветовая гамма – черно-белая или серая (8 бит).

5. Текст статьи должен включать аннотацию (в ней не должно быть громоздких формул и ссылок), ключевые слова, классификацию по PACS или MSC2000. Глубина разбивки текста не должна превышать трех уровней.

6. Название статьи, аннотация, ключевые слова, имена авторов и их организации предоставляются на русском и английском языках.

7. Автор указывает e-mail и телефон для оперативной связи. Возвращение статьи автору на доработку не означает, что она принята к опубликованию.

8. Отклонение от данных правил уменьшает вероятность опубликования статьи.

9. Публикация бесплатна для всех авторов.

Гиперкомплексные числа
в геометрии и физике

Научный журнал. Основан в 2003 г.

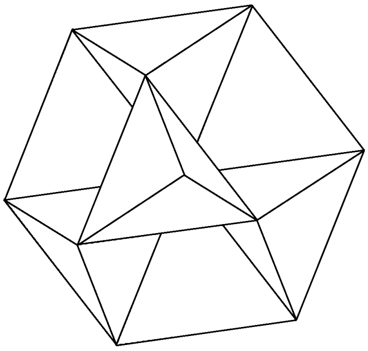
2004, № 2 (2)

Главный редактор Павлов Д. Г.
Ответственный секретарь Элиович А. А.

www.hypercomplex.ru,
www.polynumbers.ru
hypercomplex@mail.ru

Свидетельство о регистрации
ПИ № 77-15331 от 30 апреля 2003 г.

ISSN 1814-3946



Типографские данные