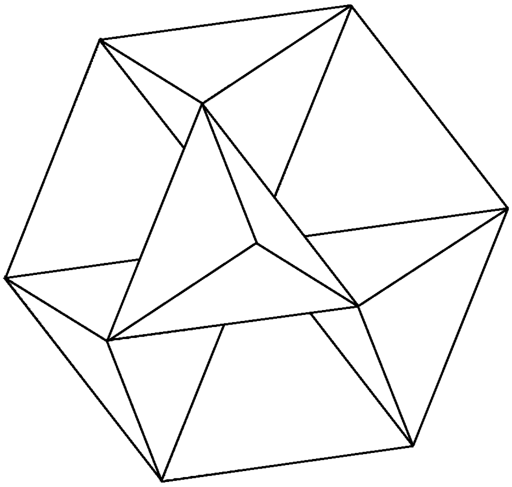
ISSN 1814-3946

Гиперкомплексные числа в геометрии и физике

2004, № 1 (1)

Научный журнал

Основан в 2003 г.



www.hypercomplex.ru
hypercomplex@mail.ru

Адрес редакции:
129515, Россия, Москва, м. ВДНХ,
ул. Прасковьина, 21, офис 112, "МОЗЭТ"

Оглавление

От редакции

ЧИСЛО, ГЕОМЕТРИЯ И ПРИРОДА

Число – одно из самых фундаментальных понятий не только математики, но и всего естествознания. Оно, быть может, первичней таких глобальных категорий, как время, пространство, вещество или поле. Поэтому, выпуская в свет первый номер журнала "Гиперкомплексные числа в геометрии и физике", редакционная коллегия искренне надеется, что на страницах данного издания найдут свое место работы, посвященные не просто числу вообще, но, прежде всего, раскрывающие его органическую связь с реальным миром.

Понятие числа многогранно и в самом широком смысле включает не только обычные числа, но и обобщенные объекты, наподобие кватернионов, октав, матриц и многих других. Не отрицая важной роли чисел всех видов, организаторы журнала выделяют среди них цепочку классов: натуральные → целые → рациональные → действительные → комплексные. Своей главной задачей журнал ставит обоснование возможности расширения приведенной классификации на числа бóльших размерностей, в первую очередь, обладающих коммутативно-ассоциативным умножением.

На первый взгляд, подобная программа представляется бесперспективной, поскольку теорема Фробениуса утверждает, что многокомпонентные числовые структуры с обычными арифметическими свойствами заканчиваются на комплексных числах. При этом особый акцент делается на отсутствии в соответствующих алгебрах так называемых делителей нуля. Конечно, отталкиваясь только от действительных и комплексных чисел, как неких эталонов, делители нуля представляются лишними. Однако, с точки зрения физики и тесным образом переплетенной с ней псевдоевклидовой геометрии, делители нуля оказываются одними из самых естественных объектов, поскольку именно с ними связаны мировые линии световых лучей. Факт, что псевдоевклидовой плоскости соответствует алгебра коммутативно-ассоциативных двойных чисел, имеющих в своем составе делители нуля, – лучшее тому подтверждение. Звучащие иногда высказывания, будто двойные числа слишком примитивны и не составляют реальной конкуренции комплексным, представляются несостоятельными, поскольку на языке геометрии это означает, что евклидовы пространства важнее псевдоевклидовых. Геометры давно пришли к выводу, что оба типа пространств равноценны, поэтому и двойные числа в основной классификации числовых структур должны стоять рядом с комплексными. Но, допуская мысль о фундаментальности двойных чисел, не остается оснований игнорировать делители нуля, а значит, оказывается вполне возможным, не вступая в противоречие с теоремой Фробениуса, строить числовые системы самых разных размерностей.

Замечательным примером подобных структур являются комплексные кватернионы (бикватернионы). Исследованию этих ассоциативных, но не коммутативных по умножению, гиперкомплексных чисел посвящен ряд интересных работ, представлены они и в первом номере настоящего журнала. Ожидание успехов данного направления основано на факте, что группа Пуанкаре, играющая исключительную роль в современной физике, является подгруппой полной группы симметрий восьмимерного пространства бикватернионов. С другой стороны, признание за делителями нуля права на звание обычных чисел, приводит к возможности построения и гиперкомплексных систем, наделенных коммутативно-ассоциативным произведением, что имеет свои дополнительные преимущества. Подчеркивая особый статус подобных структур, их предлагается рассматривать под общим именем *поличисел.*

До последнего времени исследованию поличисел не уделяли особого внимания, поскольку их считали тривиальными. Отчасти это действительно так, однако, если отталкиваться не от алгебр, а от связанных с ними геометрий, разнообразие свойств сразу же значительно возрастает. Дело в том, что пространства, стоящие за поличислами, как правило, являются финслеровыми, а в них можно ожидать, что помимо специальных линейных преобразований своим особым положением будут выделяться и некоторые нелинейные отображения.

Как бы ни сложилось с обобщением понятия числа, существование финслеровых геометрий является бесспорным фактом, а, значит, и проблемы физики можно рассматривать в совершенно другой плоскости. Действительно, почему бы вместо поиска гиперкомплексных систем, соответствующих классическому пространству Минковского или его модификациям, не попытаться заменить сам геометрический фундамент физики в надежде, что он ближе к неквадратичным структурам? Если идея столь тесной связи математики и физики верна, можно предположить, что новая геометрия должна быть непосредственно соотносима с максимально простыми числовыми системами. Здесь-то и могут сыграть свою роль поличисла, которые, с одной стороны, элементарны, а с другой – являются объектами далеко не тривиальных геометрий. Даже если в отношении поличисел данные ожидания не оправдаются, существуют и другие гиперкомплексные числа, а учитывая фундаментальность поставленной задачи, заранее трудно предугадать, какой из путей окажется плодотворным.

ОБОБЩЕНИЕ АКСИОМ СКАЛЯРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ

Д. Г. Павлов

Московский Государственный Технический Университет им. Н. Э. Баумана
hypercomplex@mail.ru

При изучении многих свойств как евклидовых, так и псевдоевклидовых пространств, необходимо понятие скалярного произведения. В настоящей работе обобщение этого понятия проводится применительно к специальному подклассу финслеровых пространств, которые предложено называть полилинейными. Для этого аксиоматически вводятся понятия скалярного полипроизведения и связанной с ним фундаментальной метрической полиформы, отталкиваясь от которых определяются различные метрические параметры, такие как длины векторов и углы между ними, а также обобщается понятие ортогональности направлений. На примере конкретной полиформы рассмотрены некоторые особенности геометрии четырехмерного линейного финслерова пространства, связанного с алгеброй коммутативно-ассоциативных гиперкомплексных чисел и названного квадрачисловым.

1. Скалярное произведение евклидовых пространств

За две тысячи лет, прошедших с момента появления знаменитых "Начал", математики испробовали множество различных способов описания евклидовых пространств. Среди них наиболее известны системы аксиом Евклида и Гильберта. Однако, по современным представлениям самой удобной является система аксиом, использующая понятия действительного числа, линейного пространства и скалярного произведения над ними [1]. При этом немногие знают, что появление в геометрии последнего способа во многом обязано открытию в 1843 году Уильямом Гамильтоном некоммутативной алгебры четырехкомпонентных гиперкомплексных чисел, названной им алгеброй кватернионов [2]. Этому открытию предшествовало несколько лет упорных поисков трехкомпонентных чисел, триплетов, которым можно было бы сопоставлять вектора обычного пространства, наподобие того, как комплексным числам сопоставляются вектора евклидовой плоскости. Решение проблемы нашлось, когда Гамильтон отказался от коммутативности умножения, а вместо триплетов стал рассматривать объекты с четырьмя компонентами.

По определению, кватернион – это гиперкомплексное число, которое можно представить в виде линейной комбинации:

$$X = x_0 + i \cdot x_1 + j \cdot x_2 + k \cdot x_3,$$

где x_i – действительные числа, а i, j, k — неравные друг другу мнимые единицы, такие что $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ и $ij + ji = jk + kj = ki + ik = 0$. Эти правила, включая правила умножения на обычную действительную единицу, нередко сводят в так называемую таблицу умножения гиперкомплексных чисел, которая в случае кватернионов имеет вид:

	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	$-j$ ·
j	j	$-k$	-1	i
k	k	j	$-i$	-1

Гамильтон предложил различать в кватернионе скалярную часть x_0 и векторную часть $\mathbf{V}_x = \mathbf{i}\cdot x_1 + \mathbf{j}\cdot x_2 + \mathbf{k}\cdot x_3$. При этом, как нетрудно проверить, произведение двух векторных кватернионов является обычным кватернионом:

$$\mathbf{V}_x\mathbf{V}_y = (-x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3) + [\mathbf{i}(x_2y_3 - x_3y_2) + \mathbf{j}(x_3y_1 - x_1y_3) + \mathbf{k}(x_1y_2 - x_2y_1)],$$

скалярная часть которого представляет собой симметрическую билинейную форму, а векторная имеет вид обычного векторного умножения. Собственно сами термины скалярного и векторного произведений появились именно отсюда и впервые были введены непосредственно Гамильтоном.

Первые исследователи кватернионов видели в них, прежде всего, возможность оперировать с точками и векторами обычного пространства алгебраическими методами, хотя данным гиперкомплексным числам более естественно сопоставлять пространство четырех измерений. Сам Гамильтон знал о подобной возможности, полагая, что данное обстоятельство когда-нибудь удастся использовать для описания времени. В этом случае кватернионы стали бы естественным инструментом не только геометрии, но и физики.

К сожалению, сегодня кватернионы известны только узкому кругу специалистов. Связано это с тем, что возникшее из алгебры кватернионов понятие скалярного произведения оказалось весьма удобным и очень скоро выделилось в самостоятельную геометрическую категорию, почти полностью вытеснив из обихода науки породившие его гиперкомплексные числа. В свое время, среди физиков и математиков возникла серьезная дискуссия между приверженцами алгебры кватернионов и сторонниками нарождавшегося тогда векторного исчисления. Как известно, векторный подход одержал верх, чему в немалой степени способствовали объективные трудности распространения на алгебру кватернионов методов теории функций комплексного переменного, обусловленные особенностями некоммутативного умножения.

Связанное с кватернионами скалярное произведение применимо исключительно к трехмерным векторам. Однако, если скалярное произведение оторвать от конкретных чисел и обобщить на пространства произвольной размерности, сохраняются основные достоинства данного понятия – возможность математически строго определять длины векторов и углы между ними. Для этого над аффинным пространством размерности m постулируется некоторая симметрическая билинейная форма двух векторов $(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \alpha_{ij}a_ib_j$. Взаимно однозначно связанная с нею квадратичная форма $(\mathbf{A}, \mathbf{A})$ должна быть неотрицательной. Далее по определению принимается, что аффинное отображение, переводящее вектор $\mathbf{A}$ в $\mathbf{A}'$, является конгруэнтным, если оно оставляет инвариантной эту квадратичную форму:

$$(\mathbf{A}, \mathbf{A}) = (\mathbf{A}', \mathbf{A}').$$

Две фигуры, которые могут быть переведены одна в другую конгруэнтным отображением, считаются конгруэнтными. Именно этим в аксиоматическом построении евклидовой геометрии определяется понятие конгруэнции. Для конгруэнтного отображения справедлива инвариантность не только квадратичной, но и билинейной формы:

$$(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = (\mathbf{A}', \mathbf{B}').$$

Поскольку два вектора $\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}'$ конгруэнтны тогда и только тогда, когда

$$(\mathbf{A}, \mathbf{A}) = (\mathbf{A}', \mathbf{A}'),$$

то значение $(\mathbf{A}, \mathbf{A})$ можно ввести как числовую характеристику вектора $\mathbf{A}$. Однако, вместо этого принято использовать величину положительного квадратного корня из

$(\mathbf{A}, \mathbf{A})$, которую по определению называют длиной вектора $\mathbf{A}$ и обычно обозначают как

$$|\mathbf{A}| = (\mathbf{A}, \mathbf{A})^{1/2}.$$

Такое определение позволяет выполнить еще одно условие: длина суммы двух сонаправленных векторов равна сумме их длин.

Понятие длины вектора позволяет ввести определение единичного вектора (Здесь и далее единичные векторы будут обозначаться малыми полужирными буквами). Их связь с обычными векторами выражается соотношениями вида:

$$\mathbf{a} = \mathbf{A}/|\mathbf{A}|.$$

Если $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, а также $\mathbf{a}'$ и $\mathbf{b}'$ – две пары векторов единичной длины, то фигура, образованная двумя первыми векторами, тогда и только тогда конгруэнтна фигуре, составленной из двух последних, когда выполняется равенство

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{a}', \mathbf{b}').$$

Носителем данного качества конгруэнтности евклидовых пространств принято считать понятие угла. Однако числовую характеристику угла связывают не с самой билинейной формой от единичных векторов, а с трансцендентной функцией арккосинуса от нее

$$\phi = \arccos(\mathbf{a}, \mathbf{b}).$$

Данное определение понятия угла эквивалентно утверждению, что углом в евклидовом пространстве называется длина дуги на единичной сфере между концами векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Такое усложнение для численной меры угла компенсируется приобретаемым свойством аддитивности. При сложении двух углов, лежащих в одной плоскости, их величины складываются.

Частным следствием понятия угла является свойство перпендикулярности направлений. Условие перпендикулярности двух векторов заключается в равенстве нулю значения их билинейной формы. Особый статус перпендикулярных направлений объясняется многими причинами, например, упрощением вида квадратичной метрической формы, представленной в базисе, все вектора которого взаимно перпендикулярны.

Среди пространств с квадратичной метрической формой выделяются двухмерные. Эту особенность отражает теорема Лиувилля, согласно которой для евклидовых и псевдоевклидовых пространств с размерностью три и выше конформные преобразования ограничены инверсиями, дилатациями, переносами и вращениями [3]. Другими словами, в двухмерном случае круг преобразований, относящихся к конформным, существенно шире. Математически данный факт находит свое отражение в существовании значительного разнообразия аналитических функций комплексного переменного, каждой из которых соответствует определенное конформное отображение евклидовой плоскости.

2. Скалярное произведение псевдоевклидовых пространств

Хорошо известно, что если постулированная над аффинным пространством симметрическая билинейная форма порождает знакопеременную квадратичную форму, то задаваемая ею геометрия оказывается уже не евклидовой, а псевдоевклидовой [4]. При этом системы аксиом обоих типов геометрий можно объединить, сняв требование положительности квадратичной формы. Такая объединенная система, в частности, может быть представлена следующим набором аксиом:

(а): каждым двум векторам **A** и **B** линейного пространства ставится в соответствие определенное действительное число, обозначаемое

$$k = (\mathbf{A}, \mathbf{B})$$

и называемое, как и в евклидовом случае, скалярным произведением этих векторов;

(б): скалярное произведение коммутативно по отношению к перестановкам векторов

$$(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = (\mathbf{B}, \mathbf{A});$$

(в): скалярное произведение дистрибутивно относительно сложения векторов

$$(\mathbf{A} + \mathbf{C}, \mathbf{B}) = (\mathbf{A}, \mathbf{B}) + (\mathbf{C}, \mathbf{B});$$

(г): действительный множитель можно вынести за знак скалярного произведения

$$(k\mathbf{A}, \mathbf{B}) = k(\mathbf{A}, \mathbf{B}).$$

Способы определения основных метрических характеристик псевдоевклидовых пространств, являющихся обобщениями соответствующих евклидовых параметров, концептуально не меняются, что позволяет сохранить за ними те же названия. Так, к конгруэнтным относятся преобразования, оставляющие инвариантными модули квадратичных форм всех векторов:

$$|(\mathbf{A}, \mathbf{A})| = |(\mathbf{A}', \mathbf{A})'|.$$

Длина вектора определяется как положительное значение квадратного корня из модуля квадратичной формы:

$$|\mathbf{A}| = |(\mathbf{A}, \mathbf{A})|^{1/2}.$$

Однако при этом появляются так называемые изотропные и мнимые вектора. У первых длина равна нулю при ненулевых компонентах, а у вторых величина квадратичной формы имеет отрицательные значения. Угол между двумя направлениями, как и в евклидовом случае, характеризует конгруэнтность фигуры из двух единичных векторов и по определению принимается равным специальной функции от их билинейной формы:

$$\phi = \operatorname{arcch}(\mathbf{a}, \mathbf{b}),$$

обеспечивающей аддитивность этого параметра при поворотах в плоскости. Таким образом, угол оказывается равным длине дуги между парой точек на единичной сфере. Однако теперь при вычислении угла необходимо учитывать, в каких областях по отношению к изотропному конусу располагаются задающие вектора, поскольку сфера (точнее, индикатриса) перестает быть односвязной поверхностью.

На псевдоевклидовы пространства обобщается и понятие перпендикулярности векторов. Для этого необходимо равенство нулю их скалярного произведения. Такие вектора принято называть ортогональными.

Псевдоевклидовы пространства допускают также обобщение понятия конформного отображения, определяемое как преобразование, сохраняющее подобие бесконечно малых фигур. В псевдоевклидовых пространствах, как и в евклидовых, выделяется двухмерный случай, для которого конформные преобразования разнообразней, чем при больших размерностях. Отметим и еще одно совпадение – псевдоевклидова плоскость, подобно евклидовой, имеет алгебраический аналог, носящий название *двойных чисел*, отличающихся от комплексных тем, что квадрат их мнимой единицы равен не минус, а плюс единице. Такие числа наравне с комплексными допускают понятие аналитических функций, каждой из которых можно поставить в соответствие некоторое конформное отображение псевдоевклидовой плоскости [5]. Эти особенности двухмерных пространств косвенно указывают на связь между выделенными геометриями и коммутативно-ассоциативными алгебрами, например, алгебрами комплексных и двойных чисел.

Помимо псевдоевклидовой аксиоматики, в геометрии известны и другие подходы к обобщению понятия скалярного произведения, следствиями которых являются системы аксиом для так называемых унитарных и симплектических пространств. Для первых квадратичная форма задается над полем не действительных, а комплексных чисел, а для вторых – вместо симметрической постулируется антисимметрическая билинейная форма [4, 6].

Анализируя рассмотренные выше примеры постулирования понятия скалярного произведения и его обобщений, можно заметить, что их все объединяет связь с той или иной билинейной формой. Однако такая форма – частный случай полилинейной. В связи с этим возникает вопрос: нельзя ли получить содержательную геометрию, если вместо билинейной постулировать трех-, четырех- и так далее, вплоть до полилинейной симметрическую форму?

3. Скалярное полипроизведение

Попробуем, сохранив в качестве основы все аксиомы действительного числа и m-мерного аффинного пространства, добавить к ним следующие:

(а): каждым n векторам $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \ldots, \mathbf{Z}$ поставим в соответствие определенное действительное число, обозначаемое

$$k = (\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \ldots, \mathbf{Z}),$$

которое будем называть их *скалярным полипроизведением*;

(б): потребуем, чтобы скалярное полипроизведение было коммутативно по отношению к перестановкам любых, входящих в него векторов:

$$(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \ldots, \mathbf{Z}) = (\mathbf{B}, \mathbf{A}, \mathbf{C}, \ldots, \mathbf{Z}) = (\mathbf{C}, \mathbf{B}, \mathbf{A}, \ldots, \mathbf{Z}) = \cdots = (\mathbf{Z}, \mathbf{C}, \mathbf{B}, \ldots, \mathbf{A});$$

(в): дистрибутивно относительно их сложения:

$$(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} + \mathbf{E}, \ldots, \mathbf{Z}) = (\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \ldots, \mathbf{Z}) + (\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{E}, \ldots, \mathbf{Z});$$

(г): действительный множитель при любом из векторов можно было бы выносить за знак скалярного полипроизведения:

$$(k\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \ldots, \mathbf{Z}) = k(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \ldots, \mathbf{Z}).$$

Данные аксиомы лишь немного отличаются от соответствующих аксиом скалярного произведения. Кроме того, все они могут быть объединены в едином понятии симметрической полилинейной формы и потому пространства, наделенные одной из таких форм, будем называть *полилинейными*. Рассмотренные выше евклидовы и псевдоевклидовы пространства в соответствии со своими определениями являются частными случаями полилинейных, т. е. удовлетворяют приведенной выше системе аксиом при $n = 2$, что позволяет именовать их *билинейными.*

Скалярное полипроизведение от одного и того же вектора $(\mathbf{A}, \mathbf{A}, \ldots, \mathbf{A})$, по аналогии с квадратичной формой билинейных пространств, будем называть *фундаментальной метрической формой* полилинейного пространства, или просто *n-арной полиформой вектора* $\mathbf{A}$.

Аффинные отображения полилинейного пространства, переводящие вектора $\mathbf{A}$ в $\mathbf{A}'$, назовем *конгруэнтными*, если они оставляют инвариантными модули фундаментальных метрических форм:

$$|(\mathbf{A}, \mathbf{A}, \mathbf{A}, \ldots, \mathbf{A})| = |(\mathbf{A}', \mathbf{A}', \mathbf{A}', \ldots, \mathbf{A}')|. \qquad (1)$$

Именно этим в нашем аксиоматическом построении полилинейного пространства будет определяться понятие *конгруэнции*, а вслед за ним и другие метрические понятия.

Если имеется некоторое множество объектов, для которых выполняются аксиомы аффинного пространства, то мы можем выбрать в нем любую симметрическую полилинейную форму, а, следовательно, и однозначно с ней связанную n-арную полиформу, "назначить" последнюю фундаментальной метрической формой и на ее основе определить понятие конгруэнции так, как это было сделано выше. Тогда с помощью этой формы в аффинное пространство оказывается введенной некоторая метрика, и становится справедливой метрическая геометрия во всей своей полноте. Такое построение не связано ни с размерностью пространства, ни с конкретной размерностью фундаментальной формы, ни с видом последней.

Из свойств симметрии и линейности формы $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \ldots, \mathbf{Z})$ следует, что для конгруэнтного отображения полилинейного пространства справедливы более общие, чем (1), соотношения:

$$\begin{gathered}
(\mathbf{A}, \mathbf{A}, \ldots, \mathbf{A}, \mathbf{B}) = (\mathbf{A}', \mathbf{A}', \ldots, \mathbf{A}', \mathbf{B}'),\\
(\mathbf{A}, \mathbf{A}, \ldots, \mathbf{B}, \mathbf{B}) = (\mathbf{A}', \mathbf{A}', \ldots, \mathbf{B}', \mathbf{B}'),\\
\ldots\ldots\ldots\\
(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \ldots, \mathbf{C}, \mathbf{Z}) = (\mathbf{A}', \mathbf{B}', \ldots, \mathbf{C}', \mathbf{Z}').
\end{gathered}$$

Иными словами, конгруэнтные отображения полилинейного пространства оставляют инвариантными полиформы, в которые вектора входят в любых комбинациях.

О двух векторах полилинейного пространства $\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}'$ будем говорить, что они конгруэнтны, если модули соответствующих им n-арных полиформ имеют равные, но отличные от нуля значения:

$$|(\mathbf{A}, \mathbf{A}, \ldots, \mathbf{A}, \mathbf{A})| = |(\mathbf{A}', \mathbf{A}', \ldots, \mathbf{A}', \mathbf{A}')| \neq 0.$$

В соответствии с данным определением n-арную полиформу можно было бы рассматривать как численный параметр вектора $\mathbf{A}$. Однако вместо этого, как и в билинейных пространствах, стремясь к аддитивности и однозначности свойств, будем использовать не саму полиформу, а положительный корень n-й степени из её модуля, называя эту величину *длиной* вектора $\mathbf{A}$:

$$|\mathbf{A}| = |(\mathbf{A}, \mathbf{A}, \ldots, \mathbf{A}, \mathbf{A})|^{1/n}.$$

Тогда длина суммы двух сонаправленных векторов равна сумме их длин. Следует отметить, что это далеко не единственный способ введения понятия длины с аддитивными свойствами, однако именно при таком подходе длина определена для максимального количества направлений исходного аффинного пространства.

Теперь становится ясным, к какому типу пространств следует отнести те, что мы пытаемся строить при помощи перечисленных выше аксиом скалярного полипроизведения. Во-первых, эти пространства являются *финслеровыми* [7, 8], поскольку их метрические функции не ограничены квадратичными формами. Во-вторых, они принадлежат к классу, известному в финслеровой геометрии под именем *пространств Минковского* [9], к которым принято причислять многообразия, чьи метрические функции не зависят от точки. [Пространство специальной теории относительности – частный случай таких пространств.] Но рассматриваемый нами класс пространств еще уже, поскольку связан со строгим понятием полилинейной симметрической формы. Последнее обстоятельство имеет большое значение, так как именно в этих случаях оказывается возможным ввести характеристики, обобщающие такие фундаментальные категории геометрии, как длина, угол, ортогональность, конформное отображение и другие. До появления более точного названия, условимся подобные пространства именовать *полилинейными финслеровыми пространствами.*

Если $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, а также $\mathbf{a}'$ и $\mathbf{b}'$ – две пары единичных векторов полилинейного пространства, то фигура, образованная двумя первыми векторами, будет тогда конгруэнтна фигуре, составленной из двух последних, когда найдется конгруэнтное преобразование, переводящее одну фигуру в другую. Из рассмотренных выше свойств полилинейных форм следует, что такое преобразование может найтись только в том случае, если:

$$\begin{gathered}(\mathbf{a},\mathbf{a},\dots,\mathbf{b})=(\mathbf{a}',\mathbf{a}',\dots,\mathbf{b}'),\\ (\mathbf{a},\mathbf{a},\dots,\mathbf{b},\mathbf{b})=(\mathbf{a}',\mathbf{a}',\dots,\mathbf{b}',\mathbf{b}'),\\ \dots\dots\dots\\ (\mathbf{a},\mathbf{b},\dots,\mathbf{b})=(\mathbf{a}',\mathbf{b}',\dots,\mathbf{b}'). \end{gathered}\tag{2}$$

Отсюда, в частности, вытекает, что в билинейных пространствах конгруэнтность пары фигур из двух единичных векторов связана с равенством всего одной формы:

$$(\mathbf{a},\mathbf{b})=(\mathbf{a}',\mathbf{b}'),\tag{3}$$

которая и задает понятие угла, как параметра, характеризующего различие двух направлений. Равенство (3) совместно с определением единичного вектора эквивалентно аксиоме о конгруэнтности треугольников из гильбертовой системы аксиом евклидова пространства. Два треугольника в евклидовом пространстве конгруэнтны, если равны длины соответствующих сторон и углы между ними. Аналогичные аксиомы можно сформулировать и для псевдоевклидовых пространств. Но из определения (2) вытекает, что для полилинейного пространства с размерностью формы выше двух конгруэнтность фигур из двух единичных векторов определяется уже не одним, а большим количеством условий. Так, в пространствах с трилинейной формой $(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})$ для конгруэнтности соответственных фигур должны быть равны две формы:

$$(\mathbf{a},\mathbf{a},\mathbf{b})=(\mathbf{a}',\mathbf{a}',\mathbf{b}'),\qquad (\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{b})=(\mathbf{a}',\mathbf{b}',\mathbf{b}').$$

Этот кажущийся парадокс имеет простое объяснение. Действительно, говоря о пространственной фигуре, построенной на двух векторах, обычно ее представляют, как элемент плоскости, содержащейся между ребрами, которыми и являются задающие вектора. Однако это оправдано только в пространствах с билинейной формой. В пространствах с произвольной полилинейной формой с двумя векторами связаны уже не плоскости, а особого вида конусообразные поверхности, конфигурация которых зависит от метрических свойств окружающего пространства. Количество параметров, определяющих конгруэнтность таких веерообразных фигур, ограниченных по краям парами единичных векторов, может быть больше одного, что, в частности, и наблюдается в пространстве с трилинейной симметрической формой, где соответствующих величин две.

На основании проведенного выше краткого анализа становится ясно, что полилинейные пространства допускают возможность введения аналогов понятию угла билинейных пространств. Однако при этом, следует учитывать, что в билинейных пространствах угол, как параметр, объединял в себе сразу два свойства: с одной стороны, он служил характеристикой различия (разности) двух направлений, а с другой, являлся экстремальным параметром одного из двух типов конгруэнтных преобразований, называемого вращением. В общем случае полилинейного пространства каждое из этих свойств, по-видимому, следует характеризовать самостоятельной величиной. Так в основу получения численного параметра, характеризующего различие направлений единичных векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, имеет смысл положить величину n-арной полиформы их разности, а именно:

$$\begin{aligned}&(\mathbf{a}-\mathbf{b},\mathbf{a}-\mathbf{b},\dots,\mathbf{a}-\mathbf{b})=\\&=(\mathbf{a},\mathbf{a},\dots,\mathbf{a})-C_n^1(\mathbf{a},\mathbf{a},\dots,\mathbf{a},\mathbf{b})\pm\dots(-1)^{n-1}C_n^{n-1}(\mathbf{a},\mathbf{b},\dots,\mathbf{b})+(-1)^n(\mathbf{b},\mathbf{b},\dots,\mathbf{b}),\end{aligned}$$

где C_i^j – биномиальные коэффициенты. В связи с этим, скалярная форма от двух единичных векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$:

$$S(\mathbf{a},\mathbf{b})=-C_n^1(\mathbf{a},\mathbf{a},\dots,\mathbf{a},\mathbf{b})\pm\dots(-1)^{n-1}C_n^{n-1}(\mathbf{a},\mathbf{b},\dots,\mathbf{b}) \tag{4}$$

или некоторая функция от нее может выполнять роль численного параметра, определяющего искомую характеристику. Заметим, что если полилинейное пространство билинейно, выражение (4) с точностью до постоянного множителя совпадает с определением обычного скалярного произведения двух единичных векторов. Величину (4) можно называть *скалярным произведением двух векторов полилинейного пространства*. Впрочем, возможно будет более оправдано скалярную форму (4) разбивать на попарно симметризованные слагаемые:

$$\begin{aligned}&S(\mathbf{a},\mathbf{b})=C_n^1(-(\mathbf{a},\mathbf{a},\dots,\mathbf{a},\mathbf{b})+(-1)^{n-1}(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{b}\dots,\mathbf{b}))+\\&+C_n^2((\mathbf{a},\mathbf{a},\dots,\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{b})+(-1)^{n-2}(\mathbf{a},\mathbf{a},\mathbf{b}\dots,\mathbf{b}))\pm\dots=S_1(\mathbf{a},\mathbf{b})+S_2(\mathbf{a},\mathbf{b})+\dots,\end{aligned} \tag{5}$$

где каждый член $S_i(\mathbf{a},\mathbf{b})$ получает самостоятельное значение.

В полилинейных пространствах существуют пары векторов с определенными особенностями взаимного расположения, подобные ортогональным векторам билинейных пространств. В теории финслеровых пространств соответствующее понятие именуют трансверсальностью. Условимся вектор $\mathbf{A}$ называть *трансверсальным первого порядка* вектору $\mathbf{B}$, если $(\mathbf{A},\mathbf{A},\dots,\mathbf{A},\mathbf{B})=0$. Видно, что трансверсальность не коммутативна, т. е. из $(\mathbf{A},\mathbf{A},\dots,\mathbf{A},\mathbf{B})=0$ не следует $(\mathbf{B},\mathbf{B},\dots,\mathbf{B},\mathbf{A})=0$. Однако если воспользоваться симметризованными формами (5), то задаваемая ими трансверсальность уже будет обладать коммутативными свойствами. По определению, вектора $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ будем считать *взаимно трансверсальными первого порядка*, когда $S_1(\mathbf{A},\mathbf{B})=\mathbf{0}$; *второго порядка*, когда $S_2(\mathbf{A},\mathbf{B})=\mathbf{0}$, и так далее до $n/2$ или $(n-1)/2$ порядка. Такая дифференциация трансверсальности говорит о том, что в линейных финслеровых пространствах вектора могут образовывать пары с множественностью характерных отношений направленности, обобщающей понятие ортогональности.

Помимо величин, задаваемых формами (4), в некоторых полилинейных пространствах, имеющих непрерывные конгруэнтные преобразования типа вращений, представляется уместным ввести еще одну "углоподобную" характеристику. Ее величину будем связывать с длиной дуги на единичной сфере, очерчиваемой лучом при непрерывном однопараметрическом вращении. Так обобщаемое понятие подобно обычному углу является аддитивной мерой, что следует из аддитивности длин.

Но в полиформах могут участвовать не только пары, но и тройки, четверки и т. д., вплоть до n различных векторов. Трудно сказать, к каким качественным следствиям в отношении элементарных фигур должно приводить данное обстоятельство. Ясно одно: это свойство полилинейных пространств существует объективно, а значит, его также необходимо учитывать.

Среди полилинейных пространств имеются такие, у которых в одном из базисов обнуляются все формы, кроме тех, что включают только различные вектора. Для таких пространств в этих особых базисах фундаментальные метрические формы принимают вид:

$$\begin{aligned}(\mathbf{A},\mathbf{A},\dots,\mathbf{A}) = {} & \pm a_1a_2\dots a_m \pm a_1a_2\dots a_{m-1}a_{m+1} \\ & \pm\dots\pm a_2a_3\dots a_ma_{m+1}\pm\dots\pm a_{n-m}a_{n-m+1}\dots a_n. \quad (6)\end{aligned}$$

Именно среди них оказываются псевдоевклидовы пространства сигнатуры $(1, m-1)$, играющие исключительную роль в современной теоретической физике. Хотя для этих пространств более привычным выглядит классическое квадратичное представление, оказывается, что квадраты их интервалов в некоторых изотропных базисах принимают вид:

$$|\mathbf{A}|^2 = (\mathbf{A},\mathbf{A}) = a_1a_2 + a_1a_3 + a_1a_4 + \dots + a_{m-1}a_m = \sum_{k\neq l} a_ka_l.$$

К примеру, квадрат интервала пространства Минковского $s^2 = (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2$ после подстановки, сходной с (16):

$$\begin{aligned} ct &= \sqrt{3/8}(u+v+w+z), & x &= \sqrt{1/8}(u-v+w-z),\\ y &= \sqrt{1/8}(u+v-w-z), & z &= \sqrt{1/8}(u-v-w+z),\end{aligned}$$

приобретает красивый симметричный вид:

$$s^2 = uv + uw + uz + vw + vz + wz.$$

Выражения типа (6) наиболее лаконично выглядят в случаях $n = m$, т. е. когда размерность фундаментальной метрической формы совпадает с размерностью пространства. В этих случаях n-я степень длины вектора в соответствующем базисе принимает вид:

$$|\mathbf{A}|^n = (\mathbf{A},\mathbf{A},\dots,\mathbf{A}) = \pm a_1a_2\dots a_n.$$

Именно этим обстоятельством обусловлена исключительная роль псевдоевклидовой плоскости, для которой выполняется такое соотношение. Очень вероятно, что только у пространств с $n = m$ существует связь с ассоциативно-коммутативными алгебрами, что влечет за собой существование в этих пространствах широкой группы конформных отображений. При этом разнообразие конформных отображений может наблюдаться и в ряде других случаев, что следует из работ [10, 11]. В них рассматривается восьмимерное пространство бикватернионов, которое в свете изложенной выше аксиоматики обладает метрической формой 4 порядка и, значит, также не подпадает под теорему Лиувилля. Остается надеяться, что свойство некоторых полилинейных пространств обладать богатой группой конформных отображений окажется перспективным для приложений, как в геометрии, так и в физике.

С другой стороны, даже поверхностное изучение свойств полилинейных пространств позволяет утверждать, что в некоторых из них присутствуют не только конформные, но и другие ярко выделенные нелинейные преобразования, аналогов которым не существует у обычных билинейных пространств. Существование таких преобразований следует уже из того, что рассматриваемые пространства требуют расширения понятия ортогональности до нескольких его типов. Как известно, нелинейные преобразования, сохраняющие обычную ортогональность, относятся к конформным. В связи с этим, естественно ожидать, что и преобразования, сохраняющие трансверсальность, окажутся столь же выделенными. Наличие таких преобразований делает соответствующие полилинейные пространства еще интереснее.

4. Примеры полилинейных пространств

Разнообразие полилинейных пространств велико. Определенные трудности представляет собой задача классификации таких пространств даже в случае трилинейных форм, не говоря уже о формах больших размерностей. Однако, если ограничиться только трёхмерным случаем, а среди всевозможных симметрических трилинейных пространств рассматривать только те, чьи метрические формы не зависят от перестановок компонент векторов (такие формы в работе [12], исследующей подобную классификацию, предложено называть *сверхсимметрическими*), то выявляются 8 самостоятельных классов, с каждым из которых можно связать свою каноническую фундаментальную полиформу. Среди всех этих форм особенно простым видом обладают следующие:

$$(\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A}) = a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 = F_1;$$

$$(\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A}) = a_1^2a_2 + a_1^2a_3 + a_2^2a_1 + a_2^2a_3 + a_3^2a_1 + a_3^2a_2 = F_2;$$

$$(\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A}) = a_1a_2a_3 = F_3.$$

В работе [12] они названы *базисными*. Любую из восьми неизоморфных сверхсимметрических трилинейных полиформ можно представить как линейную комбинацию этих базисных:

$$(\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A}) = \omega_1F_1 + \omega_2F_2 + \omega_3F_3.$$

Однако, сколь ни велико разнообразие пространств с трилинейной симметрической формой, среди них максимальной лаконичностью своего выражения выделяется пространство с формой:

$$(\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A}) = a_1a_2a_3.$$

Вследствие симметрии, вытекающей из этой лаконичности, соответствующему пространству можно сопоставить алгебру коммутативно-ассоциативных чисел, являющихся прямой суммой трех действительных алгебр. Условимся такую гиперкомплексную систему именовать *тройными числами* и обозначать H_3. Математические, геометрические, а возможно и физические структуры, связанные с тройными числами далеко не тривиальны, в чем можно убедиться по исследованиям [13, 14], представленным в настоящем сборнике. Заметим, что подавляющему большинству трилинейных полиформ вообще не соответствуют никакие алгебры [12].

Для четырехмерных полилинейных пространств с $n = m$ базисные формы имеют вид:

$$(\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A}) = a_1^4 + a_2^4 + a_3^4 + a_4^4; \tag{7}$$

$$\begin{aligned}(\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A}) = a_1^3(a_2+a_3+a_4) + a_2^3(a_1+a_3+a_4)\\ + a_3^3(a_1+a_2+a_4) + a_4^3(a_1+a_2+a_3);\end{aligned} \tag{8}$$

$$(\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A}) = a_1^2a_2^2 + a_1^2a_3^2 + a_1^2a_4^2 + a_2^2a_3^2 + a_2^2a_4^2 + a_3^2a_4^2; \tag{9}$$

$$\begin{aligned}(\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A}) = a_1^2(a_2a_3 + a_2a_4 + a_3a_4) + a_2^2(a_1a_3 + a_1a_4 + a_3a_4)\\ + a_3^2(a_1a_2 + a_1a_4 + a_2a_4) + a_4^2(a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3);\end{aligned} \tag{10}$$

$$(\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A},\mathbf{A}) = a_1a_2a_3a_4, \tag{11}$$

и с каждой из них связана геометрия своего, не изоморфного остальным, полилинейного пространства.

Как и в трехмерном случае, данными примерами разнообразие четырехмерных полилинейных пространств не исчерпывается. Полная классификация соответствующих геометрий – весьма трудоемкая задача, решение которой может потребовать значительных усилий. Однако прежде, чем ею заниматься, имеет смысл изучить хотя бы один частный случай. Например, геометрию, связанную с самой лаконичной из базисных полиформ (7) – (11), а именно (11). (Геометрия такого пространства является финслеровой, ее метрическая функция получила название метрики Бервальда-Моора. Она является частным случаем метрики, использованной в работах [16], [17].) Высокая симметрия этой формы снова приводит к возможности сопоставить задаваемому ею пространству алгебру коммутативно-ассоциативных гиперкомплексных чисел, которые, для краткости, будем называть *квадрачислами* и обозначать H_4. Некоторые свойства пространства, связанного с квадрачислами, представлены в [15]. Алгебру квадрачисел можно получить, добавив к аксиомам действительных чисел аксиомы сложения и умножения объектов вида $A = a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot I + a_3 \cdot J + a_4 \cdot K$ и $B = b_1 \cdot 1 + b_2 \cdot I + b_3 \cdot J + b_4 \cdot K$, где a_i и b_i – действительные числа, называемые компонентами, а $1, I, J, K$ – базисные единицы. Принимая по определению, что суммой чисел A и B называется число:

$$C = (a_1 + b_1) \cdot 1 + (a_2 + b_2) \cdot I + (a_3 + b_3) \cdot J + (a_4 + b_4) \cdot K,$$

а их произведением – другое число того же класса:

$$\begin{aligned}D = (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4) \cdot 1 + (a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_4 + a_4b_3) \cdot I +\\ + (a_1b_3 + a_2b_4 + a_3b_1 + a_4b_2) \cdot J + (a_1b_4 + a_2b_3 + a_3b_2 + a_4b_1) \cdot K,\end{aligned}$$

получаем алгебру коммутативно-ассоциативных гиперкомплексных чисел, в которой таблица умножения базисных единиц имеет вид:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & I & J & K \\ \hline 1 & 1 & I & J & K \\ I & I & 1 & K & J \\ J & J & K & 1 & I \\ K & K & J & I & 1 \end{array}\;.$$

Из таблицы следует $I^2 = J^2 = K^2 = 1$, т. е. все ее мнимые единицы гиперболические. Ту же алгебру можно получить и другим путем, применяя дважды операцию удвоения к алгебре действительных чисел с использованием двух независимых гиперболически мнимых единиц I и J. Тогда, обозначая произведение I на J как самостоятельный объект K, произвольное число A из соответствующего множества можно представить в виде линейной комбинации:

$$A = (a_1 + a_2 \cdot I) + (a_3 + a_4 \cdot I) \cdot J = a_1 + a_2 \cdot I + a_3 \cdot J + a_4 \cdot K,$$

где символ действительной единицы 1, как это принято в комплексных числах и кватернионах, опущен.

Будем называть числа $\bar{A}, \hat{A}, \widetilde{A}$ *сопряженными* числу $A = a_1 + a_2 \cdot I + a_3 \cdot J + a_4 \cdot K$, если они имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \bar{A} &= a_1 - a_2 \cdot I + a_3 \cdot J - a_4 \cdot K, \\ \hat{A} &= a_1 + a_2 \cdot I - a_3 \cdot J - a_4 \cdot K, \\ \widetilde{A} &= a_1 - a_2 \cdot I - a_3 \cdot J + a_4 \cdot K. \end{aligned} \tag{12}$$

Отметим, что

$$\bar{\hat{\widetilde{A}}} = A. \tag{13}$$

Произведения таких четверок, как несложно проверить непосредственной подстановкой, – всегда действительные числа, причем

$$A\bar{A}\hat{A}\widetilde{A} = a_1^4 + a_2^4 + a_3^4 + a_4^4 - 2a_1^2a_2^2 - 2a_1^2a_3^2 - 2a_1^2a_4^2 - 2a_2^2a_3^2 - 2a_2^2a_4^2 - 2a_3^2a_4^2 + 8a_1a_2a_3a_4. \tag{14}$$

По аналогии с алгеброй комплексных чисел будем связывать эту величину с четвертой степенью модуля соответствующего числа и обозначать, как $|A|^4$. Введенное понятие обладает обычными свойствами модуля:

$$|\lambda A| = |\lambda| \cdot |A|, \qquad |AB| = |A| \cdot |B|,$$

где λ – действительное, а A и B – гиперкомплексные числа. Свойство взаимно сопряженных в произведении давать действительное число позволяет ввести в рассматриваемой алгебре операцию деления, понимаемую как действие обратное умножению. Так, под числом A^{-1} , обратным к A, будем понимать число:

$$A^{-1} = \frac{\bar{A}\hat{A}\widetilde{A}}{|A|^4}. \tag{15}$$

Обратные существуют только у чисел, модуль которых отличен от нуля. Не равные нулю числа, модуль которых равен нулю, являются делителями нуля. Такие числа не имеют обратных.

Рассматриваемая алгебра ассоциирована с формой (11). В этом можно убедиться, рассмотрев переход от базиса $1, I, J, K$ к базису S_1, S_2, S_3, S_4, объекты которого связаны с исходными соотношениями:

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{4}(1 + I + J + K), \qquad & S_2 &= \frac{1}{4}(1 - I + J - K), \\ S_3 &= \frac{1}{4}(1 + I - J - K), \qquad & S_4 &= \frac{1}{4}(1 - I - J + K). \end{aligned} \tag{16}$$

(Нумерация орт определяется следующей логикой: сопряжение по первым двум ортам $1, I$ считается младшим, по их удвоению – ортам J, K – старшим). Новые базисные числа являются делителями нуля и замечательны тем, что их таблица умножения выглядит наиболее просто:

	S_1	S_2	S_3	S_4
S_1	S_1	0	0	0
S_2	0	S_2	0	0
S_3	0	0	S_3	0
S_4	0	0	0	S_4

Делители нуля с подобными свойствами будем называть *главными*, а состоящие из них базисы – *абсолютными*. Обратная связь единиц $1, I, J, K$ с главными делителями нуля алгебры H_4 выражается соотношениями:

$$1 = S_1 + S_2 + S_3 + S_4, \qquad I = S_1 - S_2 + S_3 - S_4,$$

$$J = S_1 + S_2 - S_3 - S_4, \qquad K = S_1 - S_2 - S_3 + S_4.$$

Числа из H_4, записанные в абсолютном базисе, легко не только складывать, но и умножать, и делить. Так, произведение двух чисел A и B имеет вид:

$$(AB) = (a'_1 b'_1)S_1 + (a'_2 b'_2)S_2 + (a'_3 b'_3)S_3 + (a'_4 b'_4)S_4,$$

а их частное:

$$\frac{A}{B} = \frac{a'_1}{b'_1}S_1 + \frac{a'_2}{b'_2}S_2 + \frac{a'_3}{b'_3}S_3 + \frac{a'_4}{b'_4}S_4$$

(Здесь и далее компоненты со штрихами будут относиться к абсолютным базисам.) Абсолютный базис раскрывает устройство алгебры квадрагиперболических чисел, которая изоморфна алгебре действительных диагональных матриц. Ансамбль взаимно сопряженных при этом имеет вид:

$$\begin{aligned} A &= a'_1 S_1 + a'_2 S_2 + a'_3 S_3 + a'_4 S_4, \\ \bar{A} &= a'_2 S_1 + a'_1 S_2 + a'_4 S_3 + a'_3 S_4, \\ \hat{A} &= a'_3 S_1 + a'_4 S_2 + a'_1 S_3 + a'_2 S_4, \\ \widetilde{A} &= a'_4 S_1 + a'_3 S_2 + a'_2 S_3 + a'_1 S_4. \end{aligned} \tag{17}$$

Модуль числа A в таком специальном базисе, как несложно убедиться, принимает вид:

$$|A| = |a'_1 a'_2 a'_3 a'_4|^{1/4}, \tag{18}$$

что и подтверждает соответствие данной алгебры геометрии, задаваемой фундаментальной метрической формой (11). На множестве квадрачисел можно ввести понятие функции. Одной из наиболее интересных функций является экспоненциальная, под которой будем понимать ряд:

$$e^X = 1 + X + \frac{X}{2!} + \ldots,$$

где X – произвольное квадрачисло. С введением экспоненциальной функции можно наряду с алгебраической формой представления числа из H_4 рассматривать и его экспоненциальную форму. Так, числу $A = a'_1 S_1 + a'_2 S_2 + a'_3 S_3 + a'_4 S_4$, все компоненты a'_i которого в абсолютном базисе больше нуля, взаимно однозначно соответствует форма:

$$A = |A| e^{\alpha I + \beta J + \gamma K}, \tag{19}$$

где положительная величина $|A|$ – модуль квадрачисла. Действительные же числа α, β и γ, по аналогии с комплексными и двойными числами, будем называть *аргументами квадрачисла* A. Связь аргументов с компонентами a'_i в абсолютном базисе имеет вид:

$$\alpha = \frac{1}{4} \ln \frac{a'_1 a'_3}{a'_2 a'_4} = \frac{1}{4}(\ln a'_1 - \ln a'_2 + \ln a'_3 - \ln a'_4),$$

$$\beta = \frac{1}{4} \ln \frac{a'_1 a'_2}{a'_3 a'_4} = \frac{1}{4}(\ln a'_1 + \ln a'_2 - \ln a'_3 - \ln a'_4),$$

$$\gamma = \frac{1}{4}\ln\frac{a'_1a'_4}{a'_2a'_3} = \frac{1}{4}(\ln a'_1 - \ln a'_2 - \ln a'_3 + \ln a'_4),$$

где $\ln x$ – логарифмическая функция действительного аргумента x. Поскольку для каждой мнимой единицы в отдельности выполняется гиперболический аналог формулы Эйлера:

$$e^{\alpha I} = \cosh\alpha + I\sinh\alpha,$$

то для экспоненты от произвольного квадрачисла $X = \delta + \alpha I + \beta J + \gamma K$ справедливо выражение вида:

$$e^X = (\cosh\delta + \sinh\delta)(\cosh\alpha + I\sinh\alpha)(\cosh\beta + J\sinh\beta)(\cosh\gamma + K\sinh\gamma), \qquad (20)$$

где $\cosh x$ и $\sinh x$ – гиперболические косинус и синус. Для квадрачислового переменного X аналогичные функции можно ввести как ряды:

$$\cosh X = 1 + \frac{X^2}{2!} + \ldots, \qquad \sinh X = X + \frac{X^3}{3!} + \ldots.$$

С функцией квадрачислового переменного можно связать понятия производной по направлению и аналитичности наподобие того, как соответствующие понятия вводятся в алгебру двойных чисел [2]. Аналитичность функции от H_4 означает независимость ее производной от направлений [5] $dF = F'\,da$ и выражается в одновременном выполнении 12 уравнений, являющихся аналогами условий Коши-Римана для комплексного и двойного переменного:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial U}{\partial a_1} = \frac{\partial V}{\partial a_2} = \frac{\partial W}{\partial a_3} = \frac{\partial Q}{\partial a_4}, \qquad \frac{\partial U}{\partial a_2} = \frac{\partial V}{\partial a_1} = \frac{\partial W}{\partial a_4} = \frac{\partial Q}{\partial a_3},\\
&\frac{\partial U}{\partial a_3} = \frac{\partial V}{\partial a_4} = \frac{\partial W}{\partial a_1} = \frac{\partial Q}{\partial a_2}, \qquad \frac{\partial U}{\partial a_4} = \frac{\partial V}{\partial a_3} = \frac{\partial W}{\partial a_2} = \frac{\partial Q}{\partial a_1},
\end{aligned} \qquad (21)$$

где

$$F(A) = U(a_1,a_2,a_3,a_4) + V(a_1,a_2,a_3,a_4)I + W(a_1,a_2,a_3,a_4)J + Q(a_1,a_2,a_3,a_4)K$$

– аналитическая функция от квадрачислового переменного, а U, V, W, Q – гиперкомплексно сопряженные функции четырех действительных аргументов.

В алгебре квадрачисел имеется шестнадцать характерных единичных объектов $e_1 - e_{16}$, имеющих в базисе, в котором записана форма (11), следующие компоненты:

$$\begin{aligned}
&e_1 \leftrightarrow (1,1,1,1); && e_5 \leftrightarrow (-1,-1,-1,-1);\\
&e_2 \leftrightarrow (1,-1,1,-1); && e_6 \leftrightarrow (-1,1,-1,1);\\
&e_3 \leftrightarrow (1,1,-1,-1); && e_7 \leftrightarrow (-1,-1,1,1);\\
&e_4 \leftrightarrow (1,-1,-1,1); && e_8 \leftrightarrow (-1,1,1,-1);\\
&e_9 \leftrightarrow (1,-1,-1,-1); && e_{13} \leftrightarrow (-1,1,1,1);\\
&e_{10} \leftrightarrow (1,1,-1,1); && e_{14} \leftrightarrow (-1,-1,1,-1);\\
&e_{11} \leftrightarrow (1,-1,1,1); && e_{15} \leftrightarrow (-1,1,-1,-1);\\
&e_{12} \leftrightarrow (1,1,1,-1); && e_{16} \leftrightarrow (-1,-1,-1,1).
\end{aligned}$$

Соответствующие этим числам вектора $\mathbf{e_i}$ можно использовать для иллюстрации наличия в квадрапространстве двух типов трансверсальности, обобщающих для данного финслерова пространства понятие ортогональности направлений. Действительно, в квадрапространстве симметризованных форм (5) две. Они имеют вид

$$S_1(\mathbf{a},\mathbf{b}) = (\mathbf{a},\mathbf{a},\mathbf{a},\mathbf{b}) + (\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{b},\mathbf{b}) \qquad (22)$$

и

$$S_2(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{b}). \tag{23}$$

Равенство нулю любой из них означает трансверсальность соответствующих направлений. Непосредственными подстановками компонент векторов $\mathbf{e}_i$ в (22) и (23) можно убедиться в том, что каждый из векторов данного множества одному противоположен, с шестью образует взаимно трансверсальные пары первого порядка, а с восемью – второго. Из четверки векторов, трансверсальных друг другу по первому порядку, можно организовать базис, являющийся аналогом ортонормированного. Одним из частных случаев такого базиса, как раз, и является фигурировавшая выше четверка $1, I, J, K$. Из векторов, трансверсальных друг другу по второму порядку, базиса построить невозможно, так как для каждой такой пары третьего, а тем более четвертого, вектора с подобным отношением направлений не существует.

Заключение

Предлагаемый способ изучения выделенного класса линейных финслеровых пространств, названных полилинейными, представляется перспективным, поскольку основывается на тех же принципах, что и формализм скалярного произведения. Открывающиеся при этом возможности, по сути, позволяют перенести центр тяжести исследований достаточно абстрактных пространств с обычной наглядной основы на более твердую почву математических выкладок. Достоинства аналогичной замены демонстрируют псевдоевклидовы пространства, для которых также далеко не все геометрические эффекты очевидны и расширение на них понятия скалярного произведения в свое время сыграло положительную роль.

Литература

[1] И. М. Гельфанд: *Лекции по линейной алгебре*, Наука, М. 1966.

[2] И. Л. Кантор и А. С. Солодовников: *Гиперкомплексные числа*, Наука, М. 1973.

[3] Б. А. Розенфельд: *Многомерные пространства*, Наука, М. 1966.

[4] А. И. Мальцев: *Основы линейной алгебры*, ТТЛ, М. 1956.

[5] М. А. Лаврентьев и Б. О. Шабат: *Проблемы гидродинамики и их математические модели*, Наука, М. 1977.

[6] Б. А. Розенфельд: *Неевклидовы пространства*, Наука, М. 1969.

[7] G. S. Asanov: *Finslerian Extension of General Relativity*, Reidel, Dordrecht 1984.

[8] П. К. Рашевский: *Геометрическая теория уравнений с частными производными*; Изд. 2-е, стереотипное, Едиториал УРСС, М. 2003.

[9] Х. Рунд: *Дифференциальная геометрия финслеровых пространств*, Наука, М. 1981.

[10] В. В. Кассандров, Вестник Российского Университета Дружбы Народов, Физика, 1, 1993.

[11] В. В. Кассандров: *Число, время, свет*, http:www.chronos.msu.ru.

[12] Г. И. Гарасько: *Тричисла, куб нормы которых есть невырожденная триформа,* Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **1**, 2004.

[13] С. В. Лебедев: *Свойства пространств, ассоциированных с коммутативно-ассоциативными алгебрами H_3 и H_4*, Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **1**, 2004.

[14] Д. Г. Павлов: *Хронометрия трехмерного времени*, Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **1**, 2004.

[15] Д. Г. Павлов: *Четырехмерное время*, Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **1**, 2004.

[16] G. Yu. Bogoslovsky, H. F. Goenner, Phys. Lett. A 244, N 4, (1998) 222.

[17] G. Yu. Bogoslovsky, H. F. Goenner, Gen. Relativ. Gravit. 31, N 10, (1999) 1565.

ХРОНОМЕТРИЯ ТРЕХМЕРНОГО ВРЕМЕНИ

Д. Г. Павлов

Московский Государственный Технический Университет им. Н. Э. Баумана
hypercomplex@mail.ru

Концепция многомерного времени не раз возникала в естествознании, но всякий раз, под давлением парадоксов, от нее приходилось отказываться. Между тем, остается нерешенным философский вопрос, почему пространство допускает множество измерений, а время – нет. В настоящей работе предпринимается попытка разобраться в данной проблеме путем перехода от традиционных квадратичных метрик к финслеровым, допускающим произвольную степень компонент вектора, входящих в метрическую функцию. Хотя предлагаемый подход позволяет строить континуумы времен любой натуральной размерности, данное исследование ограничивается простейшим, после тривиального двухмерного случая, примером трех временных измерений, чтобы наиболее наглядно осветить специфику темы и использовать преимущество графических иллюстраций.

1. Введение

Идея пространства воспринимается человеком намного проще и нагляднее, чем идея времени. Это обусловлено тем, что пространство обозревается нами как бы все сразу в трехмерном виде, тогда как время предстает лишь в своей малой части. Подобная ситуация часто толкала ученых к попыткам "избавиться" от времени, ограничивая себя либо сугубо стационарными задачами, либо различными способами приводя время к уровню дополнительного пространственного измерения. Первый подход связывают с именем Архимеда, второй – впервые встречается у Галилея, достигает совершенства у Лагранжа и господствует до сих пор. И это, несмотря на то, что специальная теория относительности явно противопоставляет категории пространства и времени друг другу, объявляя их принципиально разными сущностями, обладающими фундаментальными отличиями уже на геометрическом уровне.

Однако, в среде физиков постепенно растет убеждение, сформулированное Сингом [1]. Согласно ему, Евклид направил естествознание по ложному пути, взяв в качестве первичного понятия науки пространство, а не время. Отсутствие до сих пор какого-либо общепринятого термина для наименования исследований времени служит, по мнению Синга, доказательством этого пренебрежения. Он предложил использовать слово "хронометрия" для обозначения той части науки, которая имеет дело с категорией времени в столь же широком смысле, как "геометрия" имеет дело с категорией пространства. И хотя Синг вряд ли рассматривал время как многомерную структуру, его высказывания именно в этом случае приобретают особое звучание.

2. Двухмерное время

Суть идеи многомерного времени, выступающего альтернативой многомерному пространству, можно проиллюстрировать парадоксальным утверждением, что с примером двухмерного времени почти все физики хорошо знакомы, однако, в силу устоявшихся традиций рассматривают его в совершенно иной интерпретации. Речь идет о самой обычной псевдоевклидовой плоскости. Удивительно, но среди всех псевдоевклидовых пространств только двухмерное выделяется своими уникальными особенностями, среди которых следует отметить следующие.

Во-первых, для всех псевдоевклидовых пространств размерности три и выше справедлива теорема Лиувилля, согласно которой полный перечень их конформных преобразований сводится к переносам, вращениям, дилатациям и инверсиям. На псевдоевклидовой плоскости же (как, впрочем, и евклидовой) разнообразие конформных отображений существенно шире.

Во-вторых, для векторов плоскости существует понятие их полного произведения, причем большинство из них имеют еще и обратные. Напротив, в других псевдоевклидовых пространствах под произведением векторов обычно понимаются только частные случаи этого общего понятия, деление же не определяется в принципе.

В-третьих, количество односвязных областей, на которые изотропные вектора разделяют псевдоевклидовы пространства с сигнатурой $(1, n-1)$, всегда равно трем, за исключением плоскости, на которой таких областей четыре.

В-четвертых, даже при обычной интерпретации псевдоевклидовой плоскости как двухмерного пространства-времени, в общем-то, не важно, какую из двух характерных линейных координат выбрать в качестве временной, а какую в качестве пространственной, результат от этого меняется с точностью до перестановок. В пространствах больших размерностей подобная симметрия нарушается и к времениподобному направлению применима только смена знака.

И, наконец, только плоскость (если не считать одномерное пространство) допускает соответствие с коммутативно-ассоциативной алгеброй, основные объекты которой носят название двойных чисел. Алгебра этих чисел обладает почти всеми признаками обычных действительной и комплексной алгебр (включая коммутативность произведений), за исключением появления особых объектов – делителей нуля. К ним относятся числа, отличные от нуля, но не имеющие обратных, как и сам нуль. Каждый делитель нуля имеет пару, также делитель нуля, в произведении с которым результатом оказывается опять же нуль. В сравнении с комплексными числами, двойные устроены весьма просто, однако, никакому псевдоевклидовому пространству большей размерности, чем два, нельзя сопоставить даже подобной алгебры.

На эти фундаментальные различия обычно не обращают внимания. Их, в лучшем случае, относят на счет вырожденности двухмерного пространства, полагая, что унифицированный порядок начинается с размерности три и выше. Интересно отметить, что практически то же самое наблюдается и для евклидовых пространств, среди которых двухмерная плоскость также стоит особняком, а ей, как известно, сопоставляется алгебра комплексных чисел.

Уже исходя из этих двух примеров, можно выдвинуть предположение, что по каким-то причинам связь некоторых метрических пространств с коммутативно-ассоциативными алгебрами делает их выделенными, а потому именно такие алгебры и соответствующие им пространства заслуживают отдельного внимания.

Утверждая в начале раздела право трактовать псевдоевклидову плоскость, как частный случай многомерного времени, мы опирались на то обстоятельство, что в данном пространстве не существует никаких объективных оснований различить, какие из его направлений подходят на роль времени, а какие нет. Изначально в таком пространстве все неизотропные направления абсолютно равноправны. Их дифференциация по физическому смыслу на пространственно- и времениподобные происходит лишь после того, как осуществляется субъективный выбор одного из квадрантов в качестве области будущего.

Замечание. Субъективный выбор касается не столько квадранта, сколько конкретной мировой линии, элемент длины которой трактуется как собственное время некоего наблюдателя, а область будущего определяется уже как следствие направления этой линии.

Только после выполнения данной процедуры точки противолежащего квадранта автоматически приобретают смысл прошедших событий, а точки двух боковых квадрантов – становятся абсолютно удаленными. Однако, на псевдоевклидовой плоскости мало что изменится, если в качестве области будущего выбрать любой другой квадрант, просто по отношению к нему все остальные должны поменять свои роли.

За исключением этого, на первый взгляд, несущественного момента, дальнейшие построения на псевдоевклидовой плоскости, понимаемой как двухмерное время, не отличаются от стандартных построений при ее обычной интерпретации в качестве пространства-времени. Но при переходе к трем и большему числу измерений, различия между многомерным временем и соответствующим ему по размерности псевдоевклидовым пространством-временем становятся принципиальными. Более того, если концепцию многомерного времени предполагать, как возможную геометрическую альтернативу пространству специальной теории относительности, необходимо пересмотреть не только математические, но и философские представления о структуре физической реальности.

3. Трехмерное время

Чтобы от модели двухмерного времени перейти к трехмерной, сосредоточимся на том факте, что в случае псевдоевклидовой плоскости соответствующая ей геометрия оказалась тесно связанной с понятием двойных чисел, относящихся к коммутативно-ассоциативным гиперкомплексным алгебрам. Первооткрыватель гиперкомплексных чисел Уильям Гамильтон, выступая на одном из заседаний ирландской Королевской академии, утверждал, что поскольку существует геометрия – чистая математическая наука о пространстве, – должна существовать столь же чистая математическая наука и о времени. По его мнению, такой наукой должна была выступить алгебра [2]. Парадоксально, но именно Гамильтон фактически и опроверг собственную идею, когда обнаружил на примере открытых им кватернионов множественность принципиально различных алгебр. Попробуем все же вооружиться его утверждением как аксиомой, и по аналогии с алгеброй двойных чисел построим алгебру тройных чисел, которым и попытаемся сопоставить геометрию, или используя предложение Синга, хронометрию трехмерного времени.

Наличие в двойных числах выделенного (изотропного) базиса, в котором выражение для квадрата их модуля принимает полностью симметричный вид:

$$|\mathbf{X}|^2 = x'_1 x'_2, \tag{1}$$

наводит на мысль, что у чисел, способных быть алгебраическим аналогом векторов трехмерного времени, должен найтись базис, в котором величина куба их модуля окажется связанной с похожей на (1) симметрической формой от трех компонент:

$$|\mathbf{X}|^3 = x'_1 x'_2 x'_3. \tag{2}$$

Несложно убедиться, что алгебра таких чисел действительно существует, она коммутативна и ассоциативна. Кроме того, она является прямой суммой трех действительных алгебр, что продолжает тенденцию, наметившуюся ранее у двойных чисел, алгебра которых была связана с прямой суммой двух действительных. Как хорошо известно, одномерное время можно сопоставлять самим действительным числам, что служит дополнительным подтверждением правильности избранного нами алгебраического пути поиска моделей многомерных времен.

Многообразия, дифференциалы длин векторов которых выражаются формами типа (1) – (2), известны в геометрии и носят название финслеровых пространств с метрической функцией Бервальда-Моора [3]. Однако, обычно под финслеровыми понимают многообразия общего вида с ненулевыми значениями кривизны и кручения. Рассматриваемая же метрика (2) задает линейное пространство, в связи с чем оно является близким родственником как евклидовых, так и псевдоевклидовых пространств, хотя далеко не во всем на них похожим.

Условимся линейные финслеровы пространства, метрические функции которых в одном из базисов принимают вид:

$$F(x') = \left|\prod_{i=1}^{n} x'_i\right|^{1/n}, \tag{3}$$

называть *n-мерными временами.* Чтобы иметь не только аксиоматические, но и физические основания использовать данное яркое имя, попробуем каждую точку таких пространств интерпретировать как событие, а любую прямую – как мировую линию некоторой инерциальной системы отсчета.

Замечание. Определяемое таким образом понятие события, несмотря на сходство с классическим аналогом, введенным Минковским, все же несколько отличается от последнего. Это связано с тем, что в многомерном времени понятие события перестает быть однозначным и оказывается зависящим от того, с позиций какой системы отсчета оно рассматривается. Другими словами, одну и ту же точку многомерного времени следует интерпретировать как принципиально различные события, если мировые линии наблюдателей разделены изотропными гиперплоскостями. В их представлениях перепутаны категории времени и пространства, и то, что для одного кажется чисто пространственным интервалом, для другого может быть чисто временным и наоборот. Таких качественно различных наблюдателей в n-мерном времени 2^n (по числу односвязных областей), вследствие чего каждая точка имеет столько же независимых потенциальных возможностей интерпретироваться как событие. Однако, если рассматривать только такие системы отсчета, чьи мировые линии лежат в одном световом конусе, многозначности не возникает, и понятие события тогда почти ничем не отличается от своего классического аналога.

В каждой такой системе отсчета интервал собственного времени между произвольной парой событий равен величине длины связанного с этими событиями вектора. Из симметрии рассматриваемых пространств следует, что все их неизотропные направления абсолютно равноправны. И если поэтому с длиной каждого вектора мы решили связывать собственное время в выделенной системе отсчета, то и сами пространства, уже не только по определению, но и исходя из физических предпосылок, теперь вполне уместно именовать многомерными временами.

Остается вопрос, имеют ли подобные многообразия хоть какое то отношение к реальному миру? Чтобы приблизиться к ответу на него, попробуем рассмотреть свойства и особенности трехмерного времени, начав данный процесс с изучения структуры его изотропных подпространств.

4. Световые пирамиды

Форма (2) принимает нулевые значения в точках, соответствующих трем выделенным плоскостям, задаваемых уравнениями:

$$x'_1 = 0, \quad x'_2 = 0, \quad x'_3 = 0. \tag{4}$$

Вектора, лежащие в любой из этих плоскостей, имеют нулевое значение модуля и в этом смысле являются изотропными. При этом, прямые, принадлежащие одновременно двум плоскостям (равно, как и точка пересечения всех трех), автоматически также оказываются выделенными. Поскольку таких прямых, как и измерений, – три, из векторов, им принадлежащим, можно образовать специальный базис. Этот базис с точностью до перестановок является единственным и именно в нем приведенная выше форма (2), определяющая значение модуля произвольного числа, а, значит, и выражение для длины соответствующего ему вектора, принимают простейший вид. Учитывая уникальность такого базиса, присвоим ему имя *абсолютного*.

В данном плане рассматриваемое пространство оказывается устроенным существенно иначе, чем привычные евклидовы и псевдоевклидовы пространства, где выделенных базисов не существует (опять же, за исключением псевдоевклидовой плоскости), а потому изучение этих и обобщающих их геометрий часто стремятся свести к бескоординатному виду. Наличие в многомерных временах особых базисов означает, что если когда-нибудь удастся найти связь между соответствующими многообразиями и физической реальностью, в теоретических построениях некоторые системы координат будут играть явно выделенную роль.

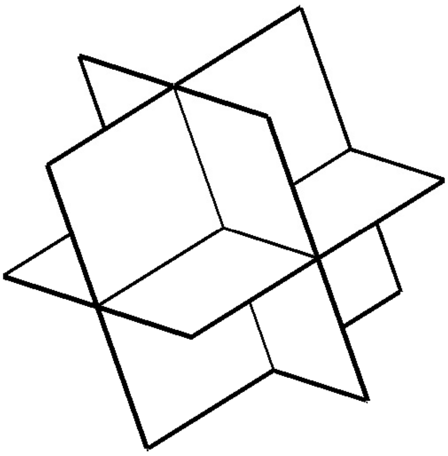


Рис. 1: Изотропные плоскости трехмерного времени

Сами изотропные плоскости (4) можно представлять себе так, как это изображено на Рис. 1. Из рисунка видно, что все трехмерное пространство рассекается изотропными плоскостями на восемь одинаковых камер-октантов, каждая из которых является областью односвязности. Любая из камер отделена от трех боковых своих соседок двухмерными гранями, еще с тремя граничит по лучам, и только с единственной противоположной камерой соприкасается в точке. Аналогично, только с поправкой на размерность, можно охарактеризовать и упоминавшееся выше двухмерное время, в котором изотропными прямыми все пространство делится на четыре камеры-квадранта. Каждый из таких квадрантов от двух смежных отделен изотропными лучами, а с единственным противолежащим граничит в точке. Тому же правилу подчиняется и одномерное время, поскольку его прямую можно рассматривать как две противолежащие камеры, разделенные одной особой точкой – нулем, которую можно считать предельно вырожденным случаем изотропного конуса.

Если из восьми камер-октантов трехмерного времени выделить два противолежащих и рассмотреть их объединенную изотропную границу, мы получим фигуру, изображенную на Рис. 2. Такое подпространство напоминает световой конус псевдоевклидова пространства (изображен на том же рисунке справа), с той разницей,

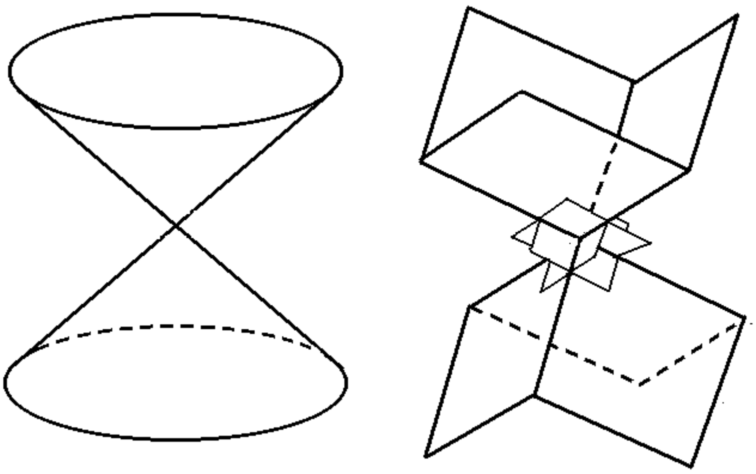


Рис. 2: Световые конусы трехмерного времени (справа) и трехмерного псевдоевклидова пространства (слева)

что первый не обладает непрерывной осевой симметрией. Внутри обоих противолежащих октантов располагаются вектора отличной от нуля длины, причем концы векторов единичной длины образуют две полости специфического гиперболоида, являющегося финслеровым аналогом двухполостного гиперболоида псевдоевклидова пространства. Обе эти фигуры изображены на Рис. 3, причем правая соответствует трехмерному времени и представляет собой только одну четвертую часть полного гиперболоида этого пространства, имеющего восемь полостей, по одной на каждую односвязную область. Точки этой фигуры удовлетворяют уравнению $|x_1'x_2'x_3'| = 1$, а ее общий вид представлен на Рис. 4.

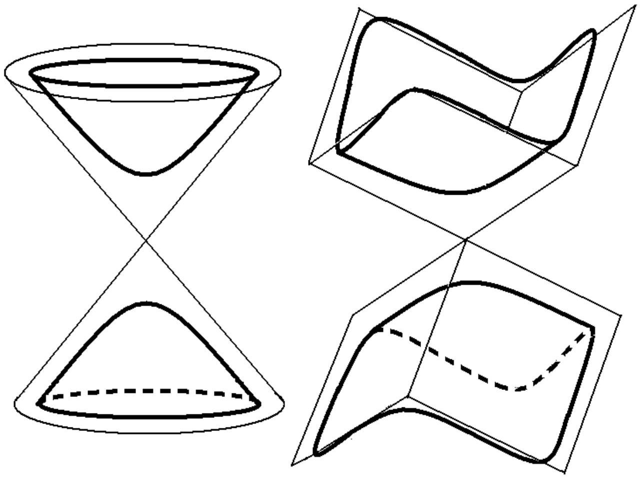


Рис. 3: Фрагменты единичных гиперболоидов

Среди единичных векторов, упирающихся в одну и ту же полость такого гиперболоида, возможны непрерывные переходы, осуществляемые абелевой двухпараметрической группой линейных преобразований, которые могут быть представлены в виде диагональных матриц:

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix}, \tag{5}$$

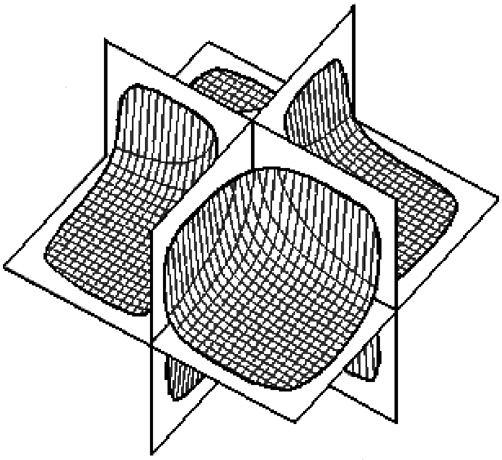


Рис. 4: Восьмиполостной гиперболоид трехмерного времени

с условием $a_1a_2a_3 = 1$. Преобразования данной группы оставляют инвариантными интервалы трехмерного времени (2) и поэтому являются его движениями. По своему характеру такие движения похожи на бусты соответствующего псевдоевклидова пространства с той разницей, что бусты не образуют группы и при однопараметрическом повороте в трехмерном пространстве-времени неподвижными остаются точки прямой, а в данном случае неподвижна всего одна точка. Преобразования этой группы условимся называть *гиперболическими вращениями трехмерного времени.*

Помимо гиперболических вращений, к движениям рассматриваемого времени относится трехпараметрическая группа параллельных переносов, имеющая обычное для линейных пространств представление. Других типов непрерывных преобразований, оставляющих инвариантными его интервалы, трехмерное время не содержит.

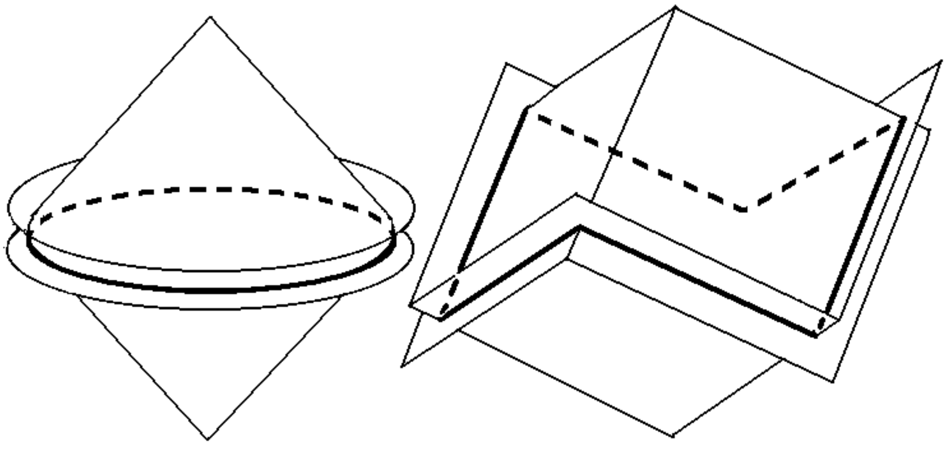


Рис. 5: Пересечения двух пар световых конусов

Изображенные на Рис. 2 и Рис. 3 изотропные грани и единичные гиперболоиды выделенной пары противолежащих октантов своими краями уходят в бесконечность. В связи с ограниченным пространством чертежа соответствующие поверхности оборваны, но не произвольно и не по характерным для псевдоевклидова пространства параллельным плоскостям, а более сложным образом, вытекающим из следующих рассуждений. Если границу одного из октантов пересечь с границей противолежащего и смещенного вдоль их общей оси, получится правильный шестиугольник, но не плоский, а изломанный так, как это изображено на Рис. 5. Объем, принадлежащий внутренним областям обоих таких октантов, представляет собой обычный куб, а упомянутый выше шестиугольник оказывается состоящим из его ребер, не имеющих пересечений с главной осью.

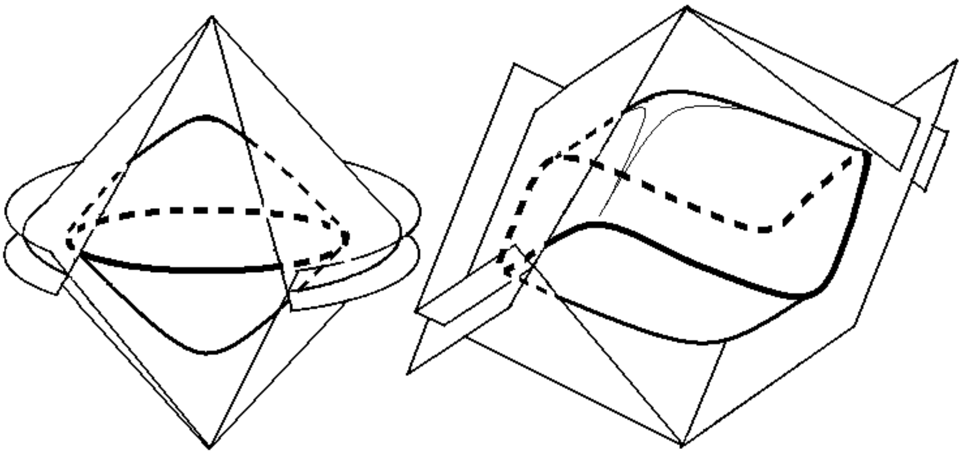


Рис. 6: Пересечения двух пар гиперболоидов с $0 < R < T$

Замечание. Можно утверждать, что в случае n-мерного времени фигура, являющаяся пересечением двух смещенных навстречу друг другу противолежащих камер, состоит ровно из половины $(n-2)$-граней образуемого ими гиперкуба, при этом в формировании такого пересечения принимают участие только грани, не имеющие общих точек с главной осью симметрии.

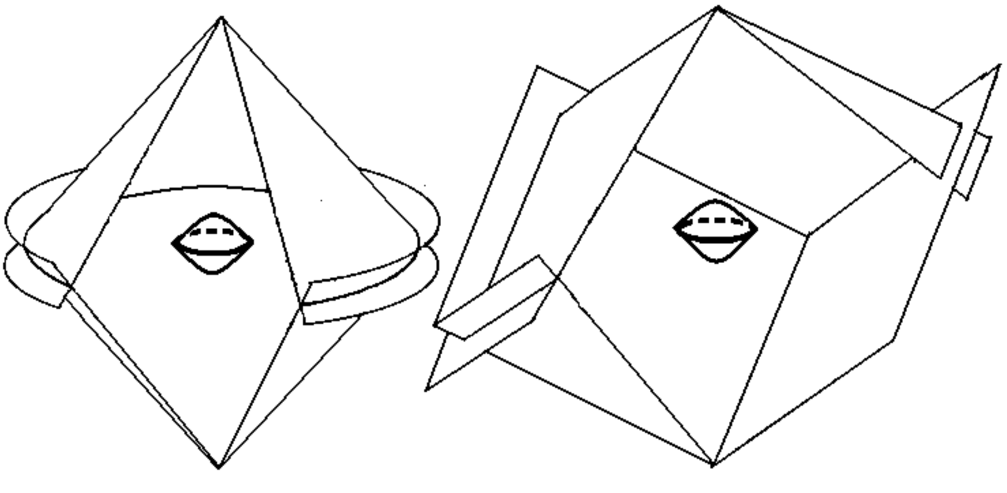


Рис. 7: Пересечения двух пар гиперболоидов с $R \approx T$

Если внутри образующих куб октантов построить две группы концентрических гиперболоидов (по сути являющихся финслеровыми обобщениями сфер) с центрами в противолежащих вершинах, результатом пересечения пар с одинаковыми радиусами оказывается непрерывное семейство замкнутых кривых, форма которых зависит от отношения соответствующего конкретной кривой радиуса гиперболоида R к половине главной диагонали куба T. Когда гиперболоиды имеют нулевые радиусы, они совпадают с изотропными гранями октантов, а их пересечением является изломанный в пространстве шестиугольник, уже рассматривавшийся на Рис. 5. При

$0 < R < T$ пересечение гиперболоидов осуществляется по кривым, похожим на кривую, представленную на Рис. 6. Они трехмерны и имеют по шесть скругленных углов. По мере приближения значения радиуса гиперболоидов к величине T получаемые в результате их пересечения кривые сглаживаются и сплющиваются, а при $R \to T$ превращаются в идеально плоские окружности, хотя и бесконечно малого радиуса (Рис. 7).

В случае трехмерного псевдоевклидова пространства аналогичные построения приводят к образованию семейства лежащих в одной плоскости концентрических окружностей, изображения которых для сравнения представлены на тех же рисунках 5–7, справа. Окружность, принадлежащая двум световым конусам, т. е. соответствующая пересечению псевдоевклидовых сфер с $R = 0$, в специальной теории относительности интерпретируется как мгновенное положение светового фронта, который может регистрироваться наблюдателем, находящимся в вершине одного из конусов, в предположении, что в момент времени, совпадающий с вершиной другого конуса, произошла вспышка. Аналогичную трактовку следует применить и в случае трехмерного времени. Другими словами, ломаный шестиугольник изображенный на Рис. 5 может трактоваться как множество точек пространства наблюдателя, находящегося в точке T, с которыми тот связывает мгновенное положение светового фронта, вспышка которого произошла в точке $-T$. Для реализации такой ситуации достаточно принять, что изотропные грани противолежащих октантов являются аналогами световых конусов прошлого и будущего соответствующего по размерности псевдоевклидова пространства-времени. Данный прием выглядит вполне естественно и единственное усилие, которое приходится делать по сравнению с обычными для специальной теории относительности представлениями, – это допустить граненость светового конуса. Учитывая, что эта граненость осуществляется в пространстве, не доступном для непосредственного созерцания физическим наблюдателем, вопрос, отвечает ли она реалиям нашего мира, оказывается далеко не очевидным.

Хотя для изотропных границ односвязных камер можно было бы и сохранить название световых конусов, обычно используемое в случае псевдоевклидовых пространств, для того, чтобы лишний раз подчеркнуть особенности геометрии многомерных времен, соответствующие фигуры условимся называть *световыми пирамидами*, в первую очередь, выделяя среди них пирамиды прошлого и будущего.

5. Поверхности относительной одновременности

Логика проведенных выше построений требует идти дальше и принять аналогию не только между изотропными подпространствами и связываемыми с ними световыми фронтами, но и каждой общей окружности двух равных (развернутых навстречу друг другу) гиперболоидов псевдоевклидова пространства поставить в соответствие аналогичную кривую, являющуюся пересечением пары финслеровых сфер многомерного времени. При таком сопоставлении у нас появляется возможность достаточно естественным способом определить поверхность относительной одновременности трехмерного времени, ведь именно такой физический смысл играла в псевдоевклидовой геометрии представленная рассмотренным выше семейством окружностей плоскость. Исходя из данной логики, под одновременными событиями многомерного времени следует понимать множество точек, равноудаленных в смысле соответствующей финслеровой метрики от двух фиксированных точек. При этом одна из этих фиксированных точек совпадает с мгновенным положением наблюдателя, а вторая – зеркальна ей относительно исследуемого слоя событий.

Прямая, проходящая через эти две точки, однозначно задает инерциальную систему отсчета. Однако, как следует из принятого определения одновременности, теперь это отношение событий зависит не только от скорости наблюдателя, но и от его мгновенного расположения относительно слоя, которому он собирается приписать одинаковые значения времени свершения. В ставшем почти классическим псевдоевклидовом случае, при определении одновременности значение имеет лишь относительная скорость системы отсчета, тогда как мгновенная расположенность наблюдателя не играет существенной роли. В трехмерном времени это уже не так и данное обстоятельство, по-видимому, является одним из наиболее значащих моментов, отличающих физические свойства рассматриваемого многообразия от обычных псевдоевклидовых построений.

Поверхность одновременности, соответствующую паре фиксированных точек, удобно описывать уравнением, связывающим ее координаты с координатами исходного аффинного пространства, представленными в абсолютном базисе. Такое уравнение несложно получить для произвольной пары точек, но наиболее просто оно выглядит в случае, когда мгновенное положение наблюдателя связывается с точкой (T, T, T), а ее зеркальный образ имеет координаты $(-T, -T, -T)$. В этом случае условие равенства интервалов приводит к уравнению:

$$|(x_1' + T)(x_2' + T)(x_3' + T)| = |(T - x_1')(T - x_2')(T - x_3')|, \tag{6}$$

откуда, после раскрытия скобок и приведения подобных, имеем:

$$x_1' x_2' x_3' + (x_1' + x_2' + x_3')T^2 = 0. \tag{7}$$

Поверхность, соответствующая этому уравнению, изображена на Рис. 8.

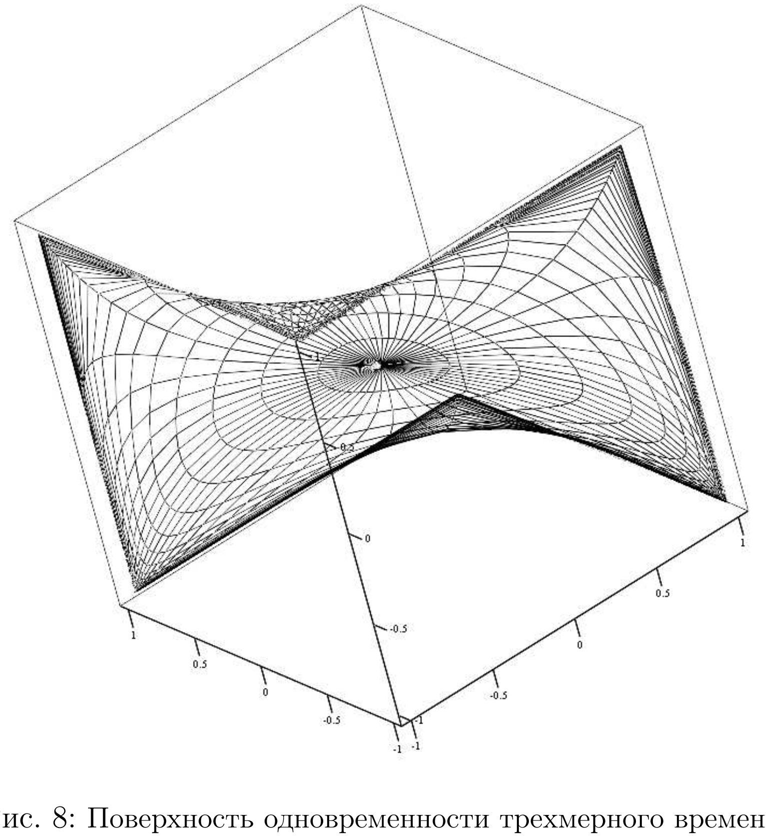


Рис. 8: Поверхность одновременности трехмерного времени

Кривые, рассматривавшиеся на рисунках 5–7, отмечают на поверхности одновременности точки, в определенном смысле, равноудаленные от ее геометрического центра. Такие кривые во многом аналогичны обычным концентрическим окружностям, хотя геометрия связанного с ними пространства не совпадает с привычной евклидовой.

С другой стороны, пересекая поверхность одновременности коническими поверхностями, названными в работе [4] *конусами вращения*, имеющими вершины в точке (T, T, T) и содержащими действительную ось, можно получить семейство кривых, соответствующих множеству радиальных линий евклидовой окружности. Таким образом, на поверхности одновременности оказывается нанесенной сетка криволинейных координат, играющая в двухмерном физическом пространстве трехмерного времени ту же роль, что и полярная система координат на евклидовой плоскости.

Преобразования, переводящие в себя поверхность одновременности так, что окружные и радиальные кривые при этом переходят снова в такие же кривые, оказываются во многом аналогичны пространственным поворотам вокруг начала координат в трехмерном псевдоевклидовом пространстве, поскольку физические расстояния и там, и там, остаются неизменными. Однако в случае трехмерного времени эти преобразования нелинейны и, кроме того, они не оставляют инвариантными трехмерные интервалы.

6. Физические расстояния и скорости

Казалось бы, мы вплотную подошли к возможности ввести в трехмерном времени двухмерные физические расстояния и скорости, достаточно только установить взаимнооднозначное соответствие между полученными на поверхности одновременности семействами окружных и радиальных кривых с соответствующими линиями полярной системы координат. Однако это не так. Дело в том, что рассматриваемое многообразие не допускает введения в качестве однозначных таких физических понятий, как расстояние и скорость, во всяком случае, если построение основывается на первичности измерений временных интервалов. То, что являлось, чуть ли, не очевидным свойством псевдоевклидовых пространств, оказывается, просто несовместимо с идеей многомерного времени. Как ни парадоксально, это обстоятельство не только не уменьшает, а наоборот, даже увеличивает возможность многомерного времени конкурировать с пространством Минковского за звание геометрического фундамента реального мира. Действительно, следуя идеологии хронометрии, с физическими расстояниями следует ассоциировать интервалы времени, проходящие в системе отсчета наблюдателя между посылкой некоторых эталонных сигналов и приемом их отражений обратно. Но любая попытка совместить этот естественный и понятный физический принцип с требованием однозначности расстояний наталкивается на противоречие. Красивым и далеко идущим выходом из этого парадокса представляется идея отказаться от однозначности физических расстояний, а следовательно и скоростей вообще, что может интерпретироваться как квантовомеханический принцип неопределённости.

Сказанное не означает, что место евклидовой геометрии физического пространства должна занять некая совершенно аморфная структура. Анализ показывает, что наше довольно радикальное предположение затрагивает не качественный, а лишь количественный аспект явлений. Расстояния и скорости, как самостоятельные физические категории не исключаются в многомерном времени полностью, а лишь видоизменяют свой статус, приобретая черты неопределенности на самом начальном геометрическом уровне. В частности, понятие равноудаленных в физическом плане объектов становится зависящим от того, какими сигналами в качестве эталонных пользуется наблюдатель, определяющий эту самую равноудаленность. В свою очередь, эталонность некоторого класса сигналов определяется посредством требования равенства собственных времен, проходящих по часам, в связанных с этими сигналами инерциальных системах отсчета между посылкой, отражением и их последующим приемом. Учитывая, что интервалы времени – это единственные величины, которые по определению предполагаются измеримыми в нашем финслеровом многообразии, выделить среди непрерывного спектра наклонных мировых линий такие, которые характеризуются равенством интервалов, задача всегда разрешимая. Заметим, что этим приемом мы уже воспользовались выше, когда определяли понятие относительно одновременных событий. Эталонными можно считать сигналы (испущенные неподвижным наблюдателем), мировые линии которых начинаются в одной точке, достигают поверхности одновременности и после преломления собираются все вместе в другой фиксированной точке на мировой линии того же наблюдателя. Естественно, должно выполняться равенство интервалов всех получаемых таким образом отрезков, как до, так и после преломления.

Подобная логика построений приводит к тому, что в многомерном времени физическое пространство наблюдателя по своим геометрическим свойствам становится в определенной степени зависящим от того, каким набором эталонных сигналов эта геометрия определяется. Так, если мировые линии эталонных сигналов почти параллельны линии наблюдателя, в его представлениях возникает пространство по своим свойствам практически совпадающее с евклидовым. Это связано с тем, что концы векторов с равными значениями интервалов в данном случае лежат (как отмечалось выше) на почти плоской и практически идеальной окружности, а последняя в процессе построения физического пространства играет роль финслеровой индикатрисы. Индикатрисой двухмерного евклидова пространства, как раз, и является обычная окружность. При переходе к сигналам, мировые линии которых имеют более значительный наклон, концы соответствующих векторов образуют уже не окружность, а более сложную замкнутую кривую, которая к тому же еще и не плоская. В пределе сигналов, чьи скорости интерпретируются как световые, данная кривая превращается в ломаный шестиугольник, рассматривавшийся на Рис. 5. Геометрия получающегося при этом двухмерного физического пространства – финслерова, и именно она максимально расходится с евклидовой. Однако, поскольку индикатриса даже в этом предельном случае остается замкнутой и выпуклой, объективно присутствующие отличия двух геометрий невелики, в связи с чем в реальности их вполне вероятно спутать, особенно если экспериментальные факты ограничены малыми скоростями.

Таким образом, если предположить, что наш реальный мир действительно имеет прямую связь с рассматриваемой финслеровой геометрией, возникновение евклидовых и псевдоевклидовых представлений у находящегося в таком мире наблюдателя должно оказаться вполне естественным процессом последовательных приближений ко все более точному описанию. С другой стороны, в своей повседневной практике, исходя из которой, мы и пытаемся нащупать законы, управляющие миром, нам чаще всего приходится пользоваться сигналами, скорость которых существенно ниже световой. Как правило, свет при этом используется только для идентификации объектов, тогда как расстояния определяются более медленными способами, к числу которых относится и линейка. Поэтому, когда в специальных экспериментах на первый план выходят действительно высокоскоростные сигналы, геометрия пространства считается уже заведомо заданной, поэтому даже аномальные результаты будут, скорее всего, трактоваться как угодно, но только не в направлении пересмотра "очевидных" геометрических свойств.

Заключение

Из всех перечисленных выше свойств и особенностей трехмерного времени, как представителя весьма необычного класса (линейных) финслеровых пространств, пожалуй, важнейшее – связь с наиболее фундаментальным понятием математики – числом, причем числом, оказывающимся объектом алгебры, обладающей самыми обычными арифметическими свойствами. Следует еще раз подчеркнуть, что ни евклидовы, ни псевдоевклидовы пространства размерности три и выше не обладают аналогичным качеством. Используемые же иногда в подобных целях кватернионы и бикватернионы настоящими числами не являются, так как их алгебры наделены некоммутативным умножением. В результате этого, построение полноценной теории, обобщающей теорию функций комплексной переменной, невозможно (или весьма затруднительно). В то же время, приведенные выше примеры иллюстрируют, каким образом обычные евклидовы и псевдоевклидовы представления могут вытекать из рассматриваемого финслерова пространства, что делает идею замены псевдоевклидовой метрики на многовременную – достаточно интересной и актуальной.

Литература

[1] J. L. Synge, The New Scientist, 19th February 1959, p. 410.
[2] W. R. Hamilton, Trans. Roy. Irish. Acad., 1833-1835.
[3] G. S. Asanov: *Finslerian Extension of General Relativity*, Reidel, Dordrecht 1984.
[4] D. G. Pavlov: *Hypercomplex Numbers, Associated Metric Spaces, and Extension of Relativistic Hyperboloid*, arXiv:gr-qc/0206004.

ЧЕТЫРЕХМЕРНОЕ ВРЕМЯ

Д. Г. Павлов

Московский Государственный Технический Университет им. Н. Э. Баумана
hypercomplex@mail.ru

На основе финслеровой метрической функции Бервальда-Моора строится обобщенно-метрическое пространство, которое может быть названо плоским четырехмерным временем. Данное многообразие позволяет ввести физические понятия: события, мировой линии, системы отсчета, множества относительно одновременных событий, собственного времени, трехмерного расстояния, скорости и других. Показано, как в абсолютно симметричном четырехмерном времени, с точки зрения физического наблюдателя, ассоциируемого с некоторой мировой линией, происходит противопоставление координаты, задающей его собственное время, с координатами, появляющимися в результате измерений с использованием эталонных сигналов. Когда сигналам соответствуют линии, почти параллельные мировой линии наблюдателя, в представлениях последнего возникает трехмерное пространство, в пределе оказывающееся евклидовым.

1. Введение

За последние сто лет в физике укоренилось представление, что в фундаменте геометрии реального пространства-времени лежит псевдоевклидова метрика со знакопеременной квадратичной зависимостью длины вектора от величины его компонент. Однако, многочисленные и разнообразные попытки связать с этой метрикой все известные силы природы и воплотить идею о полной геометризации физики до сих пор заканчивались неудачами. Это невольно подталкивает к мысли, что проблема заключается не в недостатке изобретательности ученых, а в самой метрике, вернее, в ее классической квадратичной форме, вместо которой, возможно, более перспективно использовать другие зависимости. К сожалению, и этот путь, на возможность которого обратил внимание еще Риман [1], впервые целенаправленно стал изучать Финслер [2], а к сегодняшнему дню испробовали сотни исследователей [3], также пока не принес существенных результатов. Хотя настоящая работа и продолжает поиски в том же направлении, она существенным образом отличается от многих из них, поскольку опирается на новое для финслеровой геометрии понятие скалярного полипроизведения и метрическую форму, непосредственно связанную с одним из наиболее фундаментальных понятий математики – действительным числом.

2. Многомерные времена

Среди всевозможных линейных финслеровых пространств уникально выделяются пространства, обладающие взаимнооднозначным соответствием с алгебрами, являющимися прямыми суммами нескольких алгебр действительных чисел. Метрические функции таких пространств не зависят от точки и в одном из базисов принимают вид:

$$F(x') = \left|\prod_{i=1}^{n} x'_i\right|^{1/n}, \tag{1}$$

где x_i' – компоненты вектора, а n – число измерений. В теории финслеровых пространств такие метрические функции хорошо известны и получили название функций Бервальда-Моора [3].

Геометрии с такими метриками во многом однотипны, а имеющиеся различия обусловлены исключительно размерностью. Их главной особенностью является полное равноправие всех неизотропных направлений, а поскольку любое из таких направлений может быть связано с собственным временем инерциальной системы отсчета, подобные пространства вполне уместно именовать *многомерными временами.*

Замечание. По-видимому, абстрактная возможность связывать с произвольной прямой собственное время некой инерциальной системы отсчета имеется в любом линейном пространстве, где определен элемент длины в каждой точке. Однако, во многих пространствах некоторые системы отсчета не допускают изотропных связей со всеми остальными прямыми, проходящими параллельно заданной. Для связанных с такими системами отсчета наблюдателей понятие физического расстояния, а следовательно и физического пространства, оказываются прямыми следствиями наличия изотропных векторов, с которыми обычно принято ассоциировать световые сигналы.

Определяемые так вещественные пространства далеко не всегда имеют тот же вид, к которому мы привыкли (по повседневной практике и благодаря усилиям Евклида и Минковского). При этом, в понятие физического пространства приходится вкладывать более общий смысл, чем обычно. С другой стороны, ничто не мешает считать, что в тех секторах или измерениях, где в принципе не устанавливаются изотропные связи, или же они носят какой-то экзотический характер, физические направления можно считать просто не обнаружимыми, хотя геометрически и присутствующими. Таким образом, логически вполне допустимо существование пространств, часть направлений и даже измерений которых физически внешне не проявляются. С такой точки зрения было бы очень интересно проанализировать произвольные линейные пространства, в частности, связанные с квадратичными формами и метриками Бервальда-Моора, взятыми над полем комплексных чисел.

Выделенным геометрическим элементом каждого n-мерного времени является его изотропное подпространство, представляющее собой фигуру из n гиперплоскостей, делящих все многообразие на 2^n равноправных односвязных камер. Любая из таких камер является смежной со всеми остальными, кроме противоположной, с которой граничит только в точке. Классифицировать смежные камеры по отношению к выделенной можно по размерности их общих пограничных подпространств: от 1 до $(n-1)$. Все односвязные камеры одинаковы и имеют форму правильных пирамид, n гиперплоскостей которых, начинаясь из общей вершины, уходят в бесконечность. Такие пирамиды, по аналогии с изотропными конусами пространства Минковского, будем именовать световыми. Каждая *световая пирамида* имеет ровно n одномерных ребер, которые весьма удобно связывать со специальным базисом. В этом базисе геометрические соотношения многомерного времени выглядят наиболее простыми и, поскольку с точностью до перестановок такой базис является единственным, ему вполне логично присвоить имя *абсолютного.*

Любой единичный вектор, принадлежащий внутренней области некоторой световой пирамиды, может быть непрерывным образом переведен в любой другой единичный вектор, принадлежащий той же пирамиде. Соответствующие преобразования образуют абелеву $(n-1)$-параметрическую подгруппу движений, оставляющих инвариантной исходную метрическую функцию (1). Матрицы подобных преобразований в абсолютном базисе приводятся к диагональному виду:

$$\begin{pmatrix} a'_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a'_2 & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & a'_n \end{pmatrix}, \tag{2}$$

где $\prod_{i=1}^{n} a'_i = 1$. Поскольку такие преобразования оставляют на месте точку схождения вершин всех пирамид, а изотропные грани последних при этом переходят сами в себя, соответствующие отображения можно классифицировать как гиперболические повороты, которые в определенном смысле аналогичны бустам псевдоевклидовых пространств. Помимо гиперболических вращений, среди непрерывных движений многомерного времени присутствует n-параметрическая подгруппа параллельных переносов. Других непрерывных конгруэнтных преобразований рассматриваемые многообразия не содержат и поэтому имеют меньше степеней свободы, чем пространства с квадратичными типами метрик. Именно это обстоятельство побудило Г. Гельмгольца, С. Ли и Г. Вейля доказать ряд теорем, утверждающих исключительность квадратичных метрик [4 – 6]. Главный акцент в их теоремах сделан на максимальной подвижности квадратичных пространств, выражающейся в наиболее богатой по числу свободных параметров группе движений в сравнении с пространствами с иными метрическими функциями. Это, по мнению авторов, дает все основания отказаться от рассмотрения других метрических форм в качестве геометрического фундамента реального пространства-времени. Не отрицая строгости этих теорем, отметим, что их доказательства базируются на рассмотрении только линейных преобразований, а значит оставляют возможность для других геометрий, в которых аналогичную роль могли бы играть некоторые нелинейные симметрии.

В противоположность непрерывным конгруэнтным преобразованиям, дискретные группы симметрий многомерного времени превосходят аналогичные группы евклидовых и псевдоевклидовых пространств, однако этого еще не достаточно для конкуренции с последними.

Что действительно делает многомерное время интересным, так это наличие в нем выделенных групп нелинейных преобразований, являющихся почти столь же фундаментальными, как и группы движений. Такие преобразования сохраняют инвариантными не интервалы, а специфические скалярные формы от нескольких векторов, не имеющие прямых аналогов в квадратичных пространствах, а потому до сих пор остающиеся мало изученными.

Подойти к пониманию важности таких полиформ лучше всего через обобщение понятия скалярного произведения. Оказывается, что для целого ряда линейных финслеровых пространств роль скалярного произведения может играть полилинейная симметрическая форма от n векторов [7], частным случаем которой как раз и является классическая билинейная форма. Условимся такую полилинейную форму именовать *скалярным полипроизведением.* Отталкиваясь от подобного обобщения, можно простым и естественным образом расширить на некоторые финслеровы пространства такие фундаментальные понятия геометрии, как длина, угол, ортогональность и другие, введение которых иными способами сопряжено со значительными трудностями [8].

Для многомерного времени скалярное полипроизведение в абсолютном базисе имеет вид:

$$(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \dots, \mathbf{Z}) = \frac{1}{n!} \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_n)} a'_{i_1} b'_{i_2} \dots z'_{i_n}, \quad \text{при} \quad i_j \neq i_k, \quad \text{если } j \neq k. \tag{3}$$

Несложно проверить, что при $\mathbf{A} = \mathbf{B} = \cdots = \mathbf{Z}$ форма (3) переходит в метрическую функцию (1). Используя полилинейную симметрическую форму вида (3), можно построить геометрию линейного времени произвольной натуральной размерности, однако, опираясь на обычные представления о числе физических измерений и явную топологическую выделенность четырехмерного пространства [9], ограничимся пока именно этим случаем.

3. Четырехмерное время

В соответствии с (3), скалярное полипроизведение, определяющее геометрию четырехмерного времени, в абсолютном базисе принимает вид:

$$(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}) = \frac{1}{4!} \sum_{(i_1,i_2,i_3,i_4)} a'_{i_1} b'_{i_2} c'_{i_3} d'_{i_4}, \quad \text{при} \quad i_j \neq i_k, \quad \text{если } j \neq k, \tag{4}$$

отсюда следует, что четвертая степень длины (интервала) вектора такого линейного пространства определяется выражением:

$$(\mathbf{X}, \mathbf{X}, \mathbf{X}, \mathbf{X}) = |\mathbf{X}|^4 = x'_1 x'_2 x'_3 x'_4. \tag{5}$$

При переходе в базис, аналогичный ортонормированному [7] (он несколько нагляднее, чем абсолютный), данное выражение преобразуется к более сложной (но по-прежнему симметричной) форме:

$$|\mathbf{X}|^4 = x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 - 2(x_1^2x_2^2 + x_1^2x_3^2 + x_1^2x_4^2 + x_2^2x_3^2 + x_2^2x_4^2 + x_3^2x_4^2) + 8x_1x_2x_3x_4. \tag{6}$$

(Сходная метрика (в более общем виде) использовалась в работах [14], [15].) В ряде случаев данную форму удобнее использовать в виде, выделяющем одну из координат, в частности, x_1:

$$|\mathbf{X}|^4 = x_1^4 - 2(x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)x_1^2 + 8(x_2x_3x_4)x_1 + (x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 - 2x_2^2x_3^2 - 2x_2^2x_4^2 - 2x_3^2x_4^2). \tag{7}$$

Основным аргументом в пользу возможности сопоставить с четырехмерным временем реальный физический мир является наличие в его геометрии нелинейной группы непрерывных симметрий [10], которую можно рассматривать как альтернативу линейной группе пространственных поворотов пространства Минковского. Инвариантом данных преобразований оказывается не скалярное полипроизведение четырехмерного времени (4), а специфическая форма, в образовании которой участвуют только два вектора:

$$S(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \frac{(\mathbf{A}, \mathbf{A}, \mathbf{A}, \mathbf{B})}{(\mathbf{A}, \mathbf{A}, \mathbf{A}, \mathbf{A})^{1/2}} + \frac{(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{B}, \mathbf{B})}{(\mathbf{B}, \mathbf{B}, \mathbf{B}, \mathbf{B})^{1/2}}. \tag{8}$$

Хотя форма $S(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ и не является аддитивной величиной, для векторов, принадлежащих внутренней области одной световой пирамиды, она удовлетворяет другим важным свойствам обычного скалярного произведения, а именно: симметрии, правилу умножения на скаляр, знаковой определенности и правилу треугольника [10]. В связи с этим, в четырехмерном времени существует принципиальная возможность ввести понятие трехмерного расстояния, которое соответствует большинству привычных представлений о данной физической величине, кроме аддитивности. С философской точки зрения отсутствие последнего свойства весьма естественно. Действительно, почему закон сложения трехмерных скоростей должен концептуально отличаться от закона сложения трехмерных расстояний, ведь относительны обе эти величины? Проявляется такая нелинейность только на больших расстояниях, подобно тому, как нелинейность закона сложения скоростей существенна только в релятивистской области. При этом роль скорости света для трехмерных расстояний берет на себя дополнительная фундаментальная постоянная – максимально возможный размер физической системы, или иными словами, радиус Вселенной. Для обычных в повседневной практике расстояний мы по-прежнему можем пользоваться линейным приближением, однако в космологических масштабах, в случае справедливости концепции многомерного времени, потребуется внести соответствующие коррективы.

4. Множество относительно одновременных событий

Чтобы естественным образом подойти к определению в четырехмерном времени понятий трехмерных скоростей и расстояний, определимся сначала с множествами *относительно одновременных событий.* Под таковыми условимся понимать совокупности точек, равноудаленных (естественно в смысле принятой финслеровой метрики (5)) от некоторых пар фиксированных событий. В отличие от пространства Минковского, где аналогичным образом определенные множества представляют собой гиперплоскости, в четырехмерном времени соответствующие поверхности нелинейны [11]. Их форма зависит не только от направления мировой линии, соединяющей фиксированные точки, но и от величины интервала, их разделяющего. Это наиболее фундаментальное отличие от пространства специальной теории относительности, поскольку понятие одновременности теперь определяется не только скоростью системы отсчета, но и интервалом времени, разделяющим мгновенное положение наблюдателя и изучаемый им пространственный слой событий. Таким образом, релятивизм в четырехмерном времени затрагивает не только гиперболические повороты, с помощью которых осуществляется переход от одних систем отсчета к другим, но и трансляции, позволяющие менять уже точки отсчета.

Философски такое обобщение принципа относительности вполне последовательно, поскольку, по сути, констатирует своеобразное родство между двумя подгруппами полной группы конгруэнтных симметрий. Косвенным подтверждением данного вывода может служить и факт, что трансляциям в алгебре, сопоставляемой четырехмерному времени, соответствует операция сложения, а гиперболическим поворотам – умножения, в родственной же связи этих двух фундаментальных операций математики сомневаться не приходится.

Естественным способом введения в четырехмерном времени понятия *физического расстояния* является прием, концептуально вполне аналогичный способу определения данного понятия в пространстве Минковского. По определению, под расстояниями можно понимать величины, равные (или пропорциональные) интервалам времени, проходящим на мировой линии наблюдателя, между посылкой им некоторых равномерно движущихся эталонных сигналов к мировым линиям изучаемых объектов и последующим приемом отраженных сигналов обратно. Такое правило приводит к тому, что в четырехмерном времени понятие расстояния бессмысленно применять к отдельным парам событий, оно продуктивно лишь в отношении их цепочек, представленных определенными линиями. В пространстве Минковского на данное обстоятельство можно было не обращать внимания, так как множества относительно одновременных событий там представляли собой гиперплоскости, в результате чего расстояния, определяемые, в общем-то, для произвольных пар параллельных прямых, оставались содержательными и для пар точек.

Чтобы не загромождать короткую статью излишней общностью, но при этом все же быть достаточно конкретными, ниже приведем результат, к которому приводит описанный выше алгоритм лишь в одном частном случае. Предполагается, что мировая линия наблюдателя совпадает с действительной осью, сам он находится в точке $(T, 0, 0, 0)$, а интересующий его слой относительно одновременных событий проходит через точку $(0, 0, 0, 0)$, Рис. 1. [Здесь и далее фигурирующие координаты относятся к обобщенно-ортогональному базису [7], существенно отличающемуся от абсолютного].

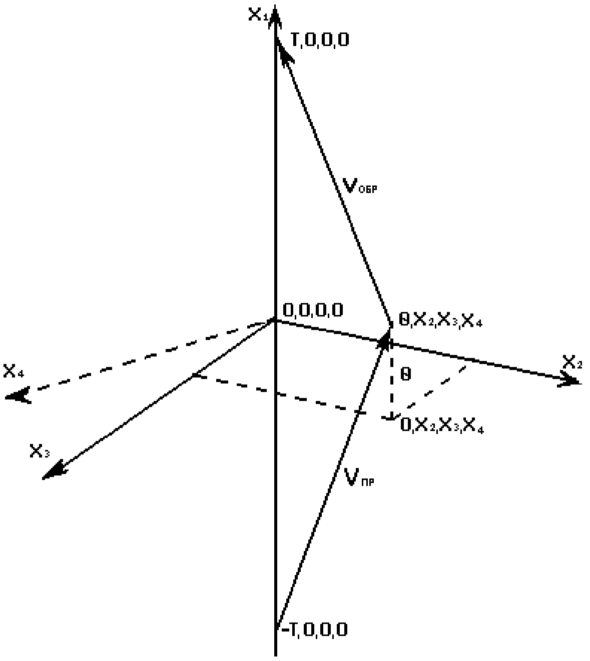


Рис. 1: Мировые линии прямого и обратного сигналов с равным модулем скорости

В рассматриваемом примере уравнение, связывающее действительную координату θ некоторой точки поверхности одновременности с тремя другими ее координатами x_2, x_3 и x_4, получается из условия равенства длин векторов, обладающих компонентами $(T + \theta, x_2, x_3, x_4)$ и $(T - \theta, -x_2, -x_3, -x_4)$. (Величина θ здесь имеет смысл отклонения конкретного события от гиперплоскости $x_1 = 0$.) Используя выражение для величины интервала (7), и одновременно учитывая, что для четных степеней $(-x)^n = x^n$, имеем:

$$(T+\theta)^4-2(x_2^2-x_3^2+x_4^2)(T+\theta)^2+8(x_2x_3x_4)(T+\theta)+(x_2^4+x_3^4+x_4^4-2x_2^2x_3^2-2x_2^2x_4^2-2x_3^2x_4^2) =$$
$$(T-\theta)^4-2(x_2^2+x_3^2+x_4^2)(T-\theta)^2+8(x_2x_3x_4)(T-\theta)+(x_2^4+x_3^4+x_4^4-2x_2^2x_3^2-2x_2^2x_4^2-2x_3^2x_4^2)$$

Раскрытие скобок и приведение подобных приводит к уравнению

$$T\theta^3 + (T^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2)T\theta + 2x_2x_3x_4T = 0. \tag{9}$$

Вводя безразмерные величины $\eta = \theta/T, \chi_2 = x_2/T, \chi_3 = x_3/T, \chi_4 = x_4/T$ и учитывая, что $T \neq 0$, получаем кубическое уравнение относительно η:

$$\eta^3 + (1 - \chi_2^2 - \chi_3^2 - \chi_4^2)\eta + 2\chi_2\chi_3\chi_4 = 0. \tag{10}$$

Его действительный корень характеризует относительную величину отклонения абсциссы поверхности одновременности от проходящей через ее центр касательной гиперплоскости $x_1 = 0$. Условимся такой параметр именовать *коэффициентом неплоскостности.* Когда $\chi_2 \approx \chi_3 \approx \chi_4 \to 0$, η также стремится к нулю, т. е. в окрестности точки $(0, 0, 0, 0)$ поверхность одновременности переходит в гиперплоскость $x_1 = 0$.

Физический смысл поверхность одновременности имеет только внутри световой пирамиды, которой принадлежит мировая линия наблюдателя, в противном случае пришлось бы допустить и физический смысл сверхсветовых скоростей. Следуя методике специальной теории относительности, с каждым вектором, имеющим начало в точке $(-T, 0, 0, 0)$, а конец на поверхности одновременности, т. е. в точке $(\eta T, x_2, x_3, x_4)$, вполне естественно связывать мировую линию сигнала, обладающего определенной равномерной скоростью. Всем таким векторам, если они имеют одинаковые величины интервалов, поставим в соответствие сигналы с одним и тем же значением модуля скорости $|\mathbf{v}_{\text{пр}}|$. В соответствии с этой логикой сигнал, сопоставляемый вектору, соединяющему точку $(\eta T, x_2, x_3, x_4)$ с точкой $(T, 0, 0, 0)$, обладает равной, но обратной по величине скоростью $|\mathbf{v}_{\text{обр}}|$. В отличие от пространства Минковского такие вектора имеют компоненты, разнящиеся не только по знаку, но и по величине (Рис. 1), а именно: $\mathbf{v}_{\text{пр}} \leftrightarrow (\eta T + T, x_2, x_3, x_4)$ и $\mathbf{v}_{\text{обр}} \leftrightarrow (T - \eta T, -x_2, -x_3, -x_4)$. В пространстве Минковского коэффициент неплоскостности η для каждой точки поверхности одновременности равен нулю, в результате чего компоненты векторов, соответствующие прямому и обратному сигналам, принимают обычный вид: $\mathbf{v}_{\text{пр}} \leftrightarrow (T, x_2, x_3, x_4)$ и $\mathbf{v}_{\text{обр}} \leftrightarrow (T, -x_2, -x_3, -x_4)$.

Для конкретного определения расстояния между действительной осью и произвольной параллельной ей линией, полностью характеризующейся тремя фиксированными координатами x_2, x_3, x_4, необходимо иметь эталонные сигналы, а вернее связанные с ними вектора, с помощью которых можно откладывать интервалы, соответствующие расстояниям в различных направлениях. В четырехмерном времени, как и в пространстве специальной теории относительности, такие эталонные сигналы наиболее удобно связывать с изотропными векторами, имеющими с одной стороны общее начало, а с другой – упирающиеся в поверхность одновременности. В геометрии Минковского множество концов таких векторов представляет собой пересечение двух световых конусов: будущего с вершиной в точке $(-T, 0, 0, 0)$ и прошлого, вершина которого смещена в точку $(T, 0, 0, 0)$. Как известно, результатом такого пересечения является обычная сфера, целиком лежащая в гиперплоскости $x_1 = 0$. Это характерно только для пространств с квадратичным типом метрики. Во всяком случае, в четырехмерном времени аналогичная фигура, получаемая как результат пересечения двух противолежащих световых пирамид, является существенно не плоской, хотя и состоит из линейных элементов.

Наглядно убедиться в этом лучше на примере не четырех-, а трехмерного времени [12], в частности, взглянув на Рис. 2, на котором в изометрии представлено пересечение двух световых пирамид. Для сравнения на том же рисунке изображено пересечение двух световых конусов трехмерного псевдоевклидова пространства. В трехмерном времени внутренняя область, принадлежащая обеим пирамидам, представляет собой обычный куб, одной из главных диагоналей которого является отрезок действительной оси $[-T, T]$. При этом пересечение двух световых пирамид оказывается фигурой, составленной из $(n-2)$-граней такого куба, не содержащих точки $-T$ и T. В данном случае, это шестиугольник $ABCDEF$ и он не принадлежит плоскости $x_1 = 0$, хотя и состоит из прямолинейных элементов.

Аналогично и в четырехмерном времени: область, принадлежащая одновременно двум противолежащим световым пирамидам, является четырехмерным кубом, а поверхность пересечения их изотропных граней оказывается образованной двенадцатью 2-гранями такого куба, не содержащими концы главной диагонали $[-T, T]$. Изобразить на плоском чертеже подобную фигуру трудно, поэтому мы ограничимся рассмотренным выше трехмерным прототипом. В работе [13] предпринята попытка рассмотреть соответствующий двенадцатигранник (правда, от ее автора, по-видимому,

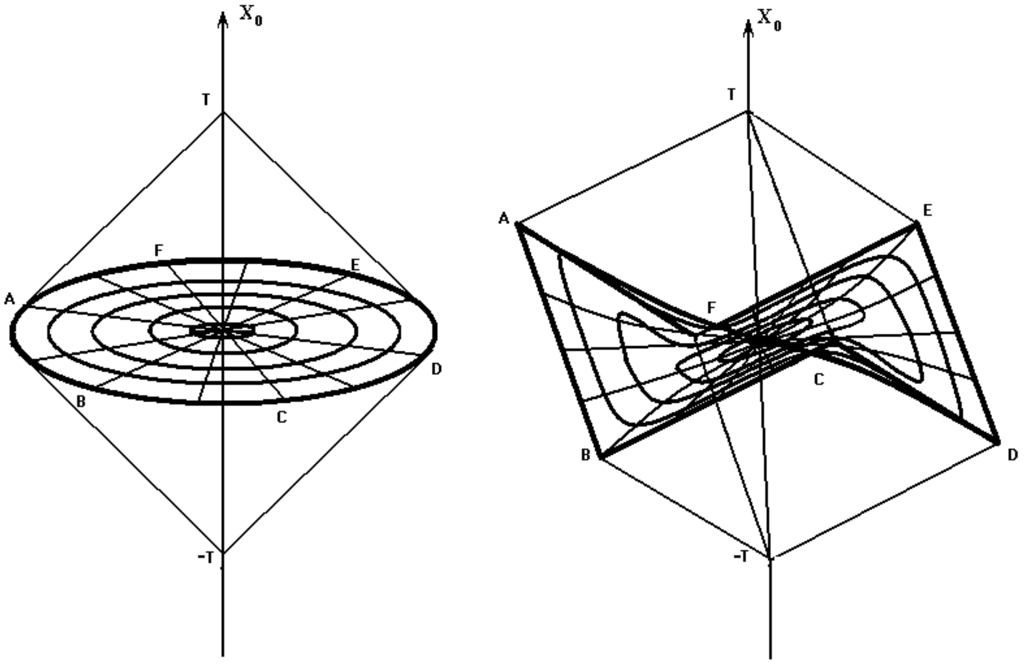


Рис. 2: Поверхность одновременности в трехмерном времени (справа) и трехмерном псевдоевклидовом пространстве (слева)

ускользнул принципиально четырехмерный характер исследуемой фигуры, и он изобразил ее как обычную трехмерную).

В пространстве Минковского мировые линии, параллельные мировой линии наблюдателя и касающиеся фигуры, являющейся пересечением двух световых конусов, принимаются за равноудаленные точки физического пространства наблюдателя, а в качестве расстояния берется величина, пропорциональная длине оси такого двойного конуса. В четырехмерном времени можно поступить аналогичным образом. В этом случае равноудаленными от действительной оси (ассоциируемой с мировой линией наблюдателя) оказываются параллельные ей линии, проходящие через точки пересечения граней двух противолежащих световых пирамид, а в качестве расстояния выступает величина, пропорциональная главной диагонали гиперкуба, получающегося в результате такого пересечения. Чтобы найти численное значение этой величины, необходимо из четырех действительных корней уравнения

$$x_1^4 - 2(x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)x_1^2 + 8(x_2x_3x_4)x_1 + (x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 - 2x_2^2x_3^2 - 2x_2^2x_4^2 - 2x_3^2x_4^2) = 0, \quad (11)$$

представляющих собой ничто иное, как абсциссы точек пересечения прямой, связанной с координатами x_2, x_3, x_4, и четырех изотропных гиперплоскостей, выбрать два, имеющие физический смысл. Один из этих корней $x_{1,1}$ соответствует точке, принадлежащей пирамиде прошлого, другой $x_{1,2}$ – пирамиде будущего, тогда как два "лишних" корня $x_{1,3}$ и $x_{1,4}$ принадлежат граням боковых пирамид. Расстояние может быть принято как половина суммы первых двух корней: $R_c = 1/2(x_{1,1} + x_{1,2})$, при этом индекс "c" подчеркивает, что данная величина определяется с помощью световых сигналов.

Трехмерное пространство, возникающее в результате подобной процедуры, является финслеровым и полностью характеризуется своей индикатрисой, роль которой как раз и играет описанный в [13] двенадцатигранник. Это пространство по своим свойствам достаточно близко евклидову, в силу выпуклости и двухмерной замкнутости его индикатрисы, которая мало отличается от индикатрисы евклидова пространства, представляющей собой обычную сферу. Однако разница между евклидовой сферой и рассматриваемым двенадцатигранником все же достаточно принципиальна, чтобы спутать связанные с ними геометрии. Именно поэтому в работе [13] делается вывод о нелогичности предположения, что в основе геометрии реального мира лежит метрика четырехмерного времени. Однако, на наш взгляд, при формулировке данного вывода не учитывалось то важное обстоятельство, что при ориентации в физическом пространстве наблюдатель пользуется не столько световыми, сколько существенно более медленными сигналами. Свет же играет лишь вспомогательную роль, призванную идентифицировать объекты, тогда как сопоставление этим объектам расстояний осуществляется уже другими, более медленными способами. В специальной теории относительности данный факт не имеет никакого значения, так как индикатриса физического пространства совершенно не зависит от скорости сигналов. В многомерном времени это уже не так. Чем больше скорость зондирующих сигналов отличается от световой, тем меньше соответствующая им индикатриса "выпирает" из гиперплоскости, тем более округлыми становятся ее "углы", и тем ближе ее форма к трехмерной сфере. В пределе, когда относительная скорость сигналов, с помощью которых "ощупывается" физическое пространство, стремится к нулю, оно вообще перестает отличаться от евклидова. Таким образом, если в четырехмерном времени факт присутствия каких-то неподвижных объектов фиксировать с помощью света, но расстояния между ними определять при помощи других, более медленных сигналов, то обнаружить удастся только евклидову геометрию. Заметим, что именно такие условия выполняются в большинстве обычных для человека ситуаций.

С другой стороны, почти не вызывает сомнений принципиальная возможность поставить эксперимент, позволяющий прояснить, какая все-таки геометрия имеет лучшее соответствие с реальным физическим пространством: риманова или финслерова? Для этого необходимо, чтобы замеры расстояний между несколькими фиксированными друг относительно друга объектами, производились как с помощью световых, так и более медленных сигналов. Парадоксально, но в колоссальном экспериментальном материале, имеющемся в арсенале современной физики, подобные опыты, во всяком случае, не допускающие двоякой трактовки, по-видимому, отсутствуют. Кроме того, отличия, которые нужно при этом отследить, относительно невелики и поэтому, даже будучи обнаруженными, могут истолковываться по-разному.

Принятая выше концепция построения трехмерного физического пространства объясняет, почему в абсолютно равноправном по своим геометрическим координатам четырехмерном времени наблюдатель, ассоциированный с некоторой мировой линией, зарегистрирует принципиальное отличие координаты, связываемой с его собственным временем, от трех других. Ответ заключается в топологическом различии индикатрис геометрического и физического пространств. (Под геометрическим мы понимаем само финслерово пространство с метрикой Бервальда-Моора, а под физическим – трехмерное многообразие, возникающее в представлении наблюдателя, оперирующего некоторыми эталонными сигналами.) Так, если первая индикатриса имеет вид специфического шестнадцатиполостного гиперболоида, вторая – представляет собой замкнутое по двум измерениям кольцо, точная форма которого, хотя и зависит от используемых в измерениях сигналов, в топологическом плане неизменна.

Заключение

Преобразования, сохраняющие скалярную форму (8), не оставляют инвариантными интервалы и, строго говоря, не являются движениями четырехмерного времени. Однако, поскольку они переводят в себя гиперповерхности одновременности типа

(10) и не изменяют трехмерных расстояний R_c, то вполне могут исполнять роль обычных физических поворотов. Кстати, при такой интерпретации реальных пространственных вращений неожиданно может получить объяснение известный парадокс, связанный с наблюдаемыми отличиями между поступательными и вращательными движениями. К последним достаточно сложно применить принцип относительности, а наиболее известная попытка разобраться в данной проблеме принадлежит Маху, который предположил, что центробежные силы, возникающие при вращении, обязаны своим появлением действию огромной массы всех тел Вселенной. Согласно Маху, если закрутить всю Вселенную, на оставшееся неподвижным малое тело будут действовать центробежные силы, в точности равные силам, возникающим при вращении самого тела. Справедливость такого утверждения остается спорной, а сам вопрос так и не потерял своей актуальности. В случае, если реальному миру вместо галилеевой или псевдоевклидовой метрик сопоставлять геометрию четырехмерного времени, проблема не возникает, так как преобразования, отвечающие за поступательные и вращательные движения этого пространства, относятся к принципиально разным типам непрерывных симметрий.

Проведенный в данной работе анализ свойств многообразия, претендующего на роль альтернативы пространству Минковского, далек от завершенности. Однако факт, что для одной из самых простых финслеровых метрик четвертого порядка, ничего общего не имеющей с обычной квадратичной формой, можно указать условия, при которых она в состоянии породить не только классические, но и релятивистские представления о физическом пространстве, – заслуживает внимания.

Литература

[1] Б. Риман: *О гипотезах, лежащих в основаниях геометрии*; – В кн.: Об основаниях геометрии. ТТЛ, М. 1956.

[2] P. Finsler: *Über Kurven und Flächen in allgemeinen Räumen*, Göttingen, 1918 (Dissertation).

[3] G. S. Asanov: *Finslerian Extension of General Relativity*, Reidel, Dordrecht, 1984.

[4] Г. Гельмгольц: *О фактах, лежащих в основании геометрии.*– В кн.: Об основаниях геометрии, ТТЛ, М. 1956.

[5] С. Ли: *Замечания на работу Гельмгольца "О фактах, лежащих в основании геометрии".* – В кн.: Об основаниях геометрии, ТТЛ, М. 1956.

[6] Г. Вейль: *Пространство, время, материя*, Янус, М. 1996.

[7] D. G. Pavlov: *Hypercomplex Numbers, Associated Metric Spaces, and Extension of Relativistic Hyperboloid*, aArXiv:gr-qc/0206004.

[8] Х. Рунд: *Дифференциальная геометрия финслеровых пространств*, Наука, М. 1981.

[9] Р. В. Михайлов: *О некоторых вопросах четырехмерной топологии: обзор современных исследований*, Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **1**, 2004.

[10] D. G. Pavlov: *Nonlinear Relativistic Invariance For Quadrahyperbolic Numbers*, arXiv: gr-qc/0212090.

[11] Д. Г. Павлов: *Четырехмерное время как альтернатива пространству-времени Минковского*, Труды международной конференции "GEON-2003", Казань, 2003.

[12] Д. Г. Павлов: *Хронометрия трехмерного времени*, Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **1**, 2004.

[13] Г. Ю. Богословский: *Статус и перспективы теории локально анизотропного пространства-времени*, Физика ядра и частиц. Издательство МГУ, М. 1997.

[14] G. Yu. Bogoslovsky, H. F. Goenner, Phys. Lett. A 244, N 4, (1998) 222.

[15] G. Yu. Bogoslovsky, H. F. Goenner, Gen. Relativ. Gravit. 31, N 10, (1999) 1565.

ФИНСЛЕРОИД – ПРОСТРАНСТВО, СНАБЖЕННОЕ УГЛОМ И СКАЛЯРНЫМ ПРОИЗВЕДЕНИЕМ

Г. С. Асанов

Кафедра Теоретической Физики, Московский Государственный Университет
asanov@newmail.ru

Наука прошедшего столетия "сняла" тот ближайший успех, который возможно было достигнуть на основе геометрически-квадратичных представлений, как логически и математически простейших. Более глубокие истины требуют использования более емких геометрий, таких как финслерова. Она вносит структурность в геометрию, поскольку индикатриса уже не изотропна по всем направлениям. Возникающие при финслеровом обобщении трудности с обобщением геометрических понятий решаются в настоящей работе путем рассмотрения Финслероид-геометрии. Такая геометрия вводит одно выделенное направление, предполагая полную аксиальную симметричность вокруг него. При этом, открываются конструктивные пути введения угла и скалярного произведения вне рамок евклидовой геометрии.

> *"Евклидовы традиции слишком сильны, чтобы от них можно было бы легко отрешиться, и понадобится, быть может, работа нескольких поколений математиков, чтобы освободиться от их гнета."* (Буземан [2], с. 8.)

Введение

Квадратичный метод наиболее прост для введения длины вектора. Согласно этому методу, длина определяется квадратным корнем из квадратичной формы. Основанные на нем евклидова геометрия и евклидовы вращения служили более 20 столетий для математических построений, обработки и предсказаний результатов экспериментов. Неквадратичные методы развиваются финслеровой геометрией (см. [1–6]).

К сожалению приходится констатировать, что изучению соответствующих возможностей в литературе не было уделено достаточного внимания. Традиционно идеи и уравнения математики и теоретической физики основываются на методе введения длины векторов с помощью квадратичного корня. И даже многочисленные интересные и глубокие критические исследования (см., например, монографии [7, 8]) геометрической структуры самого пространства-времени и возможностей ее переосмысления и обобщения как правило обходились без упоминаний существования идей и методов финслеровой геометрии. Несмотря на чувство высокой степени адекватности и точности совпадения, неясно, как можно было бы выразить эту степень точности в числах, – ведь евклидовы вращения не содержат малого параметра для оценок.

По сравнению с обычной евклидовой метрикой финслерова метрика вносит *структурность*в геометрию. Единичная поверхность евклидовой геометрии, сфера, изотропна по всем направлениям. Введение геометрически выделенных направлений приводит к обобщению сферы, а вслед за этим и к обобщению евклидовой геометрии. Соответствующая, более не изотропная, поверхность концов единичных векторов (выходящих из фиксированной точки) порождает финслерову метрику. Обратно, подобные геометрии могут отражать те конкретные физические ситуации, в которых присутствует соответствующая анизотропия по направлениям. Метрика Бервальда-Моора максимально анизотропна, – в том смысле, что она предполагает наличие геометрически-выделенных направлений, по числу равных размерности пространства (соответственно трех в трехмерном случае и четырех в четырехмерном случае). Финслероид-геометрия вводит ровно одно выделенное направление, предполагая полную аксиальную симметричность вокруг него.

Априори вопрос о том, как обобщать евклидову метрическую функцию на финслеров случай, выглядит чрезмерно общим и весьма неясным для нахождения конкретного ответа. Если же однако подойти к проблеме с точки зрения инвариантности и возможности ввести угол и скалярное произведение, то открываются конструктивные пути выделения классов финслеровых пространств. В результате возникают методы выхода за рамки евклидовой геометрии.

Конечно, как бы ни было глубоко мотивировано стремление выйти за узкие границы "квадратичных представлений", речь не может идти о "полном преодолении квадратного корня". Иерархия геометрий глубоко коренится в обобщениях. Очевидно, что в Римановой геометрии присутствуют и работают идеи и методы Евклидовой геометрии. В работах по Финслеровой геометрии многие авторы использовали "ассоциируемую риманову геометрию", вводили "риманову связность" или "финслер-риманову связность", вводили "ассоциируемую относительную риманову геометрию вдоль векторных полей", строили "соприкасающееся риманово пространство" и "риманову развертку финслерова пространства вдоль кривой", и т. п. Одновременно в Пространствах Минковского постоянно использовали ассоциируемую Евклидову геометрию.

Можно сказать, что строение любой теории, выходящей за рамки представлений, диктуемых квадратичной формой, будет иметь пирамидальный характер: спускаясь с вершины "уникальной сверхгеометрии", исследователь должен будет входить в область "ассоциируемой Финслеровой геометрии", в которой в свою очередь будут возникать разнообразные римановы образы, а затем и многочисленные евклидовы картины.

Сказанное прямо относится к Квадрачисловой геометрии (развиваемой в работах Павлова [9, 10]). Действительно, она возникает из рассмотрения коммутативных гиперчисел и приписывает им Норму. Но при интерпретации компонент гиперчисел как компонент вектора эта метрика может быть отнесена к классу "Финслерова метрическая Функция Бервальда-Моора". На последнем пути можно (и нужно) развить теорию геометрических соотношений, – в том числе ввести геодезические, угол, перпендикулярность,... – которые разумеется не совпадают с аналогичными геометрическими соотношениями римановой или евклидовой геометрии. От последней невозможно полностью отказаться уже хотя бы по причинам использования графических изображений и рисунков – их приходится в конце концов строить в Евклидовом Пространстве!

В то же время, это не означает единственного и неизбежно-однозначного приписывания финслеровых геометрических свойств Квадрапространству. В самом деле, по его собственным представлениям, используя полиформу, могут быть введены соответствующие углы и перпендикулярность, – такое обобщенное развитие теории "более высокого уровня метричности" было проведено в работах [9, 10].

Геометрия Минковского содержит гораздо больше инвариантов, чем Евклидова геометрия, а Финслерова геометрия – чем Риманова геометрия. В таком контексте следует указать, что Квадрапространства имеют гораздо больше инвариантных объектов, чем Финслерова геометрии и геометрия Минковского, и могут предложить более богатую геометрическими представлениями теорию. В частности это богатство можно видеть в том, что Евклидова геометрия может легко ассоциироваться с Квадрапространством многими способами.

Философия и логика ассоциируемых проблем. Сыгранная в Истории роль труда Евклида едва ли может быть переоценена. Евклидова Квадратичная геометрия формировала и продолжает формировать образ мыслей и характер анализа исследователей и ученых. Например, риманова геометрия с самого исходного определения основывается на квадратичной форме (и даже иногда просто называлась "геометрией, порождаемой квадратичной формой"), теории расслоенных пространств также используют квадратичный метод (но разнообразнее, чем риманова геометрия), лагранжианы в теориях физических полей как правило квадратичны по производным, энергия и импульс релятивистской частицы связаны квадратичной формой, и т. д. Специальная и общая теория относительности основываются так же преданно на квадратичной форме, но теперь уже содержащей как плюсы $+$, так и минус $-$; к этому типу относится и геометрия Лобачевского.

В современной научной литературе геометрической ориентации разнообразно, и часто с определенным оттенком многозначительности, вводятся и изучаются различные "модели" обобщенных геометрий. В полном контрасте с этим в труде Евклида построена геометрия, а не "модель геометрии".

Почему евклидова геометрия устойчиво прошла через два тысячелетия? Ее "корнем" фактически является метод определения длины отрезков или векторов с помощью квадратного корня из квадратичной формы. Этот метод практически всюду – и в практике, и в математических и физических теориях, и в экспериментах, – используется он и в настоящее время. Это – логически простейший метод. Но "самый простой" не всегда может оказываться и "самым точным".

"Аксиоматики" на протяжении прошедшего столетия подробно анализировали структуру самой евклидовой геометрии (знаменитая работа Гильберта "Основания геометрии"), а не путей конструктивного обобщения "квадратичности" евклидовой метрики.

Нетрудно поставить под большое сомнение любое утверждение, настаивающее на "высокой экспериментальной верности" квадратичного метода задания длины. Кто, когда и с какой точностью проверил Теорему Пифагора? Такая проверка вообще едва ли возможна без того, чтобы исследователь использовал для сравнений более общие методы (подробные дискуссии на такую тему выходят за пределы настоящей работы, – читатели могут попытаться провести собственный анализ проблемы).

Фактически "евклидовость" моделей геометрии, или геометрий, сохраняется, пока сохраняется "квадратичность" определения длины. Но чтобы можно было бы сделать соответствующий решительный шаг, нужно больше, чем только смелость. Это трудная задача: чтобы выйти за пределы "евклидовости", нужно найти хороший способ заменить квадратичный метод определения длины на более общий и подробно пересмотреть современные уравнения математической физики на основе нового метода. Но это – и достойная задача для Ученых Нового Тысячелетия. Консерватизм мышления как тормоз соответствующему геометрическому прогрессу может быть эффективен только на весьма коротком промежутке времени.

Наука прошедшего столетия "сняла" тот ближайший успех, который возможно было достигнуть на основе геометрически-квадратичных представлений, как логически и математически простейших. Более глубокие истины потребуют использования более емких геометрий.

"Длина" – основополагающее понятие как теоретической, так и прикладной науки. По фундаментальности с ним можно соотнести понятие Числа. Развитие и различные приложения понятия Длины привели к созданию Геометрии, а понятия Числа – к созданию Алгебры.

Достаточно общий и современный соответствующий подход можно формулировать в контексте теории так называемого Пространства Минковского (говорят также о геометрии Минковского). На строгом современном математическом языке пространство Минковского часто определяется как Конечно-Мерное Банахово Пространство.

В Пространствах Минковского длина вводится общим определением, позволяющим ей быть заданной функциями весьма широкого класса с минимальными условиями гладкости. Расслоенные многообразия, в которых слоями являются Пространства Минковского, называют финслеровыми пространствами.

Геометрия Минковского и Финслерова геометрия изучались на протяжении прошедшего столетия многими авторами, было опубликовано по теме более 2000 статей и ряд монографий, но о достигнутом при этом успехе можно говорить лишь с большой осторожностью и условностью. В Финслеровой геометрии неизбежно появляется большое число тензоров (не имеющих нетривиальных прототипов в Римановой геометрии), и не очевидно, что подобный "количественный рост" предопределяет "качественный прогресс". Последним обстоятельством Финслерова геометрия отталкивала (и отталкивает) многих математиков, вызывая у них образ "непроходимого леса из тензоров" [в сравнение с этим Риманова геометрия весьма экономна: в ней есть метрический тензор и строящиеся по нему вполне определенным способом один набор коэффициентов связности и один тензор кривизны].

Однако нельзя слишком гипертрофировать чувство пессимизма от громоздкости формализма. Особенно в наше бурное время, когда многокомпонентностью объектов не многих можно удивить ни собственно в математике, и тем более ни в теоретической физике. Скорее реальные проблемы лежат в другой плоскости, а именно в отсутствии достаточно подходящих точных ключевых звеньев. В этом контексте уместно вспомнить замечание Буземана, что прогресс в движении "beyond Riemannian Geometry" должен состоять "не в обобщении методов Римановой геометрии, а в обобщении ее результатов".

Не должно ли развитие понятия "Длина" идти в тесной связи с развитием понятия "Число"?

Если обратиться к предыстории геометрии Евклида, – к деятельности Пифагора, – то хорошо известна от историков Трагедия Пифагора, возникшая у него, когда он обнаружил, что диагональ квадрата не соизмерима (рационально) с длинами сторон квадрата. То есть для Пифагора выглядело "катастрофой", что есть длина, которой не соответствует число. Этот "сюрприз" дал толчок, как известно, развитию понятия числа, а именно к созданию теории иррациональных чисел. Сложившееся при этом "соответствие" Длины и Числа составило основу геометрии Евклида, и тем более в ее аксиоматике (например, предложенной Гильбертом). В этом отношение развитая Гильбертом аксиоматика Евклидовой геометрии была как бы кульминацией тождества понятия арифметического числа и квадратичной длины, – многие ключевые геометрические понятия выводились из арифметических числовых свойств.

Последующий переход от Евклидовой геометрии к Римановой геометрии уже не вносит в эту дихотомию новых идей. Риманова геометрия – "просто расслоение Евклидовых геометрий", – так что в каждом слое действует обычная Евклидова геометрия и применяется обычное квадратичное определение длины.

Геометрия Минковского выходит за квадратичность определения длины, но (хотя, как известно, геометрические идеи появились у Минковского при изучении теории чисел) проводит развитие вопроса без какой-либо связки с развитием понятия числа. Нить Катастрофы Пифагора разорвалась! Это же можно сказать и про современные финслеровы пространства, – которые есть "просто расслоения с пространствами Минковского в слоях".

Такой экскурс в Историю помогает проявить достаточную смелость и выдвинуть следующую идею: *строить Финслерову геометрию в тесной связи с развитием понятия числа.*

Можно надеяться, что такая идея станет ключевой для успеха развития финслеровой геометрии в настоящем столетии. Спрашивается, где, на каком месте финслерова обобщения длины необходимо обобщение Понятия Числа? Ответ тут вообще говоря не очевиден, хотя очевиден обратный ход мыслей: мерой обобщенного числа должна быть (не евклидова, неквадратичная) финслерова метрическая функция.

Возникает острый для осознания вопрос: где в Финслеровой геометрии нужны Поличисла, так что без них нельзя обойтись? В Пифагоровой Трагедии ситуация ясна: для измерения длины диагонали единичного квадрата недостаточно рациональных чисел. Корни происхождения трансцендентных чисел также ясны: диаметр единичной окружности не измерим алгебраическим иррациональным числом.

Анизотропность предполагается при обобщении Евклидовой геометрии. В этой связи центральным понятием является индикатриса: поверхность концов векторов единичной длины, выходящих из фиксированной точки. В Евклидовой геометрии индикатрисой является сфера. Она символизирует изотропность пространства, одинаковость его свойств по всем направлениям. Поскольку в определении Пространства Минковского и Пространства Финслера входит условие однородности, анизотропность индикатрисы проявляет себя и в анизотропности любых векторов (не обязательно единичной длины). Переход от Евклидовой геометрии к геометрии Минковского символизирует отказ от полной изотропности пространства и после перехода соответствующая индикатриса больше не может быть поверхностью второго порядка.

С точки зрения анизотропности Метрика Бервальда-Моора характеризуется наличием выделенных направлений, по числу равных размерности пространства.

Содержание статьи. В настоящей работе введены необходимые исходные определения и приведены результаты вычислений ассоциируемых величин для Финслероид-геометрии ($\mathcal{E}_g^{PD}$-геометрии), предполагающей наличие ровно одного выделенного направления. Наше предыдущее исследование [5, 6] показало, что область многообещающая. А именно, $\mathcal{E}_g^{PD}$-подход применим к развитию новых направлений в метрической дифференциальной геометрии и может в частности быть эффективен в контексте геометрий Финслера или Минковского. Главным пунктом статьи является наблюдение, что ассоциируемая с $\mathcal{E}_g^{PD}$-пространством одна-векторная финслерова метрическая функция весьма естественным образом допускает привлекательное дву-векторное обобщение, тем самым порождая угол и скалярное произведение.

Известные различные попытки ввести угол в пространство Минковского или Финслера постоянно сталкивались с двусмысленностями:

"Следовательно, никакая конкретная угловая мера не может быть вполне естественной в геометрии Минковского. Об этом свидетельствуют несчастливые попытки определить такую меру, ни одна из которых не получила общего признания". (Буземан [2], с. 279.)

"К сожалению, существует целый ряд различных инвариантов в пространстве Минковского, все из которых сводятся к одному и тому же евклидову инварианту, если пространство Минковского вырождается в евклидово пространство. Вследствие этого различные определения появлялись в литературе, посвященной пространствам Минковского и Финслера". (Рунд [3], с. 26)

Тот факт, что попытки не привели к однозначному успеху, видимо был следствием недостаточности используемых методов. Действительно, принималось на веру мнение, что угол должен быть определен или построен в терминах основного финслерова метрического тензора (и следовательно должен быть выводимым из исходной финслеровой метрической функции). Позволим себе поставить под сомнение такую установку с самого начала! Вместо этого мы выдвинем альтернативно принцип, что угол является конкомитантом **(пояснение)** геодезических (а не собственно метрики). Угол определяется двумя векторами (вместо одного вектора в случае длины) и в действительности предполагает использование соответствующего обобщения финслеровой метрической функции на дву-векторную метрическую функцию (на скалярное произведение). Ниже мы применим такой наш принцип к изучению $\mathcal{E}_g^{PD}$-пространства. Визуально сущность развиваемого обобщения можно видеть в деформации евклидовой сферы, – индикатрисы евклидова пространства.

Соответственно в Разделе 1 мы прежде всего занимаемся уравнением геодезических. Замечательно, уравнение допускает простое и явное общее решение. После этого выводится угол между двумя векторами. Обычно ожидают, что угловая мера должна быть аддитивной (для углов с общей вершиной). Замечательно, найденный угол только постоянным множителем отличается от евклидова угла в квазиевклидовом пространстве и вследствие этого аддитивен. Теорема косинусов остается верной при замене евклидова угла найденным ниже углом. Получено соответствующее скалярное произведение.

Формально в основе евклидовых представлений лежит использование метода введения длины векторов с помощью квадратного корня от квадратичной формы. В настоящей работе мы используем конкретное, аксиально-симметричное, обобщение такого метода, опираясь на конструктивные идеи финслеровой геометрии. Вводится соответствующая финслерова метрическая функция и подробно описываются ее основные свойства и следствия. Обобщение характеризуется одним безразмерным параметром, который ниже обозначается как g.

Ниже Раздел 2 вводит обозначения, определения и начальные понятия для пространства $\mathcal{E}_g^{PD}$. Оно строится в предположении, что пространство включает одно выделенное направление, которое мы часто будем условно называть Z-осью. Сокращения ФМФ и ФМТ будут использоваться для финслеровой метрической функции и финслерова метрического тензора соответственно. Характеристический параметр g может принимать значения между -2 и 2; при $g = 0$ пространство $\mathcal{E}_g^{PD}$ сводится к обычному евклидову пространству. После предварительного введения характеристической квадратичной формы B, которая отличается от евклидовой суммы квадратов присутствием в ней перекрестного члена (см. (2.22)), мы определяем ФМФ K для пространства $\mathcal{E}_g^{PD}$ с помощью формул (2.30) – (2.33). Характерной чертой формул является присутствие функции "arctan". Затем мы вычисляем тензорные величины пространства. Появляется замечательное явление, упрощающее все построения: ассоциируемый картановский тензор оказывается имеющим простую алгебраическую структуру (см. формулы (2.66) – (2.67)). В частности это (уникальное) явление ведет к выводу, что индикатриса (обобщение сферы) пространства $\mathcal{E}_g^{PD}$ является пространством постоянной положительной кривизны. Значение кривизны зависит от параметра g согласно закону (2.73).

Раздел 3 вводит идею квазиевклидова отображения $\mathcal{E}_g^{PD}$-пространства. Идея оказывается весьма плодотворной тем, что квазиевклидово пространство просто во многих аспектах, так что соответствующее преобразование упрощает различные вычисления. Оно не является плоским, но является конформно плоским. Последний Раздел 4 раскрывает интересные свойства квазиевклидова метрического тензора. В Приложении помещены рисунки, которые иллюстрируют вид финслероидов при различных значениях параметра g.

1. Вывод геодезических и угла в ассоциируемом квазиевклидовом пространстве

Для изучаемого финслерова пространства геодезические могут быть получены как решения уравнения

$$\frac{d^2R^p}{ds^2}+C_q{}^p{}_r(g;R)\frac{dR^q}{ds}\frac{dR^r}{ds}=0, \tag{1.1}$$

коэффициенты которого $C_p{}^q{}_r$ задаются списком, помещенным в конце Раздела 2. Чтобы избежать сложностей вычислений, оказывается удобно перенести рассмотрения в квазиевклидов подход (см. Разделы 3 и 4). Соответственно мы положим

$$\sqrt{g_{pq}(g;R)dR^pdR^q}=\sqrt{n_{pq}(g;t)dt^pdt^q} \tag{1.2}$$

и

$$R^p(s)=\mu^p(g;t^r(s)) \tag{1.3}$$

вместе с

$$\frac{dR^p(s)}{ds}=\mu^p_q(g;t^r(s))\frac{dt^q(s)}{ds}, \tag{1.4}$$

где $\mu^p(g;t^r)$ и $\mu^p_q(g;t^r)$ – коэффициенты, заданные соответственно формулами (3.14) и (3.38)-(3.40). Пусть задана кривая C: $t^p=t^p(s)$ в квазиевклидовом пространстве, где *параметр длины* s вдоль кривой определяется дифференциалом

$$ds=\sqrt{n_{pq}(g;t)dt^pdt^q}, \tag{1.5}$$

где $n_{pq}(g;t)$ – ассоциируемый квазиевклидов метрический тензор, задаваемый формулой (3.49). Соответственно с этим,*касательные векторы*

$$u^p=\frac{dt^p}{ds} \tag{1.6}$$

к кривой являются единичными в смысле, что

$$n_{pq}(g;t)u^pu^q=1. \tag{1.7}$$

Поскольку $L_p=\partial S/\partial t^p$, мы имеем

$$L_pu^p=\frac{dS}{ds}. \tag{1.8}$$

Здесь $S^2(t)=n_{pq}(g;t)t^pt^q=r_{pq}t^pt^q$ (см. (3.46)). Использование (4.16) ведет с помощью хорошо-известных аргументов к следующему уравнению геодезических в квазиевклидовом пространстве:

$$\frac{d^2\mathbf{t}}{ds^2}=\frac{1}{4}G^2\frac{\mathbf{t}}{S^2}H_{pq}u^pu^q, \tag{1.9}$$

где $H_{pq} = h^2(n_{pq} - L_pL_q)$ (см. (4.4)) и $\mathbf{t} = \{t^p\}$. Мы получаем

$$\frac{d^2\mathbf{t}}{ds^2} = \frac{1}{4}g^2\frac{\mathbf{t}}{S^2}\left(1 - (\frac{dS}{ds})^2\right) = \frac{1}{4}g^2(a^2 - b^2)\frac{\mathbf{t}}{S^4} \tag{1.10}$$

и

$$\frac{d^2\mathbf{t}}{ds^2} = \frac{1}{4}g^2(a^2 - b^2)\frac{\mathbf{t}}{S^4} \tag{1.11}$$

с

$$S^2(s) = a^2 + 2bs + s^2, \tag{1.12}$$

где a и b – две константы интегрирования.

Если мы положим

$$S(\Delta s) = \sqrt{a^2 + 2b\Delta s + (\Delta s)^2} \tag{1.13}$$

и

$$\mathbf{t}_1 = \mathbf{t}(0), \qquad \mathbf{t}_2 = \mathbf{t}(\Delta s), \tag{1.14}$$

то получим

$$a = \sqrt{(\mathbf{t}_1\mathbf{t}_1)} \tag{1.15}$$

и

$$S(\Delta s) = \sqrt{(\mathbf{t}_2\mathbf{t}_2)} \tag{1.16}$$

вместе с

$$(\mathbf{t}_1\mathbf{t}_2) = aS(\Delta s)\cos\Big[h\arctan\frac{\sqrt{a^2 - b^2}\,\Delta s}{a^2 + b\Delta s}\Big]. \tag{1.17}$$

Здесь $\mathbf{t}_1$ и $\mathbf{t}_2$ – два вектора с фиксированным началом O; они указывают точку соответственно в начале геодезической и в конце геодезической. Пара круглых скобок (..) используется для евклидова скалярного произведения, так что $(\mathbf{t}_1\mathbf{t}_1) = r_{pq}t_1^pt_1^q$, $(\mathbf{t}_1\mathbf{t}_2) = r_{pq}t_1^pt_2^q$, и r_{pq} – евклидов метрический тензор; $r_{pq} = \delta_{pq}$ в случае ортогонального базиса; δ используется для символов Кронекера. Из (1.15)-(1.17) прямо следует, что

$$\frac{\sqrt{a^2 - b^2}\,\Delta s}{a^2 + b\Delta s} = \tan\Big[\frac{1}{h}\arccos\frac{(\mathbf{t}_1\mathbf{t}_2)}{\sqrt{(\mathbf{t}_1\mathbf{t}_1)}\,\sqrt{(\mathbf{t}_2\mathbf{t}_2)}}\Big]. \tag{1.18}$$

Равенство (1.18) подсказывает целесообразность ввести

Определение. $\mathcal{E}_g^{PD}$*-ассоциируемый угол* задается согласно

$$\alpha := \frac{1}{h}\arccos\frac{(\mathbf{t}_1\mathbf{t}_2)}{\sqrt{(\mathbf{t}_1\mathbf{t}_1)}\,\sqrt{(\mathbf{t}_2\mathbf{t}_2)}}, \tag{1.19}$$

так что

$$\alpha = \frac{1}{h}\alpha_{Euclidean}. \tag{1.20}$$

Такой угол очевидно *аддитивен*:

$$\alpha(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_3) = \alpha(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2) + \alpha(\mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3). \tag{1.21}$$

Кроме того, он равен нулю при равных векторах:

$$\alpha(\mathbf{t}, \mathbf{t}) = 0. \tag{1.22}$$

Используя такой угол, мы предложим

Определение. При заданных двух векторах $\mathbf{t}_1$ и $\mathbf{t}_2$ векторы $\mathcal{E}_g^{PD}$-*перпендикулярны*, если

$$\cos\left(\alpha(\mathbf{t}_1,\mathbf{t}_2)\right)=0. \tag{1.23}$$

Поскольку обращение в нуль (1.23) влечет за собой

$$\alpha_{quasi-Euclidean}(\mathbf{t}_1,\mathbf{t}_2)=\frac{\pi}{2}, \tag{1.24}$$

ввиду (1.20) следует сделать вывод, что

$$\alpha_{Euclidean}(\mathbf{t}_1,\mathbf{t}_2)=\frac{\pi}{2}h\le\frac{\pi}{2}. \tag{1.25}$$

Следовательно векторы, перпендикулярные в собственно квазиевклидовом смысле, выглядят острыми с ассоциируемой евклидовой точки зрения.

Принимая во внимание равенство

$$(\sqrt{a^2-b^2}\,\Delta s)^2+(a^2+b\Delta s)^2\equiv a^2S^2(\Delta s), \tag{1.26}$$

мы также устанавливаем соотношения

$$\sqrt{a^2-b^2}\,\Delta s=aS(\Delta s)\sin\alpha \tag{1.27}$$

и

$$a^2+b\Delta s=aS(\Delta s)\cos\alpha. \tag{1.28}$$

Они влекут за собой равенство

$$\frac{b}{\sqrt{a^2-b^2}}=\frac{S(\Delta s)\cos\alpha-a}{S(\Delta s)\sin\alpha}, \tag{1.29}$$

из которого может быть найдена величина b.

Итак, *каждый член вовлеченного набора* $\{a,b,\Delta s,S(\Delta s)\}$ *может быть явно выражен через исходные векторы* $\mathbf{t}_1$ *и* $\mathbf{t}_2$. Для многих случаев целесообразно переписать равенство (1.26) в виде

$$S^2(\Delta s)=(\Delta s)^2-a^2+2(a^2+b\Delta s). \tag{1.30}$$

Таким образом мы пришли к следующим последовательным пунктам:

$\mathcal{E}_g^{PD}$-*Теорема Косинусов*

$$(\Delta s)^2=S^2(\Delta s)+a^2-2aS(\Delta s)\cos\alpha\,; \tag{1.31}$$

$\mathcal{E}_g^{PD}$-*Двух-Точечная Длина*

$$(\Delta s)^2=(\mathbf{t}_1\mathbf{t}_1)+(\mathbf{t}_2\mathbf{t}_2)-2\sqrt{(\mathbf{t}_1\mathbf{t}_1)}\,\sqrt{(\mathbf{t}_2\mathbf{t}_2)}\cos\alpha\,; \tag{1.32}$$

$\mathcal{E}_g^{PD}$-*Скалярное Произведение*

$$<\mathbf{t}_1,\mathbf{t}_2>=\sqrt{(\mathbf{t}_1\mathbf{t}_1)}\,\sqrt{(\mathbf{t}_2\mathbf{t}_2)}\cos\alpha\,; \tag{1.33}$$

$\mathcal{E}_g^{PD}$-*Перпендикулярность*

$$< \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2 >= \sqrt{(\mathbf{t}_1\mathbf{t}_1)}\,\sqrt{(\mathbf{t}_2\mathbf{t}_2)}. \tag{1.34}$$

Отождествление

$$|\mathbf{t}_2 \ominus \mathbf{t}_1|^2 = (\Delta s)^2 \tag{1.35}$$

дает другое яркое представление

$$|\mathbf{t}_2 \ominus \mathbf{t}_1|^2 = (\mathbf{t}_1\mathbf{t}_1) + (\mathbf{t}_2\mathbf{t}_2) - 2\sqrt{(\mathbf{t}_1\mathbf{t}_1)}\,\sqrt{(\mathbf{t}_2\mathbf{t}_2)}\cos\alpha\,. \tag{1.36}$$

Рассмотрение можно завершить следующим образом.

Теорема. *Общее решение уравнения геодезических* (1.11) *может быть найдено в явном виде*

$$\mathbf{t}(s) =$$

$$= \frac{S(s)}{a}\frac{\sin\Bigl[h\arctan\ fr\sqrt{a^2-b^2}\,(\Delta s - s)a^2 + b\Delta s + (b+\Delta s)s\Bigr]}{\sin\Bigl[h\arctan\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}\,\Delta s}{a^2+b\Delta s}\Bigr]}\,\mathbf{t}_1$$

$$+\frac{S(s)}{S(\Delta s)}\frac{\sin\Bigl[h\arctan\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}\,s}{a^2+bs}\Bigr]}{\sin\Bigl[h\arctan\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}\,\Delta s}{a^2+b\Delta s}\Bigr]}\,\mathbf{t}_2. \tag{1.37}$$

Собственно евклидов предел есть

$$\mathbf{t}(s)\Big|_{g=0} = \frac{(\Delta s - s)\mathbf{t}_1 + s\mathbf{t}_2}{\Delta s} = \mathbf{t}_1 + (\mathbf{t}_2 - \mathbf{t}_1)\frac{s}{\Delta s},$$

так что геодезические становятся прямыми. Из (1.37) вытекает равенство

$$(\mathbf{t}(s)\mathbf{t}(s)) = S^2(s) \tag{1.38}$$

в согласии с (1.12). Поскольку общее решение (1.37) таково, что правая часть растягивается двумя векторами, $\mathbf{t}_1$ и $\mathbf{t}_2$, мы вправе заключить, что *изучаемые геодезические являются плоскими кривыми.*

2. Финслероид-пространство $\mathcal{E}_g^{PD}$ положительно-определенного типа

Предположим, что задано N-мерное векторное пространство V_N. Обозначим через R векторы, составляющие пространство, так что $R \in V_N$. Любой заданный вектор R назначает определенное направление в V_N. Фиксируем элемент $R_{(N)} \in V_N$, введем прямую линию e_N, ориентированную вдоль вектора $R_{(N)}$, и используем e_N как R^N-координатную ось в V_N. Таким способом мы получим топологическое произведение

$$V_N = V_{N-1} \times e_N \tag{2.1}$$

вместе с разбиением

$$R = \{\mathbf{R}, R^N\}, \qquad R^N \in e_N \quad \text{и} \quad \mathbf{R} \in V_{N-1}. \tag{2.2}$$

Для удобства мы часто будем использовать обозначение

$$R^N = Z, \tag{2.3}$$

а также

$$R = \{\mathbf{R}, Z\}. \tag{2.4}$$

Кроме того, мы введем евклидову метрику

$$q = q(\mathbf{R}) \tag{2.5}$$

на $(N-1)$-мерном векторном пространстве V_{N-1}.

Относительно допустимого координатного базиса $\{e_a\}$ в V_{N-1} мы получим координатные представления

$$\mathbf{R} = \{R^a\} = \{R^1, \dots, R^{N-1}\} \tag{2.6}$$

и

$$R = \{R^p\} = \{R^a, R^N\} \equiv \{R^a, Z\}, \tag{2.7}$$

а также

$$q(\mathbf{R}) = \sqrt{r_{ab}R^aR^b}, \tag{2.8}$$

где r_{ab} – компоненты симметричного положительно-определенного тензора на V_{N-1}. Индексы $(a, b, \dots)$ и $(p, q, \dots)$ будут принимать значения из наборов $(1, \dots, N-1)$ и $(1, \dots, N)$ соответственно; векторные индексы являются верхними, а ко-векторные индексы являются нижними; по повторяющимся верхним и нижним индексам автоматически производится суммирование; обозначение δ^a_b будет использоваться для символа Кронекера. Переменные

$$w^a = R^a/Z, \quad w_a = r_{ab}w^b, \quad w = q/Z, \tag{2.9}$$

где

$$w \in (-\infty, \infty), \tag{2.10}$$

удобны в вычислениях, когда $Z \neq 0$. Иногда мы будем использовать ассоциируемый метрический тензор

$$r_{pq} = \{r_{NN} = 1,\ r_{Na} = 0,\ r_{ab}\}, \tag{2.11}$$

определенный на всем векторном пространстве V_N.

Задав параметр g при условии выполнения неравенства

$$-2 < g < 2, \tag{2.12}$$

мы введем удобные обозначения

$$h = \sqrt{1 - \frac{1}{4}g^2}, \tag{2.13}$$

$$G = g/h, \tag{2.14}$$

$$g_+ = \frac{1}{2}g + h, \qquad g_- = \frac{1}{2}g - h, \tag{2.15}$$

$$g^+ = -\frac{1}{2}g + h, \qquad g^- = -\frac{1}{2}g - h, \tag{2.16}$$

так что

$$g_+ + g_- = g, \qquad g_+ - g_- = 2h, \tag{2.17}$$

$$g^+ + g^- = -g, \qquad g^+ - g^- = 2h, \tag{2.18}$$

$$(g_+)^2 + (g_-)^2 = 2, \tag{2.19}$$

$$(g^+)^2 + (g^-)^2 = 2. \tag{2.20}$$

Справедлива симметрия

$$g_+ \overset{g\to -g}{\Longleftrightarrow} -g_-, \qquad g^+ \overset{g\to -g}{\Longleftrightarrow} -g^-. \tag{2.21}$$

Характеристическая квадратичная форма

$$B(g;R) = Z^2 + gqZ + q^2 \equiv \frac{1}{2}\Big[(Z+g_+q)^2 + (Z+g_-q)^2\Big] > 0 \tag{2.22}$$

имеет отрицательный дискриминант, а именно

$$D_{\{B\}} = -4h^2 < 0, \tag{2.23}$$

как следствие формул (2.12) и (2.13). При $Z \neq 0$ удобно так же использовать квадратичную форму

$$Q(g;w) := B/(Z)^2, \tag{2.24}$$

получая

$$Q(g;w) = 1 + gw + w^2 > 0, \tag{2.25}$$

вместе с функцией

$$E(g;w) := 1 + \frac{1}{2}gw. \tag{2.26}$$

Легко проверить

$$E^2 + h^2w^2 = Q \tag{2.27}$$

тождество. В пределе $g \to 0$ определение (2.22) вырождается в квадратичную форму начального метрического тензора (2.11):

$$B\big|_{g=0} = r_{pq}R^pR^q. \tag{2.28}$$

Кроме того, справедливо предельное равенство

$$Q\big|_{g=0} = 1 + w^2. \tag{2.29}$$

С помощью таких обозначений мы вводим ФМФ

$$K(g;R) = \sqrt{B(g;R)}\,J(g;R), \tag{2.30}$$

где

$$J(g;R) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}G\Phi(g;R)}, \tag{2.31}$$

$$\Phi(g;R) = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}\frac{G}{2} - \operatorname{arctg}\Big(\frac{q}{hZ} + \frac{G}{2}\Big), \qquad \text{если} \quad Z \geq 0, \tag{2.32}$$

$$\Phi(g;R) = -\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}\frac{G}{2} - \operatorname{arctg}\Big(\frac{q}{hZ} + \frac{G}{2}\Big), \qquad \text{если} \quad Z \leq 0, \tag{2.33}$$

или в других удобных видах,

$$\Phi(g;R)=\frac{\pi}{2}+\operatorname{arctg}\frac{G}{2}-\operatorname{arctg}\Bigl(\frac{L(g;R)}{hZ}\Bigr),\qquad \text{если}\quad Z\geq 0, \tag{2.34}$$

$$\Phi(g;R)=-\frac{\pi}{2}+\operatorname{arctg}\frac{G}{2}-\operatorname{arctg}\Bigl(\frac{L(g;R)}{hZ}\Bigr),\qquad \text{если}\quad Z\leq 0, \tag{2.35}$$

где

$$L(g;R)=q+\frac{g}{2}Z, \tag{2.36}$$

и

$$\Phi(g;R)=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\frac{hq}{A(g;R)},\qquad \text{если}\quad Z\geq 0, \tag{2.37}$$

$$\Phi(g;R)=-\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\frac{hq}{A(g;R)},\qquad \text{если}\quad Z\leq 0, \tag{2.38}$$

где

$$A(g;R)=Z+\frac{1}{2}gq. \tag{2.39}$$

Эта ФМФ нормирована так, что

$$-\frac{\pi}{2}\leq\Phi\leq\frac{\pi}{2}, \tag{2.40}$$

$$\Phi=\frac{\pi}{2},\quad \text{если}\quad q=0\quad \text{и}\quad Z>0;\qquad \Phi=-\frac{\pi}{2},\quad \text{если}\quad q=0\quad \text{и}\quad Z<0. \tag{2.41}$$

Мы также имеем

$$\operatorname{ctg}\Phi=\frac{hq}{A},\qquad \Phi|_{Z=0}=\operatorname{arctg}\frac{G}{2}. \tag{2.42}$$

Часто удобно использовать индикатор знака ϵ_Z для аргумента Z:

$$\epsilon_Z=1,\quad \text{если}\quad Z>0;\qquad \epsilon_Z=-1,\quad \text{если}\quad Z<0; \tag{2.43}$$

При этих условиях мы вводим $\mathcal{E}_g^{PD}$*-пространство*:

$$\mathcal{E}_g^{PD}=\{V_N=V_{N-1}\times e_N;\ R\in V_N;\ K(g;R);\ g\}. \tag{2.44}$$

Правая часть определения (2.30) может рассматриваться как функция $\breve{K}$ от аргументов $\{g;q,Z\}$, так что

$$\breve{K}(g;q,Z)=K(g;R). \tag{2.45}$$

Мы видим, что

$$\breve{K}(g;q,-Z)\neq\breve{K}(g;q,Z), \tag{2.46}$$

если только значение параметра не равно тривиальному $g=0$. Вместо этого, функция $\breve{K}$ показывает свойство gZ*-четности*

$$\breve{K}(-g;q,-Z)=\breve{K}(g;q,Z). \tag{2.47}$$

Справедлива инвариантность относительно отражения $(N-1)$-пространства

$$K(g;R)\ \overset{R^a\leftrightarrow -R^a}{\Leftrightarrow}\ K(g;R). \tag{2.48}$$

Часто бывает удобно переписать представление (2.30) в виде

$$K(g;R) = |Z|V(g;w) \tag{2.49}$$

(при $Z \neq 0$) с *генерирующей метрической функцией*

$$V(g;w) = \sqrt{Q(g;w)}\,j(g;w). \tag{2.50}$$

Мы имеем

$$j(g;w) = J(g;1,w).$$

Используя (2.25) и (2.31) – (2.35), получим

$$V' = wV/Q, \qquad V'' = V/Q^2, \tag{2.51}$$

$$(V^2/Q)' = -gV^2/Q^2, \qquad (V^2/Q^2)' = -2(g+w)V^2/Q^3, \tag{2.52}$$

$$j' = -\frac{1}{2}gj/Q, \tag{2.53}$$

а также

$$\frac{1}{2}(V^2)' = wV^2/Q, \qquad \frac{1}{2}(V^2)'' = (Q-gw)V^2/Q^2, \tag{2.54}$$

$$\frac{1}{4}(V^2)''' = -gV^2/Q^3 \tag{2.55}$$

вместе с равенствами

$$\Phi' = -h/Q, \tag{2.56}$$

где штрих ($'$) означает дифференцирование по w.

Укажем дополнительно два полезных тождества

$$(A(g;R))^2 + h^2q^2 = B(g;R) \tag{2.57a}$$

и

$$(L(g;R))^2 + h^2Z^2 = B(g;R). \tag{2.57b}$$

Простые результаты для производных сводят задачу вычисления компонент ассоциируемого ФМТ к легкому упражнению, действительно:

$$R_p := \frac{1}{2}\frac{\partial K^2(g;R)}{\partial R^p} : \tag{2.58}$$

$$R_a = r_{ab}R^b\frac{K^2}{B}, \qquad R_N = (Z+gq)\frac{K^2}{B}; \tag{2.59}$$

$$g_{pq}(g;R) := \frac{1}{2}\frac{\partial^2K^2(g;R)}{\partial R^p\partial R^q} = \frac{\partial R_p(g;R)}{\partial R^q} :$$

$$g_{NN}(g;R) = [(Z+gq)^2+q^2]\frac{K^2}{B^2}, \qquad g_{Na}(g;R) = gqr_{ab}R^b\frac{K^2}{B^2}, \tag{2.60}$$

$$g_{ab}(g;R) = \frac{K^2}{B}r_{ab} - g\frac{r_{ad}R^dr_{be}R^eZ}{q}\frac{K^2}{B^2}. \tag{2.61}$$

Компоненты обратного тензора равны

$$g^{NN}(g;R) = (Z^2+q^2)\frac{1}{K^2}, \qquad g^{Na}(g;R) = -gqR^a\frac{1}{K^2}, \tag{2.62}$$

$$g^{ab}(g;R)=\frac{B}{K^2}r^{ab}+g(Z+gq)\frac{R^aR^b}{q}\frac{1}{K^2}. \tag{2.63}$$

Детерминант ФМТ, задаваемого формулами (2.59) – (2.60), легко находится в виде

$$\det(g_{pq}(g;R))=[J(g;R)]^{2N}\det(r_{ab}), \tag{2.64}$$

что показывает, если учесть (2.31) – (2.33), что

$$\det(g_{pq})>0 \qquad \text{на всей области определения.} \tag{2.65}$$

Ассоциируемый угловой метрический тензор

$$h_{pq}:=g_{pq}-R_pR_q\frac{1}{K^2}$$

может быть задан компонентами

$$h_{NN}(g;R)=q^2\frac{K^2}{B^2}, \qquad h_{Na}(g;R)=-Zr_{ab}R^b\frac{K^2}{B^2},$$

$$h_{ab}(g;R)=\frac{K^2}{B}r_{ab}-(gZ+q)\frac{r_{ad}R^dr_{be}R^e}{q}\frac{K^2}{B^2},$$

откуда следует

$$\det(h_{ab})=\det(g_{pq})\frac{1}{V^2}.$$

Использование компонент картановского тензора (которые приведены в явном виде в конце настоящего раздела) ведет после довольно трудоемких вычислений к простому и замечательному результату:

Теорема 1. *Картановский тензор, ассоциируемый с ФМФ* (2.30), *имеет следующий специальный алгебраический вид*

$$C_{pqr}=\frac{1}{N}\left(h_{pq}C_r+h_{pr}C_q+h_{qr}C_p-\frac{1}{C_sC^s}C_pC_qC_r\right) \tag{2.66}$$

со сверткой

$$C_tC^t=\frac{N^2}{4K^2}g^2. \tag{2.67}$$

С помощью (2.65) выяснение структуры тензора кривизны

$$S_{pqrs}:=(C_{tqr}C_p{}^t{}_s-C_{tqs}C_p{}^t{}_r) \tag{2.68}$$

приводит к простому представлению

$$S_{pqrs}=-\frac{C_tC^t}{N^2}(h_{pr}h_{qs}-h_{ps}h_{qr}). \tag{2.69}$$

Вставляя сюда (2.66), мы приходим к выводу, что справедлива

Теорема 2. *Тензор кривизны пространства* $\mathcal{E}_g^{PD}$ *имеет специальный вид*

$$S_{pqrs}=S^*(h_{pr}h_{qs}-h_{ps}h_{qr})/K^2 \tag{2.70}$$

со значением

$$S^*=-\frac{1}{4}g^2. \tag{2.71}$$

Определение. ФМФ (2.30) вводит $(N-1)$-мерную гиперповерхность индикатрисы согласно уравнению

$$K(g;R)=1. \tag{2.72}$$

Мы назовем эту гиперповерхность *Финслероидом* {*Finsleroid* по-английски}, используя для него обозначение $\mathcal{F}_g^{PD}$.

Вспоминая известную формулу $\mathcal{R}=1+S^*$ для кривизны индикатрисы (см. [4]), из (2.70) – (2.71) мы делаем вывод, что

$$\mathcal{R}_{Finsleroid}=h^2=1-\frac{1}{4}g^2, \qquad 0<\mathcal{R}_{Finsleroid}\le 1. \tag{2.73}$$

Геометрически тот факт, что величина (2.71) не зависит от векторов R означает, что кривизна индикатрисы является константой. Следовательно верна

Теорема 3. *Финслероид* $\mathcal{F}_g^{PD}$ *является пространством постоянной кривизны с положительным значением* (2.73) *для кривизны.*

Кроме того, сравнивая результат (2.73) и формулы (2.22) – (2.23), мы можем утверждать, что справедлива

Теорема 4. *Кривизна финслероида соответствует дискриминанту исходной характеристической квадратичной формы* (2.22) *просто согласно равенству*

$$\mathcal{R}_{Finsleroid}=-\frac{1}{4}D_{\{B\}}. \tag{2.74}$$

Полезно заметить, что

$$\mathcal{R}_{Finsleroid}\overset{g\to 0}{\Longrightarrow}\mathcal{R}_{Euclidean\ Sphere}=1,$$

где мы использовали (2.73) и (2.23).

В заключение раздела мы выпишем явно компоненты соответствующего картановского тензора

$$C_{pqr}:=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{pq}}{\partial R^r}\ :$$

$$R^N C_{NNN}=gw^3V^2Q^{-3}, \qquad R^N C_{aNN}=-gww_aV^2Q^{-3},$$

$$R^N C_{abN}=\frac{1}{2}gwV^2Q^{-2}r_{ab}+\frac{1}{2}g(1-gw-w^2)w_aw_bw^{-1}V^2Q^{-3},$$

$$R^N C_{abc}=-\frac{1}{2}gV^2Q^{-2}w^{-1}(r_{ab}w_c+r_{ac}w_b+r_{bc}w_a)+gw_aw_bw_cw^{-3}\left(\frac{1}{2}Q+gw+w^2\right)V^2Q^{-3};$$

и

$$R^N C_N{}^N{}_N=gw^3/Q^2, \qquad R^N C_a{}^N{}_N=-gww_a/Q^2,$$

$$R^N C_N{}^a{}_N=-gw(1+gw)w^a/Q^2,$$

$$R^N C_a{}^N{}_b=\frac{1}{2}gwr_{ab}/Q+\frac{1}{2}g(1-gw-w^2)w_aw_b/wQ^2,$$

$$R^N C_N{}^a{}_b=\frac{1}{2}gw\delta^a_b/Q+\frac{1}{2}g(1+gw-w^2)w^aw_b/wQ^2,$$

$$R^N C_a{}^b{}_c=-\frac{1}{2}g\left(\delta^b_aw_c+\delta^b_cw_a+(1+gw)r_{ac}w^b\right)/wQ+\frac{1}{2}g(gwQ+Q+2w^2)w_aw^bw_c/w^3Q^2.$$

Компоненты вычислялись с помощью формул (2.50) – (2.53).

Использование сверток

$$R^NC_a{}^b{}_cr^{ac}=-g\frac{w^b}{w}\frac{1+gw}{Q}\left(\frac{N-2}{2}+\frac{1}{Q}\right)$$

и

$$R^NC_a{}^b{}_cw^aw^c=-g\frac{w}{Q^2}(1+gw)w^b$$

удобно во многих вычислениях. Справедливо также

$$R^NC_N=\frac{N}{2}gwQ^{-1},\qquad R^NC_a=-\frac{N}{2}g(w_a/w)Q^{-1},$$

$$R^NC^N=\frac{N}{2}gw/V^2,\qquad R^NC^a=-\frac{N}{2}gw^a(1+gw)/wV^2,$$

$$C^N=\frac{N}{2}gwR^NK^{-2},\qquad C^a=-\frac{N}{2}gw^a(1+gw)w^{-1}R^NK^{-2},$$

$$C_pC^p=\frac{N^2}{4K^2}g^2.$$

3. Квазиевклидово отображение Финслероида

Теорема 8 может быть продолжена дальше путем указания диффеоморфизма

$$\mathcal{F}_g^{PD}\overset{i_g}{\Longrightarrow}\mathcal{S}^{PD} \tag{3.1}$$

Финслероида $\mathcal{F}_g^{PD}\subset V_N$ единичной сфере $\mathcal{S}^{PD}\subset V_N$:

$$\mathcal{S}^{PD}=\{R\in\mathcal{S}^{PD}:\ S(R)=1\}, \tag{3.2}$$

где

$$S(R)=\sqrt{r_{pq}R^pR^q}\equiv\sqrt{(R^N)^2+r_{ab}R^aR^b} \tag{3.3}$$

является начальной евклидовой метрической функцией (см. (2.11)).

Диффеоморфизм (3.1) всегда может быть расширен, чтобы получить диффеоморфное отображение

$$V_N\overset{\sigma_g}{\Longrightarrow}V_N \tag{3.4}$$

всего векторного пространства V_N с помощью однородности:

$$\sigma_g\cdot(bR)=b\sigma_g\cdot R,\quad b>0. \tag{3.5}$$

С этой целью достаточно взять просто

$$\sigma_g\cdot R=||R||i_g\cdot\left(\frac{R}{||R||}\right), \tag{3.6}$$

где

$$||R||=K(g;R). \tag{3.7}$$

Из (3.1) – (3.7) вытекает

$$K(g;R)=S(\sigma_g\cdot R). \tag{3.8}$$

Тождество (2.57) подсказывает взять отображение

$$\bar{R} = \sigma_g \cdot R \tag{3.9}$$

с помощью компонент

$$\bar{R}^p = \sigma^p(g; R) \tag{3.10}$$

с функциями

$$\sigma^a = R^a hJ(g; R), \qquad \sigma^N = A(g; R)J(g; R), \tag{3.11}$$

где $J(g; R)$ и $A(g; R)$ – функции (2.31) и (2.39). Действительно, вставляя (3.11) в (3.3) и принимая во внимание (2.30) и (2.57), мы получаем тождество

$$S(\bar{R}) = K(g; R), \tag{3.12}$$

которое эквивалентно предположенному соотношению (3.8).

Итак, мы приходим к выводу, что справедлива

Теорема 5. *Отображение, заданное явно формулами* (3.9) – (3.11), *устанавливает диффеоморфизм между Финслероидом и единичной сферой согласно формулам* (3.1) – (3.8).

Соответственно мы введем

Определение. При этих условиях отображение (3.1) называется *квазиевклидовым отображением Финслероида.*

Обращение

$$R = \mu_g \cdot \bar{R}, \qquad \mu_g = (\sigma_g)^{-1}, \tag{3.13}$$

преобразования (3.9) – (3.11) может быть представлено компонентами

$$R^p = \mu^p(g; \bar{R}) \tag{3.14}$$

с функцией

$$\mu^a = \bar{R}^a / hk(g; \bar{R}), \qquad \mu^N = I(g; \bar{R})/k(g; \bar{R}), \tag{3.15}$$

где

$$k(g; \bar{R}) := J(g; \mu(g; \bar{R})) \tag{3.16}$$

и

$$I(g; \bar{R}) = \bar{R}^N - \frac{1}{2} G \sqrt{r_{ab} \bar{R}^a \bar{R}^b}. \tag{3.17}$$

Тождество

$$\mu^p(g; \sigma(g; R)) \equiv R^p \tag{3.18}$$

легко проверяется. Заметим, что

$$\frac{\sqrt{r_{ab}\bar{R}^a\bar{R}^b}}{\bar{R}^N} = \frac{hq}{A(g; R)}, \qquad w^a = \frac{R^a}{R^N} = \frac{\bar{R}^a}{hI(g; \bar{R})}, \tag{3.19}$$

и

$$\sqrt{B}/Z = S/I, \qquad \sqrt{Q} = S/I. \tag{3.20}$$

σ_g-образ

$$\phi(g; \bar{R}) := \Phi(g; R)\big|_{R=\mu(g;\bar{R})} \tag{3.21}$$

функции Φ, описываемой формулами (2.31) – (2.42), имеет ясный смысл угла:

$$\phi(g;\bar{R}) = \operatorname{arcctg}\frac{\bar{R}^N}{\sqrt{r_{ab}\bar{R}^a\bar{R}^b}} = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{r_{ab}\bar{R}^a\bar{R}^b}}{\bar{R}^N}, & \text{если} \quad \bar{R}^N \geq 0; \\ -\dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{r_{ab}\bar{R}^a\bar{R}^b}}{\bar{R}^N}, & \text{если} \quad \bar{R}^N \leq 0; \end{cases} \tag{3.22}$$

он лежит в пределах

$$-\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}. \tag{3.23}$$

Мы имеем

$$\phi = \frac{\pi}{2}, \quad \text{если} \quad \bar{R}^a = 0 \quad \text{и} \quad \bar{R}^N > 0; \qquad \phi = -\frac{\pi}{2}, \quad \text{если} \quad \bar{R}^a = 0 \quad \text{и} \quad \bar{R}^N < 0, \tag{3.24}$$

а также

$$\phi\big|_{\bar{R}^N=0} = 0. \tag{3.25}$$

Сравнение формул (3.16) и (2.31) показывает, что

$$k = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}G\phi}. \tag{3.26}$$

Правые части в (3.11) – однородные функции степени 1:

$$\sigma^p(g;bR) = b\sigma^p(g;R), \quad b > 0. \tag{3.27}$$

Следовательно тождество

$$\sigma^p_s(g;R)R^s = \bar{R}^p \tag{3.28}$$

должно быть верным для производных

$$\sigma^q_p(g;R) := \frac{\partial\sigma^q(g;R)}{\partial R^p}. \tag{3.29}$$

На таком пути получаются простые представления

$$\sigma^N_N(g;R) = \left(B + \frac{1}{2}gqA\right)\frac{J}{B}, \tag{3.30}$$

$$\sigma^N_a(g;R) = -\frac{g(ZA-B)}{2q}\frac{Jr_{ab}R^b}{B}, \tag{3.31}$$

$$\sigma^a_N(g;R) = \frac{1}{2}gq\frac{JR^ah}{B}, \tag{3.32}$$

$$\sigma^a_b(g;R) = \left(B\delta^a_b - \frac{gr_{bc}R^cR^aZ}{2q}\right)\frac{Jh}{B}, \tag{3.33}$$

а также детерминант

$$\det(\sigma^q_p) = h^{N-1}J^N. \tag{3.34}$$

Соотношения

$$\sigma^a_bR^b = JhR^a(AZ+q^2)/B, \qquad r^{cd}\sigma^a_c\sigma^b_d = J^2h^2\left[r^{ab} - g(R^aR^bZ/qB) + \frac{1}{4}g^2(R^aR^bZ^2/B^2)\right]$$

полезны во многих вычислениях, включающих коэффициенты $\{\sigma^q_p\}$.

В дальнейшем, для упрощения обозначений, мы будем использовать подстановку

$$t^p = \bar{R}^p. \tag{3.35}$$

Снова мы учитываем однородность

$$\mu^p(g;bt) = b\mu^p(g;t), \quad b > 0, \tag{3.36}$$

для функций (3.15), откуда вытекает тождество

$$\mu^p_s(g;t)t^s = R^p \tag{3.37}$$

для производных

$$\mu^p_q(g;t) := \frac{\partial\mu^p(g;t)}{\partial t^q}. \tag{3.38}$$

Мы находим

$$\mu^N_N = 1/k(g;t) - \frac{1}{2}g\frac{m(t)I(g;t)}{k(g;t)(S(t))^2}, \qquad \mu^N_a = \frac{1}{2}g\frac{r_{ac}t^cI^*(g;t)}{k(g;t)(S(t))^2}, \tag{3.39}$$

$$\mu^a_N = -\frac{1}{2}g\frac{m(t)\,t^a}{hk(g;t)(S(t))^2}, \qquad \mu^a_b = \frac{1}{hk(g;t)}\delta^a_b + \frac{1}{2}g\frac{t^Nt^ar_{bc}t^c}{m(t)\,hk(g;t)(S(t))^2}, \tag{3.40}$$

где

$$m(t) = \sqrt{r_{ab}t^at^b}, \tag{3.41}$$

$$I^*(g;t) = hm(t) - \frac{1}{2}gt^N \tag{3.42}$$

и

$$S(t) = \sqrt{r_{rs}t^rt^s} \equiv \sqrt{(t^N)^2 + r_{ab}t^at^b}. \tag{3.43}$$

В частности, из вышеприведенных формул получаются соотношения

$$\frac{\partial(1/k(g;t))}{\partial t^N} = -\frac{1}{2}g\frac{m(t)}{hk(g;t)(S(t))^2}, \qquad \frac{\partial(1/k(g;t))}{\partial t^a} = \frac{1}{2}g\frac{t^Nr_{ab}t^b}{m(t)hk(g;t)(S(t))^2}$$

.

Следует отметить также, что

$$R_p\mu^p_q = t_q, \qquad t_p\sigma^p_q = R_q. \tag{3.44}$$

Единичные векторы

$$L^p := \frac{t^p}{S(t)}, \qquad L_p := r_{pq}L^q \tag{3.45}$$

удовлетворяют соотношениям

$$L^q = l^p\sigma^q_p, \qquad l^p = \mu^p_qL^q, \qquad l_p = \sigma^q_pL_q, \qquad L_p = \mu^q_pl_q, \tag{3.46}$$

где $l^p = R^p/K(g;R)$ и $l_p = R_p/H(g;R)$ – начальные финслеровы единичные векторы.

Теперь мы используем явные формулы (2.61) – (2.62) и (3.29) – (3.32) для нахождения преобразования

$$n^{rs}(g;t) := \sigma^r_p\sigma^s_qg^{pq} \tag{3.47}$$

для ФМТ g_{pq} при $\mathcal{F}_g^{PD}$-индуцированном отображении (3.9) – (3.11), так что справедлива

Теорема 6. *Получается простое представление*

$$n^{rs}=h^2r^{rs}+\frac{1}{4}g^2L^rL^s. \tag{3.48}$$

Ковариантная версия имеет вид

$$n_{rs}=\frac{1}{h^2}r_{rs}-\frac{1}{4}G^2L_rL_s. \tag{3.49}$$

Детерминант этого тензора является константой:

$$\det(n_{rs})=h^{2(1-N)}\det(r_{ab}). \tag{3.50}$$

Заметим, что

$$L^pL_p=1,\quad n_{pq}L^q=L_p,\quad n^{pq}L_q=L^p,\quad n_{pq}L^pL^q=1,\quad n_{pq}t^pt^q=(S(t))^2.$$

Из (3.47) очевидно следует

$$g_{pq}=n_{rs}(g;t)\sigma_p^r\sigma_q^s. \tag{3.51}$$

4. Квазиевклидов метрический тензор

Введем

Определение. Метрический тензор, задаваемый компонентами (3.48) – (3.49), называется *квазиевклидовым.*

Определение. *Квазиевклидово пространство*

$$\mathcal{Q}_N=\{V_N;n_{pq}(g;t);g\} \tag{4.1}$$

является обобщением евклидова пространства $\{V_N;r_{pq}\}$ на случай $g\neq 0$.

Преобразование (3.47) может быть обращено, что дает представление

$$g_{pq}=\sigma_p^r\sigma_q^s n_{rs}. \tag{4.2}$$

Для углового метрического тензора (см. формулу, идущую ниже (2.65)), из (3.46) и (4.2) мы выводим

$$h_{pq}=\sigma_p^r\sigma_q^sH_{rs}\frac{1}{h^2}, \tag{4.3}$$

где

$$H_{rs}:=r_{rs}-L_rL_s \tag{4.4}$$

– тензор, показывающий свойство ортогональности

$$L^rH_{rs}=0. \tag{4.5}$$

Легко найти, что

$$H_{rs}=h^2(n_{rs}-L_rL_s).$$

Теорема 7. Квазиевклидов метрический тензор (3.48) – (3.49) является *конформным* евклидову метрическому тензору.

Действительно, если мы рассмотрим отображение

$$\bar{R}^p \to \tilde{R}: \qquad \tilde{R}^p = f(g;\bar{R})\bar{R}^p/h \tag{4.6}$$

с функцией

$$f(g;\bar{R}) = a\left(g;\ \frac{1}{2}S^2(\bar{R})\right) \tag{4.7}$$

и используем коэффициенты

$$k^p_q := \frac{\partial \tilde{R}^p}{\partial \bar{R}^q} = (f\delta^p_q + a'\bar{R}^p\bar{R}_q)/h \tag{4.8}$$

для определения тензора

$$c^{pq}(g;\tilde{R}) := k^p_r k^q_s n^{rs}(g;\bar{R}), \tag{4.9}$$

то мы найдем, что

$$c^{pq} = f^2 r^{pq} \tag{4.10}$$

при

$$f = \left[\frac{1}{2}S^2(\bar{R})\right]^{\gamma/2}, \tag{4.11}$$

где

$$\gamma = h - 1 \equiv \sqrt{1 - \frac{g^2}{4}} - 1 \tag{4.12}$$

– параметр. Доказательство Теоремы 7 завершено.

Используем теперь полученный квазиевклидов метрический тензор $n_{pq}(g;t)$ для построения ассоциируемых *квазиевклидовых символов Кристоффеля* $N_p{}^r{}_q(g;t)$. Мы последовательно находим:

$$n_{pq,r} := \frac{\partial n_{pq}}{\partial t^r} = -\frac{1}{4}G^2(H_{pr}L_q + H_{qr}L_p)/S, \tag{4.13}$$

и

$$N_p{}^r{}_q = n^{rs}N_{psq}, \qquad N_{prq} = \frac{1}{2}(n_{pr,q} + n_{qr,p} - n_{pq,r}), \tag{4.14}$$

вместе с

$$N_{prq}(g;t) = -\frac{1}{4}G^2 H_{pq}L_r/S, \tag{4.15}$$

что окончательно дает

$$N_p{}^r{}_q(g;t) = -\frac{1}{4}G^2 L^r H_{pq}/S. \tag{4.16}$$

Сравнение представления (4.16) с тождеством (4.5) показывает, что

$$t^p N_p{}^r{}_q = 0, \qquad N_p{}^s{}_s = 0, \qquad N_t{}^s{}_r N_p{}^t{}_q = 0. \tag{4.17}$$

Кроме того,

$$\frac{\partial N_p{}^r{}_q}{\partial t^s} - \frac{\partial N_p{}^r{}_s}{\partial t^q} = -\frac{1}{4}G^2(H_{pq}H_s{}^r - H_{ps}H_q{}^r)/S^2. \tag{4.18}$$

Используя тождества (4.17)-(4.18) в *квазиевклидовом тензоре кривизны*:

$$R_p{}^r{}_{qs}(g;t) := \frac{\partial N_p{}^r{}_q}{\partial t^s} - \frac{\partial N_p{}^r{}_s}{\partial t^q} + N_p{}^w{}_q N_w{}^r{}_s - N_p{}^w{}_s N_w{}^r{}_q, \tag{4.19}$$

мы приходим к простому результату:

$$R_{prqs}(g;t) = -\frac{1}{4}G^2(H_{pq}H_{rs} - H_{ps}H_{qr})/S^2. \tag{4.20}$$

Отсюда вытекают тождества

$$L^p R_{pqrs} = L^q R_{pqrs} = L^r R_{pqrs} = L^s R_{pqrs} = 0. \tag{4.21}$$

Замечание. Вследствие законов преобразования (3.12) и (3.47) представление (4.20) равнозначно формулам (2.69) – (2.70). Следовательно *мы получили другое строгое доказательство Теоремы* 3, *а также формулы* (2.73), *показывающей кривизну Финслероида.*

Литература

[1] E. Cartan: *Les espaces de Finsler, Actualites* 79, Hermann, Paris 1934.

[2] Г. Буземан: *Геометрия Геодезических,* Физ.-Мат., М. 1962.

[3] Х. Рунд: *Дифференциальная геометрия Финслеровых Пространств,* Наука, М. 1981.

[4] G. S. Asanov: *Finsler Geometry, Relativity and Gauge Theories,* D. Reidel Publ. Comp., Dordrecht 1985.

[5] G. S. Asanov: *Aeq. Math.* **49** (1995), 234; *Rep. Math. Phys.* **45** (2000), 155; **47** (2001), 323; *Moscow University Physics Bulletin* **49**(1) (1994), 18; **51**(1) (1996), 15; **51**(2) (1996), 6; **51**(3) (1996), 1; **53**(1) (1998), 15.

[6] G. S. Asanov: arXiv: hep-ph/0306023, 2003; arXiv: math-ph/0310019, 2003; arXiv: math.m.g./0402013, 2004.

[7] К. Мёллер: *Теория Относительности,* Атомиздат, М. 1975.

[8] Дж. Синг: *Общая Теория Относительности,* Ин.Лит., М. 1963.

[9] D. G. Pavlov: *Hypercomplex Numbers, Associated Metric Spaces, and Extension of Relativistic Hyperboloid*, gr-qc/0206004.

[10] D. G. Pavlov: *Hypercomplex Quadrahyperbolic Numbers and Associated Nonlinear Invariance*, gr-qc/021290.

Приложение

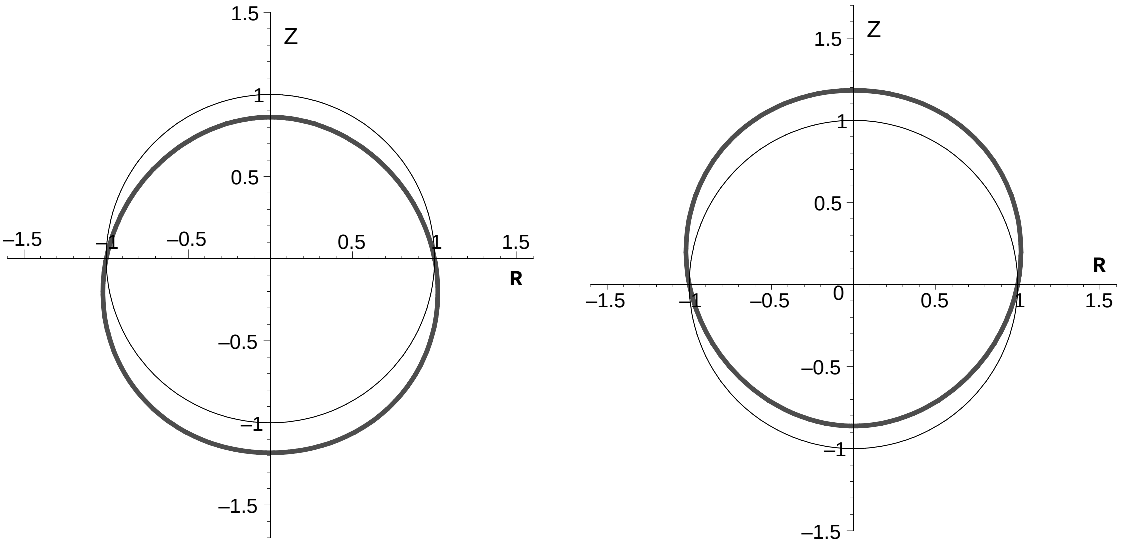


Рис. 3: $g = 0.2$ и $g = -0.2$

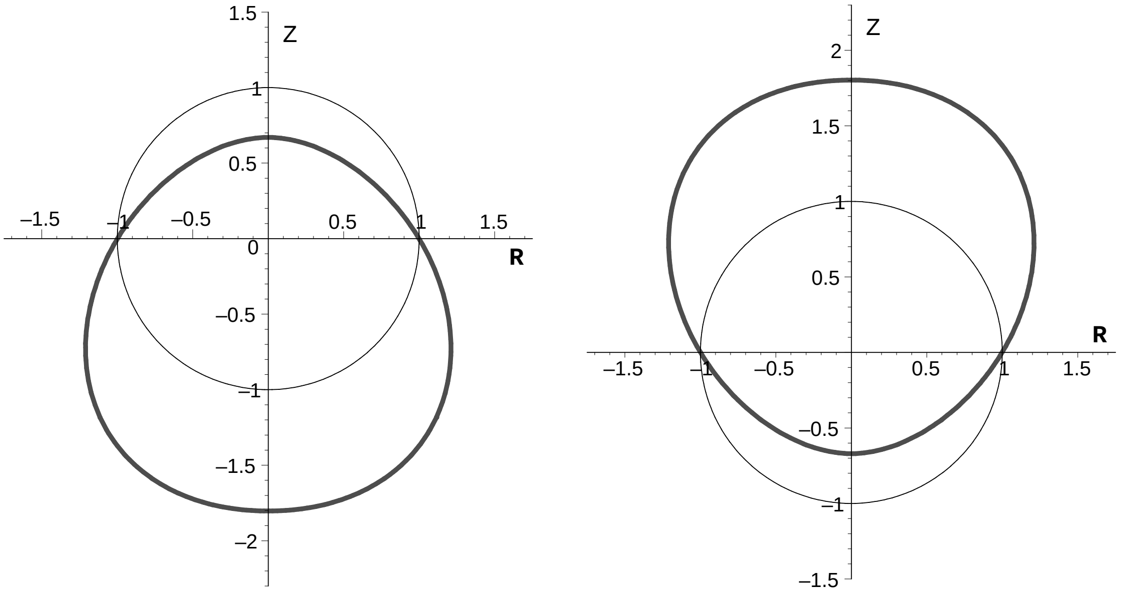


Рис. 4: $g = 0.6$ и $g = -0.6$

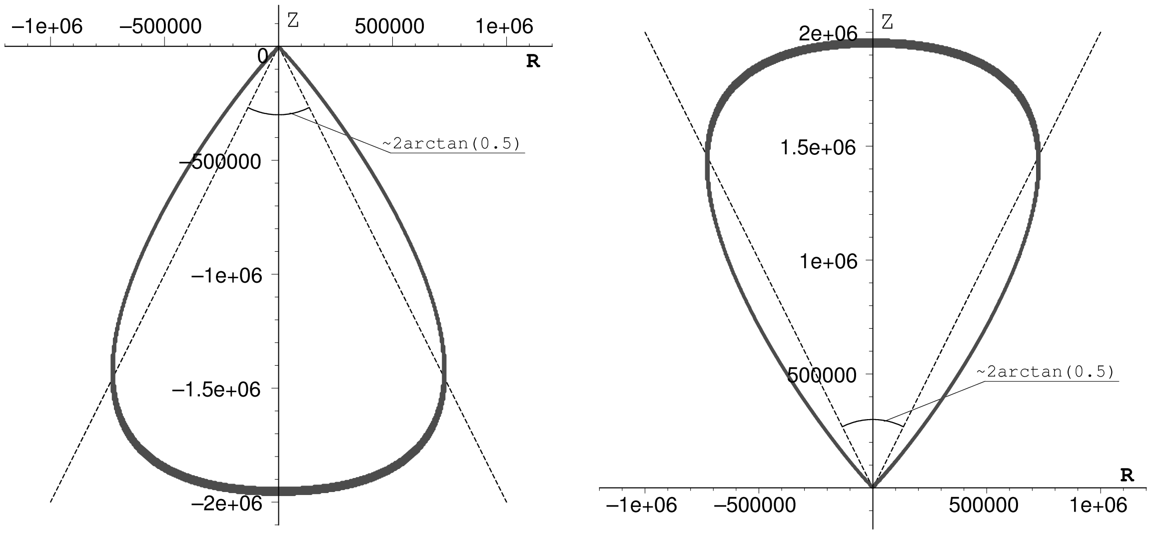


Рис. 5: $g = 1.96$ и $g = -1.96$

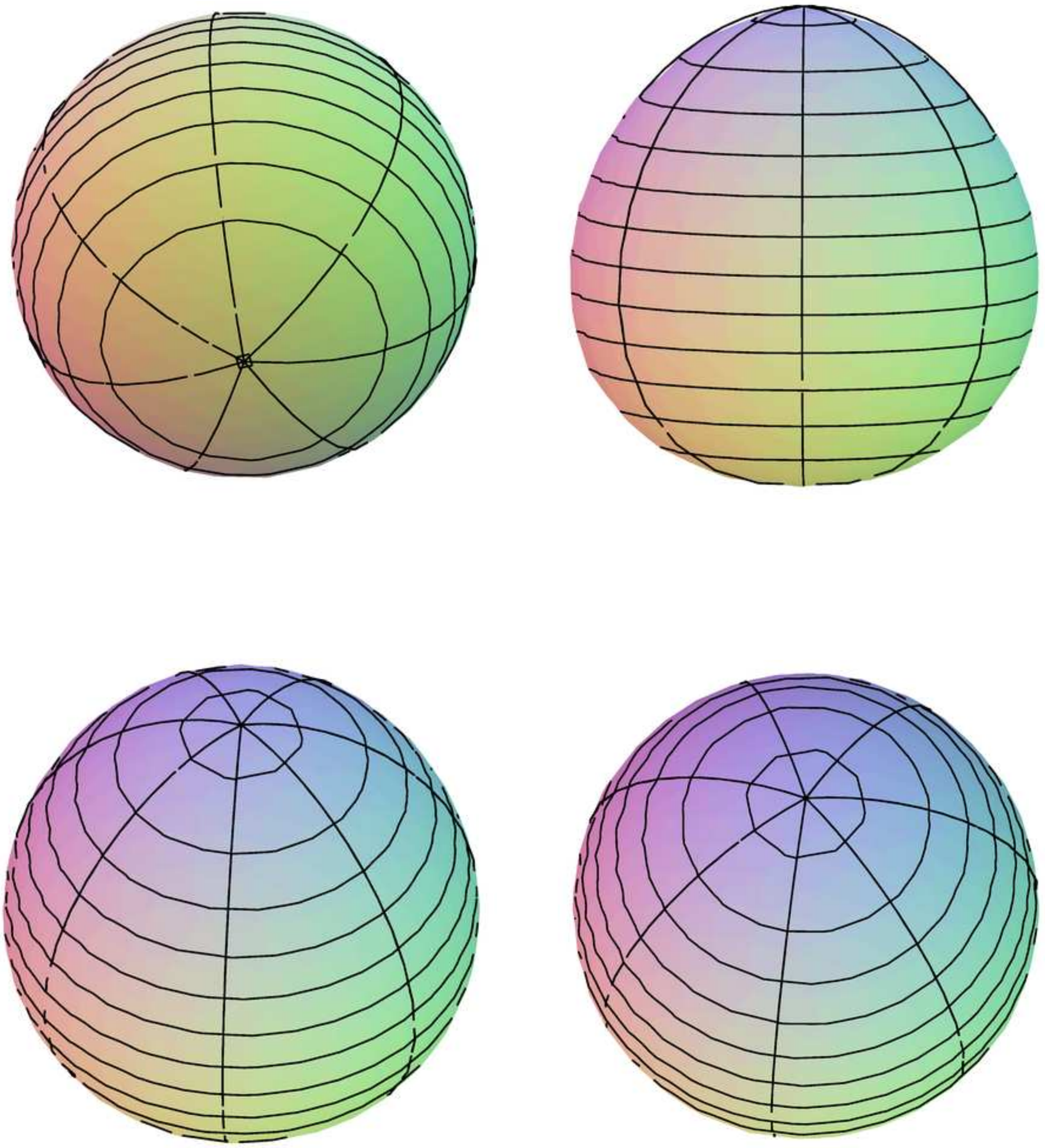


Рис. 6: $3D$-образы Финслероида; $g = 0.6$

СВОЙСТВА ПРОСТРАНСТВ, СВЯЗАННЫХ С КОММУТАТИВНО-АССОЦИАТИВНЫМИ АЛГЕБРАМИ H_3 И H_4

С. В. Лебедев

НИИ прикладной математики и механики МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва
leb@edu.bmstu.ru

В первой части работы действительная ось пространства, ассоциированного с алгеброй H_3, и параллельные этой оси прямые интерпретируются как мировые линии покоящихся частиц; для введения расстояния между действительной осью и параллельной ей прямой используется поверхность одновременности. Задание на этой поверхности системы координат, аналогичной полярной, позволяет указать ее простейшие инвариантные преобразования. Во второй части преобразования Лоренца представлены в виде поворотов специального вида в пространстве, ассоциированном с алгеброй H_4.

Введение

Алгебры H_3 и H_4 принадлежат к коммутативно-ассоциативным алгебрам типа H_n, которые наиболее просты по своей структуре. Алгебры такого вида характеризуются тем, что в них существует выделенный базис, в котором операция умножения чисел осуществляется покомпонентно – так же, как и операция сложения в произвольных алгебрах. С другой стороны, в алгебрах вида H_n, которые могут быть названы гиперболическими, алгебры H_3 и H_4 следуют непосредственно за алгебрами действительных (H_1) и двойных (H_2) чисел, которые обладают важными для их физического применения свойствами [6, 11]. Выскажем предположение о "наследовании" этих свойств рассматриваемыми алгебрами третьей и четвертой размерности. В качестве обоснования этого предположения напомним о связи рассматриваемой в финслеровом обобщении теории относительности метрики Бервальда-Моора с алгеброй H_4 [1]. С точки зрения возможных приложений гиперболическая алгебра H_4 наиболее перспективна в силу топологической выделенности пространств размерности $n = 4$ [7]. Однако алгебра H_3 обладает одним несомненным преимуществом. В трехмерном метрическом пространстве, ассоциированном с этой алгеброй, в полной мере возможно применение компьютерной визуализации и анимации фигур, поверхностей и линий. Хотя аналитические возможности такого применения не стоит переоценивать, оно придает особую наглядность геометрическим свойствам этого пространства. Поэтому предлагаемый в первой части работы достаточно общий подход к физической трактовке свойств гиперболических пространств излагается на примере пространства, ассоциированного с алгеброй H_3. Ее свойства задают в ассоциированном пространстве куб нормы вида

$$|A|^3 = |a^1 a^2 a^3|,$$

где a^i – компоненты вектора в выделенном базисе, составленном из трех чисел e_i, где $i = 1, 2, 3$, со свойствами $(e_i)^2 = e_i$, $e_i \cdot e_j = 0$ при $i \neq j$. Действительные числа на прямой можно разделить на два разряда: расположенные справа от нуля положительные числа и расположенные слева от нуля отрицательные. В алгебре двойных чисел две изотропные прямые делят псевдоевклидову плоскость на 2^2 квадрантов. Аналогично этому рассматриваемое ассоциированное пространство разделяется на 2^3 октантов, и для всех чисел, соответствующих точкам одного октанта, характерно одно и то же сочетание знаков компонент в выделенном базисе. Границами октантов являются три изотропных плоскости с уравнениями $a^i = 0$, где $i = 1, 2, 3$. Отметим также, что поскольку гиперболические алгебры являются алгебрами с единицей, определяемой выражением

$$1 = e_1 + e_2 + \cdots + e_n,$$

то два октанта рассматриваемого пространства являются выделенными. Это – октанты, содержащие 1 и -1; они характеризуются числами со всеми положительными или отрицательными компонентами соответственно.

Использование рассматриваемых алгебр требует наличия евклидовых или псевдоевклидовых свойств. В ряду алгебр: алгебра Дирака [2], кватернионов [3], бикватернионов [5] – существование таких свойств обеспечивает классический вид нормы числа. Однако количество таких алгебр незначительно, а среди коммутативно-ассоциативных алгебр к таковым относится (кроме комплексных чисел) только алгебра двойных чисел, в которой квадрат нормы числа имеет следующий вид [4]:

$$|A|^2 = |(a^1)^2 - (a^2)^2|.$$

Другую возможность для обнаружения в пространствах, ассоциированных с рассматриваемыми алгебрами, свойств, которые сходны со свойствами евклидовых или псевдоевклидовых пространств, дает метод хроногеометрии [8], [12]; использование этого метода применительно к H_3 рассматривается в первой части работы. Еще одна возможность для обнаружения искомых свойств дает применение ассоциированной с алгеброй симметричной полилинейной формы [9], имеющей, например, для алгебры H_3 следующий вид:

$$(A, B, C) = \frac{1}{3!}(a^1b^2c^3 + \cdots + a^3b^2c^1).$$

С такой возможностью применительно к алгебре H_4 связана вторая часть настоящей работы, где форма, имеющая вид псевдоевклидовой метрики, определяется при помощи полилинейной формы от четырех векторов.

1. Поверхность одновременности в коммутативно-ассоциативных алгебрах (на примере H_3)

1.1. *Аксиоматика*

В основу физической интерпретации свойств рассматриваемого класса алгебр положим следующие положения, играющие роль аксиом:

1. Число алгебры можно связать с некоторым пространственно-временным событием.

2. Действительная ось пространства, направление которой задается единицей алгебры, трактуется как ось времени, а норма числа интерпретируется как интервал собственного времени наблюдателя, мировая линия которого совпадает с вектором, соответствующим данному числу.

3. Увеличение относительной скорости частицы или сигнала выражается в увеличении наклона касательной к мировой линии частицы в данной точке к мировой линии наблюдателя, а покоящиеся материальные точки имеют в качестве мировых линий прямые, параллельные линии наблюдателя.

4. Световые сигналы, обладающие максимальной скоростью, связываются с изотропными гиперповерхностями алгебры; скорость световых сигналов полагается не зависящей от направления их распространения. В соответствии с этими положениями аналогами конусов будущего и прошлого пространства Минковского в пространстве, ассоциированном с алгеброй H_3, являются два упомянутых выше выделенных октанта с 1 и -1 соответственно. В отличие от пространства Минковского, в рассматриваемом пространстве область за пределами этих конусов также обладает изотропными направлениями, поскольку состоит из шести боковых конусов. В этой работе ограничимся наиболее простым частным случаем, когда мировая линия наблюдателя совпадает с действительной осью.

1.2. *Экспоненциальная форма представления числа алгебры* H_3 *в базисе* $(1, j, k)$

В выделенном базисе любое число представляется в виде:

$$A = a^1 \cdot e_1 + a^2 \cdot e_2 + a^3 \cdot e_3.$$

Для экспоненциальной функции в этом базисе имеет место формула:

$$\exp(a^1 \cdot e_1 + a^2 \cdot e_2 + a^3 \cdot e_3) = \exp(a^1) \cdot e_1 + \exp(a^2) \cdot e_2 + \exp(a^3) \cdot e_3. \tag{1}$$

Поскольку в рассматриваемой алгебре справедливо $|A|^3 = |a^1 a^2 a^3|$, то число с $a^i > 0$ представимо в виде

$$A = |A| \cdot \exp(b^1 e_1 + b^2 e_2 + b^3 e_3)$$

с условием

$$b_1 + b_2 + b_3 = 0, \tag{2}$$

из которого вытекает тождество:

$$|\exp(b^1 e_1 + b^2 e_2 + b^3 e_3)| = 1.$$

Перейдем в другой базис алгебры, составленный из векторов:

$$\begin{cases} 1 = e_1 + e_2 + e_3 \\ j = \sin\varphi_0 \cdot e_1 + \sin(\varphi_0 + 2\pi/3) \cdot e_2 + \sin(\varphi_0 + 4\pi/3) \cdot e_3 \\ k = \cos\varphi_0 \cdot e_1 + \cos(\varphi_0 + 2\pi/3) \cdot e_2 + \cos(\varphi_0 + 4\pi/3) \cdot e_3 \end{cases} \tag{3}$$

Этот базис составляют взаимно ортогональные (в привычном евклидовом смысле) векторы, а произвольный параметр φ_0 можно в определенном смысле трактовать как угол совместного поворота пары векторов j, k вокруг действительной оси. Если t, x, y – координаты числа в новом базисе, то в соответствии с правилами преобразования компонент числа при переходе к другому базису имеем систему:

$$\begin{cases} a^1 = t + \sin\varphi_0 \cdot x + \cos\varphi_0 \cdot y \\ a^2 = t + \sin(\varphi_0 + 2\pi/3) \cdot x + \cos(\varphi_0 + 2\pi/3) \cdot y \\ a^3 = t + \sin(\varphi_0 + 4\pi/3) \cdot x + \cos(\varphi_0 + 4\pi/3) \cdot y \end{cases} \tag{4}$$

откуда следует, что $t = (a^1 + a^2 + a^3)/3$. Поэтому в силу (2) число, представимое в экспоненциальной форме, в базисе (1,j,k) имеет вид:

$$A = |A| \cdot e^{\alpha \cdot j + \beta \cdot k}.$$

Если модифицировать это экспоненциальное представление, введя обозначение $\rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$, то получим

$$A = |A| \cdot e^{\rho(\cos\varphi \cdot j + \sin\varphi \cdot k)}. \qquad (5)$$

Таким образом, согласно (5), число при таком представлении задается тремя параметрами: нормой числа $|A|$, "радиальной координатой" ρ и "угловой координатой" φ. Покомпонентная запись для (5) с учетом (1) и (3) имеет простой и красивый вид:

$$\begin{cases} a^1 = |A| \cdot \exp(\rho \sin[\varphi_0 + \varphi]) \\ a^2 = |A| \cdot \exp(\rho \sin[\varphi_0 + 2\pi/3 + \varphi]) \\ a^3 = |A| \cdot \exp(\rho \sin[\varphi_0 + 4\pi/3 + \varphi]) \end{cases}$$

1.3. *Метод задания расстояния между действительной осью и параллельной ей прямой*

Для определения расстояния между мировыми линиями покоящихся частиц (одна из которых лежит на действительной оси) используем метод хроногеометрии. Рассмотрим обмен сигналами постоянной скорости $\nu \leq c$; для простоты точки-события испускания сигнала и приема обратного сигнала расположим симметрично на действительной оси относительно нулевого момента времени. Полагая в силу равенства скорости прямого и обратного сигналов равенство длин $|B - A_1| = |A_2 - B|$, получим:

$$(a^1 + T)(a^2 + T)(a^3 + T) = (T - a^1)(T - a^2)(T - a^3),$$

где $a^i + T > 0, T - a^i > 0$, что после раскрытия скобок дает:

$$(a^1 + a^2 + a^3) \cdot T^2 + a^1 a^2 a^3 = 0. \qquad (6)$$

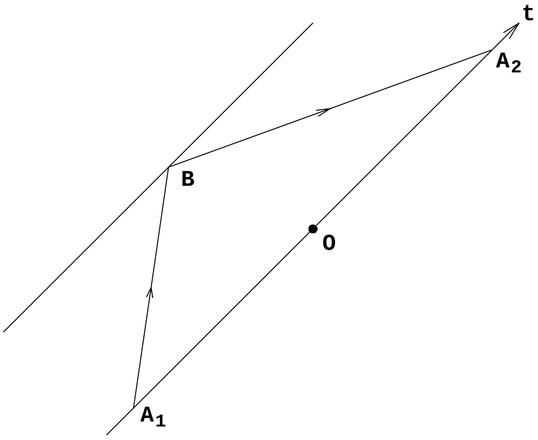


Рис. 1: Измерение расстояния между мировыми линиями путем обмена досветовыми сигналами.

Множество точек-событий, удовлетворяющих уравнению (6), образуют поверхность одновременности: для наблюдателя на действительной оси, находящегося в точке с координатой T, все эти события происходят в один и тот же нулевой момент времени. Поверхности одновременности принадлежит точка $A = (0, 0, 0)$, а плоскость, касательная к этой поверхности в начале координат, имеет уравнение:

$$a^1 + a^2 + a^3 = 0. \tag{7}$$

Подстановка (4) в (6) позволяет получить уравнение поверхности одновременности в форме зависимости времени прохождения сигнала (по часам неподвижного наблюдателя) T от введенных координат $\{t, x, y\}$ точки поверхности одновременности:

$$T^2 = \frac{1}{12}(x^2 + y^2) - \frac{1}{3}\left\{t^2 + \frac{1}{t}\left[\frac{3}{4}xy(y \cdot \sin 3\varphi_0 - x \cdot \cos 3\varphi_0)\right.\right.$$
$$\left.\left. + x^3 \sin\varphi_0 \sin(\varphi_0 + 2\pi/3)\sin(\varphi_0 + 4\pi/3) + y^3 \cos\varphi_0 \cos(\varphi_0 + 2\pi/3)\cos(\varphi_0 + 4\pi/3)\right]\right\}.$$

Согласно этому уравнению (и аналогичным уравнениям для других алгебр, в частности, алгебры H_4) первые слагаемые в правой части имеют евклидову форму, и при их доминировании над оставшимися слагаемыми квадрат времени прохождения сигнала линейно зависит от квадрата евклидова расстояния в пространстве мировых линий, что может представлять ценность для дальнейших физических интерпретаций.

1.4. *Система криволинейных координат поверхности одновременности и преобразования, переводящие ее саму в себя*

Учитывая важность инвариантных преобразований в современной физике, коснемся кратко темы нахождения преобразований, переводящих поверхность одновременности саму в себя. Введем на этой поверхности двухмерную систему координат $\{\rho, \varphi\}$, в чем-то аналогичную полярной системе координат на двухмерной плоскости, а именно:

$$\begin{cases} a^1 = (T-\rho)\cdot e^{R(\rho,\varphi)\sin(\varphi_0+\varphi)} - T, \\ a^2 = (T-\rho)\cdot e^{R(\rho,\varphi)\sin(\varphi_0+2\pi/3+\varphi)} - T, \\ a^3 = (T-\rho)\cdot e^{R(\rho,\varphi)\sin(\varphi_0+4\pi/3+\varphi)} - T, \end{cases} \tag{8}$$

где зависимость $R = R(\rho, \varphi)$ находится из трансцендентного уравнения, получаемого подстановкой координат (8) в (6):

$$\bar{Z}^3 - \bar{Z}^2\left[e^{-R\sin(\varphi_0+\varphi)} + e^{-R\sin(\varphi_0+2\pi/3+\varphi)} + e^{-R\sin(\varphi_0+4\pi/3+\varphi)}\right]$$
$$+2\bar{Z}\left[e^{R\sin(\varphi_0+\varphi)} + e^{R\sin(\varphi_0+2\pi/3+\varphi)} + e^{R\sin(\varphi_0+4\pi/3+\varphi)}\right] - 4 = 0,$$

где $\bar{Z} = (T-\rho)/T$.

В окрестности нуля при $a^1, a^2, a^3 \ll 1,\ R \ll 1,\ \rho \ll 1$ уравнения (8) упрощаются:

$$\begin{cases} a^1 \cong R\cdot T\cdot\sin(\varphi_0+\varphi), \\ a^2 \cong R\cdot T\cdot\sin(\varphi_0+2\pi/3+\varphi), \\ a^3 \cong R\cdot T\cdot\sin(\varphi_0+4\pi/3+\varphi), \end{cases}$$

так что

$$a^1 + a^2 + a^3 \cong 0 \text{ и } (a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2 \cong (R\cdot T)^2. \tag{9}$$

Таким образом, согласно (9), система координат (8) выделена: *в окрестности нуля параметр R пропорционален евклидовому расстоянию от точки, расположенной на поверхности одновременности, до центра этой поверхности, в котором $R = 0$.*

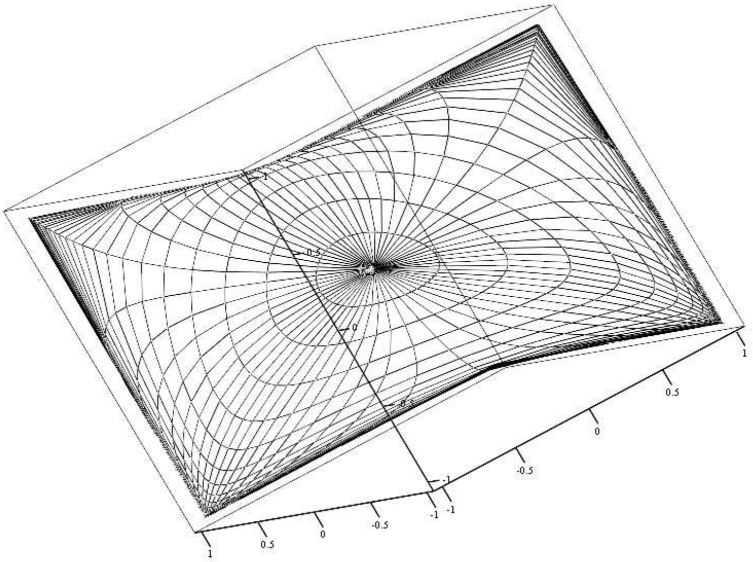


Рис. 2: Криволинейная система координат ρ, ϕ на поверхности одновременности.

Тогда искомые независимые преобразования поверхности одновременности есть "повороты" на угол $\Delta\varphi(\varphi \to \varphi + \Delta\varphi)$ и "преобразования подобия" с коэффициентом $K(\rho \to K \cdot \rho)$.

2. Представление преобразований Лоренца поворотами в пространстве, ассоциированном с алгеброй H_4

Поступая по аналогии с [10], определим скалярное произведение двух произвольных (с положительными значениями компонент) векторов A и B рассматриваемого пространства при помощи симметричной четырехформы пространства H_4 следующим образом:

$$(A, B) := \frac{(A, A, B, B)}{|A| \cdot |B|}.$$

Скалярное произведение двух векторов удовлетворяет свойствам положительности, однородности и нормированности:

1. $(A, B) > 0$;
2. $(kA, B) = (A, kB) = k(A, B)$;
3. $(A, A) = |A|^2$.

Скалярное произведение единичных векторов $a = A/|A|$ и $b = B/|B|$ может рассматриваться как угловая характеристика, определяющая связь двух задаваемых этими векторами направлений – оно выражается через компоненты частного этих векторов ($d = b/a$):

$$(a, b) = (d_1 d_2 + d_1 d_3 + \ldots d_3 d_4)/6. \tag{10}$$

Рассмотрим в пространстве, ассоциированном с алгеброй H_4, базис, состоящий из векторов:

$$\begin{cases} 1 = e_1 + e_2 + e_3 + e_4, \\ j' = 3e_1 - e_2 - e_3 - e_4, \\ k' = \sqrt{2}(2e_2 - e_3 - e_4), \\ l' = \sqrt{6}(e_3 - e_4). \end{cases}$$

Обозначая координаты отношения двух рассматриваемых векторов в новом базисе через t_d, x_d, y_d, z_d и выражая (10) через эти компоненты, получим:

$$(a, b) = t_d^2 - x_d^2 - y_d^2 - z_d^2.$$

Назовем *поворотом* вектора B вокруг вектора A нелинейное преобразование ассоциируемого с алгеброй H_4 четырехмерного пространства, оставляющее неподвижными все векторы в направлении, задаваемом вектором A, и сохраняющее введенное скалярное произведение. Таким образом, в дополнение к другим представлениям группы Лоренца [13] может использоваться представление поворотами вокруг произвольной времениподобной оси в пространстве, связанном с алгеброй H_4.

Результаты и выводы

Метод определения расстояний между мировыми линиями, предложенный для пространства, связанного с коммутативно-ассоциативной алгеброй H_3 (или H_4), позволяет выделить "евклидову составляющую".

Получена новая геометрическая интерпретация преобразований Лоренца как поворотов в пространстве, связанном с алгеброй H_4. Возможно произвольное задание оси поворота; сказанное позволяет надеяться на применение такой новой интерпретации в релятивистской физике.

Литература

[1] G. S. Asanov: *Finsler geometry, relativity and gauge theories*, Reidel, Dordrecht 1985.

[2] D. Hestenes: *Space-time algebra*, Gordon and Breach, N. Y. 1966.

[3] А. В. Березин, Ю. А. Курочкин и Е. А. Толкачев: *Кватернионы в релятивистской физике*, Наука и техника, Минск 1989.

[4] И. Л. Кантор и А. С. Солодовников: *Гиперкомплексные числа*, Наука, М. 1973.

[5] В. В. Кассандров: *Алгебраическая структура пространства-времени и алгебродинамика*, Изд-во Российского Университета Дружбы Народов, М. 1992.

[6] М. А. Лаврентьев и Б. О. Шабат: *Проблемы гидродинамики и их математические модели*, Наука, М. 1977.

[7] Р. В. Михайлов: *О некоторых вопросах 4-мерной топологии: обзор современных исследований*, Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **1**, 2004.

[8] Д. Г. Павлов: *Хронометрия трехмерного времени*, Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **1**, 2004.

[9] Д. Г. Павлов: *Обобщение аксиом скалярного произведения*, Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **1**, 2004.

[10] D. G. Pavlov: *Non-linear Relativistic Invariance for Quadrahyperbolic Numbers*, arXiv:gr-qc/0212090.

[11] П. К. Рашевский: *Введение в риманову геометрию и тензорный анализ*, Гостехиздат, М. 1965.

[12] Дж. Синг: *Общая теория относительности*, Ин. Лит., М. 1963.

[13] Ф. И. Федоров: *Группа Лоренца*, Наука, М. 1979.

ОБОБЩЕННО–АНАЛИТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ПОЛИЧИСЛОВОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Г. И. Гарасько

ГУП Всероссийский электротехнический институт,
gri9z@mail.ru

Вводится понятие обобщенно-аналитической функции поличисловой переменной, которое является нетривиальным обобщением понятия аналитической функции комплексной переменной и поэтому может оказаться фундаментальным для теоретико-физических построений. В качестве примера подробно рассматриваются ассоциативно-коммутативные гиперкомплексные числа H_4 и интересный класс соответствующих обобщенно-аналитических функций.

1. Введение

Пусть M_n – n-мерное элементарное многообразие, а P_n – система n-мерных ассоциативно-коммутативных гиперкомплексных чисел (поличисел, n-чисел), и между этими множествами установлено взаимно однозначное соответствие. Тем самым, если в P_n выбран базис

$$e_1, e_2, ..., e_n; \quad e_i e_j = p^k_{ij} e_k, \tag{1}$$

$$X = x^1 \cdot e_1 + x^2 \cdot e_2 + \cdots + x^n e_n \in P_n \tag{2}$$

$(e_1, e_2, ..., e_n$ – символьные элементы, p^k_{ij} – характеристические действительные числа, а $x^1, x^2, ..., x^n$ – действительные координаты в базисе $(e_1 \equiv 1, e_2, \ldots, e_n)$, то числа $x^1, x^2, ..., x^n$ можно использовать не только как координаты в P_n, но и как координаты в многообразии M_n, так что $(x^1, x^2, ..., x^n) \in M_n$. Хотя в M_n можно переходить к любой другой криволинейной системе координат, координатную систему x^i, построенную на основе поличисел и фиксированного взаимно однозначного соответствия $M_n \leftrightarrow P_n$, будем считать выделенной, как и любую другую систему координат, связанную с этой невырожденным линейным преобразованием. Поличисловые алгебраические операции индуцируют те же самые операции в элементарном многообразии (формально) и касательном пространстве любой точки этого многообразия (неформально). То есть будем считать, что касательные пространства элементарного многообразия M_n изоморфны P_n. Функции $F(X)$ от поличисловой переменной

$$F(X) := f^1(x^1, \cdots, x^n) e_1 + \cdots + f^n(x^1, \cdots, x^n) e_n, \tag{3}$$

где f^i – достаточное число раз непрерывно дифференцируемые функции от n действительных переменных, будем рассматривать как векторные (контравариантные) поля в элементарном многообразии M_n. Тогда, кроме сложения и умножения на число, для векторных полей в M_n определена также операция умножения векторных полей

$$f^k_{(3)} = f^i_{(1)} \cdot f^j_{(2)} \cdot p^k_{ij}. \tag{4}$$

Удобно, но необязательно, считать пространство M_n главным ("изучаемым"), а пространство P_n, в некотором смысле, "инструментом", с помощью которого "изучается" пространство M_n. В общем случае параллельный перенос вектора в пространстве P_n

не соответствует "параллельному переносу" того же вектора в пространстве M_n, поэтому для определения абсолютного дифференциала (или ковариантной производной) понадобятся объекты связности или заменяющие их объекты. Если не вводить пару $\{M_n, P_n\}$, а ограничиться только ассоциативно-коммутативными гиперкомплексными числами, то естественно ввести определения

$$dX := dx^i \cdot e_i \tag{5}$$

и

$$dF(X) := F(X + dX) - F(X) = \frac{\partial f^i}{\partial x^k} \cdot e_i \cdot dx^k. \tag{6}$$

Функцию $F(X)$ поличисловой переменной X называют *аналитической*, если существует такая функция $F'(X)$, что

$$dF(X) = F'(X) \cdot dX, \tag{7}$$

где умножение в правой части является поличисловой операцией. Из (7) следует

$$\frac{\partial f^i}{\partial x^k} = p^i_{kj} \cdot f'^j. \tag{8}$$

Так как в базисе e_i с компонентой $e_1 = 1$ мы имеем

$$p^i_{1j} = \delta^i_j, \tag{9}$$

то

$$f'^i = \frac{\partial f^i}{\partial x^1}. \tag{10}$$

Подставляя (10) в (8), получим соотношения Коши-Римана

$$\frac{\partial f^i}{\partial x^1} - p^i_{kj} \cdot \frac{\partial f^j}{\partial x^1} = 0 \tag{11}$$

для аналитических функций поличислового переменного. Число $n(n-1)$ этих соотношений растет быстрее, чем число n компонент аналитической функции. Это приводит к "функциональной бедности" множества аналитических функций поличисловой переменной при $n > 2$. Настоящая работа как раз и посвящена попытке нетривиального обобщения понятия аналитической функции поличисловой переменной, при котором число условий, аналогичных условиям Коши-Римана, не было бы больше числа неизвестных функций-компонент. Первый шаг к такому обобщению мы уже сделали выше, введя пару $\{M_n, P_n\}$. Тогда естественно заменить дифференциал (6) абсолютным дифференциалом

$$DF(X) := \bigtriangledown_k f^i \cdot e_i \cdot dx^k, \tag{12}$$

где

$$\bigtriangledown_k f^i := \frac{\partial f^j}{\partial x^k} + \Gamma^i_{kj} \cdot f^j \tag{13}$$

– ковариантная производная, а Γ^i_{kj} – "объекты связности". Вместо формул (8) и (10) получим

$$\bigtriangledown_k f^i = p^i_{kj} \cdot f'^j \tag{14}$$

и

$$f'^i = \bigtriangledown_1 \cdot f^i, \tag{15}$$

а соотношения Коши-Римана примут вид

$$\bigtriangledown_k f^i - p^i_{kj} \cdot \bigtriangledown_1 f^j = 0. \tag{16}$$

Совершенно необязательно, чтобы "объекты связности" Γ^i_{kj} в формуле (13) были одинаковыми для всего множества функций, удовлетворяющих условиям (16).

2. Определение обобщенно-аналитической функции и ее основные свойства

Назовем функцию $F(X)$ от поличисловой переменной X *обобщенно-аналитической*, если существует такая функция $F'(X)$ – производная, что

$$\widetilde{D}F(X) = F'(X) \cdot dX, \tag{17}$$

где

$$\widetilde{D}F(X) \equiv \widetilde{\bigtriangledown}_k f^i \cdot e_i \cdot dx^k \tag{18}$$

и использовано определение

$$\widetilde{\bigtriangledown}_k f^i := \frac{\partial f^i}{\partial x^k} + \gamma^i_k. \tag{19}$$

Предполагается, что при переходе от одной (криволинейной) системы координат к другой входящие объекты γ^i_k преобразуются согласно закону

$$\gamma^{i'}_{k'} = \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \cdot \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \cdot \gamma^i_k - \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \cdot \frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^k \partial x^i} \cdot f^i. \tag{20}$$

Заметим, что при таком определении $\widetilde{\bigtriangledown}_k f^i$ является тензором. Величины γ^i_k будем называть *гамма-объектами*. В общем случае мы не требуем выполнения соотношений

$$\gamma^i_k = \Gamma^i_{kj} \cdot f^j \tag{21}$$

с одним и тем же "объектом связности" Γ^i_{kj} для всех обобщенно-аналитических функций. Более правильно говорить о паре $\{f^i, \gamma^i_k\}$, тогда аналитическая функция поличисловой переменной – это пара $\{f^i, 0\}$, но при переходе от специальной системы координат к другой криволинейной системе координат эта пара переходит в пару $\{f^i, \gamma^{i'}_{k'} \neq 0\}$.

Из определения обобщенно-аналитической функции следует

$$\widetilde{\bigtriangledown}_k f^i = p^i_{kj} \cdot f'^j \tag{22}$$

и

$$f'^j = \widetilde{\bigtriangledown}_1 f^i; \tag{23}$$

а обобщенные соотношения Коши-Римана приобретают вид

$$\widetilde{\bigtriangledown}_k f^j - p^i_{kj} \widetilde{\bigtriangledown}_1 f^j = 0. \tag{24}$$

Число неизвестных функций-компонент в паре $\{f^i, \gamma^i_k\}$ равно $n + n^2 = n(n+1)$ – больше, чем число $n(n-1)$ обобщенных соотношений Коши-Римана (24). Таким образом, чтобы использовать понятие обобщенно-аналитической функции для теоретико-физических построений, необходимо еще установить и сформулировать набор (возможно, только одно) требований, которые бы вместе с понятием обобщенно-аналитической функции однозначно приводили к уравнениям некоторого физически интерпретируемого поля. Обычно это n дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка для n независимых функций-компонент поля.

Если $\{f^i_{(1)}, \gamma^i_{(1)k}\}$ и $\{f^i_{(2)}, \gamma^i_{(2)k}\}$ – две обобщенно-аналитические функции, то их произвольная линейная комбинация с действительными коэффициентами α, β является обобщенно-аналитической функцией. Это следует непосредственно из определения, или из формул (22)-(24) и (20). Таким образом,

$$\alpha \cdot \{f^i_{(1)}, \gamma^i_{(1)k}\} + \beta \cdot \{f^i_{(2)}, \gamma^i_{(2)k}\} = \{\alpha \cdot f^i_{(1)} + \beta \cdot f^i_{(2)}, \alpha \cdot \gamma^i_{(1)k} + \beta \cdot \gamma^i_{(2)k}\}. \tag{25}$$

Рассмотрим поличисловое произведение двух обобщенно-аналитических функций $f^i_{(1)}$ и $f^j_{(2)}$:

$$f^k_{(3)} = f^i_{(1)} \cdot f^j_{(2)} \cdot p^k_{ij}. \tag{26}$$

Попытаемся найти такой объект $\gamma^i_{(3)k}$, чтобы пара $\{f^i_{(3)}, \gamma^i_{(3)k}\}$ являлась обобщенно-аналитической функцией. Для этого формально продифференцируем левую и правую части (26) по x^k и воспользуемся формулой (22), тогда

$$\frac{\partial f^i_{(3)}}{\partial x^k} + \gamma^i_{(3)k} = p^{i_1}_{kj} p^i_{i_1 i_2} f'^j_{(1)} f'^{j_2}_{(2)} + p^{i_2}_{kj} p^i_{i_1 i_2} f^{i_1}_{(1)} f'^j_{(2)}, \tag{27}$$

или, если учесть формулу

$$p^r_{im} \cdot p^m_{kj} = p^r_{km} \cdot p^m_{ij}, \tag{28}$$

которая следует из свойств ассоциативности и коммутативности поличисел,

$$\frac{\partial f^i_{(3)}}{\partial x^k} + \gamma^i_{(3)k} = p^i_{kj} p^j_{i_1 i_2} (f'^{i_1}_{(1)} f^{i_2}_{(2)} + f^{i_1}_{(1)} f'^{i_2}_{(2)}), \tag{29}$$

где

$$\gamma^i_{(3)k} = p^i_{i_1 i_2} \cdot (\gamma^{i_1}_{(1)k} f^{i_2}_{(2)} + f^{i_1}_{(1)} \gamma^{i_2}_{(2)k}). \tag{30}$$

Полученную формулу (29) можно записать, используя понятие абсолютного дифференциала, в виде

$$D[F_{(1)}(X) \cdot F_{(2)}(X)] = [DF_{(1)}(X)] \cdot F_{(2)}(X) + F_{(1)}(X) \cdot [DF_{(2)}(X)] \tag{31}$$

или

$$D[F_{(1)}(X) \cdot F_{(2)}(X)] = [F'_{(1)}(X) \cdot F_{(2)}(X) + F_{(1)}(X) \cdot F'_{(2)}(X)] \cdot dX. \tag{32}$$

Из последней формулы следует соотношение

$$[F_{(1)}(X) \cdot F_{(2)}(X)]' = F'_{(1)}(X) \cdot F_{(2)}(X) + F_{(1)}(X) \cdot F'_{(2)}(X). \tag{33}$$

Остается выяснить вопрос, правильно ли преобразуется объект $\gamma^i_{(3)k}$ при переходе к произвольной системе координат. Для этого следует записать формулу (30) несколько иначе:

$$\gamma^i_{(3)k} = p^i_{i_1 i_2} \cdot (\gamma^{i_1}_{(1)k} f^{i_2}_{(2)} + f^{i_1}_{(1)} \gamma^{i_2}_{(2)k}) + (\Gamma^i_{km} p^m_{i_1 i_2} - \Gamma^m_{k i_1} p^i_{m i_2} - \Gamma^m_{k i_2} p^i_{i_1 m}) \cdot f^{i_1}_{(1)} f^{i_2}_{(2)}, \tag{34}$$

где $\Gamma^j_{im} \equiv 0$ в нашей специальной системе координат, но при переходе к произвольной системе координат Γ^j_{ik} преобразуются как обычные объекты связности и в общем случае $\Gamma^{j'}_{i'k'} \neq 0$. Условие $\Gamma^j_{ik} \equiv 0$ можно заменить более общим условием

$$\Gamma^i_{km} p^m_{i_1 i_2} - \Gamma^m_{k i_1} p^i_{m i_2} - \Gamma^m_{k i_2} p^i_{i_1 m} \equiv 0 \tag{35}$$

и даже считать три коэффициента Γ в формуле (35) разными. Можно ограничиться только таким классом обобщенно-аналитических функций, для которых

$$({}^{(1)}\Gamma^i_{km} p^m_{i_1 i_2} - {}^{(2)}\Gamma^m_{ki_1} p^i_{mi_2} - {}^{(3)}\Gamma^m_{ki_2} p^i_{i_1 m}) \cdot f^{i_1}_{(1)} f^{i_2}_{(2)} \equiv 0. \qquad (36)$$

Если в специальной системе координат $\Gamma^i_{jk} \equiv {}^{(1)}\Gamma^i_{jk} \equiv {}^{(2)}\Gamma^i_{jk} \equiv {}^{(3)}\Gamma^i_{jk} \equiv 0$, то тензор p^k_{ij} в этой системе координат переносится "параллельно" без изменения компонент.

Таким образом, поличисловое произведение двух обобщенно-аналитических функций поличисловой переменной есть обобщенно-аналитическая функция, а для производных имеет место формула (33), если считать, что тензор p^k_{ij} в специальной системе координат имеет "объекты связности" тождественно равные нулю по всем трем индексам. В терминах пар $\{f^i, \gamma^i_k\}$ поличисловое произведение двух обобщенно-аналитических функций запишется следующим образом:

$$\{f^{i_1}_{(1)}, \gamma^{i_1}_{(1)}\} \cdot \{f^{i_2}_{(2)}, \gamma^{i_2}_{(2)}\} = \{p^i_{i_1 i_2} f^{i_1}_{(1)} f^{i_2}_{(2)}, p^i_{i_1 i_2} \cdot (\gamma^{i_1}_{(1)k} f^{i_2}_{(2)} + f^{i_1}_{(1)}) \gamma^{i_2}_{(2)k}\}. \qquad (37)$$

Итак, полином или сходящийся ряд с действительными или поличисловыми коэффициентами от одной или нескольких обобщенно-аналитических функций есть обобщенно-аналитическая функция, причем для производной, которую мы обозначали штрихом, таких полиномов или таких рядов имеют место обычные правила дифференцирования, если тензор p^k_{ij} в специальной системе координат имеет "объекты связности", тождественно равные нулю по всем трем индексам.

Понятие "параллельного переноса" в теории обобщенно-аналитических функций поличисловой переменной, где "объекты связности" или гамма-объекты для каждого тензора и, вообще говоря, для каждого индекса разные, лишено той геометрической простоты, которая имеет место для пространств аффинной связности и, в частности, римановых и псевдоримановых пространств. Но понятие абсолютного дифференциала и ковариантной производной легко обобщаются на основе инвариантности их записи в любой криволинейной системе координат. Ковариантная производная $\widetilde{\bigtriangledown}_k$ для произвольного тензора определяется аналогично тому, как определяется ковариантная производная $\bigtriangledown_k$ в пространствах аффинной связности, но теперь для каждого тензора и, возможно, для каждого индекса имеется, вообще говоря, свой "объект связности" или гамма-объект, а абсолютный дифференциал по определению

$$\widetilde{D} := dx^k \cdot \widetilde{\bigtriangledown}_k. \qquad (38)$$

При этом нельзя игнорировать свернутые индексы, если им соответствуют разные "объекты связности".

Соотношения Коши-Римана (24) являются необходимыми и достаточными условиями того, что f^i является обобщенно-аналитической функцией. Покажем, что эти соотношения можно записать в явно инвариантном виде, если матрица, составленная из чисел

$$q_{ij} = p^r_{im} p^m_{rj}, \qquad (39)$$

является невырожденной, то есть

$$q = \det(q_{ij}) \neq 0. \qquad (40)$$

В этом случае матрица, обратная к матрице (q_{ij}), образует тензор (q^{ij}), обладающий свойствами

$$q_{jk} q^{ki} = q^{ik} q_{kj} = \delta^i_j. \qquad (41)$$

Тогда из формулы (22) вместо формул (23) и (24) получим инвариантные выражения для производной

$$f'^i = q^{is} p^r_{sm} \widetilde{\bigtriangledown}_r \cdot f^m \tag{42}$$

и соотношений Коши-Римана

$$\widetilde{\bigtriangledown}_k f^i - p^i_{kj} \cdot q^{js} p^r_{sm} \widetilde{\bigtriangledown}_r f^m = 0. \tag{43}$$

Рассмотрим две обобщенно-аналитические функции $F_{(1)}(X)$ и $F_{(2)}(X)$, которые связаны соотношением

$$F_{(2)}(X) = F(X) \cdot F_{(1)}(X), \tag{44}$$

где $F(X)$ – некоторая функция поличисловой переменной. Она является обобщенно-аналитической в области, где функция $F_{(1)}(X)$ не является делителем нуля. В этом случае

$$F(X) = \frac{F_{(2)}(X)}{F_{(1)}(X)}, \tag{45}$$

$$\widetilde{D}F(X) = \frac{F_{(1)}(X)\widetilde{D}[F_{(2)}(X)] - \widetilde{D}[F_{(1)}(X)]F_{(2)}(X)}{F^2_{(1)}(X)} \tag{46}$$

или

$$F'(X) = \frac{F_{(1)}(X)F'_{(2)}(X) - F'_{(1)}(X)F_{(2)}(X)}{F^2_{(1)}(X)}. \tag{47}$$

Если

$$F(X) = F_{(2)}[F_{(1)}(X)], \tag{48}$$

то функция $F(X)$ является обобщенно-аналитической, причем

$$F'(X) = F'_{(2)}(F_{(1)}) \cdot F'_{(1)}(X). \tag{49}$$

3. Аналогичные геометрии и конформные преобразования

Нас интересует не просто пара $\{M_n, P_n\}$ и обобщенно-аналитические функции $\{f^i, \gamma^i_k\}$, а (в конечном счете) приложение этих понятий к построению физических моделей, решению физических задач. Два пространства, в которых конгруэнции экстремалей (геодезических) совпадают, во многом схожи. Под экстремалями мы понимаем решения системы уравнений для определения кривых, на которых длина кривой достигает экстремума, или кривые, которые в данной геометрии определяются как геодезические, например, геодезические в геометриях аффинной связности. Для ряда как физических, так и математических задач неважно, каков элемент длины в изучаемом пространстве – используются лишь система уравнений для определения экстремалей и сами экстремали. Будем говорить, что две n-мерные геометрии *аналогичны*, если существуют такие системы координат и параметры вдоль кривых, в которых уравнения для экстремалей в этих пространствах одинаковы, а начальные и/или граничные условия, определенные в одном пространстве, могут быть заданы и в другом.

Все множество обобщенно-аналитических функций можно разбить на подмножества $\{f^i, \Gamma^k_{ij}\}$, в каждом из которых объект связности Γ^k_{ij} один и тот же, то есть для всех обобщенно-аналитических функций из подмножества выполняется соотношение

$$\Gamma^i_{kj} f^j = \gamma^i_k, \tag{50}$$

причем (подчеркнем еще раз) коэффициенты Γ^k_{ij} не зависят от выбора функции из подмножества $\{f^i, \Gamma^k_{ij}\}$. Оно, вообще говоря, может состоять из одной обобщенно-аналитической функции. Если f^i и γ^i_k известны, то соотношения (50) можно рассматривать как систему уравнений для определения коэффициентов Γ^k_{ij}. После нахождения и фиксирования их как объектов связности для всех тензоров и всех индексов мы получаем возможность работать с пространством аффинной связности $L_n(\Gamma^k_{ij})$, в котором система уравнений для определения геодезических имеет вид

$$\frac{d^2x^i}{d\sigma^2} = -\Gamma^i_{kj}\frac{dx^k}{d\sigma}\frac{dx^j}{d\sigma}. \tag{51}$$

При этом мы, вообще говоря, теряем возможность использовать поличисловое произведение для построения новых обобщенно-аналитических функций или должны отказаться от простых правил дифференцирования (33). В последнем случае ковариантная производная $\widetilde{\nabla}_k$ и в специальной системе координат должна действовать на тензор p^i_{kj}. Чтобы на подмножестве $\{f^i, \Gamma^k_{ij}\}$ одновременно иметь поличисловое произведение обобщенно-аналитических функций и простые правила дифференцирования (33), которые дают опять обобщенно-аналитическую функцию, необходимо ограничиться функциями, удовлетворяющими условию (36) с $\Gamma^i_{jk} \equiv {}^{(1)}\Gamma^i_{jk} \equiv {}^{(2)}\Gamma^i_{jk} \equiv {}^{(3)}\Gamma^i_{jk}$.

Потребуем, чтобы пространство $L_n(\Gamma^i_{jk})$ было аналогично риманову или псевдориманову пространству $V_n(g_{ij})$, где g_{ij} – метрический (фундаментальный) тензор. Тогда вместо (50) получим систему уравнений

$$\left[\frac{1}{2}g^{im}\left(\frac{\partial \mathrm{g}_{km}}{\partial x^j} + \frac{\partial \mathrm{g}_{jm}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^m}\right) + \frac{1}{2}(p_k\delta^i_j + p_j\delta^i_k) + S^i_{kj}\right]\cdot f^j = \gamma^i_k, \tag{52}$$

где S^i_{kj} – некий произвольный тензор (тензор кручения), антисимметрический по двум нижним индексам, p_i – произвольный одноковариантный тензор [1]; которую можно использовать для определения фундаментального тензора g_{ij}.

Существуют такие финслеровы пространства, которые не являются римановыми или псевдоримановыми, но для которых система уравнений для определения геодезических(экстремалей) может быть записана в виде

$$\frac{d^2x^i}{d\sigma^2} = -\Gamma^i_{kj}[L(dx;x)]\cdot\frac{dx^k}{d\sigma}\frac{dx^j}{d\sigma}, \tag{53}$$

где коэффициенты $\Gamma^i_{kj}[L(dx;x)]$ определяются соответствующей метрической функцией $L(dx^1,\ldots,dx^n;x^1\ldots,x^n)$ финслерова пространства. Такие финслеровы пространства аналогичны пространствам аффинной связности с объектами связности Γ^i_{kj} отличающимися от коэффициентов $\Gamma^i_{kj}[L(dx;x)]$ возможно на аддитивный тензор кручения и/или аддитивный тензор $\frac{1}{2}(p_k\delta^i_j + p_j\delta^i_k)$ [1].

Пусть обобщенно-аналитические функции определяют пространства аффинной связности $L_n({}^{(1)}\Gamma^k_{ij})$ и $L_n({}^{(2)}\Gamma^k_{ij})$, аналогичные соответственно римановым или псевдоримановым пространствам $V_n(g_{ij})$ и $V_n(K^2_V g_{ij})$ и/или финслеровым пространствам $F_n[L(dx;x)]$ и $F_n[K_F L(dx,x)]$, где $K_V(x^1,..,.x^n) > 0$, $K_F(x^1,...,x^n) > 0$ – скалярные функции (инварианты). Тогда преобразование (координатное и/или в пространстве обобщенно-аналитических функций), переводящее $f^i_{(1)}$ в $f^i_{(2)}$, можно назвать конформным, так как при этом

$$g_{ij}(x) \to K^2_V(x)\cdot g_{ij} \tag{54}$$

и

$$(dx;x) \to K_F(x)\cdot L(dx;x). \tag{55}$$

4. Возможные дополнительные требования

Из определения обобщенно-аналитической функции следует, что ее можно задать выбором двух произвольных одноконтравариантных полей $f^i(x^1,\dots,x^n)$ и $f'^i(x^1,\dots,x^n)$. Тогда из формулы (23) следует выражение для гамма-объекта

$$\gamma^i_k = -\frac{\partial f^i}{\partial x^k} + p^i_{kj} f'^j \tag{56}$$

Соотношения Коши-Римана при этом выполняются автоматически. Таким образом, чтобы получить уравнения поля для неизвестных функций-компонент $f^i(x^1,\dots,x^n)$ и $f'^i(x^1,\dots,x^n)$, необходимо, по крайней мере, $2n$ дополнительных соотношений, например, дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка относительно $f^i(x^1,\dots,x^n)$ и $f'^i(x^1,\dots,x^n)$.

(1): Рассмотрим подмножество обобщенно-аналитических функций f^i, для которых

$$\tilde{D}F(x) \equiv 0, \ \leftrightarrow \ \tilde{\nabla}_k f^i \equiv 0, \ \leftrightarrow \ f'^i \equiv 0 \tag{57}$$

В этом случае условия Коши-Римана автоматически выполняются и произвольная вектор-функция в паре с $\gamma^i_k = -\frac{\partial f^i}{\partial x^k}$, то есть пара $\{f^i, -\frac{\partial f^i}{\partial x^k}\}$, является обобщенно-аналитической. Важно отметить, что свойства поличисел никак при этом не участвуют. Иначе говоря, это подмножество (на уровне соотношений Коши-Римана) не зависит от выбора системы поличисел.

(2): Если потребовать выполнения вместо условий (57) соотношений

$$\tilde{D}F(X) = \lambda \cdot F(X) \cdot dX, \ \leftrightarrow \ \tilde{\nabla}_k f^i = \lambda \cdot p^i_{kj} \cdot f^j, \ \leftrightarrow \ f'^i = \lambda \cdot f^i, \tag{58}$$

где λ – некоторое действительное число, то пары $\{f^i, -\dfrac{\partial f^i}{\partial x^k} + \lambda p^i_{kj} f^j\}$ с произвольными вектор-функциями f^i будут составлять подмножество обобщенно-аналитических функций, некоторым образом учитывающих свойства поличисел.

(3): Дальнейшее обобщение требований (57), (58) можно сформулировать в виде

$$F'(X) = \Lambda \cdot F(X), \tag{59}$$

где

$$\Lambda = \lambda^1 e_1 + \lambda^2 e_2 + ... + \lambda^n e_n \tag{60}$$

– произвольное поличисло. В этом случае обобщенно-аналитической функцией будет пара

$$\left\{ f^i, -\frac{\partial f^i}{\partial x^k} + p^i_{kj} p^j_{mr} \lambda^m f^j \right\} \tag{61}$$

(4): Используя формулы (23) и (24), можно доказать следующее утверждение. Если выполняются соотношения:

$$1)\ \Gamma^i_{kj} f^j = \gamma^i_k, \tag{62}$$

$$2)\ \Gamma^i_{1j} p^j_{kr} - p^i_{kj} \Gamma^j_{1r} = 0, \tag{63}$$

$$3)\ \frac{\partial \Gamma^i_{1r}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^i_{kr}}{\partial x^1} + \left[(\Gamma^i_{kj} - p^i_{km} \Gamma^m_{1j}) \Gamma^j_{1r} - \Gamma^i_{1j} (\Gamma^j_{kr} - p^j_{km} \Gamma^m_{1r}) \right] = 0 \tag{64}$$

– то вместе с обобщенно-аналитической парой $\{f^i, \gamma^i_k\}$ пары

$$\{f'^i, \Gamma^i_{kj} f'^j\}, \{f''^i, \Gamma^i_{kj} f''^j\}, \ldots, \{f^{(m)i}, \Gamma^i_{kj} f^{(m)j}\}, \ldots \tag{65}$$

также будут обобщенно-аналитическими. В последней формуле использованы обозначения

$$f^{(m)i} \equiv \frac{\partial f^{(m-1)j}}{\partial x^1} + \Gamma^i_{1j} f^{(m-1)j}. \tag{66}$$

(5): Одним из дополнительных требований может быть условие того, чтобы для подмножества $\{f^i, \Gamma^i_{kj}\}$ обобщенно-аналитических функций нашлась риманова или псевдориманова геометрия $V_n(g_{ij})$, аналогичная геометрии аффинной связности $L_n(\Gamma^i_{jk})$.

(6): Если финслерово пространство $F_n[L(dx;x)]$ аналогично некоторому пространству аффинной связности, то одним из возможных требований может быть требование, чтобы подмножество $\{f^i, \Gamma^i_{jk}\}$ порождало геометрию аффинной связности аналогичную финслеровой геометрии $F_n[L(dx;x)]$.

(7): Пусть

$$x^i = x^i(\tau) \tag{67}$$

– параметрическое задание некоторой кривой, соединяющей две точки $x^i_{(0)} = x^i(0)$, $x^i_{(0)} = x^i(0)$, то есть параметр вдоль кривой изменяется в пределах $\tau \in [0;1]$. Рассмотрим функционал с интегрированием вдоль указанной кривой

$$\begin{aligned} I[x^i(\tau)] &= \int_0^1 F(X)\,dX = \left[\int_0^1 p^i_{kj} f^k(x^1(\tau), \ldots, x^n(\tau)) dx^j\right] \cdot e_i \\ &= \left[\int_0^1 p^i_{kj} f^k \frac{dx^j}{d\tau}\right] \cdot e_i, \end{aligned} \tag{68}$$

где $F(X)$ – некоторая обобщенно-аналитическая функция. Потребуем независимость значения интеграла (68) от пути интегрирования, тогда вариация этого функционала при закрепленных концах кривых должна быть равна нулю, то есть должны выполняться уравнения Эйлера

$$\frac{d}{d\tau}\left(p^i_{kj} f^j\right) - p^i_{mj} \frac{\partial f^j}{\partial x^k} \frac{dx^m}{d\tau} = 0, \tag{69}$$

или

$$\left(p^i_{kj} \frac{\partial f^j}{\partial x^m} - p^i_{mj} \frac{\partial f^j}{\partial x^k}\right) \cdot \frac{dx^m}{d\tau} = 0. \tag{70}$$

Считая, что $x^i(\tau)$ – произвольные гладкие функции, из этих уравнений получим

$$p^i_{kj} \frac{\partial f^j}{\partial x^m} - p^i_{mj} \frac{\partial f^j}{\partial x^k} = 0, \tag{71}$$

или, вспоминая, что $\{f^i, \gamma^i_k\}$ – обобщенно-аналитическая пара, получим

$$p^i_{kj} \gamma^i_m - p^i_{mj} \gamma^j_k = 0. \tag{72}$$

Из этих соотношений следует, что для функции f^i выполняются соотношения Коши-Римана для аналитических функций (11). Таким образом, требование независимости интеграла (68) от пути интегрирования приводит к тому, что функция $F(X)$ является аналитической, то есть такое требование является чрезмерным для нетривиального обобщения понятия аналитичности.

5. Случай H_4

С ассоциативно-коммутативными гиперкомплексными числами H_4 удобно работать в ψ-базисе, который связан с базисом

$$e_1 = 1, e_2 = j, e_3 = k, e_4 = jk, \qquad j^2 = k^2 = (jk)^2 = 1 \tag{73}$$

линейной зависимостью

$$e_i = s_i^j \cdot \psi_j, \tag{74}$$

где

$$s_i^j = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad s_i^k \cdot s_k^j = 4 \cdot \delta_i^j. \tag{75}$$

Для базисных элементов $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$ закон умножения

$$\psi_i \cdot \psi_j = p_{ij}^{(\psi)k} \cdot \psi_k \tag{76}$$

содержит характеристические числа

$$p_{ij}^{(\psi)k} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j = k, \\ 0, & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases} \tag{77}$$

Будем использовать следующие обозначения:

$$X = x^1 e_1 + ... + x^4 e_4 = \xi^1 \psi_1 + ... + \xi^4 \psi_4 \tag{78}$$

и

$$F(X) = \varphi^1(\xi^1, ..., \xi^4) \cdot \psi_1 + \varphi^4(\xi^1, ..., \xi^4) \cdot \psi_4. \tag{79}$$

Таким образом, если $\varphi^i(\xi^1, ..., \xi^4)$ – обобщенно-аналитическая функция от используемой H_4-переменной, то найдется такая вектор-функция $\varphi'^i(\xi^1, ..., \xi^4)$, что

$$\frac{\partial \varphi^i}{\partial \xi^k} + \gamma_k^{(\psi)i} = p_{kj}^{(\psi)i} \cdot \varphi'^j. \tag{80}$$

Учитывая (77), получим

$$\left.\begin{array}{llll}
\dfrac{\partial \varphi^1}{\partial \xi^1} + \gamma_1^{(\psi)1} = \varphi'^1, & \dfrac{\partial \varphi^1}{\partial \xi^2} + \gamma_2^{(\psi)1} = 0, & \dfrac{\partial \varphi^1}{\partial \xi^3} + \gamma_3^{(\psi)1} = 0, & \dfrac{\partial \varphi^1}{\partial \xi^4} + \gamma_4^{(\psi)1} = 0, \\
\dfrac{\partial \varphi^2}{\partial \xi^1} + \gamma_1^{(\psi)2} = 0, & \dfrac{\partial \varphi^2}{\partial \xi^2} + \gamma_2^{(\psi)2} = \varphi'^2, & \dfrac{\partial \varphi^2}{\partial \xi^3} + \gamma_3^{(\psi)2} = 0, & \dfrac{\partial \varphi^2}{\partial \xi^4} + \gamma_4^{(\psi)2} = 0, \\
\dfrac{\partial \varphi^3}{\partial \xi^1} + \gamma_1^{(\psi)3} = 0, & \dfrac{\partial \varphi^3}{\partial \xi^2} + \gamma_2^{(\psi)3} = 0, & \dfrac{\partial \varphi^3}{\partial \xi^3} + \gamma_3^{(\psi)3} = \varphi'^3, & \dfrac{\partial \varphi^3}{\partial \xi^4} + \gamma_4^{(\psi)3} = 0, \\
\dfrac{\partial \varphi^4}{\partial \xi^1} + \gamma_1^{(\psi)4} = 0, & \dfrac{\partial \varphi^4}{\partial \xi^2} + \gamma_2^{(\psi)4} = 0, & \dfrac{\partial \varphi^4}{\partial \xi^3} + \gamma_3^{(\psi)4} = 0, & \dfrac{\partial \varphi^4}{\partial \xi^4} + \gamma_4^{(\psi)4} = \varphi'^4.
\end{array}\right\} \tag{81}$$

Эти соотношения содержат выражение для производной

$$\varphi'^i = \frac{\partial \varphi^i}{\partial \xi^{i_-}} + \gamma_{i_-}^{(\psi)i} \tag{82}$$

($i = i_-$, но по ним нет суммирования), а также – соотношения Коши-Римана

$$\frac{\partial \varphi^i}{\partial \xi^k} + \gamma_k^{(\psi)i} = 0,\ i \neq k. \tag{83}$$

Пространство H_4 является метрическим (финслеровым) пространством, в котором элемент длины ds выражается через форму $d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3 d\xi^4$ (метрика Бервальда-Моора, в более общем виде она рассматривалась в работах [3], [4]) в конической области определения, которую (область) можно задать по-разному. Будем считать, что

$$ds = \sqrt[4]{d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3 d\xi^4}, \tag{84}$$

причем коническая область определения задается неравенствами

$$d\xi^1 \geq 0,\ d\xi^2 \geq 0,\ d\xi^3 \geq 0,\ d\xi^4 \geq 0\ . \tag{85}$$

Рассмотрим четырехмерную финслерову геометрию с элементом длины вида

$$ds = \sqrt[4]{\kappa^4 \cdot d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3 d\xi^4}, \tag{86}$$

где $\kappa \equiv \kappa(d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3 d\xi^4) > 0$. Такая геометрия не является римановой или псевдоримановой. Покажем, что она аналогична (согласно введенной выше терминологии) некоторой геометрии аффинной связности $L_4(\Gamma^i_{kj})$. Запишем уравнения для экстремалей этого финслерова пространства, используя тангенциальное уравнение индикатрисы [2]:

$$\Phi(p_1, ..., p_4; \xi^1, ..., \xi^4) = 0\ , \tag{87}$$

где

$$\Phi(p;\xi) = p_1 p_2 p_3 p_4 - \left(\frac{\kappa}{4}\right)^4\ , \tag{88}$$

и

$$p_i = \frac{\partial(ds)}{\partial(d\xi^i)} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt[4]{\kappa^4 \cdot d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 d\xi_4}}{d\xi^i}. \tag{89}$$

Тогда система уравнений для определения экстремалей будет иметь вид

$$\left.\begin{array}{c} \dfrac{d\xi^1}{\frac{\partial \Phi}{\partial p_1}} = ... = \dfrac{d\xi^4}{\frac{\partial \Phi}{\partial p_4}} = \dfrac{dp_1}{-\frac{\partial \Phi}{\partial \xi^1}} = ... = \dfrac{dp_4}{-\frac{\partial \Phi}{\partial \xi^4}}, \\ \Phi(p,\xi) = 0; \end{array}\right\} \tag{90}$$

или

$$d\xi^i = \frac{\partial \Phi}{\partial p_i} \cdot \lambda \cdot d\tau,\ dp_i = -\frac{\partial \Phi}{\partial \xi^i} \cdot \lambda \cdot d\tau,\ \ \Phi(p;\xi) = 0, \tag{91}$$

где τ – параметр вдоль экстремали, а $\lambda \equiv \lambda(p;\xi) \neq 0$ – некоторая функция. Для тангенциального уравнения индикатрисы (87), (88) система уравнений (91) принимает вид

$$\dot{\xi^i} = \frac{p_1 p_2 p_3 p_4}{p_i} \cdot \lambda, \quad \dot{p^i} = (\frac{1}{4})^4 \frac{\partial k^4}{\xi^i} \cdot \lambda, \quad p_1 p_2 p_3 p_4 = \left(\frac{k}{4}\right)^4, \tag{92}$$

где

$$\dot{\xi^i} = \frac{d\xi^i}{d\tau},\ \dot{p_i} = \frac{dp_i}{d\tau}. \tag{93}$$

Будем считать, что $\lambda = \lambda(\xi) > 0$ – функция только координат. Тогда, исключая из системы уравнений p_i, получим систему уравнений для определения экстремалей в финслеровом пространстве (86) в виде

$$\ddot{\xi^i} = -\Gamma^i_{kj}\ \dot{\xi^k}\dot{\xi^j}, \tag{94}$$

где

$$\Gamma^i_{kj} = -\begin{cases} \dfrac{\partial ln\left(\dfrac{\lambda}{\lambda_0}\right)}{\partial \xi^j}, & \text{если } i = j = k, \\ \delta^i_k \dfrac{\partial ln\left(\dfrac{\sigma}{\sigma_0}\right)}{\partial \xi^j}, & \text{во всех остальных случаях;} \end{cases} \tag{95}$$

$$\sigma = \left(\frac{\kappa}{4}\right)^4 \cdot \lambda, \tag{96}$$

λ_0 и σ_0 – постоянные соответствующих размерностей. Выпишем явно коэффициенты Γ^i_{kj}:

$$(\Gamma^1_{kj}) = -\begin{pmatrix} \dfrac{\partial ln\left(\dfrac{\lambda}{\lambda_0}\right)}{\partial \xi^1} & \dfrac{\partial ln\left(\dfrac{\sigma}{\sigma_0}\right)}{\partial \xi^2} & \dfrac{\partial ln\left(\dfrac{\sigma}{\sigma_0}\right)}{\partial \xi^3} & \dfrac{\partial ln\left(\dfrac{\sigma}{\sigma_0}\right)}{\partial \xi^4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{97}$$

$$(\Gamma^2_{kj}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{\partial ln\left(\dfrac{\sigma}{\sigma_0}\right)}{\partial \xi^1} & \dfrac{\partial ln\left(\dfrac{\lambda}{\lambda_0}\right)}{\partial \xi^2} & \dfrac{\partial ln\left(\dfrac{\sigma}{\sigma_0}\right)}{\partial \xi^3} & \dfrac{\partial ln\left(\dfrac{\sigma}{\sigma_0}\right)}{\partial \xi^4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{98}$$

$$(\Gamma^3_{kj}) = -\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{\partial ln\left(\dfrac{\sigma}{\sigma_0}\right)}{\partial \xi^1} & \dfrac{\partial ln\left(\dfrac{\sigma}{\sigma_0}\right)}{\partial \xi^2} & \dfrac{\partial ln\left(\dfrac{\lambda}{\lambda_0}\right)}{\partial \xi^3} & \dfrac{\partial ln\left(\dfrac{\sigma}{\sigma_0}\right)}{\partial \xi^4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{99}$$

$$(\Gamma^4_{kj}) = -\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{\partial ln\left(\dfrac{\sigma}{\sigma_0}\right)}{\partial \xi^1} & \dfrac{\partial ln\left(\dfrac{\sigma}{\sigma_0}\right)}{\partial \xi^2} & \dfrac{\partial ln\left(\dfrac{\sigma}{\sigma_0}\right)}{\partial \xi^3} & \dfrac{\partial ln\left(\dfrac{\lambda}{\lambda_0}\right)}{\partial \xi^4} \end{pmatrix}. \tag{100}$$

Заметим, что вместо матриц (97) – (100) можно взять транспонированные им. Итак, финслерова геометрия с элементом длины (86) аналогична геометрии аффинной связности $L_4[\Gamma^i_{kj}+S^i_{kj}+\frac{1}{2}(p_k\delta^i_j+p_j\delta^i_k)]$, где S^i_{kj} – произвольный антисимметричный по двум нижним индексам тензор, а p_k – произвольный одноковариантный тензор.

Рассмотрим обобщенно-аналитические функции φ^i от H_4-переменной, которые удовлетворяют дополнительному условию 3), то есть рассмотрим пару

$$\left\{\varphi^i, -\frac{\partial\varphi^i}{\partial\xi^k} + p^{(\psi)i}_{kj}\mu^j\varphi^j\right\} \tag{101}$$

где

$$\Lambda = \lambda^i \cdot e_i = \mu^j \cdot \psi_j. \tag{102}$$

Выделим из таких пар подмножество $\{\varphi^i, \Gamma^i_{kj}\}$, где Γ^i_{kj} определяются матрицами, транспонированными к матрицам (97) – (100). Тем самым будет выполняться дополнительное требование 6). Тогда пара (101) должна удовлетворять 16-ти соотношениям (50), из которых первые четыре есть:

$$\frac{\partial\varphi^1}{\partial\xi^1} = \mu^1\varphi^1 + \frac{\partial\, ln\left(\dfrac{\lambda}{\lambda_0}\right)}{\partial\xi^1}\varphi^1, \qquad \frac{\partial\varphi^1}{\partial\xi^2} = \frac{\partial\, ln\left(\dfrac{\sigma}{\sigma_0}\right)}{\partial\xi^2}\varphi^1, \tag{103}$$
$$\frac{\partial\varphi^1}{\partial\xi^3} = \frac{\partial\, ln\left(\dfrac{\sigma}{\sigma_0}\right)}{\partial\xi^3}\varphi^1, \qquad \frac{\partial\varphi^1}{\partial\xi^4} = \frac{\partial\, ln\left(\dfrac{\sigma}{\sigma_0}\right)}{\partial\xi^4}\varphi^1.$$

Для того, чтобы эта система была совместной, необходимо и достаточно равенство смешанных производных, полученных с помощью формул (103). Часть этих условий удовлетворяется автоматически, кроме трех. Если не ограничиваться первыми четырьмя уравнениями, а рассмотреть все 16, то получим 12 условий:

$$\frac{\partial^2 ln\left(\dfrac{\kappa}{\kappa_0}\right)^4}{\partial\xi^i\xi^j} = 0,\ i \neq j; \tag{104}$$

откуда следует, что

$$ln\left(\frac{\kappa}{\kappa_0}\right)^4 = a_1(\xi^1) + a_2(\xi^2) + a_3(\xi^3) + a_4(\xi^4) \tag{105}$$

или

$$\kappa = \kappa_0 \cdot exp\{[a_1(\xi^1) + a_2(\xi^2) + a_3(\xi^3) + a_4(\xi^4)]/4\}, \tag{106}$$

где a_i – четыре произвольные функции одного действительного аргумента. Тогда из уравнений (103) и соответствующих уравнений для других компонент обобщенно-аналитической функции получим

$$\varphi^i = \varphi^i_{(0)}\left(\frac{\kappa}{\kappa_0}\right)^4\left(\frac{\lambda}{\lambda_0}\right)b_i(\xi^{i-}) \cdot exp(\mu^{i-}\xi^i), \tag{107}$$

где

$$a_i(\xi^{i-}) = ln\left|b_i(\xi^{i-})\right|. \tag{108}$$

Таким образом, несмотря на два дополнительных требования, обобщенно-аналитическая функция (107) в общем случае не сводится к аналитической функции

H_4-переменной, и, кроме того, мы получили выражение (106) для коэффициента κ в метрической функции финслерова пространства с элементом длины (86). Если $\frac{\lambda}{\lambda_0} = \left(\frac{\kappa_0}{\kappa}\right)^4$, то φ^i – аналитическая функция.

Если

$$\kappa = \kappa_0 \cdot exp\{[(\xi^1)^2 + (\xi^2)^2 + (\xi^3)^2 + (\xi^4)^2]/4\}, \tag{109}$$

то в координатах x^i

$$\kappa = \kappa_0 \cdot exp\{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + (x^4)^2\}. \tag{110}$$

Заключение

Введенное в данной работе понятие обобщенно-аналитической функции поличисловой переменной является первым шагом в построении соответствующей теории, а затем применении ее для построения теоретико-физических моделей. Важной составной частью таких исследований должен быть поиск дополнительных требований, которым должны удовлетворять обобщенно-аналитические функции, и тех следствий, к которым эти требования приводят. Особо следует выделить те требования, которые приводят к тривиальному результату – аналитическим функциям. Это позволит сформулировать те свойства, которыми собственно обобщенно-аналитические функции поличисловой переменной (в отличие от аналитических функций той же переменной) не могут обладать. Как показано выше, к таким свойствам относится независимость интеграла обобщенно-аналитической функции от пути интегрирования. Конечно, необходимо провести подробный сравнительный анализ свойств аналитических функций комплексной переменной и обобщенно-аналитических функций поличисловой переменной размерности больше, чем два. Проведенные в настоящей работе построения и некоторые результаты позволяют надеяться, что понятие обобщенно-аналитической функции поличисловой переменной, а также понятие аналогичных геометрий, могут быть востребованы в теоретической физике.

Литература

[1] П. К. Рашевский: *Риманова геометрия и тензорный анализ*, Наука, М. 1967.

[2] П. К. Рашевский: *Геометрическая теория уравнений с частными производными*, ОГИЗ, М.-Л. 1947.

[3] G. Yu. Bogoslovsky, H. F. Goenner, Phys. Lett. A 244, N 4, (1998) 222.

[4] G. Yu. Bogoslovsky, H. F. Goenner, Gen. Relativ. Gravit. 31, N 10, (1999) 1565.

АЛГЕБРОДИНАМИКА: “ПРЕДСВЕТ”, ЧАСТИЦЫ-КАУСТИКИ И ПОТОК ВРЕМЕНИ

В. В. Кассандров

Российский Университет дружбы народов, кафедра общей физики
vkassan@sci.pfu.edu.ru

В теориях поля с твисторной структурой частицы естественно интерпретировать как (пространственно локализованные) каустики изотропных геодезических конгруэнций, определяемых твисторным полем. В качестве реализации рассмотрены уравнения “алгебродинамики”, возникающие в контексте некоммутативного анализа (над алгеброй бикватернионов) и приводящие к полю комплексного эйконала и к набору калибровочных и твисторных полей, ассоциируемых с его решениями. Обсуждаются связанные с этим концепции производящей “Мировой функции” и многозначных физических полей. Возникающая картина Мира содержит в качестве основных элементов лоренц-инвариантный световой эфир и порождаемую светом материю. Вводится также представление о потоке Времени, отождествляемом с потоком первичного Света (“Предсвета”).

Введение: Алгебродинамическая единая теория поля

Теоретическая физика подошла к такому состоянию, когда невозможно продвигаться дальше, не пересмотрев полностью смысл и взаимосвязи трех основных ее составляющих: полей, частиц и пространственно-временной геометрии. *Теория (супер)струн* в принципе предоставляет возможность получения низкоэнергетической феноменологии (Стандартной модели) из единой и простой физики, сформулированной для планковской шкалы. Однако этот подход по-прежнему далек от таких основополагающих вопросов, как *происхождение* физических законов, существование первичного *Кода Вселенной* и т. п., являясь по существу лишь еще одной попыткой *описания* Природы (по возможности наиболее простым и эффективным способом), а отнюдь не ее *понимания*. Заметим, что до сих пор ни в рамках Стандартной модели, ни в теории суперструн нет никакого объяснения размерности пространства-времени, наблюдаемого спектра элементарных частиц и констант взаимодействия, в том числе “больших чисел” и др.

Твисторная программа Р. Пенроуза [1, 2] может рассматриваться как альтернатива струнной теории, претендующей на объяснение первичных физических структур. Для этого постулируется существование некого предпространства – *пространства твисторов* $\mathbb{C}P^3$, – первичного по отношению к физическому пространству-времени и предопределяющего его геометрию как геометрию Минковского, и, в какой-то степени, набор физических полей.

Тем не менее, общая концепция твисторной программы как единой теории поля до сих не сформулирована. Какие именно уравнения выбрать в качестве фундаментальных, как описывать массивные поля и как получить спектр характеристик наблюдаемых частиц? И, наконец, почему именно твистор, весьма экзотический математический объект, кладется в основу фундаментальной физической теории?

Между тем, твисторная структура совершенно естественно возникает в рамках так называемого *алгебродинамического* подхода к теории поля, развитой в работах автора с учениками. С общей точки зрения, алгебродинамическая парадигма может рассматриваться как возврат к идеям Пифагора и Платона о *свойствах Чисел, предопределяющих свойства видимого Мира.* Действительно, в качестве единственного (!) постулата алгебродинамики принимается существование некоторой единой структуры чисто абстрактной, алгебраической (числовой) природы, внутренние свойства которой полностью определяют как вид геометрии физического пространства-времени, так и всю динамику физических полей (набор и уравнения которых также диктуются исходной структурой, а не постулируются). Изложение основных принципов исповедуемой автором философии *неопифагорейства* в ее применении к построению фундаментальных физических теорий представлено в работе [39].

В наиболее развитой на сегодняшний день реализации алгебродинамики "Мировая" алгебраическая структура возникает при обобщении комплексного анализа на исключительные некоммутативные алгебры кватернионного ($\mathbb{Q}$) типа [13, 14, 15]. Было показано, в частности, что непосредственный учет некоммутативности в самом определении функций, "дифференцируемых" в $\mathbb{Q}$, приводит к *нелинейности* обобщенных уравнений Коши-Римана (ОУКР). Это, в свою очередь, позволило выбрать ОУКР в качестве фундаментальных уравнений динамики *взаимодействующих* физических полей, рассматриваемых как функции алгебраического переменного ($\mathbb{Q}$-типа).

Широкий класс таких полей-функций возникает лишь при комплексном расширении алгебры $\mathbb{Q}$ до алгебры *бикватернионов* $\mathbb{B}$. При этом ОУКР не только оказываются лоренц-инвариантными, но и приобретают естественную спинорную и калибровочную структуры, что позволяет построить на их основе единую самосогласованную *алгебродинамическую* теорию поля [13, 14, 20, 23, 22, 24, 26, 39].

С физической точки зрения, наиболее важным свойством ОУКР оказывается их соответствие некоторой первичной *светоподобной* структуре. А именно, каждая (спинорная) компонента $S(x, y, z, t) \in \mathbb{C}$ первичного $\mathbb{B}$-поля обязана удовлетворять *уравнению комплексифицированного эйконала* (УКЭ) [13, 14]

$$\eta^{\mu\nu}\partial_\mu S \partial_\nu S = (\partial_t S)^2 - (\partial_x S)^2 - (\partial_y S)^2 - (\partial_z S)^2 = 0, \qquad (1)$$

где матрица $\eta_{\mu\nu} = diag\{1, -1, -1, -1\}$ представляет метрику Минковского, а символ ∂ отвечает частной производной по соответствующей координате. УКЭ (1) лоренц-инвариантно, нелинейно и играет роль, аналогичную линейному *уравнению Лапласа* в комплексном анализе. Каждое решение ОУКР может при этом быть восстановлено из набора нескольких (четырех или менее) решений УКЭ.

В то же время, в работе [26] была обнаружена естественная *твисторная* структура УКЭ и на ее основе получено *общее решение* этого нелинейного уравнения. А именно, было показано, что в отношении к твисторной структуре каждое решение УКЭ принадлежит к одному из двух классов, оба из которых могут быть получены из некоторой производящей функции твисторных аргументов с помощью простой алгебраической процедуры. Та же конструкция позволяет дать естественное определение *сингулярностей* светоподобных геодезических конгруэнций, соответствующих полю эйконала – *каустик.* Именно на каустиках – *огибающих* конгруэнции – соседние лучи пересекаются, а значения ассоциированных с конгруэнцией физических полей обращаются в бесконечность, формируя тем самым единый *частицеподобный* объект – *источник* полей и самой конгруэнции. Тем самым, в рассматриваемой алгебродинамической теории *частицы представляют собой (пространственно локализованные) каустики первичных светоподобных конгруэнций.*

С другой стороны, изотропные конгруэнции определяют универсальный локальный перенос основного твисторного поля с постоянной фундаментальной скоростью “с” (аналогичный переносу поля электромагнитной волной) и тем самым дают указание на особую роль временной координаты в рассматриваемой алгебродинамической схеме и в твисторной теории вообще. Существование “Потока Времени” становится прямым следствием существования лоренц-инвариантного “эфира”, формируемого первичными светоподобными конгруэнциями (“Предсвета”). Принципиально важным при этом становится свойство *многозначности* фундаментального комплекснозначного решения УКЭ (“Мирового решения”) и ассоциированных с ним физических полей. В каждой точке пространства-времени мы имеем дело с *суперпозицией* большого числа лучей, принадлежащих локально различным конгруэнциям, и поток Времени формируется из многих *разнонаправленных* составляющих (глобально связанных комплексной структурой в единый объект).

В разделе 2 статьи описывается твисторная структура УКЭ и алгебраическая процедура получения двух классов его решений. Приведены несколько простых примеров решений УКЭ. В разделе 3 рассматривается структура каустик решений УКЭ, в том числе пространственно ограниченного типа, образующих *частицеподобные* сингулярные объекты, а также ассоциированных с решениями УКЭ физических полей. В четвертом разделе введено понятие *Мировой функции*, генерирующей “Мировое решение” УКЭ. В этой связи предложена и подробно обсуждается общая концепция *многозначности* физических полей. Заключительный раздел 5 посвящен вопросам, связанным с природой физического Времени: вводится понятие “предсветового” эфира, образованного первичными изотропными конгруэнциями, и поток Времени по существу отождествляется с потоком Предсвета. Обсуждается внутренняя структура этих фундаментальных потоков, связанная с многозначностью исходного твисторного поля.

Настоящая работа является расширенной версией английской статьи [27], а в описании физической картины Мира продолжает предыдущую статью автора [39]. Для простоты восприятия мы избегаем использования 2-спинорного формализма, дифференциальных форм и т. п., отсылая более подготовленного в математическом отношении читателя к работам [23, 26, 25, 21, 22].

Твисторная структура и два класса решений уравнения комплексного эйконала

Как известно, уравнение эйконала описывает процесс распространения волновых фронтов (разрывов поля) в любой релятивистской теории, включая электродинамику Максвелла [4, 5]. Математическим и физическим проблемам, связанным с уравнением эйконала, посвящено огромное количество работ, см. например, [7, 8, 9, 10]. Уравнение комплексифицированного эйконала (УКЭ) естественно возникает в задачах распространения ограниченных световых пучков [11] и в теории изотропных конгруэнций, связанных с решениями уравнений Эйнштейна и Эйнштейна-Максвелла [12]. В нашем подходе, однако, комплексный эйконал рассматривается в первую очередь как *фундаментальное физическое поле*, описывающее, в частности, взаимодействующие и обладающие дискретным спектром характеристик (“автоквантованные”) *частицеподобные* объекты, формируемые структурой особенностей решений УКЭ. С каждым из этих решений естественно сопоставляется также электромагнитное и другие известные из физики поля, ответственные за описание процесса взаимодействия сингулярностей-частиц.

Определим вначале, помимо обычных декартовых пространственно-временных координат $\{t, x, y, z\}$, естественные для геометрии Минковского *спинорные* или *изотропные* координаты $\{u, v, w, \overline{w}\}$ (скорость света здесь и в дальнейшем принимается равной единице, $c = 1$)

$$u = t + z, \quad v = t - z, \quad w = x - iy, \quad \overline{w} = x + iy. \tag{2}$$

Эти координаты образуют *эрмитову* 2×2-матрицу X вида

$$X = X^+ = \begin{pmatrix} u & w \\ \overline{w} & v \end{pmatrix}. \tag{3}$$

В спинорных координатах УКЭ (1) выглядит следующим образом:

$$\partial_u S \partial_v S - \partial_w S \partial_{\overline{w}} S = 0 \tag{4}$$

и эквивалентно утверждению об изотропности комплексного 4-вектора градиента $\partial_\mu S$. Отметим, что УКЭ обладает замечательной *функциональной инвариантностью* [13, 14]: для каждого из его решений $S(X)$ любая (дифференцируемая) функция от него $f(S(X))$ также является решением УКЭ. Помимо этого, известно [6], что УКЭ инвариантно относительно преобразований полной 15-параметрической *конформной группы* пространства Минковского, включающих преобразования Лоренца.

Введем теперь в рассмотрение *произвольную однородную* функцию

$$\Pi = \Pi(\xi_0, \xi_1, \tau^0, \tau^1) \tag{5}$$

от двух пар комплексных переменных $\{\xi, \tau\}$, в каждой точке пространства-времени связанных между собой линейной зависимостью через т. н. *соотношение инцидентности*

$$\tau = X\xi \quad \Leftrightarrow \quad \tau^0 = u\xi_0 + w\xi_1, \quad \tau^1 = \overline{w}\xi_0 + v\xi_1, \tag{6}$$

и ведущих себя как *2-спиноры* при лоренцевых вращениях[1]. Пара *инцидентных* друг другу 2-спиноров $\{\xi(X), \tau(X)\}$ образует алгебро-геометрический объект, известный в качестве (*изотропного проективного) твистора* пространства Минковского [2].

Предположим в дальнейшем, что одна из двух компонент спинора $\xi(X)$, например ξ_0, отлична от нуля. В этом случае однородная функция Π зависит от *трех* (проективных твисторных) аргументов следующего вида:

$$\Pi = \Pi(G, \tau^0, \tau^1), \qquad G = \xi_1/\xi_0, \quad \tau^0 = u + wG, \quad \tau^1 = \overline{w} + vG. \tag{7}$$

Мы готовы теперь сформулировать основной результат нашей работы [26].
Любое (аналитическое) решение УКЭ по отношению к твисторной структуре принадлежит к одному из двух и только двух классов и может быть получено из некоторой производящей функции вида (7) с помощью одной из двух различных чисто алгебраических процедур.

Для получения первого класса решений следует просто разрешить алгебраическое уравнение, определяемое функцией (7),

$$\Pi(G, u + wG, \overline{w} + vG) = 0 \tag{8}$$

относительно единственной неизвестной G. При этом получим некоторое комплекснозначное поле $G(X)$, тождественно удовлетворяющее УКЭ. Действительно, при подстановке $G = G(X)$ уравнение (8) становится *тождеством* и, в частности, может

---

[1] Для упрощения мы не различаем в записи пунктирные и непунктирные спинорные индексы. В соотношении инцидентности (6) опущен стандартный множитель "i", что допустимо при соответствующем переопределении *нормы* твистора.

быть продифференцировано по спинорным координатам $\{u, v, w, \overline{w}\}$. Тогда будем иметь

$$P\partial_u G = -\Pi_0, \quad P\partial_w G = -G\Pi_0, \quad P\partial_{\overline{w}} G = -\Pi_1, \quad P\partial_v G = -G\Pi_1, \tag{9}$$

где через Π_0, Π_1 обозначены частные производные от функции Π по ее твисторным аргументам τ^0, τ^1, а через P – *полная* производная этой функции по G

$$P = \frac{d\Pi}{dG} = \frac{\partial\Pi}{\partial G} + w\Pi_0 + v\Pi_1, \tag{10}$$

которую мы будем пока что считать отличной от нуля в рассматриваемой области пространства-времени. Перемножая тогда уравнения (9), находим, что поле $G(X)$ действительно удовлетворяет УКЭ в форме (4). Легко убедиться также, что *произвольная* функция твисторных аргументов $S = S(G, u + wG, \overline{w} + vG)$ при подстановке полученной зависимости $G = G(X)$ также удовлетворяет УКЭ (вследствие функциональной зависимости (8) эта функция на самом деле зависит только от *двух* твисторных переменных).

Для получения второго класса решений УКЭ следует сначала продифференцировать производящую функцию (7) по G и лишь потом получившееся алгебраическое уравнение

$$P = \frac{d\Pi}{dG} = 0 \tag{11}$$

разрешить относительно G. При этом функция $G(X)$ уже не будет сама по себе удовлетворять УКЭ; однако после ее подстановки в (7) производящая функция Π становится функцией пространственно-временных координат и сама с необходимостью удовлетворяет УКЭ (как и любая функция от нее $f(\Pi(X))$ в силу отмеченной выше инвариантности УКЭ). В самом деле, дифференцируя функцию (7) при $G = G(X)$ по спинорным координатам, имеем

$$\partial_u\Pi = \Pi_0 + P\partial_u G, \quad \partial_w\Pi = G\Pi_0 + P\partial_w G, \quad \partial_{\overline{w}}\Pi = \Pi_1 + P\partial_{\overline{w}} G, \quad \partial_v\Pi = G\Pi_1 + P\partial_v G, \tag{12}$$

откуда при учете генерирующего условия (11) немедленно следует УКЭ (4) для функции Π.

Функциональное соотношение (8) и отвечающие ему решения УКЭ первого класса хорошо известны. Действительно, помимо УКЭ поле $G(X)$, полученное из (8), удовлетворяет, как легко видеть из выражений для производных (9), *переопределенной* системе дифференциальных уравнений вида

$$\partial_u G = G\partial_w G, \quad \partial_{\overline{w}} G = G\partial_v G, \tag{13}$$

определяющей т. н. *бессдвиговые (изотропные геодезические) конгруэнции* (БСК). При этом алгебраическое уравнение (8) представляет собой *общее решение* этих уравнений (в неявном виде), описывая тем самым все БСК в пространстве Минковского. Это замечательное утверждение, доказанное впервые в [16], известно как *теорема Керра.*

Что касается второго класса решений УКЭ, генерируемых алгебраическим уравнением (11), то, по-видимому, он ранее не рассматривался в литературе[2]. Известно, однако, что условие (11) определяет положение *особенностей* БСК и, соответственно,

---

[2] Изучение решений *действительного* уравнения эйконала с помощью дифференцирования производящих функций, зависящих от координат как параметров, используется в общей теории особенностей каустик и волновых фронтов [9].

– особенностей решений УКЭ *первого* класса, полученных из алгебраического уравнения (8). Точнее, уравнение (11) определяет *точки ветвления* основного комплекснозначного поля $G(X)$, т. е. точки пространства-времени, в которых производящее уравнение (8) имеет *кратные корни.* С другой стороны, для самих решений второго класса геометрическое место положения особенностей определяется, как это сразу следует из генерирующего эти решения уравнения (11), условием следующего вида:

$$\Lambda = \frac{d^2\Pi}{dG^2} = 0. \tag{14}$$

Изотропные конгруэнции (в том числе БСК), их особенности и точки ветвления играют определяющую роль в алгебродинамической теории поля. Подробнее они обсуждаются в следующих разделах. Здесь же мы лишь повторим, что согласно теореме, доказанной в работе [26],

две вышеописанные алгебраические процедуры в совокупности представляют общее решение УКЭ, т. е. все (аналитические) решения уравнения комплексного эйконала могут быть получены с помощью одной из этих процедур

(отметим только, что для решений с нулевой компонентой спинора $\xi_0 = 0$ должна быть выбрана иная, по сравнению с использованной выше, калибровка). Полученный результат можно рассматривать как *прямое обобщение теоремы Керра.*

В заключение приведем в качестве иллюстрации несколько примеров нахождения двух классов решений УКЭ с помощью вышеприведенной конструкции.

а. Статические решения. Пусть производящая функция Π зависит от своих твисторных переменных следующим образом:

$$\Pi = \Pi(G, H), \quad H = G\tau^0 - \tau^1 = wG^2 + 2zG - \overline{w}, \tag{15}$$

где $z = (u - v)/2$, а зависимость от временной координаты $t = (u + v)/2$ оказывается тем самым исключенной. Очевидно, более того, что анзац (15) представляет самый общий вид генерирующих функций, приводящих к статическим решениям УКЭ.

В [19, 12] было доказано, что статические решения уравнений БСК (а, следовательно, также и УКЭ первого класса), обладающие пространственно-ограниченной *(локализованной)* структурой сингулярного множества, с точностью до 3-мерных вращений и трансляций исчерпываются *решением Керра*, получающегося из функции

$$\Pi = H + 2iaG = wG^2 + 2z^*G - \overline{w}, \quad (z^* = z + ia) \tag{16}$$

с постоянным параметром $a \in \mathbb{R}$. Разрешая квадратичное по G уравнение $\Pi = 0$, получаем тогда следующие две “моды” поля $G(X)$:

$$G = \frac{\overline{w}}{z^* \pm r^*} \equiv \frac{x + iy}{z + ia \pm \sqrt{x^2 + y^2 + (z + ia)^2}} \quad , \tag{17}$$

которые в случае $a = 0$ геометрически соответствуют обычной *стереографической проекции* $S^2 \mapsto \mathbb{C}$ из Северного или Южного полюсов соответственно. Нетрудно проверить, что оба решения, как и соответствующие им остальные компоненты твистора

$$\tau^0 = u + wG = t \pm r^*, \quad \tau^1 = \overline{w} + vG = G\tau^0, \tag{18}$$

действительно удовлетворяют УКЭ (так же, как и произвольная функция всех этих компонент). При этом, соответствующая БСК в простейшем случае $a = 0$ радиальна и имеет точечную сингулярность; в общем случае $a \neq 0$ БСК представляет собой конгруэнцию прямолинейных образующих системы гиперболоидов и имеет *сингулярность типа "Керровского" кольца* радиуса $R = |a|$. Используя эту конгруэнцию, можно определить соответствующие ей риманову метрику (метрику типа "Керра-Шилда") и электромагнитное поле (см. раздел 3), совместно удовлетворяющие электровакуумной системе уравнений Максвелла-Эйнштейна. В случае $a = 0$ это приводит к решению Райсснера-Нördстрема с кулоновским электрическим полем, в общем случае – к решению Керра-Ньюмена, характеризующимся тремя параметрами – массой M, электрическим зарядом Q и моментом импульса Mca, – и обладающим также магнитным моментом Qa, соответствующим "дираковской" частице [17, 18]. Более того, в рамках алгебродинамического подхода для электрического заряда точечной или кольцеобразной сингулярностей *оказывается допустимым только одно, единственное по модулю ("элементарное") значение* [14, 24, 25]. Более подробно свойства этого исключительного решения в контексте алгебродинамики рассмотрены в работе [21].

Получим теперь из той же производящей функции (16) решение УКЭ *второго* класса. Дифференцируя функцию (16) по G и приравнивая производную нулю, получим $G = -z^*/w$; подставляя затем это выражение в качестве аргумента в функцию (16), будем иметь окончательно следующее статическое (всюду однозначное) решение УКЭ:

$$\Pi = -\frac{(r^*)^2}{w} = -\frac{x^2 + y^2 + (z + ia)^2}{x - iy}. \tag{19}$$

Отметим, что при этом уравнение $\Pi = 0$, эквивалентное двум действительным уравнениям $z = 0,\ x^2 + y^2 = a^2$, определяет сингулярное кольцо для решения Керра (17), т. е. для соответствующего той же функции Π решения УКЭ *первого* класса, как это и должно быть в соответствии с вышедоказанной общей теоремой (см. также раздел 4).

При рассмотрении статических решений УКЭ с локализованной в 3-пространстве сингулярностью *второго* класса выясняется, однако, что в отличие от аналогичных решений первого они вовсе не исчерпываются решением (19). В качестве примера рассмотрим серию решений, которые можно получить из производящих функций следующего вида:

$$\Pi = \frac{G^n}{H}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad n > 2 \tag{20}$$

Не приводя явного вида самих решений (для произвольного $n > 2$), найдем лишь пространственную структуру их особенностей, определяемую из решения совместной системы уравнений $P = 0,\ \Lambda = 0$ (см. уравнения (11),(14)). Исключая из нее неизвестное поле G, находим, что сингулярности (точки ветвления эйконала) снова имеют форму *колец* $z = 0,\ x^2 + y^2 = R^2$, имеющих радиусы $R = a(n-1)/\sqrt{n(n-2)}$ соответственно. Интересно заметить, что этим решениям не соответствует, очевидно, никаких нетривиальных решений УКЭ первого класса, для которых уравнение $\Pi = 0$ определяло бы структуру сингулярностей, как это имеет место для случая пары "Керровских" решений (17) и (19).

b. Волновые решения. Рассмотрим теперь производящие функции, зависящие лишь от одной из твисторных переменных τ^0, τ^1, например от τ^0:

$$\Pi = \Pi(G, \tau^0) = \Pi(G, u + wG). \tag{21}$$

Оба класса решений УКЭ, генерируемых функциями вида (21), будут, очевидно, зависеть только от *двух* спинорных координат $u = t + z,\ w = x - iy$. Это означает, в частности, что соответствующие поля распространяются вдоль оси Z с фундаментальной скоростью $c = 1$. Пример "фотоноподобного" решения этого типа, с пространственно ограниченной (как в продольном, так и в поперечном направлениях) структурой сингулярного множества приведен в работе [25].

Отметим в заключение, что решение УКЭ значительно более сложной структуры рассмотрено ниже в разделе 4 (см. также [25]).

1. Частицы как каустики первичных светоподобных конгруэнций

Хорошо известно, что каждому решению уравнения эйконала соответствует некоторая изотропная конгруэнция лучей, ортогональная гиперповерхностям постоянного эйконала $S = const$ (волнового фронта) и определяемая направлением 4-вектора градиента $\partial_\mu S$. В обычно рассматриваемых ситуациях эти две структуры определяют *характеристики* и *бихарактеристики* некоторого (линейного) уравнения гиперболического типа, например, волнового уравнения $\Box\Psi = 0$.

В рассматриваемом комплексном случае (УКЭ) поверхности постоянного эйконала и изотропные конгруэнции 4-градиента геометрически принадлежат уже *комплексному расширению пространства-времени Минковского* $\mathbb{C}M^4$, совершенно естественному также с точки зрения комплексной структуры исходной алгебры бикватернионов $\mathbb{B}$. Вопрос о физическом смысле дополнительных (мнимых) координат и соответствующих комплексных изотропных конгруэнций нетривиален и чрезвычайно важен, но мы не имеем возможности рассматривать его здесь, надеясь сделать это в отдельной статье.

Используем ниже другой, не менее интересный факт существования *действительной* изотропной геодезической конгруэнции для каждого из *комплекснозначных* решений УКЭ. Это замечательное свойство сразу следует из рассмотренной выше твисторной структуры УКЭ. А именно, каждое решение УКЭ (как первого, так и второго классов) полностью определяется соответствующим ему (изотропным проективным) твисторным полем $\{\xi(X), \tau(X)\}$, подчиненным условию инцидентности (6) (в выбранной выше калибровке $\xi_0 = 1,\ \xi_1 = G(X)$). Это "условие Пенроуза" может быть в явном виде разрешено относительно пространственных координат $\{x_a\},\ a = 1, 2, 3$, в результате чего получим:

$$x_a = \frac{\Im(\tau^+\sigma_a\xi)}{\xi^+\xi} - \frac{\xi^+\sigma_a\xi}{\xi^+\xi}\ t, \tag{22}$$

где $\{\sigma_a\}$ представляют собой обычные *матрицы Паули*, а временная переменная t *остается свободным параметром!* Из выражения (22) следует, что фундаментальное спинорное поле $\xi(X)$ *воспроизводит свои значения вдоль лучей, определяемых единичным векторным полем направлений* (полем т. н. *директора*)

$$\vec{n} = \frac{\xi^+\vec{\sigma}\xi}{\xi^+\xi}, \quad \vec{n}^2 \equiv 1, \tag{23}$$

распространяясь вдоль этих, локально определенных направлений с универсальной и постоянной скоростью $c = 1$. В ранее выбранной калибровке для декартовых компонент "директорного" вектора (23) имеем

$$\vec{n} = \frac{1}{(1+GG^*)}\{\ (G+G^*),\ -i(G-G^*),\ (1-GG^*)\ \}; \tag{24}$$

при этом две его независимые степени свободы находятся в одно-однозначном соответствии с двумя компонентами основной комплекснозначной функции $G(X)$.

Таким образом, при выборе некоторого произвольного решения УКЭ пространство расслаивается пучком прямолинейных световых лучей – *изотропной геодезической*[3] *конгруэнцией* (ИГК). Заметим, что как следствие прямолинейности изотропной конгруэнции "директорный" вектор автоматически удовлетворяет уравнению *геодезических* [39]

$$\partial_t \vec{n} + (\vec{n}\vec{\nabla})\vec{n} = 0. \tag{25}$$

Фундаментальное поле $G(X)$, определяющее ИГК, может быть получено из одного из двух алгебраических условий (8) или (11), которые в общем случае имеют несколько (конечное или даже бесконечное число) локально различных решений. Предположим, что производящая функция Π *неприводима*, т. е. не может быть представлена в виде произведения некоторого числа твисторных функций того же вида (в противном случае следует сделать выбор в пользу одного из множителей). Тогда решение общего вида будет представлять собой *многозначную комплексную функцию* $G(X)$. Выберем в окрестности некоторой точки X одну из непрерывных *ветвей* этой функции ("мод"); при этом данной моде будет соответствовать некоторая ИГК и определенный набор физических полей.

В частности, для любого из решений УКЭ *первого* класса может быть определен спинор *электромагнитного поля* $F_{(AB)}$, непосредственно выражающийся через твисторное поле решения [23, 25, 26]

$$F_{(AB)} = \frac{1}{P}\left\{\Pi_{AB} - \frac{d}{dG}\left(\frac{\Pi_A \Pi_B}{P}\right)\right\}, \tag{26}$$

где Π_A, Π_{AB} представляют собой производные по твисторным аргументам τ^0, τ^1 от генерирующей функции Π первого и второго порядков соответственно. Для каждой из мод решения $G(X)$ построенное таким способом поле *локально удовлетворяет однородным уравнениям Максвелла*. Помимо этого, в работах [14, 23, 21] было показано, что через ту же функцию $G(X)$ естественно определяется еще и комплексное $SL(2,\mathbb{C})$ *калибровочное поле Янга-Миллса*, а также *поле кривизны* некоторой эффективной римановой метрики.

Рассмотрим теперь *аналитическое продолжение* выбранной моды функции $G(X)$ вплоть до одной из ее точек ветвления, которые соответствуют кратным корням уравнения (8). В такой точке напряженность электромагнитного поля (26) обращается в бесконечность. То же самое имеет место и для других ассоциированных с решениями УКЭ физических полей, в частности поля кривизны[4]. Тем самым пространственная структура, определяемая положением точек ветвления функции $G(X)$ (которая может быть 0-, 1- или даже 2-мерной, см. раздел 4), проявляет себя как *общий источник* совокупности физических полей и (по крайней мере в случае, когда она ограничена в 3-пространстве) формирует некоторый хорошо определенный и единый *частицеподобный* объект.

Такие образования могут проявлять нетривиальную эволюцию во времени, моделирующую физические взаимодействия, а бифуркации сингулярностей весьма напоминают *взаимопревращения* элементарных частиц (см. пример в следующем разделе). Они обладают также реалистичным набором "квантовых чисел", в том числе автоквантованным электрическим зарядом и гиромагнитным отношением, характерным для дираковской частицы (фермиона спина 1/2) [17, 18, 21]. Большое число таких частицеподобных решений и их сингулярная структура получены и изучались в наших работах [20, 21, 22, 25].

---

[3] В пространстве Минковского геодезические, очевидно, являются прямыми.

[4] Поле Янга-Миллса имеет, помимо этого, дополнительные сингулярности струнного типа.

С другой стороны, для светоподобных конгруэнций (ИГК), сопоставляемых решениям УКЭ с помощью директорного вектора (24), положение их точек ветвления совпадает с положением точек ветвления самого фундаментального поля $G(X)$ и представляет хорошо известную из геометрической оптики структуру “протяженных фокусов” – *каустик*, т. е. огибающих системы лучей конгруэнции, на которых соседние лучи пересекаются (фокусируются). С этой точки зрения, в рассматриваемой теории *“частицы” интерпретируются как (ограниченные в пространстве) каустики ассоциированных с решениями УКЭ светоподобных прямолинейных конгруэнций.*

2. Мировая функция и многозначные физические поля

На данном этапе следует сделать выбор одного из двух типов решений УКЭ, которое в развиваемой теории могло бы в принципе отвечать за описание структуры Вселенной как целого. В качестве *“Мирового решения”* мы выбираем *некоторое решение первого класса*, поскольку большое количество интересных геометрических и физических структур может быть ассоциировано с каждым из решений именно этого класса [14, 20, 21]. Такое решение может быть получено алгебраически из условия Керра (8) и некоторой производящей твисторной *“Мировой функции”* Π; геометрически оно порождает некоторую ИГК специального вида – *бессдвиговую изотропную конгруэнцию* [2, 3].

Более того, оказывается, что при этом выборе решение УКЭ *второго* класса, “сопряженное” Мировому, также играет важную роль, определяя характеристическую гиперповерхность для Мирового решения (I класса). Действительно, эта последняя находится из решения совместной системы алгебраических уравнений (8) и (11). Если разрешить уравнение (11) относительно G и подставить результат в (8), полученное уравнение $\Pi(G(X)) = 0$ и определит характеристическую гиперповерхность для “Мирового” решения. В то же время функция $\Pi(G(X))$ обязана при этом удовлетворять УКЭ, представляя некоторое решение второго класса (в соответствии с основной теоремой раздела 2). Таким образом, в рассматриваемой теории

поле эйконала выполняет две взаимодополняющие функции, являясь одновременно фундаментальным физическим полем (как решение УКЭ I класса) и в то же время характеристическим полем (как сопряженное ему решение II класса), определяющим геометрическое место точек ветвления исходного поля (точек разрыва его производных).

Предположим теперь, что Мировая функция Π представляет собой *неприводимый полином очень высокого, но конечного порядка*, так что уравнение (8) является алгебраическим в узком смысле (т. е. не трансцендентным) и геометрически определяет некоторую алгебраическую поверхность в проективном твисторном пространстве $\mathbb{C}P^3$. В этом случае Мировое решение УКЭ будет состоять из некоторого большого числа мод – ветвей многозначной комплексной функции $G(X)$ – и будет в каждой точке задавать соответствующее число изотропных направлений, определяемых в 3-пространстве директорным вектором (24) и порождающих равное им число локально различных ИГК.

Каждая пара этих конгруэнций в фиксированный момент времени будет, как правило, иметь *огибающую*, состоящую из большого числа связных *одномерных* компонент-каустик[5]. Именно эти пространственные структуры и будут определять

---

[5] Действительно, каустики **общего вида** определяются одним *комплексным* условием $\Pi(G(X)) = 0$ (двумя действительными условиями) на 3 координаты, при фиксированном $t = t_0$ определяющим некоторое число 1-мерных кривых – “струн”.

в рассматриваемой теории “частицы” общего типа (по крайней мере, если они пространственно ограничены). Другие типы частицеподобных структур будут локализованы в фокальных точках пересечения *трех и более* ИГК, где уравнение (8) имеет корень более высокой кратности. Разумеется, образования этого вида будут встречаться относительно редко, и их устойчивость весьма проблематична.

На достаточно простом примере можно проиллюстрировать существование и свойства обоих вышепредставленных типов частиц-каустик. Выберем, например, в качестве производящей твисторную функцию вида [25]

$$\Pi = G^2(\tau^0)^2 + (\tau^1)^2 - b^2G^2 = 0, \quad b = const \in \mathbb{R} \quad , \tag{27}$$

приводящую к уравнению 4-го порядка относительно поля $G(X)$. В начальный момент времени $t = 0$, как нетрудно проследить аналитически, геометрическое место особенностей состоит из пары точечных сингулярностей (обладающих равными “элементарными” зарядами противоположного знака) и электрически нейтральной 2-мерной поверхности (эллипсоидального “кокона”), окружающего точечные заряды (подробнее см. [25]). Кокон образован пересечением всех 4-х мод многозначного решения, в то время как каждая из точечных сингулярностей формируется пересечением одной из пар соответствующих (локально радиальных, т. е. кулоновского типа) ИГК.

Чрезвычайно интересной оказывается динамика этих сингулярностей. В частности, в момент времени $t = b/\sqrt{2}$ точечные сингулярности взаимоуничтожаются (при $r = 0$, т. е. в начале координат), моделируя тем самым процесс *аннигиляции* элементарных частиц; этот процесс сопровождается *излучением* вторичного волнового (светоподобного) фронта, представленного еще одной 2-мерной компонентой связности каустической структуры. Более подробно решение (27) будет рассмотрено в отдельной статье.

Итак, мы видим, что именно многозначное поле естественным образом обеспечивает возможность самосогласованной структуры и эволюции сложных (вплоть до приближенных к реальным) многочастичных сингулярных систем. Необходимо лишь преодолеть некий психологический барьер и допустить принципиальную возможность *многозначности* не только первичного G-поля, но и других ассоциированных с ним физических полей, включая, например, электромагнитное.

Действительно, в общепринятых классических подходах поля, по существу, служат лишь инструментом, позволяющим адекватным образом (с учетом запаздывания и т. п.) описать динамику частиц, и ничем более. Правда, в нелинейных теориях, так же, как и в представленном здесь алгебродинамическом подходе, поля играют более важную роль, отвечая за образование самих частиц как регулярных *солитонов* или сингулярностей (точечных или протяженных) соответственно. В первом, более привычном подходе, требование *однозначности* поля представляется вполне естественным, если не неизбежным. Та же ситуация имеет место и в квантовой механике, где “правила отбора” часто следуют именно из условия однозначности волновой функции.

Однако в алгебродинамике, как можно видеть на примере решения (27), требование однозначности поля не только не является необходимым, но и препятствует адекватному описанию взаимодействия частиц-сингулярностей. С другой стороны, признание многозначности поля вовсе не мешает получению дискретного спектра характеристик сингулярности по аналогии с квантовой механикой. Например, требование *однозначности некоторой, локально выбранной моды* первичного G-поля и электромагнитного поля (вдали от точек ветвления первого и сингулярностей второго соответственно!) приводит к квантованию электрического заряда сингулярных источников в алгебродинамической теории поля [24, 25].

Наконец, если вести речь о т. н. процессе “измерения” напряженностей поля, например электромагнитного, то следует заметить, что в эксперименте непосредственно меряются лишь ускорения частиц, токи и т. п., и лишь затем результаты переводятся на привычный полевой язык. Однако это последнее действие – лишь дань традиции, вовсе не являющаяся обязательной (вспомним хотя бы электродинамику Фейнмана-Уилера или многочисленные релятивистски инвариантные теории “действия на расстоянии” [28, 29]). “На самом деле мы никогда не имеем дело с полями, а исключительно с частицами” (Ф. Дайсон).

Между тем, предлагаемый подход в этом отношении может даже считаться не столь радикальным, поскольку физическое поле, хотя и многозначное, сохраняет в нем свою фундаментальную роль и как строительная основа для частиц, и как посредник, осуществляющий взаимодействие между ними. Что касается второй из его функций, то уже на классическом уровне рассмотрения, при рассмотрении уравнения движения частицеподобной сингулярности, мы можем иметь дело с *усредненным значением* всех полевых мод, “внешних” по отношению к частице (т. е. несингулярных в точке ее нахождения). Отметим, что близкие представления естественно возникают и в некоторых квантовополевых подходах [32]. В нашей же схеме, истинную взаимосвязь первичного многозначного поля и “наблюдаемого” поля, описывающего межчастичные взаимодействия, еще предстоит осознать после получения спектра и эффективной механики частиц-сингулярностей.

Хочется надеяться, что концепция многозначности физических полей будет через какое-то время воспринята так же, как это произошло с гипотезой *многомерности* физического пространства-времени. Идея многозначности действительно выглядит чрезвычайно естественной и привлекательной. С чисто математической точки зрения эта концепция оправдана в свете естественной многозначности решений дифференциальных уравнений в частных производных (см., например, [30, 31]). Как выясняется, решения, описываемые обобщенными δ-функциями, представляют собой, по существу, лишь частный и не самый интересный случай решений общего вида. С физической точки зрения идея о локально многозначном, но *глобально едином комплекснозначном поле* позволяет простым образом ввести понятие о некотором дуалистическом комплексе “частицы-поле”, комплексе чрезвычайно богатой и сложной структуры, объединяющем все частицы Вселенной в единый физический объект. При этом сами сингулярности-частицы хорошо определены и участвуют в коллективном движении, *свободном от всякой неоднозначности или расходимостей* (последние могут возникнуть в данной схеме лишь как результат неадекватного описания процесса эволюции и могут быть устранены, если возникнут, на совершенно законном основании, в отличии от процедур перенормировки в квантовой теории поля).

Наконец, что касается принципиально важной *финальной* проблемы выбора некоторой *исключительной по внутренним свойствам* производящей функции П в качестве *Мировой функции Вселенной*, некоторые соображения могут быть высказаны уже на данном этапе развития теории. Мы собираемся рассмотреть их в отдельной статье.

3. “Предсвет”, релятивистски инвариантный Эфир и поток Времени

Светоподобные конгруэнции (ИГК) являются основным элементом картины физического мира, возникающей в представленном алгебродинамическом подходе и даже в твисторной теории вообще. Лучи ИГК плотно заполняют пространство-время и в каждой точке состоят из *суперпозиции* огромного числа компонент-мод, имеющих различные изотропные направления, т. е. распространяющиеся (с 3-мерной точки зрения) в разных направлениях, но с постоянной по модулю и универсальной скоростью $c = 1$ (для каждой из мод многозначного решения, каждой точки и каждой инерциальной системы отсчета). С такой точки зрения, *во Вселенной не существует ничего, кроме этого первичного светоподобного потока ("Предсвета")*, поскольку *вся физическая Материя порождена предсветом и из предсвета* на каустиках – своего рода областях "конденсации", "уплотнения" лучей предсветовой конгруэнции.

При этом можно говорить о некоторой исключительной форме релятивистски инвариантного *эфира*, формируемого первичным предсветовым потоком. Такой эфир, разумеется, имеет очень мало общего со старыми моделями *светонесущего* эфира, рассматривавшегося как род упругой среды непонятной этиологии. Здесь же эфир состоит из *бесструктурных* (предматериальных) светоподобных элементов и, очевидно, находится в полном согласии с теорией относительности[6].

В то же время, описанная выше картина эфира, формируемого потоком Предсвета, и материи, порожденной "сгущениями" первичного света, вызывает множество ассоциаций с Библией и с древней восточной философией. Не один теолог, мистик или философ наверняка уже приходил к представлению о подобной картине Мироздания. Однако возникающие в контексте последовательной и чисто дедуктивной физической теории, такие представления выглядят значительно более достоверными; насколько известно автору, ранее они практически не обсуждались в физической литературе[7].

Существование формируемого Предсветом эфира и универсальное свойство "переноса" фундаментального "эфирообразующего" поля $G(X)$ с постоянной скоростью $c = 1$ указывает также на принципиально различный статус пространственных и временной координат и позволяет предложить *новый подход к проблеме физического Времени* в целом. При этом полезно вспомнить, что с тех пор, как Г. Минковский в 1908 году объединил пространство и время в единый 4-мерный континуум, никаких дальнейших продвижений в понимании проблемы Времени по существу не произошло. Более того, такой синтез во многом затушевал качественные различия пространственной и временной сущностей и мало способствовал решению таких проблем, как (микро/макро) необратимость, (не)однородность и (не)локальность времени, зависимость хода времени от материальных процессов и др.

По нашему мнению, суть проблемы Времени очень проста и состоит в следующем. *Субъективно* мы воспринимаем время как некоторое непрерывное и невидимое движение, *поток*; каждый из нас прекрасно понимает, как это понимали еще древние греки, что имеется в виду под словами "Река Времени". Мы воспринимаем такое внутреннее движение, как не зависящее ни от нашей воли, ни от материальных процессов и *равномерное*: недаром течение времени в физике моделируется равномерным движением ленты записывающего устройства и т. п. Кроме того, и в отличие от изменений в пространственных направлениях, именно с изменением во времени связано не только *сохранение* определенного набора *интегральных величин* (это-то как раз используется в ортодоксальной физике), но и более сильное, субъективно воспринимаемое условие – *повторение, воспроизведение* **локального** *состояния любой системы.* Именно поэтому для измерения времени и используются (*часы*) с принципом действия, основанным на повторяющихся, чисто периодических процессах.

---

[6] Сейчас кажется даже странным, что сам А. Эйнштейн не предложил концепцию релятивистского эфира, столь созвучного идеям и СТО, и любимого им *принципа Маха.* Удивительно и то, что Р. Пенроуз также просмотрел эту возможность, естественно вытекающую из самой структуры созданной им твисторной теории.

[7] В отдельных аспектах близкие к вышерассмотренным идеи высказывались в работах [34, 35, 36]. Отметим особенно концепцию "лучистой частицы", предложенную Л. С. Шихобаловым [33].

Наконец, в отличие от в значительной мере произвольных и различных изменений пространственного положения физических тел, все они и все мы всегда обладаем *общей и монотонно возрастающей временной координатой*, т. е. находимся в едином и перманентном движении в Реке Времени.

Удивительно, но теоретическая физика даже не пытается дать хоть какое-то объяснение подобных представлений, совершенно чуждых ей и, в том числе, теории относительности. При описании динамики (как нерелятивистской, так и релятивистски инвариантной) чисто постулативно выбирается “гиперповерхность, ортогональная оси времени”, т. е. фиксируется субъективно воспринимаемое всеми единство настоящего момента времени, момента “сейчас”; *никаких внутренних оснований для этого в структуре теоретической физики, включая СТО, не имеется!*

Такая ситуация, по крайней мере частично, обусловлена тем, что представление о вездесущем и вечном Потоке Времени немедленно приводит к вопросу о его (материальном? предматериальном?) носителе. В этой связи нельзя не вспомнить работы Н. А. Козырева [37], который настойчиво развивал представление об “активном” Потоке Времени, непосредственно влияющем на ход материальных процессов. По нашему мнению, однако, строгие физические обоснования идей Козырева сегодня отсутствуют. В предлагаемом нами подходе Поток Времени не является в подобном смысле материальным: он не *влияет* на Материю, и не *взаимодействует* с ней, а сам *порождает* ее. В отличие от концепции Козырева, здесь нет разных материальных сущностей, лишь одной из которых является Время: напротив, имеется лишь одна *триединая* сущность – Предсвет-Время-Материя. В некотором смысле наша концепция оказывается ближе к теории “время-генерирующих потоков” А. П. Левича [38].

С другой стороны, при рассмотрении проблемы носителя Потока Времени мы неизбежно возвращаемся к представлениям о некоторой форме *эфира*, который был, как известно, изгнан из физики после триумфа специальной теории относительности. Без него же никакой Поток Времени не может быть последовательно введен в структуру теоретической физики, и все субъективно воспринимаемые свойства времени не могут быть строго сформулированы и описаны.

Однако парадоксальным образом, как это часто бывает, именно СТО с ее постулатом постоянства и универсальности скорости света и оправдывает введение *динамического, лоренц-инвариантного эфира*, формируемого светоподобными конгруэнциями, как первичной структуры физического Мира. При этом Поток Времени совершенно естественно может быть отождествлен с Потоком первичного Света (Предсвета), а *Река Времени* – с *Рекой Предсвета*. Причем именно универсальность скорости света объясняет наше субъективное восприятие Потока Времени как равномерного и однородного.

Совершенно необычным и неожиданным оказывается, однако, другое: в данном подходе *Поток Времени представляет собой* **суперпозицию** *огромного числа* **разнонаправленных** *и локально независимых составляющих (субпотоков)*. В каждой точке 3-мерного пространства существует (конечное) множество направлений, и каждая из мод первичного многозначного поля $G(X)$ определяет одно из этих направлений и *распространяется вдоль него*, формируя одну из составляющих единого Потока Предсвета, тождественного Потоку Времени.

Можно предполагать, что именно благодаря такой локальной многозначности мы не способны субъективно воспринимать *направление* Потока Времени. Помимо того, для сложного Мирового решения в структуре фундаментального временного-предсветового потоков обязательно присутствует и *стохастическая* компонента, проявляющая себя в хаотических изменениях локальных направлений световых конгруэнций, также труднодоступных для восприятия. В то же время, как уже отмечалось, именно существование постоянной по модулю и универсальной для всех ветвей многозначного Мирового решения *скорости распространения Предсвета* ответственно за возможность субъективного восприятия Потока Времени вообще и за восприятие хода времени как равномерного и однородного в частности.

4. Заключение

Итак, мы рассмотрели реализацию алгебродинамического подхода, в которой в качестве основы физической теории выбирается единственная структура чисто абстрактной природы (алгебра комплексных кватернионов и *обобщенные уравнения Коши-Римана* – условия дифференцируемости функций в этой алгебре). Та же самая структура на самом деле может быть выражена на многих эквивалентных алгебро-геометрических языках (ковариантно постоянных полей, твисторной геометрии, бессдвиговых изотропных конгруэнций и др.).

Исходные уравнения прямо приводят к полю комплексного эйконала, рассматриваемому в теории как первичное нелинейное физическое поле (в некотором смысле альтернативное линейным полям квантовой механики). С этим полем тесно связаны фундаментальное 2-спинорное и твисторное поля, на языке которых, в частности, формулируется общее решение уравнения комплексного эйконала. Через поле эйконала определяются также другие физические поля, в том числе электромагнитное поле и поле Янга-Миллса. Особенности поля эйконала и отвечающих ему изотропных конгруэнций рассматриваются как частицеподобные образования ("автоквантованные" и эффективно взаимодействующие).

В результате, возникающая как следствие одной лишь исходной структуры *физическая* картина Мира оказывается весьма неожиданной и красивой. Ее основными элементами являются первичный световой поток – "Предсвет"– и формируемый им релятивистский эфир, многозначные физические поля и порождаемая Предсветом материя (состоящая из частиц-каустик, образуемых суперпозицией отдельных ветвей единой предсветовой конгруэнции в точках их "фокусировки").

Очень естественной и глубокой представляется возникающая в теории связь между существованием универсальной скорости (скорости "света") и "Потоком Времени", позволяющая в определенном смысле понять происхождение Времени как такового. *Время есть ничто иное, как первичный Свет*, эти две сущности неразделимы. С другой стороны, *нет ничего во Вселенной, помимо потока Предсвета*, порождающего *всю без исключения* "плотную" Материю во Вселенной.

Благодарности

Автор благодарен Д. Г. Павлову за приглашение участвовать в работе создаваемого им актуального научного журнала "Гиперкомплексные числа в физике и геометрии" , а также в конкурсе работ по данной тематике. Он также глубоко признателен А. П. Левичу и участникам руководимого им семинара по изучению феномена времени. Много дали мне беседы с В. И. Жариковым, В. Н. Журавлевым, Дж. А. Ризкалла, В. Н. Тришиным, В. П. Троицким, В. П. Царевым и с другими моими коллегами, которым я благодарен за многолетнюю дружбу и поддержку. Хочется надеяться, что огромное здание физики на самом деле можно перестроить по новому проекту, значительно более простому, единственно возможному (Дж. А. Уилер) и приближающему нас к истинному Проекту, по которому и был создан наш Мир.

Литература

[1] R. Penrose, in: *Quantum Gravity: an Oxford Symposium*, eds. C. J. Isham, R. Penrose, D. W. Sciama. – Clarendon Press, Oxford 1975.

[2] Р. Пенроуз и У. Риндлер, *Спиноры и пространтво-время. Т. 2.* – Мир, М. 1989.

[3] R. Penrose, *Classical and Quantum Gravity*, **14**, A299 (1997).

[4] В. А. Фок, *"Теория пространства, времени и тяготения"*. – ГИТТЛ, М. 1955.

[5] А. З. Петров, *"Новые методы в Общей теории относительности"*. – Наука, М. 1966.

[6] Г. Бейтман, *"Математическая теория распространения электромагнитных волн"*. – Физматгиз, М. 1958.

[7] S. Fritelli, E. T. Newman and G. Silva-Ortigoza, *J. Math. Phys.*, **40**, 383, 1999;
E. T. Newman and A. Perez, *J. Math. Phys.*, **40**, 1089 (1999).

[8] В. И. Арнольд, *"Математические методы классической механики"*. – Наука, М. 1989.

[9] В. И. Арнольд, *"Особенности каустик и волновых фронтов"*. – ФАЗИС, М. 1996.

[10] С. Н. Кружков, *Мат. Сборник*, **98 (140)**, 450 (1975).

[11] В. П. Маслов, *"Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях"*. – Наука, М. 1977.

[12] R. P. Kerr and W. B. Wilson, *Gen. Rel. Grav.*, **10**, 273 (1979).

[13] В. В. Кассандров, *"Алгебраическая структура пространства-времени и Алгебродинамика"*. – Изд-во Ун-та дружбы народов, М. 1992.

[14] V. V. Kassandrov, *Gravitation & Cosmology*, **3**, 216 (1995); (gr-qc/0007027).

[15] V. V. Kassandrov, *Acta. Applic. Math.*, **50**, 197 (1998);
V. V. Kassandrov, in: *"Quasigroups and Nonassociative Algebras in Physics"*, ed J. Lõhmus and P. Kuusk. – Inst. Phys. Estonia Press, 1990, p 202.

[16] G. C. Debney, R. P. Kerr and A. Schild, *J. Math. Phys.* , **10**, 1842 (1969).

[17] B. Carter, *Phys. Rev.*, **174**, 1559 (1968).

[18] C. A. Lopes, *Phys. Rev.*, **D30**, 313 (1984).

[19] A. Ya. Burinskii, in:*"Problems of Theory of Gravitations and Elementary Particles". No. 11*, ed. K. P. Stan'yukovich. – Atomizdat, Moscow, 1980, p. 47 (in Russian).

[20] В. В. Кассандров и Дж. А. Ризкалла, в: *"Современные проблемы теории поля"*, ред. А. В. Аминова. – Изд-во Казанского Ун-та, Казань 1998, с. 163; see also English version V. V. Kassandrov and J. A. Rizcallah, in: *"Recent Problems in Field Theory"*, ed A. V. Aminova, Kasan Univ. Press, Kasan 1998, p 176; (gr-qc/9809078).

[21] V. V. Kassandrov and J. A. Rizcallah, in: *"Fundamental Problems of High Energy Physics and Field Theory"*, ed. V.A. Petrov. – Inst. High Energy Phys., Protvino, 2002, p. 199; *Preprint* gr-qc/9809056, 1998.

[22] V. V. Kassandrov and V. N. Trishin, *Gravitation & Cosmology*, **5**, 272 (1999); (gr-qc/0007026).

[23] V. V. Kassandrov and J. A. Rizcallah, *Preprint* gr-qc/0012109, 2000.

[24] В. В. Кассандров, *Вестник Рос. Ун-та дружбы народов*, сер. Физика, **8(1)**, 34, 2000; (www.chronos.msu.ru / relectropublications.html).

[25] V. V. Kassandrov, *Preprint* gr-qc /0308045.

[26] V. V. Kassandrov, *Gravitation & Cosmology*, **8**, Suppl. 2, 57 (2002).

[27] V. V. Kassandrov, in: *Proc. Int. Conf. "Physical Interpretations of Relativity Theory"*, eds. A. N. Morozov and V. O. Gladyshev. – Bauman Univ. Press, Moscow, 2003 (in print).

[28] *Instantaneous Action-at-a-Distance in Modern Physics. "Pro" and "Contra"*, eds. A. Chubykalo, V. Pope and R. Smirnov-Rueda. – Nova Science Publ. Inc., NY, 1999.

[29] Ю. С. Владимиров и А. Ю. Турыгин, *"Теория прямого межчастичного взаимодействия"*. – Энергоатомиздат, М. 1986.

[30] F. Lizzi, G. Marmo, G. Sparano and A. M. Vinogradov, *J. Geom. Phys.*, **14**, 34, 1994.

[31] V. V. Lychagin, *Acta Applic. Math.*, **3**, 135 (1985).

[32] A. A. Kirillov, *Phys. Lett.*, **B555**, 13 (2003);
A. A. Kirillov and D. Turaev, *Phys. Lett.*, **B532**, 185 (2002).

[33] Л. С. Шихобалов, *Вестник С.-П. Ун-та*, **1(3)**, 109 (1997); **1(4)**, 118 (1999).

[34] И. А. Урусовский, *Зарубежная радиоэлектроника*, **3**, 3 (1996); **6**, 64 (1996); **6**, 66 (2000).

[35] В. В. Смолянинов, *Успехи физич. наук*, **170**, 1064 (2000).

[36] И. А. Шелаев, *Введение в необратимую электродинамику.* – Дубна, 1999.

[37] Н. А. Козырев, *Избранные Труды.* – Л. 1991;
Н. А. Козырев, в: *“История и методология естественных наук. Вып. 2”.* – М., 1963, с. 95; (см. также труды этого автора в www.chronos.msu.ru/relectropublications.html).

[38] А. П. Левич, в: *Конструкции времени в естественных науках: на пути к пониманию феномена времени*, ред. А. П. Левич. – Изд-во Московского Ун-та, М. 1996.
A. P. Levich, *Gravitation & Cosmology*, **1(3)**, 237 (1995); (см. также труды этого автора в www.chronos.msu.ru / relectropublications.html).

[39] В. В. Кассандров, в: *Математика и Практика. Математика и Культура. Вып. 2*, ред. М. Ю. Симаков. – Самообразование, М. 2001, с. 67; (www.chronos.msu.ru / relectropublications.html).

О НЕКОТОРЫХ ВОПРОСАХ ЧЕТЫРЕХМЕРНОЙ ТОПОЛОГИИ: ОБЗОР СОВРЕМЕННЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Р. В. Михайлов

Harish-Chandra Research Institute, Jhunsi, Allahabad, India
rmikhailov@mail.ru

Введение

Физическая интуиция выделяет четыре измерения как естественно соответствующие материальной реальности. И практически во всех многомерных современных физических теориях четырехмерность играет особую роль. Многомерные квантовые теории поля, теории струн часто рассматриваются вместе со своими компактификациями, т. е. в качестве основного пространства, описывающего реальность, берется некоторое четырехмерное пространство и умножается на многомерное компактное многообразие. Таким путем получается и пятимерная модель Калуцы-Клейна, и десятимерные теории суперструн.

Интересно, что с чисто математической точки зрения размерность четыре оказывается самой сложной. С первого взгляда, это противоречит нашим интуитивным представлениям о понятии размерности: ведь, чем выше размерность, тем появляется больше сложностей. Однако, это не всегда так. Новые размерности часто дают новую свободу действий. Естественно, что при этом должна возникнуть некая середина, в которой необходимая свобода действий отсутствует, а маломерные методы слабо применимы. В топологии эта середина и есть размерность 4.

Цель этой заметки – сделать небольшой обзор некоторых проблем, возникающих в 4-мерной топологии.

1. Проблема s-кобордизма

Одним из основных вопросов геометрической топологии является проблема классификации многообразий, принадлежащих тем или иным категориям, с соответствующими отношениями эквивалентности. Так, при работе в топологической категории встает вопрос классификации топологических многообразий, например, в предположении о компактности, связности и замкнутости с точностью до гомеоморфизма. В размерности один – это лишь окружности, в размерности два мы приходим к полной классификации: каждое связное замкнутое компактное многообразие гомеоморфно двумерной сфере с приклеенными ручками и листами Мебиуса. При этом, фундаментальные группы этих многообразий являются полными топологическими инвариантами. В размерности три вопрос о классификации перерастает в глобальную проблему: уже существование связного односвязного трехмерного многообразия, не гомеоморфного трехмерной сфере, представляет собой известную проблему Пуанкаре.

Интересно, что в размерности ≥ 5, многие трудности, возникающие в меньших размерностях, преодолеваются. Это прежде всего связано с концепцией "общего положения" в многомерных пространствах. Говоря неформально, во многих важных случаях, когда возникают самопересечения комплексов внутри многообразий, малыми шевелениями можно их устранить. В малых же размерностях этого сделать нельзя.

Введем одно из центральных отношений эквивалентности топологии многообразий, так называемую s-кобордантность. Пусть M_1 и M_2 – некоторые n-мерные многообразия, говорим, что они *кобордантны*, если существует $n+1$-мерное многообразие W, такое что $\partial W = M_1 \cup M_2$. Далее, если вложения $M_i \to W$ являются гомотопическими эквивалентностями, то этот кобордизм называется *h-кобордизмом*. Любая гомотопическая эквивалентность представляет элемент группы Уайтхеда, зависящей только от фундаментальной группы данного многообразия (или, в общем, клеточного комплекса). Группа Уайтхеда может быть определена как K_1-функтор от целочисленного группового кольца фундаментальной группы, профакторизованный по действию самой группы. При этом, гомотопическая эквивалентность представляет тривиальный элемент группы Уайтхеда тогда и только тогда, когда она гомотопна композиции элементарных клеточных расширений и сдавливаний, т. е. так называемой простой гомотопической эквивалентности. h-кобордизм, при котором гомотопические эквивалентности являются простыми, называется *s-кобордизмом.* В частности, любая гомотопическая эквивалентность между односвязными многообразиями гомотопна простой.

Основным результатом многомерной топологии многообразий является следующая теорема (см. [1, 2]).

Теорема об s-кобордизме: *Пусть $n \geq 5$, тогда связный h-кобордизм W между n-мерными многообразиями M_1 и M_2 гомеоморфен прямому произведению $W \equiv M_1 \times I$, если и только если этот кобордизм является s-кобордизмом.*

В частности, если мы рассматриваем односвязные многообразия, то любой h-кобордизм между ними представляет собой прямое произведение. Из этого факта вытекает многомерная гипотеза Пуанкаре, утверждающая, что в размерности ≥ 5 гомотопическая сфера гомеоморфна стандартной сфере. В размерности 4 доказательство многомерной теоремы об s-кобордизме не проходит и аналогичное утверждение представляет собой открытую проблему.

Проблема. *Верна ли теорема об s-кобордизме в размерности* 4? Доказательство многомерной теоремы об s-кобордизме основано на разложении многообразия W на ручки, и дальнейшей их перегруппировке, сокращениям и так далее, последовательному приведению данного многообразия к структуре простого произведения M_i на отрезок. Главную роль в данном методе играет трюк Уитни. Это метод, позволяющий уничтожать точки пересечения вложенных подмногообразий, посредством вложенного двумерного диска (диска Уитни) (подробнее см. [1]). Основной проблемой распространения многомерного доказательства на случай четырехмерных многообразий является невозможность применения трюка Уитни в размерности 4. Действительно, как известно, любой двумерный комплекс может быть вложен в пятимерное пространство, и любой погруженный диск может быть произотопирован во вложенный. Однако, в размерности 4, это уже не верно: мы можем рассматривать диск Уитни лишь погруженным. Этот простой факт прямо рушит все многомерное доказательство теоремы об s-кобордизме в случае многообразий размерности 4.

Для преодоления трудностей, связанных с погруженным диском Уитни, были созданы новые методы. Наиболее эффективным оказался метод, предложенный А. Кассоном. Суть метода заключалась в последовательном заклеивании точек самопересечения все новыми погруженными дисками. Этот процесс можно продолжить бесконечно, при этом однако, окрестность полученного 2-комплекса будет представлять ручку, гомотопически эквивалентную стандартной. Эта идея была использована М. Фридманом для доказательства 4-мерной топологической гипотезы Пуанкаре [3].

В целом, как отмечалось выше, проблема существования аналога теоремы об s-кобордизме в размерности 4 остается открытой. Однако, в 1996 г. М. Фридман и П. Тайхнер доказали аналог этой теоремы в классе 4-мерных многообразий, фундаментальные группы которых имеют субэкспоненциальный рост (вернее, рост не выше 2^n) [4].

2. Фальшивые и экзотические 4-мерные многообразия

Встает естественная задача сравнения отношений имеющихся эквивалентностей в классе многообразий фиксированной размерности: гомотопической эквивалентности, гомеоморфности, диффеоморфности. Так, вопрос о том верно ли, что два непрерывно гомеоморфных гладких многообразия являются диффеоморфными, имеет положительный ответ в размерностях меньших четырех. Ситуация в размерности начиная с четвертой оказывается более сложной.

Говорят, что многообразие N является *фальшивой копией* многообразия M, если N и M просто гомотопически эквивалентны, но не гомеоморфны. И N называется *экзотической копией* M, если N и M гомеоморфны, но не диффеоморфны.

Вопрос о существовании фальшивых и экзотических сфер представляет собой топологический и гладкий варианты гипотезы Пуанкаре. Гладкая гипотеза Пуанкаре верна в размерности меньше четырех: не существует экзотических трехмерных (и меньшемерных) сфер. Рассмотрение многомерного случая приводит к красивой теории экзотических сфер: замечательный результат Милнора утверждает, что существует 28 7-мерных многообразий, гомеоморфных 7-мерной сфере, но не диффеоморфной ей. Самым интригующим остается опять-таки 4-мерный случай. Это единственная размерность, в которой существование экзотических сфер остается открытой проблемой!

Не менее удивительной оказалась ситуация с экзотическими копиями пространств $\mathbb{R}^n$. В размерности $n \neq 4$ было известно, что экзотических $\mathbb{R}^n$ не существует и вопрос долгое время оставался открыт в размерности 4. В 80-е годы благодаря результатам Фридмана и Дональдсона было доказано существование бесконечного числа гладких, попарно недиффеоморфных 4-мерных многообразий, гомеоморфных $\mathbb{R}^4$. При этом, в доказательстве были существенно использованы методы математической физики: инстантоны, связности Янга-Миллса и др. (см. [5]). Несколько более подробно. Одним из основных инвариантов односвязных 4-мерных топологических многообразий является форма пересечений – симметрическая билинейная форма, определенная на вторых гомологиях многообразия. Классическая теорема Уайтхеда утверждает, что два односвязных ориентированных замкнутых гладких 4-многообразия гомотопически эквивалентны тогда и только тогда, когда их формы пересечений изоморфны. В связи с этим представлялся актуальным вопрос о перечислении симметрических билинейных форм, реализуемых как формы пересечений 4-многообразий. М. Фридман показал, что любая симметрическая билинейная форма может быть реализована как форма пересечения компактного односвязного 4-многообразия и что имеется не более двух многообразий с заданной формой. Дональдсон перечислил формы пересечения для гладких многообразий – их оказалось ограниченное число. Отсюда и вытекает существование экзотических гладких структур на $\mathbb{R}^4$. Структура экзотических $\mathbb{R}^4$ весьма сложна и занимает видное место в современных исследованиях. Остаются открытыми многие вопросы, связанные в подобными многообразиями. В частности, существует ли экзотическое $\mathbb{R}^4$, такое, что оно не разбивается собственно вложенным $\mathbb{R}^3$ на два экзотических куска (проблема 4.43 (D) [6]).

Построение фальшивых четырехмерных многообразий требует применения иных техник. Как указывалось выше, фальшивых четырехмерных сфер не существует (четырехмерная топологическая гипотеза Пуанкаре). Часто, вопрос о гомеоморфности двух гомотопных 4-многообразий является очень сложным, и проходя через топологическую категорию, доказывается их недиффеоморфность. Одним из первых подобных примеров 4-многообразий является конструкция Кэппела-Шейнсона (см. [2]) фальшивого проективного пространства $\mathbb{R}P^4$, гомотопически эквивалентного, но не диффеоморфного $\mathbb{R}P^4$. Это многообразие не является кусочно-линейно гомеоморфным $\mathbb{R}P^4$.

В заключении приведем еще некоторые простые по формулировке открытые проблемы в размерности 4, относящиеся к вопросу экзотических структур. Множество открытых проблем в данной тематике, как классических, так и современных, можно найти в списке [6] (см. также [7]).

Проблема (4.77 [6]): Верно ли, что произведение экзотического $\mathbb{R}^4$ на R^1 диффеоморфно $\mathbb{R}^5$?

Проблема (4.86 [6]): Верно ли, что все гладкие замкнутые 4-многообразия имеют более одной гладкой структуры? (Обобщение гладкой 4-мерной гипотезы Пуанкаре).

Проблема (4.87 [6]): Верно ли, что каждое некомпактное гладкое 4-многообразие имеет несчетное число гладких структур?

3. Гипотеза Шенфлиса

Приведем еще одну проблему, имеющую решение во всех размерностях, кроме четырех. Эта проблема связана с заузливанием в коразмерности 1. Напомним, что вложение $f : M^m \to N^{m+n}$ называется *локально-плоским*, если образ каждой его точки в N^{m+n} обладает окрестностью U, такой что пара (Imf, N^{m+n}) гомеоморфно (кусочно-линейно, если мы работаем в соответствующей категории) паре $(D^m \times D^n, D^m \times \{0\})$.

Гипотеза: *Пусть $f : S^n \to S^{n+1}$ является кусочно-линейным локально-плоским вложением. Тогда $S^{n+1} \setminus Imf$ состоит из двух компонент, замыкание каждого из которых представляет собой кусочно-линейный n-мерный шар.*

Грубо говоря, гипотеза утверждает, что n-мерная сфера не может заузливаться в $n+1$-мерной. Оказывается, что в размерностях $n+1 \neq 4$ эта гипотеза оказывается верной. А в размерности 4, опять таки, не проходят методы, применимые в меньшей и больших размерностях.

Завершая данную заметку, еще раз отметим, что можно найти мало областей математики, изучение которых требует столь разнообразных методов. Проблемы 4-мерной топологии приводят к сложным вопросам теории групп. Это теория роста групп, проблемы типа Андрюса-Кертиса, нижних центральных рядов в группах. Также здесь применяются многомерные методы, например, точные последовательности хирургии, и методы теории узлов и зацеплений. Таким образом, размерность четыре с топологической точки зрения – единственная размерность, где сталкиваются столь разные техники и появляются вопросы, казалось бы, не относящиеся друг к другу. А решение многих из них потребует развития еще более удивительных техник алгебры, геометрии и топологии.

Литература

[1] К. Рурк и Б. Сандерсон: *Введение в кусочно-линейную топологию*, Мир, М. 1974.

[2] Р. Мандельбаум: *Четырехмерная топология*, Мир, М. 1981.

[3] M. H. Freedman and F. Quinn: *Topology of 4-manifolds*, Princeton University Press, 1990.

[4] M. H. Freedman and P. Teichner: *4-Manifold topology I: Subexponential groups*, Invent. Math. **122**(3), pp. 509-529.

[5] D. Freed and K. Uhlembeck: *Instantons and four-manifolds*, Springer, N.Y. 1990.

[6] R. Kirby: *Problems in low-dimensional topology*, 1996.

[7] F. Quinn: *Problems in low-dimensional topology*, Science Bulletin of Josai University, **2**, pp. 97-104, 1997.

КВАТЕРНИОНЫ: АЛГЕБРА, ГЕОМЕТРИЯ И ФИЗИЧЕСКИЕ ТЕОРИИ

А. П. Ефремов

Российский университет дружбы народов
a.yefremov@rudn.ru

В статье дан обзор результатов изучения алгебраических, геометрических и дифференциальных свойств кватернионных (Q) чисел и их приложений. Кратко изложены традиционная и "тензорная" формы записи и представления Q-единиц. Установлена их структура, а также определены группы их преобразований, сохраняющие форм-инвариантность правила Q-умножения. Рассмотрен ряд математических и физических приложений: применение триад Q-единиц как подвижных реперов, построение различных семейств векторных Q-пространств, запись уравнений механики в произвольно вращающихся системах отсчета, а также реализация модели Q-теории относительности, содержащей все эффекты специальной теории относительности, но допускающей описание кинематики неинерциального движения. Приведен перечень "кватернионных совпадений" – физических соотношений и теорий, естественным образом связанных с математикой Q-чисел.

Введение

Открытие кватернионных (Q) чисел датируется 1843 годом и обычно связывается с именем В. Р. Гамильтона [1, 2], хотя еще в предшествующем веке в математику Q-типа объектов вклад внесли Эйлер и Гаусс; более того, Родригес записал правило умножения для элементов схожей алгебры [3–5]. Активное противостояние Гиббса и Хевисайда позициям учеников Гамильтона привело к возникновению современной векторной алгебры, позже – векторному анализу. После этого алгебра кватернионов практически перестала служить инструментом математической физики, несмотря на ее исключительный характер, установленный теоремой Фробениуса. В начале 20 века пал последний бастион любителей Q-чисел: распалось международное "Общество содействия изучению кватернионов". Единственной реминисценцией некогда знаменитых гиперкомплексных чисел явились матрицы Паули. В более позднее время кватернионы эпизодически использовались как математический аппарат для альтернативного описания уже известных физических моделей [6, 7] или, благодаря удивительным по содержанию и красоте свойствам, применялись в решении задач кинематики твердого тела [8]. Интерес к кватернионным числам существенно возрос в последние два десятка лет с приходом нового поколения теоретиков, почувствовавших в кватернионах высокий нераскрытый потенциал (e. g. [9–11]).

Данная работа представляет собой своего рода обзор направлений использования гиперкомплексных Q-чисел для описании различных физических систем, а также перспектив в этой области. Кроме того, здесь обсуждаются конкретные физические модели, иногда неожиданные, но, как представляется, заслуживающие внимания.

Обзор организован следующим образом. В разделе 1 кратко описаны общие соотношения алгебры кватернионов – как в традиционной Гамильтоновой формулировке, так и в "тензорном" формате. Раздел 2 посвящен описанию структуры трех "мнимых" кватернионных единиц. В разделе 3 приведены элементы дифференциальной Q-геометрии с примерами математических приложений. Раздел 4 посвящен изложению механики Ньютона во вращающихся системах отсчета, описываемых посредством кватернионных реперов. В разделе 5 представлена кватернионная теория относительности и описан ряд следующих из нее кинематических релятивистских эффектов. Раздел 6 содержит список "замечательных кватернионных совпадений", а также заключительное обсуждение проблемы.

1. Алгебра кватернионов

Традиционный подход

По Гамильтону, кватернион есть математический объект вида

$$Q \equiv a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k},$$

где a, b, c, d – действительные числа, a – множитель действительной единицы "1", а $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ – три разные мнимые кватернионные единицы. Правило умножения этих единиц, записанное еще Гамильтоном и часто повторяемое в литературе, имеет вид

$$\begin{gathered} 1\mathbf{i} = \mathbf{i}1 \equiv \mathbf{i}, \qquad 1\mathbf{j} = \mathbf{j}1 \equiv \mathbf{j}, \qquad 1\mathbf{k} = \mathbf{k}1 \equiv \mathbf{k}, \\ \mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1, \\ \mathbf{ij} = -\mathbf{ji} = \mathbf{k}, \qquad \mathbf{jk} = -\mathbf{kj} = \mathbf{i}, \qquad \mathbf{ki} = -\mathbf{ik} = \mathbf{j} \end{gathered}$$

Эти громоздкие уравнения означают, что Q-умножение теряет коммутативность

$$Q_1 Q_2 \neq Q_2 Q_1,$$

так что появляется понятие правого и левого умножения, но остается ассоциативным

$$(Q_1 Q_2) Q_3 = Q_1 (Q_2 Q_3).$$

В кватернионе естественно выделяются две алгебраически весьма различные части, которые можно обозначить как скалярную:

$$scal\ Q = a,$$

и векторную

$$vect\ Q = b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}.$$

Сложение (вычитание) кватернионов осуществляется покомпонентно: отдельно складываются (вычитаются) скалярные и векторные части. По сложению Q-алгебра коммутативна и ассоциативна.

Далее вводится операция кватернионного сопряжения, аналогичного сопряжению комплексных чисел

$$\bar{Q} \equiv scal\ Q - vect\ Q = a - b\mathbf{i} - c\mathbf{j} - d\mathbf{k},$$

и определяется модуль Q-числа

$$|Q| \equiv \sqrt{Q\bar{Q}} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}.$$

Последние действия позволяют сформулировать правило деления кватернионов, которое, как и умножение, может быть "правым" и "левым"

$$Q_L = \frac{Q_1 \bar{Q}_2}{|Q_2|^2}, \qquad Q_R = \frac{\bar{Q}_2 Q_1}{|Q_2|^2}.$$

Из формулы модуля Q-числа сразу же следует знаменитое тождество четырех квадратов

$$|Q_1Q_2|^2 = |Q_1|^2 |Q_2|^2 .$$

В силу вышеперечисленных свойств Q-числа составляют алгебру, принадлежащую к элитной группе четырех так называемых исключительных – "очень хороших" – алгебр: действительных, комплексных, кватернионных чисел и октав (теоремы Фробениуса и Гурвица 1878-1898 г. г. [12]).

Особое внимание стоит уделить представлениям Q-единиц. В обозначениях Гамильтона действительная единица есть просто 1, тогда как три мнимые единицы по аналогии с алгеброй комплексных чисел обозначены как **i, j, k**. Позже было найдено простое представление этих единиц с помощью постоянных 2 × 2 матриц

$$\mathbf{i} = -i\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{j} = -i\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{k} = -i\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Это представление, конечно, не единственное. Вот один простой пример. Если в последних выражениях мнимую единицу алгебры комплексных чисел i представить 2 × 2 матрицей с действительными компонентами

$$i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

то тогда три векторные Q-единицы оказываются представленными действительными 4 × 4 матрицами. Понятно, что процедуру удвоения ранга матриц представления можно продолжить до бесконечности.

"Тензорный" формат и представления

Если каждой Q-единице присвоить номер (подобно тому, как нумеруются компоненты тензора)

$$(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) \to (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3) = \mathbf{q}, \qquad k, j, k, l, m, n, \ldots = 1, 2, 3,$$

то кватернионное правило умножения приобретает компактный вид

$$1\mathbf{q}_k = \mathbf{q}_k 1 = \mathbf{q}_k, \qquad \mathbf{q}_j\mathbf{q}_k = -\delta_{jk} + \varepsilon_{jkn}\mathbf{q}_n,$$

где δ_{kn} и ε_{knj} – соответственно 3-мерные (3D) символы Кронекера и Леви-Чивиты. Далее, можно показать, что число представлений Q-единиц даже только 2 × 2 матрицами бесконечно. Действительно, из двух любых 2 × 2 матриц со свойствами

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} d & e \\ f & -d \end{pmatrix}, \qquad TrA = TrB = 0,$$

можно следующим образом сконструировать две первые Q-единицы

$$\mathbf{q}_1 = \frac{A}{\sqrt{\det A}}, \qquad \mathbf{q}_2 = \frac{B}{\sqrt{\det B}},$$

при этом третья единица есть

$$\mathbf{q}_3 \equiv \mathbf{q}_1\mathbf{q}_2 = \frac{AB}{\sqrt{\det A \det B}} \qquad \text{при условии} \quad Tr(AB) = 0.$$

Скалярная единица всегда неизменна:

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Преобразования Q-единиц и инвариантность правила умножения

а. Преобразования спинорного типа

Если U – оператор, изменяющий сразу все единицы, и существует ему обратный $U^{-1}: \;\; UU^{-1} = E$, то преобразования

$$\mathbf{q}_{k'} \equiv U\mathbf{q}_k U^{-1} \quad \text{и} \quad 1' \equiv U1U^{-1} = E1 = 1$$

оставляют правило умножения

$$1\mathbf{q}_k = \mathbf{q}_k 1 = \mathbf{q}_k, \quad \mathbf{q}_j\mathbf{q}_k = -\delta_{jk} + \varepsilon_{jkn}\mathbf{q}_n$$

форм-инвариантным

$$\mathbf{q}_{k'}\mathbf{q}_{n'} = U\mathbf{q}_k U^{-1}U\mathbf{q}_n U = U\delta_{kn}U^{-1} + \varepsilon_{knj}U\mathbf{q}_j U^{-1} = \delta_{kn} + \varepsilon_{knj}\mathbf{q}_{j'}.$$

Такой оператор может быть представлен, например, 2 × 2 матрицей

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \det U = 1,$$

или унимодулярным кватернионом

$$U = \frac{a+d}{2} + \sqrt{1 - \left(\frac{a+d}{2}\right)^2}\,\mathbf{q},$$

где

$$\mathbf{q} \equiv \left(\sqrt{1 - \left(\frac{a+d}{2}\right)^2}\right)^{-1} \begin{pmatrix} \frac{a-d}{2} & b \\ c & -\frac{a-d}{2} \end{pmatrix}.$$

В общем случае это преобразование содержит 3 независимых комплексных параметра (или 6 действительных), тогда $U \in SL(2, C)$. В специальном случае есть только три действительных параметра, тогда $U \in SU(2)$.

b. Преобразования векторного типа

Векторные Q-единицы могут быть преобразованы с помощью 3×3 матрицы $O_{k'n}$

$$\mathbf{q}_{k'} = O_{k'n}\mathbf{q}_n.$$

Требование форм-инвариантности правила Q-умножения имеет следствием свойства ортогональности и унимодулярности матрицы преобразования

$$O_{k'n}O_{j'n} = \delta_{kn} \Rightarrow O^{-1}_{nk'} = O_{k'n}, \quad \det O = 1.$$

Понятно, что в общем случае и это преобразование имеет 6 независимых действительных параметров, тогда $O \in SO(3, C)$. В специальном случае параметров 3, тогда

$O \in SO(3,R)$. Ниже приведен вариант матрицы преобразования O, в которой x, y, z – произвольные действительные или комплексные функции

$$O = \begin{pmatrix} \sqrt{1-x^2-z^2} & -\frac{x\sqrt{1-y^2-z^2}+yz\sqrt{1-x^2-z^2}}{1-z^2} & \frac{xy-z\sqrt{1-x^2-z^2}\sqrt{1-y^2-z^2}}{1-z^2} \\ x & \frac{\sqrt{1-x^2-z^2}\sqrt{1-y^2-z^2}-xyz}{1-z^2} & \frac{-y\sqrt{1-x^2-z^2}-xz\sqrt{1-y^2-z^2}}{1-z^2} \\ z & y & \sqrt{1-y^2-z^2} \end{pmatrix}.$$

Эта матрица может быть представлена как произведение трех неприводимых сомножителей

$$O = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1-x^2-z^2}{1-z^2}} & -\frac{x}{\sqrt{1-z^2}} & 0 \\ \frac{x}{\sqrt{1-z^2}} & \sqrt{\frac{1-x^2-z^2}{1-z^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{1-z^2} & 0 & -z \\ 0 & 1 & 0 \\ z & 0 & \sqrt{1-z^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{1-y^2-z^2}{1-z^2}} & -\frac{y}{\sqrt{1-z^2}} \\ 0 & \frac{y}{\sqrt{1-z^2}} & \sqrt{\frac{1-y^2-z^2}{1-z^2}} \end{pmatrix}.$$

и после подстановок $z \equiv \sin \mathrm{B}$, $x \equiv -\sin \mathrm{A} \cos \mathrm{B}$, $y \equiv -\sin \Gamma \cos \mathrm{B}$, где A, B, Γ – комплексные "углы" приведена к виду

$$O = \begin{pmatrix} \cos \mathrm{A} & \sin \mathrm{A} & 0 \\ -\sin \mathrm{A} & \cos \mathrm{A} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \mathrm{B} & 0 & -\sin \mathrm{B} \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \mathrm{B} & 0 & \cos \mathrm{B} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \Gamma & \sin \Gamma \\ 0 & -\sin \Gamma & \cos\Gamma \end{pmatrix} = O_3^{\mathrm{A}} O_2^{\mathrm{B}} O_1^{\Gamma}.$$

Если углы действительные: $\mathrm{A} = \alpha$, $\mathrm{B} = \beta$, $\Gamma = \gamma$, то данное преобразование есть обычное векторное вращение, составленное из трех простых поворотов вокруг ортогональных пронумерованных осей: $O \Rightarrow R, R = R_3^\alpha R_2^\beta R_1^\gamma$. Взаимосвязь между родственными "спинорными" и "векторными" преобразованиями легко определяется:

$$O_{k'n} = -\frac{1}{2} Tr(U \mathbf{q}_k U^{-1} \mathbf{q}_n), \qquad U = \frac{1 - O_{k'n} \mathbf{q}_k \mathbf{q}_n}{2\sqrt{1 + O_{mm'}}}$$

.

Q-геометрия в трехмерном пространстве

Еще Гамильтон заметил, что триада Q-единиц ведет себя как три взаимосвязанных единичных вектора (длиной i), порождающих декартову систему координат, впрочем, несколько экзотическую в силу собственной "мнимости". В связи с этим, в 3D-пространстве триада $(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3)$ будет называться кватернионным базисом (Q-базисом). Преобразования Q-единиц имеют при этом очевидный геометрический смысл различных поворотов Q-базиса. Пример: простое вращение на действительный угол вокруг оси № 3

$$\mathbf{q}' = R_3^\alpha \mathbf{q}.$$

В любом Q-базисе можно определить трехмерный кватернионный вектор (Q-вектор)

$$\mathbf{a} = a_k \mathbf{q}_k,$$

все компоненты которого a_k здесь действительны. Важнейшее свойство Q-вектора – его инвариантность по отношению к векторным преобразованиям из группы SO(3,R)

$$\mathbf{a}' = a_{k'} \mathbf{q}_{k'} = a_{k'} R_{k'j} \mathbf{q}_j = a_j \mathbf{q}_j = \mathbf{a}.$$

Проекция Q-вектора на произвольную координатную ось (представленную любой другой Q-единицей) может быть найдена двумя различными способами. Первый: если известны, по крайней мере, один набор проекций Q-вектора и матрицы поворота

$R_{nk'}$, то проекции этого вектора на повернутые оси сразу определяются из соотношения инвариантности

$$a_{k'} = a_n R_{nk'}.$$

Второй способ связан с наличием внутренней структуры Q-единиц; краткий анализ ее дан в следующем разделе.

2. Структура кватернионных "мнимых" единиц

Собственные функции Q-единиц [13]

Любую векторную Q-единицу можно рассматривать как оператор и сформулировать для нее задачу на собственные функции (СФ) и значения:

$$\mathbf{q}\psi = \lambda\psi, \qquad \varphi\mathbf{q} = \mu\varphi.$$

Решением этой задачи являются собственные значения ("мнимая длина" Q-единицы с делением по четности)

$$\lambda = \mu = \pm i,$$

и два набора (один для каждой четности) СФ, представимых в виде столбцов $\psi^{\pm}$ и строк $\varphi^{\pm}$ и являющихся функциями компонент $\mathbf{q}$.

Вот пример явного вида СФ: для Q-единицы, представленной матрицей

$$\mathbf{q} = -\frac{i}{T}\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix},$$

где $T \equiv a^2 + bc \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$, ее СФ определяются как

$$\varphi^{\pm} = x\begin{pmatrix} 1 & \pm\frac{b}{T\pm a} \end{pmatrix}, \qquad \psi^{\pm} = y\begin{pmatrix} 1 \\ \mp\frac{c}{T\pm a} \end{pmatrix},$$

где x, y – произвольные комплексные множители.

Возникающая в процессе расчета свобода компонент редуцирована удобным условием нормировки

$$\varphi^{\pm}\psi^{\pm} = 1,$$

однако врожденным свойством СФ является их ортогональность по четности

$$\varphi^{\mp}\psi^{\pm} = 0.$$

Перемножая СФ тензорным образом, можно построить 2×2 матрицу

$$C^{\pm} \equiv \psi^{\pm}\varphi^{\pm},$$

обладающую свойствами, взаимными по отношению к свойствам вектора:

$$\det C = 0, \quad Tr\, C = 1,$$

тогда как

$$\det \mathbf{q} = 1, \quad Tr\, \mathbf{q} = 0.$$

Матрица C является идемпотентной

$$C^n = C,$$

и выражается через порождающий ее единичный Q-вектор

$$C^{\pm} = \frac{1 \pm i\mathbf{q}}{2}.$$

Обращение последнего выражения дает представление о внутренней структуре Q-единицы

$$\mathbf{q} = \pm i(2C^{\pm} - 1) = \pm i(2\psi^{\pm}\varphi^{\pm} - 1),$$

которая, как видно, состоит из комбинации ее СФ и скалярной единицы.

Понятно, что каждая Q-единица имеет свои СФ, следовательно, любая триада Q-единиц имеет присущий только ей набор СФ $\{\varphi^{\pm}_{(k)}, \psi^{\pm}_{(k)}\}$. Относительного такого набора имеется интересное алгебраическое наблюдение. Если Q-единицы связаны между собой нелинейной комбинацией – умножением, например:

$$\mathbf{q}_3 = \mathbf{q}_1\mathbf{q}_2,$$

то соответствующие СФ, как несложно показать, зависят друг от друга линейно:

$$\varphi^{\pm}_{(3)} = \sqrt{\mp i}\varphi^{\pm}_{(1)} \pm \sqrt{i}\varphi^{\pm}_{(2)}, \quad \psi^{\pm}_{(3)} = \sqrt{\pm i}\psi^{\pm}_{(1)} \pm \sqrt{-i}\psi^{\pm}_{(2)}.$$

С помощью кватернионных СФ можно представить спинорного типа преобразование Q-единиц, оставляющее инвариантным Q-умножение, в знакомом виде

$$\psi^{\pm}_{(k')} = U\psi^{\pm}_{(k)}, \quad \varphi^{\pm}_{(k')} = \varphi^{\pm}_{(k)}U^{-1},$$

так что СФ можно трактовать как набор специфических спинорных функций, допускающих в общем случае преобразования из группы $SL(2C)$. Также стоит отметить еще одно математическое наблюдение: из пар СФ, принадлежащих разным Q-единицам одной триады и имеющим различную четность, можно построить 24 скалярных инварианта группы $SL(2C)$; эти инварианты являются действительными или комплексными числами, например:

$$\sigma^{+}_{12} \equiv \varphi^{+}_{(1)}\psi^{+}_{(2)} = \sqrt{-\frac{i}{2}} = \frac{1-i}{2}.$$

Кватернионные собственные функции как проекторы

СФ действуют на свой собственный Q-базис следующим образом

$$\varphi^{\pm}_{(1)}\mathbf{q}_1\psi^{\pm}_{(1)} = \pm i, \quad \varphi^{\pm}_{(1)}\mathbf{q}_2\psi^{\pm}_{(1)} = 0, \quad \varphi^{\pm}_{(1)}\mathbf{q}_3\psi^{\pm}_{(1)} = 0,$$

или, в краткой записи

$$\varphi^{\pm}_{(k)}\mathbf{q}_n\psi^{\pm}_{(k)} = \pm i\delta_{kn} \qquad \text{(нет суммирования по k)}.$$

Похоже на то, что СФ избирают проекцию порождающего их единичного Q-вектора. Эта идея подтверждается примером действия СФ одного Q-базиса на векторы повернутого Q-базиса

$$\varphi^{\pm}_{(k)}\mathbf{q}_{n'}\psi^{\pm}_{(k)} = \varphi^{\pm}_{(k)}R_{n'm}\mathbf{q}_m\psi^{\pm}_{(k)} = \pm iR_{n'k} = \pm i\cos\angle(\mathbf{q}_{n'}, \mathbf{q}_k) \quad \text{(нет суммирования по k)},$$

результат действия – с точностью до множителя проекция Q-базиса $\mathbf{q}'$ на $\mathbf{q}$. Проекцию в чистом виде удобно обозначить так

$$\langle\mathbf{q}_{\mathbf{n}'}\rangle_k \equiv \mp i\varphi^{\pm}_{(k)}\mathbf{q}_{n'}\psi^{\pm}_{(k)} = \cos\angle(\mathbf{q}_{n'}, \mathbf{q}_k) \qquad \text{(нет суммирования по k)}.$$

Теперь несложно записать правило вычисления проекции любого Q-вектора **a** на произвольное направление, заданное вектором $\mathbf{q}_j$ (например, с помощью СФ положительной четности)

$$\langle \mathbf{a} \rangle_j^+ \equiv -i a_{k'} \varphi_{(j)}^+ \mathbf{q}_{k'} \psi_{(j)}^+ = a_{k'} R_{k'j} = a_j \qquad \text{(нет суммирования по j).}$$

Таким образом, кватернионные СФ, будучи более фундаментальным, чем Q-единицы математическим объектом с интересными свойствами, к тому же являют собой полезный инструмент, который можно использовать в практических целях, в том числе, для вычисления проекций Q-векторов.

3. Дифференциальная Q-геометрия

Кватернионная связность

Если векторы Q-базиса являются достаточно гладкими функциями параметров $\mathbf{q}_k(\Phi_\xi)$ (индекс ξ перечисляет параметры), то

$$d\mathbf{q}_k(\Phi) = \omega_{\xi\ kj} \mathbf{q}_j d\Phi_\xi,$$

где объект $\omega_{\xi\ kj}$ называется кватернионной связностью. Q-связность антисимметрична по векторным индексам

$$\omega_{\xi\ kj} + \omega_{\xi\ jk} = 0,$$

и имеет следующее число независимых компонент

$$N = Gp(p-1)/2,$$

где G – число параметров и p = 3 – число размерностей пространства. Если G = 6 [случай группы SO(3,C)], то N = 18; если G = 3 [случай группы SO(3,R)], то N = 9. Q-связность можно вычислить, по крайней мере, тремя способами:

$$\text{используя векторы Q-базиса} \qquad \omega_{\xi\ kn} = \left\langle \frac{\partial \mathbf{q}_k}{\partial \Phi_\xi} \right\rangle_n^+,$$

используя матрицы из группы SL(2C) (в общем случае) и специальное представление постоянных Q-единиц $\mathbf{q}_{\tilde{k}} = -i\sigma_k$, где σ_k – матрицы Паули

$$\omega_{\xi\ kn} = \left\langle U^{-1} \frac{\partial U}{\partial \Phi_\xi} \mathbf{q}_{\tilde{k}} - \mathbf{q}_{\tilde{k}} U \frac{\partial U^{-1}}{\partial \Phi_\xi} \right\rangle_n^+,$$

и, наконец, используя матрицы O из $SO(3, C)$ (в общем случае)

$$\omega_{\xi\ kn} = \frac{\partial O_{k\tilde{j}}}{\partial \Phi_\xi} O_{n\tilde{j}}.$$

Все формулы, конечно, дают один и тот же результат.

С точки зрения векторных преобразований Q-связность не является тензором. Если $\mathbf{q}_k = O_{kp'} \mathbf{q}_{p'}$, то преобразованные компоненты связности выражаются через исходные с добавлением неоднородного слагаемого

$$\omega_{\xi\ kj} = O_{kp'} O_{jn'} \omega_{\xi\ p'n'} + O_{jp'} \frac{\partial O_{kp'}}{\partial \Phi_\xi}.$$

В трехмерном случае Q-связность имеет ясную геометрическую и физическую трактовку, поскольку переменный Q-базис ведет себя как картанов репер. Параметры его обычных поворотов могут зависеть от пространственных координат $\Phi_\xi = \Phi_\xi(x_k)$, тогда $\partial_n \mathbf{q}_k = \Omega_{nkj}\mathbf{q}_j$, и компоненты несколько модифицированной Q-связности

$$\Omega_{nkj} \equiv \omega_{\xi\ kj}\partial_n \Phi_\xi$$

имеют смысл коэффициентов вращения Риччи. Параметры могут также зависеть от длины линии движения Q-базиса или от времени наблюдателя. Тогда $\Phi_\xi = \Phi_\xi(t), \partial_t \mathbf{q}_k = \Omega_{kj}\mathbf{q}_j$, и компоненты Q-связности

$$\Omega_{kj} \equiv \omega_{\xi\ kj}\partial_t \Phi_\xi$$

представляют собой обобщенные угловые скорости вращений репера.

Вот характерные примеры использования понятий Q-репера и Q-связности:

а) Репер Френе. Для гладкой кривой $x_{\tilde{k}}(s)$, заданной в постоянном базисе, репер Френе представлен триадой $\mathbf{q}_k$, удовлетворяющей уравнениям

$$\frac{d}{ds}\mathbf{q}_1 = R_I(s)\mathbf{q}_2,\ \frac{d}{ds}\mathbf{q}_2 = -R_I(s)\mathbf{q}_1 + R_{II}(s)\mathbf{q}_3,\ \frac{d}{ds}\mathbf{q}_3 = -R_{II}(s)\mathbf{q}_2,$$

в которых первая и вторая кривизны суть

$$R_I = \Omega_{12}, R_{II} = \Omega_{23}.$$

б) Закрученная прямая линия. Для заданной прямой $x_{\tilde{1}} = u,\ x_{\tilde{2}} = x_{\tilde{3}} = 0$, можно построить ассоциированный с ней Q-базис так, что один вектор является касательным линии. При этом Q-связность отлична от нуля и представлена единственной компонентой, описывающей закручивание прямой вдоль самой себя

$$\mathbf{q}_1 = -i\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{q}_2 = -i\begin{pmatrix} 0 & -ie^{-i\gamma(u)} \\ ie^{i\gamma(u)} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \Omega_{23} = \frac{d\gamma}{du},$$

здесь $\gamma(u)$ – угол, произвольно, но гладко, зависящий от длины прямой.

Кватернионные пространства

Касательное Q-пространство [15]. Известно, что над любым N-мерным дифференцируемым многообразием U_N с координатами $\{y^A\}$ можно построить касательное пространство T_N с координатами $\{X^{(A)}\}$ так, $dX^{(A)} = g_B^{(A)}dy^B$, где $g_B^{(A)}$ – коэффициенты Ламе. Отсюда дополнительным поворотом строится касательное Q-пространство $T(U, \mathbf{q})$, имеющее координаты $\{x_k\}$, k = 1,2,3, ассоциированные с векторами Q-репера

$$dx_k = h_{k(A)}dX^{(A)} = h_{k(A)}g_B^{(A)}dy^B,$$

где $h_{k(A)}$ – вообще говоря, неквадратные матрицы, нормируемые с помощью проекторов базового пространства на трехмерное.

Собственно кватернионное пространство $\mathbf{U}_3$ определяется как 3D-пространство, локально идентичное собственному касательному пространству $T(\mathbf{U}_3, \mathbf{q})$. Q-пространство имеет следующие основные характеристики. Его Q-метрика представлена векторной частью правила Q-умножения $\mathbf{q}_j\mathbf{q}_k = -\delta_{jk} + \varepsilon_{jkn}\mathbf{q}_n$, она несимметрична, ее антисимметричная часть является Q-оператором (матрицей), так что каждая точка $\mathbf{U}_3$ имеет внутреннюю кватернионную структуру. Q-связность $\mathbf{U}_3$

может быть: (i) собственной (метрической) $\Omega_{nkj} \equiv \omega_{\xi kj}\partial_n\Phi_\xi$, для переменного Q-базиса она всегда отлична от нуля, и (ii) аффинной (неметрической), не зависящей от Q-базиса. Q-кручение в обоих случаях не исчезает, тогда как Q-кривизна $r_{knab} = \partial_a\Omega_{bkn} - \partial_b\Omega_{akn} + \Omega_{ajn}\Omega_{bjk} - \Omega_{bjk}\Omega_{ajn}$ для метрической Q-связности тождественно равна нулю, но может присутствовать в пространстве аффинной Q-связности.

С введением понятие Q-пространства возникает новая область исследований дифференцируемых многообразий и пространств. Так, в предварительной классификации Q-пространств по наличию и природе кривизны, кручения и неметричности различаются, по меньшей мере, 10 различных семейств [15]. Кроме того, Q-пространства могут быть нетривиальным фоном для построения теорий и решения задач классической и квантовой физики.

4. Механика Ньютона в Q-базисе

Уравнения динамики во вращающемся репере [16]

Наделенный часами Q-базис становится классической (нерелятивистской) системой отсчета. Для инерциального наблюдателя динамические уравнения классической механики могут быть записаны в постоянном Q-базисе

$$m\frac{d^2}{dt^2}x_{\tilde{k}}\mathbf{q}_{\tilde{k}} = F_{\tilde{k}}\mathbf{q}_{\tilde{k}}.$$

$SO(3,R)$-инвариантность двух Q-векторов – радиус-вектора $\mathbf{r} \equiv x_k\mathbf{q}_k$ и силы $\mathbf{F} \equiv F_k\mathbf{q}_k$ позволяют представить эти уравнения в векторной кватернионной форме

$$m\frac{d^2}{dt^2}(x_k\mathbf{q}_k) = F_k\mathbf{q}_k, \qquad \text{или} \quad m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}$$

В явном виде эти уравнения имеют достаточно сложную структуру

$$m(\frac{d^2}{dt^2}x_n + 2\frac{d}{dt}x_k\Omega_{kn} + x_k\frac{d}{dt}\Omega_{kn} + x_k\Omega_{kj}\Omega_{jn}) = F_n$$

которая, тем не менее, поддается упрощению и физической интерпретации. Благодаря антисимметрии связности (обобщенной угловой скорости)

$$\Omega_j \equiv \Omega_{kn}\frac{1}{2}\varepsilon_{knj}, \qquad \Omega_{kn} = \Omega_j\varepsilon_{knj},$$

уравнения динамики можно переписать в векторных компонентах

$$m(a_n + 2v_k\Omega_j\varepsilon_{knj} + x_k\frac{d}{dt}\Omega_j\varepsilon_{knj} + x_k\Omega_j\Omega_m\varepsilon_{jkp}\varepsilon_{mpn}) = F_n$$

или с помощью привычной векторной символики

$$m(\vec{a} + 2\vec{\Omega}\times\vec{v} + \dot{\Omega}\times\vec{r} + \vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r})) = \vec{F}.$$

В слагаемых левой части, казалось бы, легко узнать четыре классических ускорения: линейное, кориолисово, угловое и центростремительное. Однако, такая традиционная интерпретация верна только для простого вращения; в случае комбинации многих вращений репера число компонент обобщенных ускорений подобного вида оказывается значительно больше, а сами уравнения существенно сложнее. Стоит заметить, что вывод уравнений для самых сложных вращений с использованием понятий Q-базиса и Q-связности чрезвычайно прост.

Примеры Q-формулировки задач классической механики

Следящий Q-базис – это репер, один из векторов которого, например $\mathbf{q}_1$ всегда направлен на наблюдаемую частицу. Динамические уравнения для этого случая в явном виде записываются следующим образом

$$\ddot{r} - r(\Omega_2^2 + \Omega_3^2) = F_1/m,$$

$$2\dot{r}\Omega_3 + r\dot{\Omega}_3 + r\Omega_2\Omega_1 = F_2/m,$$
$$2\dot{r}\Omega_2 + r\dot{\Omega}_2 + r\Omega_1\Omega_3 = -F_3/m.$$

Компоненты Q-связности заданы как функции углов двух поворотов, первого (угол α) – вокруг вектора $\mathbf{q}_3$, второго (угол β) – вокруг $\mathbf{q}_2$

$$\Omega_1 = \dot{\alpha}\sin\beta, \qquad \Omega_2 = -\dot{\beta}, \qquad \Omega_3 = \dot{\alpha}\cos\beta.$$

Метод следящего Q-базиса удобен для решения ряда механических задач, связанных с вращением – иной раз весьма сложным – наблюдаемых объектов и систем отсчета. Вот иллюстрация.

Вращающийся осциллятор. Ищется закон движения $r(t)$ гармонического осциллятора (масса m, упругость пружины k) имеющего свободу движения вдоль твердого гладкого стержня, вращающегося в плоскости вокруг одного своего конца (точки крепления пружины) с угловой скоростью ω; точка равновесия находится на расстоянии l от центра вращения, сил тяжести нет. Радиальное и касательное динамические уравнения в следящем Q-базисе (F – неизвестная сила реакции стержня)

$$\ddot{r} - r\omega^2 = -\frac{k}{m}(r - l), \qquad 2\dot{r}\omega = \frac{1}{m}F,$$

имеют следующее семейство решений:

$$\text{(i)} \qquad r(t) = r_0 + v_0 t + at^2$$

масса квадратично (или линейно) по времени движется в сторону от центра вращения,

$$\text{(ii)} \qquad r(t) = const + Ae^{iwt} + Be^{-iwt}, \qquad w \equiv \sqrt{k/m - \omega^2}$$

здесь три различные ситуации в зависимости от соотношения величин под радикалом:

– $r = \text{const}$,

– гармонические колебания,

– экспоненциальное по времени удаление от центра вращения.

Интересно, что варианты поведения вращающегося классического осциллятора при $l = 0$ в точности сходны с вариантами поведения четырех известных космологических моделей Эйнштейна-ДеСиттера-Фридмана, рассматриваемых в рамках общей теории относительности.

5. Построение кватернионной теории относительности

Гиперболические вращения и бикватернионы [17]

Выше было отмечено, что SO(3,C)-преобразования Q-единиц допускают наличие чисто мнимых параметров. При этом повороты становятся гиперболическими (H – от hyperbolic); например, простое H-вращение $\mathbf{q}' = H_3^{\psi}\mathbf{q}$ осуществляется матрицей вида

$$H_3^{\psi} = \begin{pmatrix} \cosh\psi & -i\sin\psi & 0 \\ i\sin\psi & \cosh\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

а 2×2 -матрицы представления Q-единиц теряют свойство антиэрмитовости:

$$\mathbf{q}_{1'} = -i \begin{pmatrix} 0 & e^{\psi} \\ e^{-\psi} & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь уместно вспомнить о так называемых бикватернионных (BQ) векторах. BQ-вектор определяется как Q-вектор с комплексными компонентами $\mathbf{u} = (a_k + ib_k)\mathbf{q}_k$. Очевидно, что для векторов такого типа не всегда можно определить норму (или модуль). Но среди всех BQ-векторов есть подмножество "хороших" BQ-векторов с определяемой нормой $\mathbf{u}^2 = b^2 - a^2$. Эти векторы оказываются форм-инвариантными относительно преобразований подгруппы $SO(2,1) \subset SO(3,C)$, и в частности, относительно простых H-вращений $\mathbf{q}' = H\mathbf{q}\mathbf{u} = u_k\mathbf{q}_k = u_{k'}\mathbf{q}_{k'}$, но только при условии ортогональности друг другу взаимно-мнимых составляющих $a_k b_k = 0$.

Кватернионная теория относительности

Сделанные выше наблюдения позволяют предположить существование пространственно-временного BQ-векторного "интервала"

$$d\mathbf{z} = (dx_k + idt_k)\mathbf{q}_k,$$

имеющего специфические свойства:

(i) интервал времени задается мнимым вектором,

(ii) пространство-время модели оказывается шестимерным (6D),

(iii) вектор перемещения частицы и вектор соответствующего изменения времени должны быть всегда перпендикулярны друг другу $dx_k dt_k = 0$.

BQ-вектор-интервал при этом есть инвариант $SO(2,1) \subset SO(3,C)$, как, конечно, и его квадрат (отличающийся от квадрата нормы лишь знаком) $d\mathbf{z}^2 = dt^2 - dr^2$, последний в точности повторяет вид интервала пространства-времени специальной теории относительности Эйнштейна. Таким образом построенная 6D-модель изначально получила название кватернионной теории относительности. Временная и пространственная переменные симметричным образом входят в выражение BQ-вектора-интервала, а связанная с ними триада Q-единиц описывает релятивистскую систему отсчета $\Sigma \equiv (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3)$. Переход от одной системы отсчета к другой осуществляется с помощью уравнений поворота вида $\Sigma' = O\Sigma$, где матрица O принадлежит $SO(2,1)$ и представляет собой упорядоченное произведение матриц действительных и гиперболических поворотов; в связи с этим теорию можно было бы назвать (и может быть, более корректно) "вращательной" теорией относительности.

Смысл простого H-вращения немедленно раскрывается при записи первой строки уравнения $\Sigma' = H_3^{\psi}\Sigma$ в явном виде

$$i\mathbf{q}_{1'} = i\cosh\psi(\mathbf{q}_1 + \tanh\psi\mathbf{q}_2).$$

Если, как в специальной теории относительности, $\cosh\psi = dt/dt'$, то

$$idt'\mathbf{q}_{1'} = idt(\mathbf{q}_1 + V\mathbf{q}_2),$$

что означает движение системы отсчета Σ' относительно Σ со скоростью V вдоль направления $\mathbf{q}_2$. Легко проверить, что из $SO(2,1)$ -поворотов Q-систем отсчета в точности следуют преобразования Лоренца для изменений координат, а следовательно, все кинематические эффекты специальной теории относительности.

Здесь стоит заметить, что параметры действительных и гиперболических поворотов могут быть переменными, например, зависеть от времени наблюдателей. Это позволяет предположить, что в рамках данной теории имеется возможность описания неинерциальных движений. Анализ уравнений поворота показывает, что это предположение полностью оправдывается. Так, движение постоянно ускоренной системы отсчета относительно инерциальной (гиперболическое движение), неоднократно рассмотренное в литературе с привлечением условий, дополнительных к специальной теории относительности, в кватернионной теории анализируется естественно и просто, причем с позиций любой из двух систем отсчета [18].

Задача кинематики другого неинерциального движения – релятивистского кругового движения – полностью и точно решается с помощью уравнения поворота $\Sigma' = H_2^{\psi(t)}R_1^{\alpha(t)}\Sigma$, где Σ' – система отсчета, вращающаяся по окружности вокруг неподвижной системы отсчета Σ. Эта задача может быть решена как с позиции инерциального наблюдателя, при этом результирующие соотношения имеют вид

$$t = \int dt'\cosh\psi(t'), \qquad \alpha(t) = \frac{1}{R}\int dt'\tanh\psi(t'),$$

$$a_{\tan}(t) = \frac{1}{\cosh^2\psi}\frac{d\psi}{dt}, \qquad a_{norm}(t) = R\left(\frac{d\alpha(t)}{dt}\right)^2,$$

так и с точки зрения наблюдателя в произвольно движущейся по круговой орбите системе отсчета.

Решение задачи о "классической" прецессии Томаса в рамках СТО, но также с введением дополнительных условий, в кватернионной теории записывается в одну строчку – первую строку матрицы уравнения поворота $\Sigma'' = R_1^{-\alpha(t)}H_2^{\psi}R_1^{\alpha(t)}\Sigma$, при этом, конечно, получается верное значение частоты прецессии

$$\omega_T = (1 - \cosh\psi) \approx -\frac{1}{2}\omega V^2.$$

Более того, в рамках кватернионной теории относительности оказывается возможным описать прецессию Томаса для векторов, движущихся по траекториям общего вида. Базой решения проблемы, как всегда, является уравнение поворота, в данном случае естественно обобщенное: $\Sigma'' = R^{-\theta(t)}H^{\psi(t)}R^{\theta(t)}\Sigma$, здесь $\theta(t)$ – угол мгновенного поворота. Существенным также оказывается требование перпендикулярности оси гиперболического поворота к плоскости, образованной радиус-вектором наблюдаемого репера и вектором его скорости. При этом формула переменной во времени частоты общей прецессии Томаса имеет вид

$$\Omega_T = \frac{d}{dt}(\theta - \theta').$$

Примером такой прецессии Томаса может служить кажущееся смещение перигелия Меркурия, расчет дает следующую величину $\Delta\varepsilon = 2,7''/100$ лет.

Универсальный характер движения тел (включая неинерциальные движения) в кватернионной теории относительности располагает к поиску новых кинематических эффектов релятивизма. Один из эффектов можно подметить в движении спутников планет Солнечной системы. Относительная скорость Земли и другой планеты со временем изменяется и иногда достигает значительной величины, до известной степени сопоставимой с величиной фундаментальной скорости. Это может привести к расхождениям между расчетными и наблюдаемыми с Земли кинематическими величинами, характеризующими циклические процессы на данной планете или вблизи нее. В частности, должно иметь место кажущееся отклонение положения спутника планеты от расчетной позиции. Такое угловое отклонение рассчитано; оно, как оказалось, линейно зависит от времени наблюдения, то есть эффект накапливается

$$\Delta\varphi \approx \frac{\omega V_E V_P}{c^2} t,$$

здесь ω – угловая скорость движения спутника вокруг планеты, V – линейные скорости Земли и планеты относительно Солнца. Величина эффекта такова. Для ближайшего к Юпитеру и самого "быстрого" его спутника $\Delta\varphi \cong 12'$ за 100 земных лет; для спутника Марса (Фобос) $\Delta\varphi \cong 20'$ за 100 земных лет [19]. Оба значения представляются достаточно большими, и не исключено, что эффект может быть обнаружен в результате длительного точного наблюдения.

Можно сказать, что пространственно-временная модель и кинематика кватернионной теории относительности на сегодняшний день достаточно детально разработаны и могут служить эффективным аппаратом для вычисления многих релятивистских эффектов. Но пока не сформулирована соответствующая релятивистская динамика, нет кватернионной теории поля; Q-гравитация, электромагнетизм, слабые и сильные взаимодействия остаются отдаленными проектами. Однако, есть надежда, что это только начало пути, и теория "повзрослеет". Эта надежда поддерживается наблюдением ряда примечательных "кватернионных совпадений", образующих пока не слишком связную мозаику физико-математических фактов. Весьма возможно, что со временем она превратится в логически стройную схему, расширяющую инструментарий и понимание законов физики.

6. Замечательные "кватернионные совпадения"

Есть, по крайней мере, пять таких совпадений (все они приведены ниже), замеченных разными авторами в разное время.

1. *Уравнения Максвелла как условия аналитичности функций кватернионного переменного.*

В 1937 году Фютер [20] заметил, что уравнения Коши-Римана $\partial f/\partial z^* = 0$, определяющие дифференцируемость функции комплексного переменного и физически моделирующие плоское движение жидкости без источников и вихрей, имеют следующий кватернионный аналог

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t} - \mathbf{q}_{\tilde{k}}\frac{\partial}{\partial x_{\tilde{k}}}\right)\mathbf{H} = 0, \qquad \mathbf{H} = (B_{\tilde{n}} + iE_{\tilde{n}})\mathbf{q}_{\tilde{n}}.$$

Удивительный факт состоит в том, что соответствующей физической моделью оказываются уравнения классической электродинамики Максвелла в вакууме

$$div\vec{E}=0, \quad div\vec{B}=0, \quad rot\vec{E}-\frac{\partial\vec{B}}{dt}=0, \quad rot\vec{B}+\frac{\partial\vec{E}}{dt}=0.$$

2. *Классическая механика во вращающихся системах отсчета.*

Компактная форма уравнений Ньютона в кватернионном репере описана выше, в разделе 4. Остается подчеркнуть, что естественно возникающая и внешне примитивная запись уравнений динамики

$$m\ddot{\mathbf{r}}=\mathbf{F}$$

скрывает любые по сложности комбинации вращений системы отсчета или наблюдаемого тела. Использование дифференциальных кватернионных объектов позволяет быстро получить явный вид этих уравнений, каждое слагаемое которых имеет очевидную физическую трактовку.

3. *Кватернионная теория относительности.*

1:1 изоморфизм группы Лоренца, ассоциируемой со специальной теорией относительности, и группы инвариантности кватернионного умножения $SO(3,C)$ имеет следствием появление нестандартной кватернионной теории относительности с симметричным 6-мерным пространством-временем. Эта теория происхождением, моделью, возможностями и математическим аппаратом сильно отличается от специальной теории относительности Эйнштейна, но предсказывает абсолютно одинаковые с ней кинематические эффекты. Инвариантность специфического бикватернионного векторного "интервала" $d\mathbf{z}=(dx_k n+i\,dt_k)\mathbf{q}_k$ относительно подгруппы $SO(2,1)$ с, вообще говоря, переменными параметрами позволяет рассчитывать релятивистские эффекты неинерциального движения систем отсчета.

4. *Уравнения Паули* [21].

Если рассматривать квантовую частицу с электрическим зарядом e, массой m, и обобщенным импульсом

$$P_k\equiv -i\hbar\frac{\partial}{\partial x_k}-\frac{e}{c}A_k$$

в простейшем кватернионном пространстве (все параметры постоянны, связность, кручение и кривизна равны нулю), то гамильтониан такой частицы, вычисляемый с помощью Q-метрики

$$H\equiv -\frac{1}{2m}P_kP_m\mathbf{q}_k\mathbf{q}_m$$

оказывается точной копией функции Гамильтона уравнения Паули

$$H=\frac{1}{2m}\left(\vec{p}-\frac{e}{c}\vec{A}\right)^2-\frac{e\hbar}{2mc}\vec{B}\cdot\vec{\sigma},$$

при этом спиновое слагаемое сразу же имеет в качестве коэффициента магнетон Бора.

5. *Напряженность поля Янга-Миллса.*

Если в произвольном кватернионном пространстве из компонент связности Ω_{amn} (индексы a, b, c нумеруют координаты базового Q-пространства, индексы j, k, m, n нумеруют векторы касательных триад), построить некоторый "потенциальный" вектор

$$A_{ka} \equiv \frac{1}{2}\varepsilon_{kmn}\Omega_{amn},$$

а из компонент кватернионной кривизны

$$r_{knab} = \partial_a\Omega_{bkn} - \partial_b\Omega_{akn} + \Omega_{ajn}\Omega_{bjk} - \Omega_{bjk}\Omega_{ajn}$$

аналогичным образом построить вектор "напряженности"

$$F_{kab} \equiv \frac{1}{2}\varepsilon_{kmn}r_{mnab},$$

то эти два геометрических объекта оказываются связанными между собой точно так же, как напряженность и потенциал поля Янга-Миллса

$$F_{kab} \equiv \partial_b A_{ka} - \partial_a A_{kb} + \varepsilon_{kmn}A_{ma}A_{nb}.$$

Нужно отметить, что для Q-пространств с метрической (не аффинной) связностью кривизна, а с ней и "напряженность" тождественно равны нулю.

Обсуждение

Кватернионы, конечно, в первую очередь – математические объекты, и задача развития их алгебры, анализа и геометрии, в известном смысле, самодостаточна. Но новейшая история науки удостоверяет: как только речь заходит о геометрии, тем более, дифференциальной, присутствие физики становится неизбежным. Есть известное мнение, что пионером геометризации физики был Эйнштейн, предложивший свою общую теорию относительности. Но известно также, что Максвелл сформулировал свою электродинамику именно на языке кватернионов, удобном для описания "напряжений эфира", каковыми представлялись векторы напряженности электромагнитного поля. Этот более чем геометричный язык был потом заброшен на многие десятилетия.

Предложенные в данном обзоре аспекты кватернионной математики еще раз указывают на "родственные связи" физики и геометрии: от описания вращений систем отсчета в классической механике и теории относительности до проявлений структуры кватернионных пространств в уравнениях Паули и в теории Янга-Миллса.

Богатство предоставляемых Q-подходом возможностей и появляющиеся с его использованием нетрадиционные физические модели типа 6-мерного пространства-времени или упомянутые выше совпадения могут вызвать отношение к кватернионам как всего лишь математической игре, своего рода элементам "лего", из которых можно построить немало экзотических конструкций. Но на этот счет есть два следующих соображения.

1) Несмотря на свою модельную нестандартность Q-метод позволяет решать физические задачи, так что это – практически полезный инструмент. Характерный пример: "врожденный" экспоненциальный характер представления простых вращений здесь приводит к простому описанию сложения поворотов, включая, конечно, и "мнимые" повороты, описывающие релятивистские бусты. Стоит напомнить, что

суммирование обычных поворотов в классической механике являет собой не слишком простую задачу.

2) Все физические кватернионные теории не мучительно придумываются, а возникают просто и естественно, как отражение законов природы в математике. Приверженец пифагорейской философии "мир есть число" увидел бы здесь дополнительный аргумент в свою пользу. И действительно, Q-алгебра, последняя ассоциативная алгебра, отлично подходит для описания физических величин, а они – пока что все до единой – ассоциативны по умножению, от наблюдаемых кинематических и динамических, до порожденных теориями тензорных и спинорных.

Все эти обстоятельства позволяют надеяться, что дальнейшие усилия в исследовании отношения "кватернионы – законы физики" когда-то перерастут в широкую научную программу. Еще один скромный, но настойчивый шаг в этом направлении сделан недавно, когда автору данного обзора в рамках кватернионной теории удалось найти точное решение задачи релятивистского осциллятора. Детали решения будут опубликованы в одной из последующих работ.

Литература

1. Hamilton W. R. (1853) Lectures on Quaternions, Dublin, Hodges & Smith.

2. Hamilton W. R. (1969), Elements of Quaternions, Chelsey Publ. Co. N. Y.

3. Стройк Д. Я. (1969) Краткая история математики, М., Наука.

4. Бурбаки Н., (1963) Очерки по истории математики, М., Наука.

5. Боголюбов А. Н. (1983) Математики, Механики, Киев, Наука.

6. Klien F., (1924) Arithmetic, Algebra, Analyses, N. Y., Dover Publ. (Translation from 3-d German edition).

7. Rastall P. (1964) Quaternions in Relativity, Review of Modern Physics, July, 820—832.

8. Бранец В. Н., Шмыглевский И. П. (1973) Кватернионы в задачах ориентации твердого тела. М., Наука.

9. Horwitz L. P., Biedenharn L. C. (1984) Quaternionic Quantum Mechanics: Second Quantization and Gauge Fields, Ann. Phys., 157, 432–488.

10. Березин А. В., Курочкин Ю. А., Толкачев Е. А. (1989) Кватернионы в релятивистской физике. Минск, Наука.

11. Bisht P. S, Negi O. P., Rajput B. S., (1991) Quaternionic Gauge Theory of Dyonic Fields, Progr. Theor. Phys., 85, № 1, 157–168.

12. И. Л. Кантор, А. С. Солодовников. Гиперкомплексные числа. М., Наука, 1973.

13. Ефремов А. П. (1985) Q-поле, переменный кватернионный базис. Физика, Известия вузов, 12, 14–18.

14. Yefremov A. P. (2001) Tangent Quaternionic Space, Gravitation & Cosmology, 7, № 4 273–275.

15. Yefremov A. P. (2002) Structure Equations and Preliminary Classification of Quaternionic Spaces. Abstracts of 11 Int. GRG Conf, Tomsk, p. 123.

16. Ефремов А. П. (1995) Механика Ньютона в кватернионном базисе. М., РУДН.

17. Yefremov A. P. (1996) Quaternionic Relativity. I. Inertial Motion, Gravitation & Cosmology, 2, № 1, 77–83.

18. Yefremov A. P. (1996) Quaternionic Relativity. II. Non-Inertial Motion, Gravitation & Cosmology, 2, № 4, 335–341.

19. Yefremov A. P. (2000) Rotational Relativity, Acta Phys. Hungarica, New Series - Heavy Ion Physics 11, № 1–2, 147–153.

20. Fueter R. (1934–1935) Comm. Math. Hel., B7S, 307–330.

21. Yefremov A. P. (1983) Quaternionic Multiplication Rule as a local Q-Metric, Lett. Nuovo Cim. 37, № 8, 315–316

ТРИЧИСЛА, КУБ НОРМЫ КОТОРЫХ ЕСТЬ НЕВЫРОЖДЕННАЯ ТРИФОРМА

Г. И. Гарасько

ГУП Всероссийский электротехнический институт,
gri9z@mail.ru

Произвольная триформа приводится к каноническому виду. Требование существования двухпараметрической абелевой группы Ли – группы симметрии триформы, позволило выделить те триформы, которые соответствуют тричислам, и найти все тричисла, куб нормы которых в специальной системе координат есть невырожденная триформа. Таких систем гиперкомплексных чисел всего (с точностью до изоморфизма) две: C_3, H_3. Их можно рассматривать, как обобщение комплексных и двойных (гиперболических) бичисел на тричисла.

Введение

Одним из исходных понятий как математики, так и физики, является действительное (вещественное) число. Ассоциативно-коммутативные n-мерные гиперкомплексные числа над полем действительных чисел, которые для краткости будем называть n-числами, являются обобщением этого понятия, причем комплексные числа, очень хорошо зарекомендовавшие себя при решении задач математической и теоретической физики, есть частный случай таких гиперкомплексных чисел, бичисел. К сожалению, n-числа при $n > 2$ недостаточно изучены. Есть надежда, что, обладая такими упрощающими работу свойствами как ассоциативность и коммутативность, но достаточно сложной в некоторых случаях геометрией, ассоциативно-коммутативные гиперкомплексные числа найдут свое нетривиальное применение в математике и физике. Для $n > 2$ сама классификация и выбор n-чисел для математических исследований в расчете на дальнейшее применение в физике представляет не простую задачу. Один из способов ее решения – это формулировка дополнительных условий, которые бы из всего множества n-чисел выделяли более узкий, но заведомо значимый класс. Одним из таких условий может быть требование существования такого специального базиса, в котором бы координаты n-чисел были, в некотором смысле, равноправны, например, норма в этих координатах не зависела от перестановки координат или более сильное требование – n-ая степень нормы n-чисел в таких специальных координатах должна быть невырожденной n-формой этих координат. В данной работе для краткости под n-формой координат n-мерного линейного пространства будем понимать сверхсимметрическую полилинейную форму n-го порядка, все аргументы которой равны одному и тому же вектору. *Сверхсимметричность формы* подразумевает существование такого базиса, в котором симметрическая форма n-векторных аргументов не меняется при перестановке координат. *Невырожденность формы* будем понимать как требование невозможности представить ее как некоторую целую степень формы более низкого порядка. Ниже мы будем часто опускать слово "невырожденная", говоря просто о n-форме. Настоящая работа посвящена изучению тричисел, то есть ассоциативно-коммутативных гиперкомплексных чисел вида

$$X = x_1 + x_2 \cdot e_2 + x_3 \cdot e_3, \tag{1}$$

где e_2, e_3 – символьные элементы, а x_1, x_2, x_3 – действительные числа, координаты в базисе $e_1 \equiv 1, e_2, e_3$. Если число X допускает экспоненциальное представление

$$X = \rho \cdot \exp(\alpha \cdot e_2 + \beta \cdot e_3), \tag{2}$$

где $\rho > 0, \alpha, \beta$ – действительные числа, то величину ρ естественно назвать модулем тричисла X. Будем искать только те тричисла, для которых в некотором специальном базисе (это необязательно базис $e_1 \equiv 1, e_2, e_3$) куб нормы $\rho(x_1, x_2, x_3)$ является невырожденной триформой координат, то есть

$$\rho^3 = \Omega(x_1, x_2, x_3; \omega_1, \omega_2, \omega_3), \tag{3}$$

где триформа общего вида

$$\Omega(x_1, x_2, x_3; \omega_1, \omega_2, \omega_3) = \omega_1\Omega_1(x_1, x_2, x_3) + \omega_2\Omega_2(x_1, x_2, x_3) + \omega_3\Omega_3(x_1, x_2, x_3) \tag{4}$$

есть произвольная линейная комбинация с действительными коэффициентами ω_i $(i = 1, 2, 3)$ при базисных триформах:

$$\Omega_1(x_1, x_2, x_3) \equiv x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 \tag{5}$$

$$\Omega_2(x_1, x_2, x_3) \equiv x_1x_2^2 + x_1x_3^2 + x_1^2x_2 + x_2x_3^2 + x_1^2x_3 + x_2^2x_3 \tag{6}$$

$$\Omega_3(x_1, x_2, x_3) \equiv x_1x_2x_3. \tag{7}$$

Заметим, что симметрическая кубическая форма от трех векторных аргументов, линейная по каждому аргументу, в трехмерном пространстве содержит не три, а десять произвольных действительных параметров, то есть является более общим понятием, чем сверхсимметрическая триформа, и приводит к форме более общей, чем триформа (4). Требование невырожденности триформы означает

$$\Omega(x_1, x_2, x_3; \omega_1, \omega_2, \omega_3) \neq \Omega(x_1, x_2, x_3; \omega_1, \omega_2, \omega_3) \equiv \omega \cdot (x_1 + x_2 + x_3)^3. \tag{8}$$

В дальнейшем будем подразумевать под триформами невырожденные триформы или оговаривать обратное особо.

Умножение числа X на унимодулярное число X_1 дает число

$$Y = X_1 \cdot X, \tag{9}$$

(9) модуль которого равен модулю числа X, а значит для таких рассматриваемых тричисел

$$\Omega(y_1, y_2, y_3; \omega_1', \omega_2', \omega_3') = \Omega(x_1, x_2, x_3; \omega_1, \omega_2, \omega_3). \tag{10}$$

Таким образом, для того чтобы куб нормы тричисла являлся триформой, множество унимодулярных чисел этой гиперкомплексной системы должно образовывать двухпараметрическую непрерывную абелеву группу Ли (группу симметрии, сохраняющую вид триформы), состоящую из линейных преобразований (9) координатного пространства рассматриваемых тричисел.

Предположим, что для определенных значений параметров триформы (4) найдена группа симметрии, двухпараметрическая абелева группа непрерывных линейных преобразований с генераторами E_2, E_3 – действительными квадратными матрицами 3×3. Тогда, как известно, сами линейные преобразования определяются через генераторы матрицей $\hat{A}$ по формуле

$$\hat{A} = \exp(\alpha \cdot \hat{E}_2 + \beta \cdot \hat{E}_3), \tag{11}$$

где α, β – действительные параметры. Пусть при этом для генераторов выполняются правила умножения

$$\hat{E}_i \cdot \hat{E}_j = p_{ij}^k \cdot \hat{E}_k, \tag{12}$$

где $i, j, k = 1, 2, 3$; $\hat{E}_1$ – единичная матрица (генератор общего масштабного преобразования), p_{ij}^k – некоторые действительные числа, по дважды встречающемуся индексу происходит суммирование. Тогда $\hat{E}_1 \hat{E}_2, \hat{E}_3$ можно рассматривать как представление базисных элементов $e_1 \equiv 1, e_2, e_3$ некоторой системы тричисел, а значит представление самой системы таких чисел в координатном линейном трехмерном пространстве x_1, x_2, x_3 в виде действительных квадратных матриц 3×3. Очевидно, что закон умножения базисных элементов $e_1 \equiv 1, e_2, e_3$ будет иметь тот же вид (12) с теми же характеристическими числами p_{ij}^k

$$e_i \cdot e_j = p_{ij}^k \cdot e_k. \tag{13}$$

Теперь мы можем записать числа, представимые в экспоненциальном виде (2). Координатное линейное пространство x_1, x_2, x_3 не обязательно должно вводится в том же самом базисе, то есть по формуле (1). Поэтому в общем случае возникает следующее соотношение для чисел представимых в экспоненциальном виде

$$x_1 \cdot e'_1 + x_2 \cdot e'_2 + x_3 \cdot e'_3 = \rho \cdot \exp(\alpha \cdot e_2 + \beta \cdot e_3), \tag{14}$$

где e'_1, e'_2, e'_3 – базис в общем случае отличный от $e_1 \equiv 1, e_2, e_3$, причем e'_1 может не быть действительной единицей. Используя три координатных соотношения (14) и исключая два действительных параметра α, β, получим выражение для куба нормы через координаты x_1, x_2, x_3

$$\rho^3 = f(x_1, x_2, x_3). \tag{15}$$

Если справа в этой формуле стоит исходная триформа, то найдены тричисла, ей соответствующие.

1. Приведение триформы к каноническому виду

Кроме общего масштабного преобразования, существуют лишь одно непрерывно связанное с тождественным линейное преобразование координат, с помощью которого произвольная триформа переходит опять в триформу. Запишем это преобразование в матричной форме

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3q} \begin{pmatrix} p+2 & p-1 & p-1 \\ p-1 & p+2 & p-1 \\ p-1 & p-1 & p+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \tag{16}$$

где q – произвольное положительное действительное число, а

$$p \equiv q^3. \tag{17}$$

В новых переменных после преобразования (16) триформа $\Omega(x_1, x_2, x_3; \omega_1, \omega_2, \omega_3)$ будет иметь вид

$$\Omega(x_1, x_2, x_3; \omega_1, \omega_2, \omega_3) = \Omega(y_1, y_2, y_3; \omega'_1, \omega'_2, \omega'_3), \tag{18}$$

где

$$\left.\begin{aligned} \omega_1' \equiv u\cdot(w_1p^3+3w_2p+2w_3),\\ \omega_2' \equiv 3u(w_1p^3-w_3),\\ \omega_3' \equiv 3u(2w_1p^3-3w_2p+4w_3), \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

$$u \equiv \frac{1}{27p} \tag{20}$$

$$\left.\begin{aligned} w_1 \equiv 3\omega_1+6\omega_2+\omega_3,\\ w_2 \equiv 6\omega_1-\omega_3,\\ w_3 \equiv 3\omega_1-3\omega_2+\omega_3. \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Конечно, классификацию триформ (приведение к каноническому виду) можно проводить по-разному. Будем исходить из того, что триформы, связанные линейным невырожденным преобразованием координат, не изменяющим значения самой триформы, эквивалентны – отличаются друг от друга лишь выбором базиса в трехмерном линейном пространстве x_1, x_2, x_3, то есть выбором базисных (символьных) элементов в пространстве тричисел. При приведении триформ к каноническому виду будем рассматривать не все линейные невырожденные преобразования, а лишь три возможные: во-первых, преобразование (16); во-вторых, дискретное преобразование – изменение знака у всех трех координат одновременно; в-третьих, общее масштабное преобразование – умножение одновременно всех трех координат на одно и тоже действительное положительное число – именно в этой последовательности. Базисные формы (5) – (7) в силу их выделенности сразу причислим к каноническим.

Итак, рассмотрим триформу общего вида (4) и перейдем с помощью линейного преобразования (16) к новым координатам. Так как связь между величинами w_i и параметрами триформы ω_i взаимнооднозначная, будем стараться уменьшить число параметров триформы в новых координатах, перебирая различные варианты, используя величины w_i и формулы (19).

1). Если

$$sign(w_1) = sign(w_2) \neq 0, \tag{22}$$

то с помощью линейного преобразования координат (16) со значением параметра

$$p = \sqrt[3]{\frac{w_3}{w_1}} \tag{23}$$

исходную триформу можно привести к виду $\Omega(y_1, y_2, y_3; \omega_1', 0, \omega_3')$.

2). Если

$$sign(w_1) = -sign(w_3) \neq 0, \tag{24}$$

то всегда найдутся два преобразования (16), с помощью одного из которых можно обнулить ω_1', а с помощью второго можно обнулить ω_3', при этом в том и другом случае параметр ω_2' получается строго неравным нулю при любом значении w_2. Таким образом, в качестве результата приходится выбирать либо форму $\Omega(y_1, y_2, y_3; 0, \omega_2', \omega_3')$, либо эквивалентную ей триформу $\Omega(y_1, y_2, y_3; \omega_1', \omega_2', 0)$. Для того чтобы исключить неоднозначность, будем всегда выбирать первый вариант, то есть триформу $\Omega(y_1, y_2, y_3; 0, \omega_2', \omega_3')$, при этом параметр p в преобразовании (16) есть действительный положительный корень кубического уравнения

$$w_1p^3 + 3w_2p + 2w_3 = 0. \tag{25}$$

Остается рассмотреть случаи, когда величины обращаются в нуль по отдельности или обе одновременно.

3). Если

$$w_1 = 0, \quad sign(w_2) = -sign(w_3) \neq 0, \tag{26}$$

то триформа может быть приведена с помощью преобразования (16) к виду $\Omega(y_1, y_2, y_3; 0, \omega_2', \omega_3')$, причем $\omega_2' \neq 0$ и $\omega_3' \neq 0$, а

$$p = -\frac{2w_3}{3w_2}. \tag{27}$$

4). Если

$$w_1 = 0, \quad sign(w_2) = sign(w_3) \neq 0, \tag{28}$$

то триформа с помощью преобразования (16) может быть приведена к виду $\Omega(y_1, y_2, y_3; \omega_1', \omega_2', 0)$, причем ω_1' и $\omega_2' \neq 0$, а

$$p = \frac{4w_3}{3w_2}. \tag{29}$$

5). Если

$$w_1 = 0, \quad w_2 = 0, \quad w_3 \neq 0. \tag{30}$$

то

$$\omega_1' = 2uw_3, \quad \omega_2' = -3uw_3, \quad \omega_3' = 12uw_3. \tag{31}$$

В этом случае триформа имеет вид $\Omega(x_1, x_2, x_3; \omega_1, -\frac{3}{2}\omega_1, 6\omega_1)$, преобразование координат (16) переводит ее в $\Omega(y_1, y_2, y_3; \omega_1', -\frac{3}{2}\omega_1', 6\omega_1')$ с $\omega_1' \neq 0$, то есть преобразование (16) в данном случае сводится обшемасштабному преобразованию.

6). Если

$$sign(w_1) = -sign(w_2) \neq 0, \quad w_3 = 0, \tag{32}$$

то преобразование (16) с параметром

$$p = \sqrt{-\frac{3w_2}{w_1}} \tag{33}$$

переводит исходную триформу в триформу вида $\Omega(y_1, y_2, y_3; 0, \omega_2', \omega_3')$, причем $\omega_2' \neq 0$, $\omega_3' \neq 0$.

7). Если

$$sign(w_1) = sign(w_2) \neq 0, \quad w_3 = 0, \tag{34}$$

то триформа приводится линейным преобразованием (16) с

$$p = \sqrt{\frac{3w_2}{2w_1}} \tag{35}$$

к виду $\Omega(y_1, y_2, y_3; \omega_1', \omega_2', 0)$, причем $\omega_1' \neq 0$, $\omega_2' \neq 0$.

8). Если

$$w_1 \neq 0, \quad w_2 = 0, \quad w_3 = 0, \tag{36}$$

то

$$\omega_1' = uw_1p^3, \quad \omega_2' = 3uw_1p^3, \quad \omega_3' = 6uw_1p^3, \tag{37}$$

и значит в этом случае триформа $\Omega(x_1, x_2, x_3; \omega_1, 3\omega_1, 6\omega_1)$ преобразованием (16) переводится в триформу $\Omega(y_1, y_2, y_3; \omega_1', 3\omega_1', 6\omega_1')$, где $sign(\omega_1') = sign(\omega_1)$. Таким образом, преобразование (16) в данном случае сводится к умножению исходной триформы на действительное положительное число, то есть к общему масштабному преобразованию. Эту форму мы исключим при построении тричисел, так как она является вырожденной (8).

9). Осталось рассмотреть вариант

$$w_1 = 0, \quad w_2 \neq 0, \quad w_3 = 0, \tag{38}$$

тогда

$$\omega_1' = 3 \cdot u \cdot w_2 \cdot p = \frac{w_2}{9} = \omega_1, \quad \omega_2' = \omega_2 = 0, \quad \omega_3' = -9 \cdot u \cdot w_2 \cdot p = -\frac{w_2}{3} = -3\omega_1, \tag{39}$$

то есть триформа $\Omega(x_1, x_2, x_3; \omega_1, 0, -3\omega_1)$ переводится преобразованием (16) с произвольным p в триформу $\Omega(y_1, y_2, y_3; \omega_1', 0, -3\omega_1')$. Таким образом, в данном случае преобразование (16) не меняет параметры триформы, то есть это преобразование является преобразованием симметрии триформы $\Omega(x_1, x_2, x_3; \omega_1, 0, -3\omega_1)$.

Дальнейшее упрощение триформы можно произвести, умножая ее на произвольное действительное число неравное нулю. Такая операция сводится к двум: изменению знака сразу у всех координат и общему масштабному преобразованию. В результате, один из коэффициентов $\omega_i' \neq 0$ триформы можно сделать равным единице, то есть произвести нормировку формы. Предложенная схема 1) – 9) вместе с нормировкой не противоречит выделению в качестве канонических трех базисных форм и введению понятия вырожденности, так как данный алгоритм переводит базисные формы (5) – (7) в те же самые базисные формы, а вырожденную триформу – в вырожденную.

Итак, в результате мы пришли к следующему утверждению. Изучение триформы общего вида $\Omega(x_1, x_2, x_3; \omega_1, \omega_2, \omega_3)$ сводится к изучению 8-ми канонических триформ:

$$\Omega(x_1, x_2, x_3; 1, 0, 0) \equiv \Omega_1(x_1, x_2, x_3); \tag{40}$$

$$\Omega(x_1, x_2, x_3; 0, 1, 0) \equiv \Omega_2(x_1, x_2, x_3); \tag{41}$$

$$\Omega(x_1, x_2, x_3; 0, 0, 1) \equiv \Omega_3(x_1, x_2, x_3); \tag{42}$$

$$\Omega(x_1, x_2, x_3; 1, -\frac{3}{2}, 6); \tag{43}$$

$$\Omega(x_1, x_2, x_3; 1, 3, 6) \equiv (x_1 + x_2 + x_3)^3, \qquad \text{(вырожденная)}; \tag{44}$$

$$\Omega(x_1, x_2, x_3; 1, \omega, 0), \qquad \omega \in [-\frac{1}{2}; 0) \cup (0; 1;] \tag{45}$$

$$\Omega(x_1, x_2, x_3; 1, 0, \omega), \qquad \omega \neq 0; \tag{46}$$

$$\Omega(x_1, x_2, x_3; 0, 1, \omega), \qquad \omega \neq 0. \tag{47}$$

Условие на параметр ω (45) для 6-ой канонической триформы необходимо, чтобы исключить неопределенность, которая существует при рассмотрении варианта 2) значений параметров триформы общего вида. Условие $\omega \neq 0$ для 6-ой, 7-ой и 8-мой канонических триформ необходимо, чтобы исключить базисные триформы, которые уже причислены к каноническим.

2. Триформы, которые могут соответствовать тричислам

Вместо того, чтобы непосредственно искать линейные преобразования, оставляющие канонические триформы 1 (40) – 8 (47) неизменными, будем искать бесконечно близкие к тождественному линейные преобразования. Эта задача сводится к нахождению соответствующих генераторов.

1. Не существует непрерывной двухпараметрической абелевой группы Ли, которая бы оставляла вид 1-ой канонической триформы (40) неизменным.

2. Не существует непрерывной двухпараметрической абелевой группы Ли, которая бы оставляла вид 2-ой канонической триформы (41) неизменным.

3. Третья каноническая триформа (42) имеет двухпараметрическую абелеву группу симметрии (группу Ли) с генераторами

$$\hat{a}_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \hat{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{48}$$

4. Четвертая каноническая триформа (43) имеет трехпараметрическую неабелеву группу Ли в качестве группы симметрии с генераторами

$$\hat{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{a}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{a}_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{49}$$

Необходимо проверить, имеется ли в этой группе двухпараметрическая абелева подгруппа.

5. Пятая каноническая триформа (44) является вырожденной, поэтому она исключается при поиске соответствующих ей тричисел.

6. Ни при каких разрешенных значениях параметра (45) 6-я каноническая триформа не имеет двухпараметрической группы Ли, но при $\omega = 1$ эта триформа имеет однопараметрическую группу симметрии. Таким образом, 6-я каноническая триформа не может соответствовать тричислам.

7. Только при значении параметра $\omega = -3$ 7-я каноническая триформа (46) имеет двухпараметрическую абелеву группу Ли в качестве группы симметрии с генераторами

$$\hat{a}_6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \hat{a}_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{50}$$

причем преобразование (16) с генератором, равным сумме генераторов (50), входит в эту группу симметрии, поэтому триформу $\Omega(x_1, x_2, x_3; 1, 0, -3)$ следует отнести к специальным случаям.

8. Восьмая каноническая триформа (47) при $\omega = 3$ имеет однопараметрическую группу симметрии, которая не может соответствовать тричислам, а при $\omega = 2$ –

двухпараметрическую абелеву группу симметрии с генераторами

$$\hat{a}_8 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -1 & -1 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \qquad \hat{a}_9 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ -1 & -1 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \tag{51}$$

Итак, среди канонических триформ найдены такие четыре невырожденные, которые могут соответствовать тричислам. Сохранив нумерацию канонических триформ, выпишем эти четыре формы, указав генераторы группы симметрии им соответствующей:

$$1. \qquad - - - - - - - - - \quad ;$$

$$2. \qquad - - - - - - - - - \quad ;$$

$$3.\ \ \Omega(x_1, x_2, x_3; 0, 0, 1) \equiv \Omega_3(x_1, x_2, x_3), \quad \{\hat{a}_1, \hat{a}_2\}; \tag{52}$$

$$4.\ \ \Omega(x_1, x_2, x_3; 1, -\frac{3}{2}, 6) \quad \{\hat{a}_3, \hat{a}_4, \hat{a}_5\}; \tag{53}$$

$$5. \qquad - - - - - - - - - \quad ;$$

$$6. \qquad - - - - - - - - - \quad ;$$

$$7.\ \ \Omega(x_1, x_2, x_3; 1, 0, -3), \quad \{\hat{a}_{12}, \hat{a}_{13}\}; \tag{54}$$

$$8.\ \ \Omega(x_1, x_2, x_3; 0, 1, 2), \quad \{\hat{a}_{14}, \hat{a}_{15}\}; \tag{55}$$

3. Триформы $\Omega_3(x_1, x_2, x_3), \Omega(x_1, x_2, x_3; 0, 1, 2)$ и тричисла

Рассмотрим триформу $\Omega_3(x_1, x_2, x_3)$, которая, как мы выяснили, обладает двухпараметрической непрерывной группой Ли – группой симметрии с генераторами $\hat{a}_1, \hat{a}_2$ (48). Сопоставив единичной матрице и генераторам $\hat{a}_1, \hat{a}_2$ базисные элементы $e_1 \equiv 1, e_2, e_3$ искомой системы тричисел, получим для них следующую таблицу умножения:

$\times$	1	e_2	e_3
1	1	e_2	e_3
e_2	e_2	$\frac{1}{3}(2 - 2e_2 + e_3)$	$\frac{1}{3}(1 - e_2 - e_3)$
e_3	e_3	$\frac{1}{3}(1 - e_2 - e_3)$	$\frac{1}{3}(2 + e_2 - 2e_3)$

Таб. 1.

Тричисла, которые могут соответствовать триформе $\Omega_3(x_1, x_2, x_3)$, найдены. Осталось проверить существуют ли такая система линейных координат, в которых куб нормы найденных тричисел есть эта триформа $\Omega_3(x_1, x_2, x_3)$.

Из вида генераторов (48), очевидно, что полученная система тричисел изоморфна алгебре диагональных матриц 3×3, поэтому такие числа обозначим H_3 , а линейные координаты x_1, x_2, x_3 удобно ввести в базисе

$$\psi_1 = \frac{1}{3}(1 - e_2 - e_3), \quad \psi_2 = \frac{1}{3}(1 + 2e_2 - e_3), \quad \psi_3 = \frac{1}{3}(1 - e_2 + 2e_3) \tag{56}$$

с таблицей умножения

$\times$	ψ_1	ψ_2	ψ_3
ψ_1	ψ_1	0	0
ψ_2	0	ψ_2	0
ψ_3	0	0	ψ_3

Таб. 2.

Тогда

$$x_1\psi_1 + x_2\psi_2 + x_3\psi_3 = \rho \cdot \exp(\alpha \cdot e_2 + \beta \cdot e_3) \tag{57}$$

или

$$x_1\psi_1 + x_2\psi_2 + x_3\psi_3 = \rho \cdot \exp[(-\alpha - \beta) \cdot \psi_1 + \exp(\alpha) \cdot \psi_2 + \exp(\beta) \cdot \psi_3] \tag{58}$$

Таким образом, экспоненциальное представление чисел H_3 возможно, если координаты $x_i > 0$. Если из координатных трех соотношений (58) исключить углы α, β, то получим выражение для куба нормы

$$\rho^3 = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \tag{59}$$

Это не единственная возможность симметричного введения линейных координат. Для чисел H_3 существует базис, содержащий две гиперболические единицы,

$$1 = \psi_1 + \psi_2 + \psi_3, \quad j = -\psi_1 - \psi_2 + \psi_3, \quad k = -\psi_1 + \psi_2 - \psi_3 \tag{60}$$

×	1	j	k
1	1	j	k
j	j	1	$-1+j+k$
k	k	$-1+j+k$	1

Таб. 3.

Если ввести линейные координаты в этом базисе, то куб нормы чисел H_3 в таких координатах

$$\rho^3 = \Omega(x, x, x; 1, -1, 2) \tag{61}$$

Справа в формуле (61) стоит неканоническая форма. Преобразованием (16) с $p = 4$, изменением знака одновременно у всех координат и общим масштабным преобразованием триформа $\Omega(x_1, x_2, x_3; 1, -1, 2)$ переводится в 8-ю каноническую триформу $\Omega(x, x, x; 0, 1, 2)$. Линейные координаты x_i для чисел H_3 можно ввести и так

$$(x_2 + x_3)\psi_1 + (x_1 + x_3)\psi_2 + (x_1 + x_2)\psi_3 = \rho \cdot \exp(\alpha \cdot e_2 + \beta \cdot e_3), \tag{62}$$

тогда

$$\rho^3 = \Omega(x_1, x_2, x_3; 0, 1, 2) \tag{63}$$

– это опять 8-я каноническая форма (55).

Таким образом, триформы $\Omega(x_1, x_2, x_3; 0, 0, 1) \equiv \Omega_3(x_1, x_2, x_3)$, $\Omega(x_1, x_2, x_3; 1, -1, 2)$, $\Omega(x_1, x_2, x_3; 0, 1, 2)$ соответствуют одним и тем же тричислам H_3, которые изоморфны алгебре квадратных диагональных матриц 3 × 3. Хотя триформы $\Omega(x_1, x_2, x_3; 0, 0, 1) \equiv \Omega_3(x_1, x_2, x_3)$, $\Omega(x_1, x_2, x_3; 0, 1, 2)$ нельзя получить одну из другой непрерывным линейным преобразованием (16) вместе с общемасштабным преобразованием и возможно изменением знака у всех трех координат, эти формы все же связаны дискретным линейным преобразованием координат

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}. \tag{64}$$

4. Триформа $\Omega(x_1, x_2, x_3; 1, -\frac{2}{3}, 6)$

Рассмотрим генераторы $\hat{a}_3, \hat{a}_4, \hat{a}_5$ линейных преобразований, которые оставляют триформу $\Omega(x_1, x_2, x_3; 1, -\frac{3}{2}, 6)$ неизменной. Эти генераторы не коммутируют между собой. Для того чтобы выделить два коммутирующих генератора, образуем следующие линейные комбинации этих операторов:

$$\hat{E}_0 = \hat{a}_3 + \hat{a}_4 + \hat{a}_5, \qquad \hat{E}_2 = -\hat{a}_3 + \hat{a}_4, \qquad \hat{E}_3 = -\hat{a}_3 + \hat{a}_5. \tag{65}$$

Для них справедлива таблица умножения

$\times$	$\hat{E}_0$	$\hat{E}_2$	$\hat{E}_3$
$\hat{E}_0$	$3\hat{E}_0$	$3\hat{E}_2$	$3\hat{E}_3$
$\hat{E}_2$	0	0	0
$\hat{E}_3$	0	0	0

Таб. 4.

Таким образом, в качестве пары коммутирующих генераторов можно взять $\hat{E}_2, \hat{E}_3$ или произвольные две линейно независимые их линейные комбинации. Используя Таб. 4, можно показать, что кроме $\hat{E}_2, \hat{E}_3$ и их линейных комбинаций, не существует линейных комбинаций трех операторов $\hat{E}_0, \hat{E}_2, \hat{E}_3$, то есть операторов $\hat{a}_3, \hat{a}_4, \hat{a}_5$, коммутирующих между собой. Сопоставим $\hat{E}_2, \hat{E}_3$ символьные элементы e_2, e_3 гиперкомплексного числа, тогда для базисных элементов $e_1 \equiv 1, e_2, e_3$, получим таблицу Кэли

$\times$	1	e_2	e_3
1	1	e_2	e_3
e_2	e_2	0	0
e_3	e_3	0	0

Таб. 6.

Тричисла с такой таблицей умножения символьных единиц естественно назвать дуальными и обозначить D_3. Для таких тричисел

$$\rho \cdot \exp(\alpha \cdot e_2 + \beta \cdot e_3) = \rho \cdot (1 + \alpha \cdot e_2 + \beta \cdot e_3). \tag{66}$$

Единственная, если не считать порядок нумерации, возможность ввести симметричным образом линейные координаты x_i – это

$$X = x_1 + x_2 \cdot (1 + e_2) + x_3 \cdot (1 + e_3), \tag{67}$$

тогда

$$\rho^3 = (x_1 + x_2 + x_3)^3 \equiv \Omega(x_1, x_2, x_3; 1, 3, 6) \tag{68}$$

– вырожденная триформа.

Таким образом, с триформой $\Omega(x_1, x_2, x_3; 1, -\frac{3}{2}, 6)$ нельзя связать тричисла, куб нормы которых был бы равен этой триформе.

5. Триформа $\Omega(x_1, x_2, x_3; 1, 0, -3)$

Генераторы $\hat{a}_6, \hat{a}_7$ группы симметрии, относительно которой остается неизменной форма $\Omega(x_1, x_2, x_3; 1, 0, -3)$, обладают следующими правилами умножения:

$$\hat{a}_6 \cdot \hat{a}_6 = \hat{a}_7, \qquad \hat{a}_7 \cdot \hat{a}_7 = \hat{a}_6, \qquad \hat{a}_6 \cdot \hat{a}_7 = \hat{a}_7 \cdot \hat{a}_6 = 1. \tag{69}$$

Сопоставив им символьные элементы e_2, e_3 системы тричисел, получим для последних и единичного элемента таблицу Кэли

$\times$	1	e_2	e_3
1	1	e_2	e_3
e_2	e_2	e_3	1
e_3	e_3	1	e_2

Таб. 7.

Гиперкомплексные ассоциативно-коммутативные трехмерные числа с законом умножения базисных элементов, приведенных в Таб. 7, будем обозначать C_3. Используя эту таблицу Кэли, получим формулу

$$\begin{aligned}\exp(\alpha\cdot e_2+\beta\cdot e_3) &= \frac{1}{3}\,e^{\alpha+\beta}\{1+2e^{-\frac{3}{2}(\alpha+\beta)}\cdot\cos[\frac{\sqrt{3}}{2}(\alpha-\beta)]\}+\\ &+\frac{1}{3}e^{\alpha+\beta}\{1-2e^{-\frac{3}{2}(\alpha+\beta)}\cdot\cos[\frac{\sqrt{3}}{2}(\alpha-\beta)+\frac{\pi}{3}]\}\cdot e_2+\\ &\frac{1}{3}e^{\alpha+\beta}\{1-2e^{-\frac{3}{2}(\alpha+\beta)}\cdot\cos[\frac{\sqrt{3}}{2}(\alpha-\beta)-\frac{\pi}{3}]\}\cdot e_3. \end{aligned} \qquad (70)$$

Введем координатную систему x_1, x_2, x_3 в том же базисе следующим образом:

$$x_1+x_2\cdot e_2+x_3\cdot e_3=\exp(\alpha\cdot e_2+\beta\cdot e_3). \qquad (71)$$

Используя формулу (70) и три координатных соотношения (71), получим два соотношения

$$x_1+x_2+x_3=\rho\cdot e^{(\alpha+\beta)}, \qquad x_1^2+x_2^2+x_3^2=\frac{1}{3}\rho^2\cdot e^{2(\alpha+\beta)}\{1+2\cdot e^{-3(\alpha+\beta)}\}, \qquad (72)$$

которые уже не содержат разности параметров $(\alpha-\beta)$. Исключая из соотношений (72) сумму параметров $(\alpha+\beta)$, имеем

$$\rho^3=\frac{3}{2}\cdot(x_1+x_2+x_3\}\cdot(x_1^2+x_2^2+x_3^2\}-\frac{1}{2}\cdot(x_1+x_2+x_3\}^3\equiv\Omega(x_1,x_2,x_3;1,0,-3\}. \qquad (73)$$

Таким образом, для тричисел C_3 куб модуля есть триформа $\Omega(x_1,x_2,x_3;1,0,-3)$.

Хотя для чисел C_3 из символьных элементов и единицы можно составить линейную комбинацию

$$j=\frac{1}{3}[1-2(e_2+e_3)], \qquad j^2=1, \qquad (74)$$

которая является гиперболической единицей ($j^2=1$), то есть числа C_3 – это обобщение гиперболических (двойных) чисел; и нельзя составить линейную комбинацию, которая бы являлась эллиптической единицей ($i^2=-1$); в каком-то смысле тричисла C_3 есть обобщение и комплексных чисел, для которых символьная единица – решение алгебраического уравнения $x^2=-1$. Для чисел C_3 базисные элементы $1, e_2, e_3$, являются корнями кубического уравнения $x^3=1$, или с измененным знаком $-1, -e_2, -e_3$ – корнями уравнения $x^3=-1$. Так как, с одной стороны, в комплексных числах уравнение $x^3=1$ имеет три корня

$$1, \quad -\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad (75)$$

из которых можно выделить мнимую единицу как линейную их комбинацию; а, с другой стороны, формулы (70) содержат тригонометрические функции, поэтому (и именно в этом смысле) числа C_3 можно считать обобщением на трехмерный случай не только двойных (гиперболических), но и комплексных чисел.

Заключение

Из всего множества систем ассоциативно-коммутативных гиперкомплексных чисел требование существования такого базиса, в котором куб нормы тричисла, если она (норма) существует, есть невырожденная триформа, выделяет с точностью до изоморфизма лишь две системы гиперкомплексных трехмерных чисел: C_3 и H_3. Числам C_3 соответствует каноническая триформа $\Omega(x_1, x_2, x_3; 1, 0, -3)$ (см. раздел 6 настоящей работы), а тричислам H_3 соответствуют канонические триформы $\Omega_3(x_1, x_2, x_3), \Omega(x_1, x_2, x_3; 0, 1, 2)$ (см. раздел 4 настоящей работы).

Полученный результат позволяет надеяться, что и для n-чисел с $n > 3$, требование существования такого базиса, в котором n-я степень нормы (если норма существует) n-числа равнялась n-форме координат в этом базисе, выделит узкий класс гиперкомплексных чисел, которые будут являться обобщением комплексных и гиперболических чисел (бичисел). Есть основания полагать, что именно такие гиперкомплексные числа в первую очередь найдут применение в математике и физике, когда задачи в той или иной мере симметричны относительно перестановки координат или некоторого преобразования, "смешивающего" координаты, но оставляющего их, в каком-то смысле, равноправными.

О ФОРМАХ СТЕПЕНИ N, ДОПУСКАЮЩИХ КОМПОЗИЦИЮ[1]

Р. Д. Шафер

Передано Эндрю. М. Глисоном

Любая конечномерная сепарабельная альтернативная алгебра A над полем F является прямой суммой $A = A_1 \oplus \ldots \oplus A_r$ простых идеалов A_i, где центр Z_i алгебры A_i является сепарабельным расширением F степени d_i. Общая (generic) норма $n_i(x_i)$ для A_i ([6], стр. 180) есть (однородная) форма степени $m_i d_i$ над F, где m_i – степень A_i как центральной простой алгебры над Z_i (в случае, если A_i неассоциативна, A_i является алгеброй Кэли над Z_i и $m_i = 2$). Пусть $f_1, \ldots, f_r$ – произвольные положительные целые числа и $x = x_1 + \ldots + x_r$, $x_i \in A_i$. Тогда

$$N(x) = [n_1(x_1)]^{f_1} \cdots [n_r(x_r)]^{f_r} \tag{1}$$

является формой степени

$$n = \sum_{i=1}^{r} f_i m_i d_i \tag{2}$$

на A, *допускающей композицию:*

$$N(xy) = N(x)N(y) \qquad \text{для всех} \quad x, y \in A \tag{3}$$

Если F имеет характеристику 0 или $p > n$, $N(x)$ невырождена.

В [9] было сделано предположение, что обратно, любая (возможно, бесконечномерная) алгебра A с 1 над F характеристики 0 или $p > n$, на которой определена невырожденная форма $N(x)$ степени n, допускающая композицию, является конечномерной сепарабельной альтернативной алгеброй с $N(x)$, получаемой посредством (1) и (2). Это классический результат ([1], [5], [7]) для квадратичных форм, размерность A равна $1, 2, 4$ или 8. Для конечномерной A теорема известна для кубических форм ([9]), размерность A равна $1, 2, 3, 5$ или 9. В данной работе мы докажем для произвольного n, без предположения конечномерности, что A альтернативна (Теорема 2). Мы докажем также, что элементы из A удовлетворяют хорошо определенным уравнениям степени n.

Предположив, что A конечномерна, мы докажем, что A является сепарабельной (альтернативной) алгеброй $A = A_1 \oplus \ldots \oplus A_r$ с $N(x) = N_1(x_1) \cdots N_r(x_r)$, где $N_i(x_i)$ на простом идеале A_i есть невырожденная форма степени n_i, допускающая композицию, $n = n_1 + \ldots + n_r$. Это сводит предположение для конечномерной алгебры A к следующему: что невырожденная форма степени $\leqslant n$, допускающая композицию на простой альтернативной алгебре, является степенью общей (generic) нормы.

В последнем разделе мы докажем для конечномерной A, что, если $N(x)$ – квадраформа (quartic form), то $N(x)$ дается посредством (1) с $n = 4$ в (2). Таким образом, размерность A равна $1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12$ или 16.

После того, как данная работа была написана, Натан Джекобсон информировал автора, что он доказал, что форма степени n, допускающая композицию на конечномерной простой альтернативной алгебре над полем, содержащим более, чем n элементов, является степенью общей нормы. Это результат, который включает доказательство для конечномерной A предположения из [9], появится в Osaka Mathematical Journal.

---

[1] Journal of Mathematics and Mechanics, Vol. 12, No. 5 (1963), перевод А. Элиовича.

1. Формы степени n

Пусть V – векторное пространство (возможно, бесконечномерное) над полем F характеристики 0 или $p > n$. Отображение $x \to N(x)$ V на F называется *формой степени* n на V в случае $N(\alpha x) = \alpha^n N(x)$ для всех $\alpha \in F$ и $x \in V$, и

$$(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{n!}\Big[N(x_1 + \ldots + x_n) - \sum_{i=1}^{n} N(x_1 + \ldots + \breve{x}_i + \ldots + x_n)$$
$$+ \sum_{i<j} N(x_1 + \ldots + \breve{x}_i + \ldots + \breve{x}_j + \ldots + x_n) - \ldots + (-1)^{n-1} \sum N(x_i)\Big], \quad (4)$$

n-линейна, где запись $\breve{x}_i$ означает, что x_i опущен. Так как

$$\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i C_n^i (n-i)^n = n!,$$

где C_n^i – биномиальные коэффициенты ([4], стр. 63, уравнение (12.17)), мы имеем $N(x) = (x, \ldots, x)$. Мы говорим, что $N(x)$ и ассоциированная симметричная n-линейная форма (4) являются невырожденными в случае, когда $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ для любых $x_2, \ldots, x_n \in V$ означает $x_1 = 0$.

Предположим, что форма $N(x)$ степени n определена на неассоциативной алгебре A над F, и что $N(x)$ допускает композицию:

$$(xy, \ldots, xy) = (x, \ldots, x)(y, \ldots, y).$$

Мы линеаризуем это по x, чтобы получить

$$(x_1 y, \ldots, x_n y) = (x_1, \ldots, x_n) N(y), \quad (5)$$

и линеаризуем (5) по y, чтобы получить фундаментальное соотношение

$$\sum_{\sigma} (x_1 y_{\sigma(1)}, \ldots, x_n y_{\sigma(n)}) = n!(x_1, \ldots, x_n)(y_1, \ldots, y_n), \quad (6)$$

где σ пробегает все перестановки $1, 2, \ldots, n$. Тогда из (6) вытекает

$$(xy_1, \ldots, xy_n) = N(x)(y_1, \ldots, y_n). \quad (7)$$

Мы предполагаем повсюду, что классические результаты для $n \leqslant 2$ известны. Таким образом, во всех формулах и доказательствах мы можем положить $n \geqslant 3$. Фактически, большая часть формул, данных здесь, справедливы для $n \geqslant 2$. Если получится, что в некоторых формулах мы молчаливо предполагаем $n \geqslant 3$ или $n \geqslant 4$, присутствие $(n-2)$ и/или $(n-3)$ среди коэффициентов как правило делает формулы формально справедливыми для $n \geqslant 2$.

Предположим, что A содержит 1. Для $i = 1, \ldots, n$ определим форму $T_i(x)$ степени i на A посредством

$$T_i(x) = C_n^i(\underbrace{x, \ldots, x}_{i}, 1, \ldots, 1) \qquad (i = 1, \ldots, n). \quad (8)$$

В частности, мы имеем *след*

$$T(x) = T_1(x) = n(x, 1, \ldots, 1); \quad (9)$$

также

$$N(x) = T_n(x).$$

(Мы принимаем соглашение, что для любых $x \in A$, мы имеем $T_0(x) = 1$ и $T_{n+q}(x) = 0$ если $q > 0$). Тогда A является векторным пространством прямой суммы

$$A = F1 + A_0 \tag{10}$$

$F1$ и подпространства A_0 всех элементов следа 0.

Положим $y_1 = a, y_2 = \ldots = y_n = 1$ в (6) чтобы получить

$$(x_1 a, x_2, \ldots, x_n) + (x_1, x_2 a, \ldots, x_n) + \ldots + (x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n a) = (x_1, x_2, \ldots, x_n) T(a). \tag{11}$$

Согласно (10), так как $T(\alpha 1) = n\alpha$ для $\alpha \in F$, тождество (11) эквивалентно

$$(x_1 a_0, x_2, \ldots, x_n) + (x_1, x_2 a_0, \ldots, x_n) + \ldots + (x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n a_0) = 0$$

для всех элементов a_0 следа 0; так что (11) эквивалентно утверждению, что все правые умножения R_{a_0}, соответствующие элементам следа 0 оставляют симметричную n-линейную форму $(x_1, \ldots, x_n)$ *инвариантной*. Симметрично, мы имеем

$$(a x_1, x_2, \ldots, x_n) + (x_1, a x_2, \ldots, x_n) + \ldots + (x_1, \ldots, x_{n-1}, a x_n) = T(a)(x_1, x_2, \ldots, x_n). \tag{12}$$

Следовательно

$$([x_1, a], x_2, \ldots, x_n) + (x_1, [x_2, a], \ldots, x_n) + \ldots + (x_1, \ldots, x_{n-1}, [x_n, a]) = 0. \tag{13}$$

так что все $R_a - L_a$, как и все левые умножения, связанные с элементами следа 0, оставляют форму $(x_1, \ldots, x_n)$ инвариантной.

Прежде, чем применить тождество (6) в его полную силу, мы должны получить ряд следствий из (11) и (12). Например, (11) и (12) справедливы в [10], хотя (6) – нет. Положив $y_{i+1} = \ldots x = y_n$ в (12), мы имеем

$$\begin{aligned}(a x_1, x_2, \ldots, x_i, 1, \ldots, 1) + \ldots + (x_1, x_2, \ldots, a x_i, 1, \ldots, 1)\\ + (n-j)(x_1, \ldots, x_i, a, 1, \ldots, 1) = T(a)(x_1, \ldots, x_i, 1, \ldots, 1)\\ \text{для} \quad j = 1, \ldots, n-1.\end{aligned} \tag{14}$$

Подстановка $a = x_1 = \ldots = x_i = x$ в (14) дает

$$j C_n^j (x^2, \underbrace{x, \ldots, x}_{i-1}, 1, \ldots, 1) + (j+1) T_{i+1}(x) = T(x) T_i(x), \qquad \text{для} \quad j = 1, \ldots, n-1, \tag{15}$$

согласно (8). Особый случай $j = 2$ в (14) есть

$$\begin{aligned}(a x_1, x_2, 1, \ldots, 1) + (x_1, a x_2, 1, \ldots, 1)\\ + (n-2)(x_1, x_2, a, 1, \ldots, 1) = T(a)(x_1, x_2, 1, \ldots, 1).\end{aligned} \tag{16}$$

Положив $a = x,\ x_1 = y,\ x_2 = 1$ в (16), мы имеем

$$T(xy) = T(x)T(y) - n(n-1)(x, y, 1, \ldots, 1). \tag{17}$$

Следовательно,

$$T(x^2) = [T(x)]^2 - 2T_2(x) \tag{18}$$

и

$$T(xy) = T(yx) \qquad \text{для} \quad x, y \in A. \tag{19}$$

Тогда из (17), (16) и (13) вытекает, что

$$T((xy)z) = T(x(yz)) \qquad \text{для всех} \quad x, y, z \in A, \tag{20}$$

так как

$$\begin{aligned} T((xy)z) - T(x(yz)) = T(xy)T(z) - n(n-1)(xy, z, 1, \dots, 1) - T(x)T(yz) \\ + n(n-1)(x, yz, 1, \dots, 1) = n(n-1)[T(x)(y, z, 1, \dots, 1) \\ - (xy, z, 1, \dots, 1) - T(z)(x, y, 1, \dots, 1) + (x, yz, 1, \dots, 1)] = \\ n(n-1)[([x, z], y, 1, \dots, 1) + (x, [y, z], 1, \dots, 1)] = \\ - n(n-1)(n-2)(x, y, [1, z], 1, \dots, 1) = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, симметричная билинейная форма

$$B(x, y) = T(xy)$$

является *ассоциативной*: $B(xy, z) = B(x, yz)$ для всех $x, y, z \in A$.

Мы покажем теперь, что если n-линейная форма $(x_1, \dots, x_n)$ невырождена на A, то также невырождена и билинейная форма $B(x, y)$. Положим, что $B(x, y) = 0$ для всех $y \in A$. Тогда $T(x) = B(x, 1) = 0$, так что

$$B(x, y) = -n(n-1)(x, y, \dots, 1)$$

по (17), или $(x, y, \dots, 1) = 0$ для всех $y \in A$. Это случай $i = 2$ уравнения

$$(x, x_2, \dots, x_i, 1, \dots, 1) = 0 \qquad \text{для всех} \quad x_2, \dots, x_i \in A. \tag{21}$$

Мы докажем (21) посредством индукции по i. Для $2 \leqslant i \leqslant n-1$, мы имеем

$$\begin{aligned} (x_{i+1}x, x_2, \dots, x_i, 1, \dots, 1) + (x, x_{i+1}x_2, \dots, x_i, 1, \dots, 1) \\ + \dots + (x, x_2, \dots, x_{i+1}x_i, 1, \dots, 1) + (n-i)(x, x_2, \dots, x_i, x_{i+1}, 1, \dots, 1) \\ = T(x_{i+1})(x, x_2, \dots, x_i, 1, \dots, 1) \end{aligned}$$

по (14), так что

$$(x_2, \dots, x_i, x_{i+1}x, 1, \dots, 1) = -(n-i)(x, x_2, \dots, x_i, x_{i+1}, 1, \dots, 1) \tag{22}$$

для всех $x_2, \dots, x_{i+1}$ из A согласно предположению (21) индукции. Взаимная замена x_{i+1} и $x_i(j = 2, \dots, i)$ в (22) дает

$$(x_2, \dots, x_i, \dots, x_{i+1}, 1, \dots, 1) = -(n-i)(x, x_2, \dots, x_{i+1}, 1, \dots, 1) \;\; \text{для} \;\; j = 2, \dots, i. \tag{23}$$

Тогда

$$\begin{aligned} (x_2x, x_3, \dots, x_{i+1}, 1, \dots, 1) + \dots + (x_2, \dots, x_{i+1}x, 1, \dots, 1) \\ + (n-i)(x_2, \dots, x_{i+1}, x, 1, \dots, 1) = (x_2, \dots, x_{i+1}, 1, \dots, 1)T(x) = 0 = \\ = -(i-1)(n-i)(x, x_2, \dots, x_{i+1}, 1, \dots, 1) \end{aligned}$$

согласно (23), из чего вытекает $(x, x_2, \dots, x_{i+1}, 1, \dots, 1) = 0$ пока $2 \leqslant i \leqslant n-1$. Следовательно, (21) верно; в частности, $(x, x_2, \dots, x_n) = 0$ для всех $x, x_2, \dots, x_n \in A$

так что $x = 0$, поскольку $(x_1, \ldots, x_n)$ невырождена. Поэтому $B(x, y)$ – невырожденная симметричная ассоциативная билинейная форма, определенная на A, и для конечномерной A мы можем применить теорему Дьюдонна ([11], стр. 37), которая утверждает, что конечномерная неассоциативная алгебра является полупростой в случае (i) на алгебре A определена невырожденная ассоциативная симметричная билинейная форма $B(x, y)$, и (ii) $I^2 \neq 0$ для каждого идеала $I \neq 0$ из A.

Теорема 1. *Пусть A – неассоциативная алгебра с 1 над полем F характеристики 0 или $p > n$. Пусть $(x_1, \ldots, x_n)$ – симметричная n-линейная форма на A, и след $T(x)$ определен согласно (9). Если $(x_1, \ldots, x_n)$ – инвариантна относительно всех левых и правых умножений, соответствующих элементам следа 0, то*

(a) $B(x, y) = T(xy)$ *является симметричной ассоциативной билинейной формой на A;*

(b) если $(x_1, \ldots, x_n)$ *невырождена, то невырождена и $B(x, y)$;*

(c) если $(x_1, \ldots, x_n)$ *невырождена и A конечномерна, то $A = A_1 \oplus \ldots A_r$ является прямой суммой простых идеалов A_i (и A сепарабельна в случае $p > n$).*

Доказательство. Нам нужно только проверить (ii) выше для невырожденной формы $B(x, y)$. Предположим, что I – идеал на A, удовлетворяющий $I^2 = 0$. Мы покажем сначала, что $T(x) = 0$ для всех $x \in I$. Для любого $x \in I$, мы имеем $x^2 = 0$. Тогда из (15) вытекает

$$(j + 1)T_{i+1}(x) = T(x)T_i(x) \qquad \text{для} \quad j = 1, \ldots, n - 1, \tag{24}$$

и, положив $a = x_1 = \ldots = x_n = x$ в (12) мы имеем

$$T(x)N(x) = 0. \tag{25}$$

Предположим, что $T(x) \neq 0$ для некоторого $x \in I$. Тогда из (25) вытекает $T_n(x) = N(x) = 0$. Это случай $i = 0$ уравнения $T_{n-i}(x) = 0$, которое мы доказали с помощью индукции по i. Согласно (24) мы имеем $T(x)T_{n-(i+1)}(x) = (n - i)T_{n-i}(x) = 0$ для $i = 0, 1, \ldots, n - 2$, так что $T_{n-(i+1)} = 0$ для $i = 0, 1, \ldots, n - 2$, как и хотели. В частности, мы имеем $T(x) = T_1(x) = 0$, т. е. противоречие. Поэтому $T(x) = 0$ для всех $x \in I$. Так как I является идеалом на A, мы имеем $xy \in I$ для всех $x \in I, y \in A$. Поэтому $B(x, y) = T(xy) = 0$ для всех $y \in A$, из чего вытекает $x = 0$ для всех $x \in I$, или $I = 0$.

2. Альтернативные алгебры

Напомним, что *альтернативная алгебра A* – это такая алгебра, которая является одновременно *левой альтернативной*:

$$x^2a = x(xa) \qquad \text{для всех} \quad x, a \in A \tag{26}$$

и *правой альтернативной*:

$$ax^2 = (ax)x \qquad \text{для всех} \quad x, a \in A. \tag{27}$$

Теорема 2. *Пусть поле F имеет характеристику 0 или $p > n$. Если невырожденная форма $N(x)$ степени n, допускающая композицию, определена на алгебре A (возможно, бесконечномерной) с 1 над F, то A альтернативна.*

Доказательство. Сначала выведем ряд следствий из фундаментального тождества (6). Положим

$$x_1 = x_2 = x, \quad y_1 = a, \quad y_2 = y, \quad x_3 = \ldots = x_n = y_3 = \ldots = y_n = 1$$

в (6) чтобы получить

$$\begin{aligned} &2(xa, xy, 1, \ldots, 1) + 2(n-2)(xa, x, y, 1, \ldots, 1) + 2(n-2)(xy, x, a, 1, \ldots, 1) \\ &\qquad + (n-2)(n-3)(x, x, a, y, 1, \ldots, 1) = 2T_2(x)(a, y, 1, \ldots, 1). \end{aligned} \tag{28}$$

Симметрично мы имеем

$$\begin{aligned} &2(ax, yx, 1, \ldots, 1) + 2(n-2)(ax, x, y, 1, \ldots, 1) + 2(n-2)(yx, x, a, 1, \ldots, 1) \\ &\qquad + (n-2)(n-3)(x, x, a, y, 1, \ldots, 1) = 2T_2(x)(a, y, 1, \ldots, 1). \end{aligned} \tag{29}$$

Тогда из (28) и (29) вытекает

$$\begin{aligned} &2T_2(x)(a, y, 1, \ldots, 1) - (xa, xy, 1, \ldots, 1) - 2(n-2)(xa, x, y, 1, \ldots, 1) = \\ &\qquad (n-2)(xy, x, a, 1, \ldots, 1) + (n-2)(n-3)(x, x, a, y, 1, \ldots, 1) \\ &\qquad + (n-2)(yx, x, a, 1, \ldots, 1) + (n-2)(ax, x, y, 1, \ldots, 1) + (ax, yx, 1, \ldots, 1). \end{aligned} \tag{30}$$

Положим $x_1 = a, \quad y_1 = y, \quad x_2 = y_2 = x, \quad x_3 = \ldots = x_n = y_3 = \ldots = y_n = 1$ в (6) чтобы получить

$$\begin{aligned} &(ay, x^2, 1, \ldots, 1) + (n-2)(ay, x, x, 1, \ldots, 1) + (n-2)(ax, x, y, 1, \ldots, 1) \\ &\quad + (n-2)(n-3)(a, x, x, y, 1, \ldots, 1) + +(ax, xy, 1, \ldots, 1) + (n-2)(a, x^2, y, 1, \ldots, 1) \\ &\qquad + (n-2)(a, xy, x, 1, \ldots, 1) = n(n-1)(a, x, 1, \ldots, 1)(y, x, 1, \ldots, 1). \end{aligned} \tag{31}$$

Из (20) мы имеем $T(((ax)y)x) = T((ax)(yx))$, так что

$$T((ax)y)T(x) - n(n-1)((ax)y, x, 1, \ldots, 1) = T(ax)T(yx) - n(n-1)(ax, yx, 1, \ldots, 1)$$

согласно (17), или

$$\begin{aligned} &n(n-1)[(ax, yx, 1, \ldots, 1) - T(y)(ax, x, 1, \ldots, 1) \\ &\qquad + (ax, xy, 1, \ldots, 1) + (n-2)(ax, x, y, 1, \ldots, 1)] = \\ &\qquad T(x)[T(y)T(ax) - n(n-1)T(a)(y, x, 1, \ldots, 1) - T((ax)y)] \\ &\qquad + n^2(n-1)^2(a, x, 1, \ldots, 1)(y, x, 1, \ldots, 1) = \\ &\qquad n(n-1)T(x)[(ax, y, 1, \ldots, 1) - T(a)(y, x, 1, \ldots, 1)] \\ &\qquad + n^2(n-1)^2(a, x, 1, \ldots, 1)(y, x, 1, \ldots, 1) \end{aligned}$$

по (17) и (11). Следовательно

$$\begin{aligned} &(ax, yx, 1, \ldots, 1) + T(y)(a, x^2, 1, \ldots, 1) + (n-2)T(y)(a, x, x, 1, \ldots, 1) + (ax, ay, 1, \ldots, 1) \\ &\qquad + (n-2)(ax, x, y, 1, \ldots, 1) - n(n-1)(a, x, 1, \ldots, 1)(y, x, 1, \ldots, 1) = \\ &\qquad T(x)[T(y)(a, x, 1, \ldots, 1) - (ay, x, 1, \ldots, 1) - (n-2)(y, x, 1, \ldots, 1)] \end{aligned} \tag{32}$$

согласно (11) и (12). Тогда из (31) и (32) вытекает

$$\begin{aligned} &(ax, yx, 1, \ldots, 1) + T(y)(a, x^2, 1, \ldots, 1) - (ay, x^2, 1, \ldots, 1) = \\ &\quad T(x)(a, xy, 1, \ldots, 1) - (n-2)T(y)(a, x, x, 1, \ldots, 1) + (n-2)(a, x^2, y, 1, \ldots, 1) + \\ &(n-2)(a, xy, x, 1, \ldots, 1) + (n-2)(ay, x, x, 1, \ldots, 1) + (n-2)(n-3)(a, x, x, y, 1, \ldots, 1) \end{aligned} \tag{33}$$

согласно (11). Следовательно

$$\begin{aligned}
&B(x^2a, y) - B(x(xa), y) = \\
&\quad = n(n-1)[(x(xa), y, 1, \dots, 1) - (x^2a, y, 1, \dots, 1)] && \text{по (17) и (20)} \\
&\quad = n(n-1)[T(x)(xa, y, 1, \dots, 1) - (xa, xy, 1, \dots, 1) \\
&\qquad -(n-2)(xa, y, x, 1, \dots, 1) - T(x^2)(a, y, 1, \dots, 1) \\
&\qquad +(a, x^2y, 1, \dots, 1) + (n-2)(a, y, x^2, 1, \dots, 1)] && \text{по (12)} \\
&\quad = n(n-1)T(x)[(xa, y, 1, \dots, 1) - T(x)(a, y, 1, \dots, 1)] \\
&\qquad +n(n-1)[2T_2(x)(a, y, 1, \dots, 1) - (xa, xy, 1, \dots, 1) \\
&\qquad -(n-2)(xa, y, x, 1, \dots, 1) + T(y)(a, x^2, 1, \dots, 1) - (ay, x^2, 1, \dots, 1)] && \text{по (8) и (11)} \\
&\quad = n(n-1)T(x)[-(a, xy, 1, \dots, 1) - (n-2)(a, y, x, 1, \dots, 1)] \\
&\qquad +n(n-1)[(n-2)(xy, x, a, 1, \dots, 1) \\
&\qquad +(n-2)(n-3)(x, x, y, a, 1, \dots, 1) + (n-2)(yx, x, a, 1, \dots, 1) \\
&\qquad +(n-2)(ax, x, y, 1, \dots, 1) + (ax, yx, 1, \dots, 1) \\
&\qquad +T(y)(a, x^2, 1, \dots, 1) - (ay, x^2, 1, \dots, 1)] && \text{по (12) и (30)} \\
&\quad = n(n-1)(n-2)[-T(x)(a, y, x, 1, \dots, 1) + 2(xy, x, a, 1, \dots, 1) \\
&\qquad +2(n-3)(x, x, y, a, 1, \dots, 1) + (yx, x, a, 1, \dots, 1) \\
&\qquad +(ax, x, y, 1, \dots, 1) - T(y)(a, x, x, 1, \dots, 1) \\
&\qquad +(a, x^2, y, 1, \dots, 1) + (ay, x, x, 1, \dots, 1) && \text{по (33)} \\
&\quad = 0 \qquad \text{для всех} \quad y \in A && \text{по (11).}
\end{aligned}$$

Так как B(x,y) невырождена, мы имеем (26); так что A является левоальтернативной. Симметрично, удовлетворяется (27) и A альтернативна, что и требовалось доказать.

Следствие. *Любая конечномерная алгебра A, удовлетворяющая предположениям Теоремы 2 является прямой суммой $A = A_1 \oplus \dots A_r$ простых идеалов A_i, каждый из которых или ассоциативен, или представляет собой алгебру Кэли над своим центром Z_i.*

Теорема 3. *Пусть F имеет характеристику 0 или $p > n$. Если невырожденная форма $N(x)$ степени n, допускающая композицию, определена на алгебре A (возможно, бесконечномерной) с 1 над F, то любой элемент $x \in A$ удовлетворяет соотношению*

$$x^n - T_1(x)x^{n-1} + T_2(x)x^{n-2} - \dots + (-1)^n T_n(x)1 = 0. \tag{34}$$

Доказательство. Для $i = 1, \dots, n-1$, положим $x_1 = x^{n-i}$, $y_1 = \dots = y_i = x$, $y_{i+1} = \dots = y_n = 1$ в (6) чтобы получить

$$\begin{aligned}
&(x^{n-i+1}, x_2x, \dots, x_ix, x_{i+1} \dots, x_n) + \dots (x^{n-i+1}, x_2, \dots, x_{n-i+1}x, x_{n-i+2}x, \dots, x_nx) + \dots \\
&\quad + (x^{n-i}, x_2x, \dots, x_{i+1}x, x_{i+2}, \dots, x_n) + \dots + (x^{n-i}, x_2, \dots, x_{n-i}, x_{n-i+1}x, \dots, x_nx) = \\
&\qquad = (x^{n-i}, x_2, \dots, x_n)T_i(x) \qquad \text{для} \quad i = 1, \dots, n-1.
\end{aligned} \tag{35}$$

Тогда из (35) и (5) вытекает

$$(x^n - T_1(x)x^{n-1} + T_2(x)x^{n-2} - \dots + (-1)^n T_n(x)1,\ x_2, \dots, x_n) = 0 \tag{36}$$

для всех $x_2, \dots, x_n \in A$, из чего вытекает (34), так как $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ невырождена.

3. Сведение к простым алгебрам

Мы будем предполагать отныне, что алгебра A удовлетворяет предположениям Теоремы 2.

Пусть e – идемпотент $\neq 1$ на A. Тогда из (34) вытекает

$$1 - T(e) + T_2(e) - \ldots + (-1)^{n-1}T_{n-1}(e) = 0, \qquad N(e) = 0, \tag{37}$$

так как e и 1 линейно независимы. Положим $x = e$ в (15) чтобы получить

$$(j+1)T_{i+1}(e) = [T(e) - j]T_i(e) \qquad \text{для} \quad j = 1, \ldots, n-1. \tag{38}$$

Так как $T_n(e) = N(e) = 0$ согласно (37), существует наименьшее целое число m такое, что $T_{m+1}(e) = \ldots = T_n(e) = 0$. Тогда $T_m(e) \neq 0$ с $1 \leqslant m \leqslant n-1$, так как $T_1(e) = \ldots = T_n(e) = 0$ противоречит (37). Полагая $j = m$ в (38), мы имеем

$$T(e) = m, \tag{39}$$

что является частным случаем $i = 1$ соотношения

$$T_i(e) = C_i^m \qquad \text{для} \quad i = 1, \ldots, m. \tag{40}$$

Используя (38), мы докажем (40) с помощью индукции по i, как ниже:

$$T_{i+1}(e) = \frac{m-i}{i+1}T_i(e) = \frac{m-i}{i+1}C_m^i = C_m^{i+1}.$$

Предположим, что существуют идеалы $G \neq 0, G' \neq 0$ такие, что $A = G \oplus G'$. (Это случай, когда алгебра A не проста, но конечномерна, так что $A = A_1 \oplus \ldots \oplus A_r$ с простыми A_i с $r > 1$ согласно Теореме 1(c).) Тогда $1 = e + e'$,где $e \neq 1$ (соответственно, $e' \neq 1$) является единичным элементом на G (соответственно, G'). Для $g \in G, g' \in G'$, определим

$$N_G(g) = N(g + e'), \qquad N_{G'}(g') = N(g' + e). \tag{41}$$

Тогда, для любого $x = g + g' \in A$, из (3) вытекает

$$N(x) = N_G(g)N_{G'}(g') \tag{42}$$

и

$$N_G(g_1g_2) = N_G(g_1)N_G(g_2) \qquad \text{для всех} \quad g_1, g_2 \in G. \tag{43}$$

Мы покажем дальше, что

$$N_G(g) = T_m(g) \qquad \text{для всех} \quad g \in G \qquad \text{где} \quad m = T(e), \tag{44}$$

из чего вытекает, что $N_G(g)$ является формой степени m на G. Симметрично, справедливы формулы для $N_{G'}(g')$, соответствующие (43) и (44), так что $N(x)$ является произведением (42) форм, которые допускают композицию и имеют степени m и m', $n = m + m'$, $m > 0$, $m' > 0$.

Для любого $i = 0, 1, \ldots, n$, положим

$$a = e, \quad x_1 = \ldots = x_i = g \in G, \quad x_{i+1} = \ldots = x_n = e'$$

в (12). Тогда из (39) вытекает

$$(\underbrace{g, \ldots, g}_{i}, e', \ldots, e') = 0 \qquad \text{кроме} \quad i = T(e) = m. \tag{45}$$

Также

$$(\underbrace{g, \ldots, g}_{m}, \underbrace{e, \ldots, e}_{i}, 1, \ldots, 1) = 0 \qquad \text{для всех} \quad i > 0, \tag{46}$$

как мы доказали с помощью индукции по i. Положим

$$j = m, \qquad a = e, \qquad x_1 = \ldots = x_m = g \in G$$

в (14), чтобы получить

$$(\underbrace{g, \ldots, g}_{m}, e, 1, \ldots, 1) = 0 \tag{47}$$

так как $m < n$. Однако, (47) – это случай $i = 1$ соотношения (46). Положим

$$j = m + i, \qquad x_1 = \ldots = x_m = g \in G, \qquad a = x_{m+1} = \ldots = x_{m+i} = e$$

в (14), чтобы получить

$$i(\underbrace{g, \ldots, g}_{m}, \underbrace{e, \ldots, e}_{i}, 1, \ldots, 1) + (n - m - i)(\underbrace{g, \ldots, g}_{m}, \underbrace{e, \ldots, e}_{i+1}, 1, \ldots, 1) = 0,$$

так что

$$(\underbrace{g, \ldots, g}_{m}, \underbrace{e, \ldots, e}_{i+1}, 1, \ldots, 1) = 0$$

согласно предположению (46) индукции. Тогда из (45) и (46) вытекает (44). Согласно (41) мы имеем:

$$\begin{aligned} N_G(g) &= (g + e', \ldots, g + e') \\ &= \textstyle\sum_{i=0}^{n} C_n^i (\underbrace{g, \ldots, g}_{i}, e', \ldots, e') \\ &= C_n^m (\underbrace{g, \ldots, g}_{m}, e', \ldots, e') \\ &= C_n^m (\underbrace{g, \ldots, g}_{m}, 1 - e, \ldots, 1 - e) \\ &= C_n^m \textstyle\sum_{i=0}^{n-m} (-1)^i C_{n-m}^i (\underbrace{g, \ldots, g}_{m}, \underbrace{e, \ldots, e}_{i}, 1. \ldots, 1) \\ &= C_n^m (\underbrace{g, \ldots, g}_{m}, 1, \ldots, 1) \\ &= T_m(g). \end{aligned}$$

Далее мы покажем, что $N_G(g)$ невырождена на G (и симметрично $N_{G'}(g')$ невырождена на G'). Согласно (8) и (44) форма $N_G(g)$ имеет ассоциированную симметричную m-линейную форму $C_n^m(g_1, \ldots, g_m, 1, \ldots, 1)$, $g_i \in G$. Предположим, что $(g_1, g_2, \ldots, g_m, 1, \ldots, 1) = 0$ для всех $g_2, \ldots, g_m \in G$. Чтобы показать, что $g_1 = 0$, как требуется, мы сначала покажем, что $T(g_1) = 0$. Зададим

$$(\underbrace{g_1, e, \ldots, e}_{m}, 1, \ldots, 1) = 0,$$

что является частным случаем $i = 0$ соотношения

$$(\underbrace{g_1, e, \ldots, e}_{m-i}, 1, \ldots, 1) = 0 \qquad i = 0, 1, \ldots, m - 1. \tag{48}$$

При доказательстве (48) по индукции, положим

$$j = m - i - 1, \qquad x_1 = g_1, \qquad a = x_2 = \ldots = x_{m-i-1} = e$$

в (14), чтобы получить

$$(i+1)(\underbrace{g_1, e, \ldots, e}_{m-i-1}, 1, \ldots, 1) = (n - m + i + 1)(\underbrace{g_1, e, \ldots, e}_{m-i}, 1, \ldots, 1) = 0$$

согласно предположению индукции, из чего вытекает

$$(\underbrace{g_1, e, \ldots, e}_{m-(i+1)}, 1, \ldots, 1) = 0,$$

что и требовалось. Случай $i = m - 1$ в (48) дает $T(g_1) = 0$. Для любого $y = g + g'$ из A ($g \in G$, $g' \in G'$), мы имеем

$$B(g_1, y) = T(g_1 y) = T(g_1 g) = T(g_1)T(g) - n(n-1)(g_1, g, 1, \ldots, 1) = -n(n-1)(g_1, g, 1, \ldots, 1)$$

согласно (17). Но мы задались

$$(\underbrace{g_1, g, e, \ldots, e}_{m}, 1, \ldots, 1) = 0,$$

который является случаем $i = 0$ соотношения

$$(\underbrace{g_1, g, e, \ldots, e}_{m-i}, 1, \ldots, 1) = 0, \qquad i = 0, 1, \ldots, m-2, \tag{49}$$

которое мы докажем по индукции следующим образом: положим

$$j = m - i - 1, \qquad x_1 = g_1, \qquad x_2 = g, \qquad a = x_3 = \ldots = x_{m-i-1} = e$$

в (14), чтобы получить

$$(i+1)(\underbrace{g_1, g, e, \ldots, e}_{m-i-1}, 1, \ldots, 1) = (n - m + i + 1)(\underbrace{g_1, g, e, \ldots, e}_{m-i}, 1, \ldots, 1) = 0$$

согласно предположению индукции (49). Поэтому

$$(\underbrace{g_1, g, e, \ldots, e}_{m-(i+1)}, 1, \ldots, 1) = 0,$$

что и требовалось. Случай $i = m - 2$ соотношения (49) дает

$$B(g_1, y) = -n(n-1)(g_1, g, 1, \ldots, 1) = 0$$

для всех $y \in A$, из чего вытекает $g_1 = 0$ так как $B(x, y)$ невырождена. Поэтому $N_G(g)$ невырождена на G (и то же самое относится к $N_{G'}(g')$ на G').

Так как F имеет характеристику 0 или $p > n > m$ (соответственно, m'), это доказательство может быть повторено для G и G'. В случае конечномерной алгебры мы за конечное число шагов получаем

Теорема 4. Пусть поле F имеет характеристику 0 или $p > n$. Пусть A – конечномерная алгебра с 1 над F, на которой определена невырожденная форма $N(x)$

степени n, допускающая композицию, так что $A = A_1 \oplus \ldots \oplus A_r$ с простыми (альтернативными) A_i. Тогда $N(x) = N_1(x_1) \cdots N_r(x_r)$, где $x = x_1 + \ldots + x_r$, $x_i \in A_i$, и $N_i(x_i)$ – невырожденная форма степени n_i на A_i, которая допускает композицию, $n = n_1 + \ldots + n_r$.

Теорема 4 сводит определение формы $N(x)$ на конечномерной A к рассмотрению простых алгебр. Таким образом, для конечномерной A исходное предположение для произвольного n сводится к следующему: что форма $N_i(x_i)$ любой степени $n_i \leqslant n$, допускающая композицию на простой альтернативной алгебре A_i, является степенью общей (generic) нормы для A_i.

Как было отмечено в последнем абзаце перед §1, Натан Джекобсон информировал автора после того, как данная статья была написана, что он доказал, что форма степени n, допускающая композицию на конечномерной простой альтернативной алгебре над полем, содержащим более чем n элементов, является степенью общей нормы. Этот результат появится в виде Следствия Теоремы 3 работы, озаглавленной "Общая (Generic) Норма Алгебры", направленной в Osaka Mathematical Journal. Это завершает доказательство для конечномерной A предположения, высказанного в [9] и делает следующую секцию (§4) данной работы необязательной.

4. Квадраформы (quartic forms)

Мы докажем для квадраформ на конечномерных алгебрах с помощью метода, использованного для кубических форм в [9], что $N(x)$ дается посредством (1) с $n = 4$ в (2).

Теорема 5. *Пусть A – конечномерная неассоциативная алгебра с 1 над F характеристики $\neq 2, 3$. Необходимое и достаточное условие для существования невырожденной квадраформы $N(x)$, допускающей композицию, на A является, что A представляет собой сепарабельную альтернативную алгебру $A = A_1 \oplus \ldots A_r, A_i$ простые, для которой $N(x)$ дается посредством (1) с $n = 4$ в (2). Таким образом, A имеет размерность* $1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12$ *или* 16.

Доказательство. Достаточное условие очевидно и нам остается доказать лишь необходимое. Согласно Теореме 4 мы можем положить A простой, так как соответствующий результат уже известен для степени < 4. (Нужно подчеркнуть, что метод доказательства в [9] требует дополнительного предположения, что F имеет характеристику $\neq 5$. Доказательство в [9] основывается на [3], где предположение, что характеристика $\neq 5$ не может быть обойдено ([3, 320]). Однако, доказательство Следствия из Теоремы 2 в настоящей работе (которое включает случай $n = 3$) не требует никаких дополнительных предположений о характеристике. Тогда из [9, §3] следует, что формулировка Теоремы в [9] корректна.)

Пусть K – алгебраическое замыкание F. Тогда A_K – конечномерная алгебра с 1 над K, на A_K существует невырожденная форма степени n, допускающая композицию. Все результаты по данному вопросу остаются справедливыми для A_K, мы имеем $A_K = D_1 \oplus \ldots \oplus D_d$, где D_i – расщепляемая центральная простая альтернативная алгебра над K, $D_1 \cong D_2 \cong \ldots \cong D_d$. Если $d > 1$, существует невырожденная форма степени n_i, допускающая композицию на D_i, $1 \leqslant n_1 \leqslant \ldots \leqslant n_d$, $\sum n_i = 4$. Если $n_1 = 1$, то $D_1 (\cong D_i)$ является 1-мерной над K с $d = 2, 3$ или 4. Если $n_1 = 2$, то $n_2 = 2$, $d = 2$, и мы знаем, что $dim\, D_i = 1, 4$ или 8. Соответственно, существуют следующие возможности для A:

(A) A является квадраполем (quartic field) над F $(n_1 = 1,\ d = 4)$;

(B) A – кубическое поле над F $(n_1 = 1,\ d = 3)$;

(C) A – квадратичное поле над F $(n_1 = 1,\ d = 2$; также $n_1 = 2,\ dim\, D_i = 1)$;

(D) A – (обобщенная) кватернионная алгебра над своим центром Z, квадратичное расширение F $(n_1 = 2,\ dim\, D_i = 4)$;

(E) A – алгебра Кэли над своим центром Z, квадратичное расширение F $(n_1 = 2,\ dim\, D_i = 8)$;

(F) A – центральная простая алгебра $(d = 1)$.

Согласно (34) с $n = 4$ возможности в случае (F) таковы:

$(F, 1)$ $A = F1$ (так что $N(\alpha 1) = \alpha^4, \alpha \in F$);

$(F, 2)$ A – (обобщенная) кватернионная алгебра или алгебра Кэли над F:

$(F, 3)$ A – центральная простая ассоциативная алгебра степени 3 над F;

$(F, 4)$ A – центральная простая ассоциативная алгебра степени 4 над F.

С очевидностью, возможности (A), (D), (E) и $(F, 4)$ могут иметь место. В этих случаях про квадраформу $N(x)$ известно, что она должна быть общей (generic) нормой. Также (C) и $(F, 2)$ могут иметь место с $N(x) = [n(x)]^2$, где $n(x)$ – общая норма для A; в Лемме 1 мы покажем, что никаких других $N(x)$ не может быть для (C) или $(F, 2)$. Наконец, мы докажем в Лемме 2, что (B) и $(F, 3)$ не могут иметь места. Это, вместе с Леммами 1 и 2, завершает доказательство Теоремы 5.

Лемма 1. *Пусть F имеет характеристику $\neq 2, 3$, и пусть алгебра A с общей (generic) $n(x)$ является одной из следующих:*

(i) квадратичное поле над F;

(ii) (обобщенная) кватернионная алгебра или алгебра Кэли над F.

Если $N(x)$ – невырожденная квадраформа наA, допускающая композицию, то $N(x) = [n(x)]^2$.

Доказательство. В обоих случаях (i) и (ii) общее (generic) минимальное уравнение для $x \in A$ ([6], стр. 180) таково:

$$x^2 - t(x)x + n(x)1 = 0. \tag{50}$$

Кроме того, $A = F1 + M$, где $M = \{x_0 | x_0 \in A, t(x_0) = 0\}$. В случае (i) мы имеем $M = Fu_0$, где $u_0^2 = \beta 1 = -n(u_0)1$, β неквадратична на F, в то время как в случае (ii) квадратичная форма f, определенная на M посредством

$$x_0^2 = f(x_0)1 = -n(x_0)1 \qquad \text{для всех} \quad x_0 \in M \tag{51}$$

невырождена. Теперь из (50) и (34) с $n = 4$ вытекает

$$T_3(x_0) = T(x_0)n(x_0) \qquad \text{для всех} \quad x_0 \in M \tag{52}$$

и

$$N(x_0) = T_2(x_0)n(x_0) - [n(x_0)]^2 \qquad \text{для всех} \quad x_0 \in M. \tag{53}$$

Полагая $j = 2$ в (15), мы имеем

$$3T_3(x_0) = T(x_0)T_2(x_0) + 3T(x_0)n(x_0).$$

Поэтому из (52) вытекает $T(x_0)T_2(x_0) = 0$ для всех $x_0 \in M$, где

$$2T_2(x_0) = [T(x_0)]^2 + 4n(x_0) \qquad \text{для всех} \quad x_0 \in M \tag{54}$$

по (18). Существует достаточно много несовпадающих элементов в F, чтобы мы сделали вывод, что мы имеем либо

$$T(x_0) = 0 \qquad \text{для всех} \quad x_0 \in M, \tag{55}$$

либо $T_2(x_0) = 0$ для всех $x_0 \in M$, так что

$$-n(x_0) = \left[\frac{1}{2}T(x_0)\right]^2 \qquad \text{для всех} \quad x_0 \in M \tag{56}$$

по (54). Предположим, что (56) верно. В случае (i) мы имеем $\beta = -n(u_0)$, квадрат на F, что является противоречием. В случае (ii) мы имеем невырожденную квадратичную форму $f(x_0) = -n(x_0)$, квадрат линейной формы на M, из чего вытекает, что M одномерна, противоречие. Мы доказали (55). Тогда

$$T_2(x_0) = 2n(x_0), \qquad t_3(x_0) = 0, \qquad N(x_0) = [n(x_0)]^2$$

согласно (54), (52) и (53). Для любого $x = \alpha 1 + x_0 (\alpha \in F, x_0 \in M)$ мы имеем

$$N(x) = N(\alpha 1 + x_0) = \sum_{i=0}^{4} \alpha^{4-i} T_i(x_0) = [\alpha^2 + n(x_0)]^2 = [n(x)]^2,$$

что и требовалось.

Лемма 2. *Пусть F имеет характеристику $\neq 2, 3$. Невырожденная квадраформа, допускающая композицию, не может быть определена на (i) кубическом поле A над F, (ii) центральной простой ассоциативной алгебре A степени 3 над F.*

Доказательство. В случае (ii) мы можем положить, что F алгебраически замкнуто, так как невырожденная квадраформа, допускающая композицию, существует на A только, если существует такая форма на A_K, где K – алгебраическое замыкание F. Поэтому в (ii) мы можем считать, что A – алгебра всех матриц 3×3 над алгебраически замкнутым полем F. В обоих случаях (i) и (ii) общее (generic) минимальное уравнение для $x \in A$ таково:

$$x^3 - t(x)x^2 + q(x)x - n(x)1 = 0, \tag{57}$$

где $t(x)$ (соответственно, $q(x)$, $n(x)$) – линейная (соответственно, квадратичная, кубическая) форма на A, $n(x)$ – общая норма. Также $A = F1 + M$, где M состоит из всех x_0, удовлетворяющих $t(x_0) = 0$. В случае (i) M содержит u_0 (удовлетворяющее $u_0^3 = -q(u_0)u_0 + n(u_0)1$) такое, что

$$\lambda^3 + q(u_0)\lambda - n(u_0) \qquad \text{неприводимо}, \tag{58}$$

в то время, как в случае (ii) $t(x)$ – обычный след и $n(x) = det\, x$ – детерминант 3×3 матрицы x. Теперь из (34) с $n = 4$ и (57) вытекает

$$[T_2(x_0) - q(x_0)]x_0^2 + [T(x_0)q(x_0) + n(x_0) - T_3(x_0)]x_0 + [N(x_0) - T(x_0)n(x_0)]1 = 0$$

для всех $x_0 \in M$, так что в обоих случаях (i) и (ii) мы имеем

$$T_2(x_0) = q(x_0), \qquad T_3(x_0) = T(x_0) + n(x_0), \qquad N(x_0) = T(x_0)n(x_0) \tag{59}$$

для всех $x_0 \in M$. Теперь из (12) следует

$$3(x^2x, x, x, 1) + (x, x, x, x^2) = T(x^2)(x, x, x, 1)$$

для всех $x \in A$, так что из (57), (7), (18) и (59) вытекает

$$q(x_0)[[T(x_0)^3] + T(x_0)q(x_0) - n(x_0)] = 0 \qquad \text{для всех} \quad x_0 \in M. \tag{60}$$

В случае (i) мы имеем либо

$$q(u_0) = 0, \tag{61}$$

либо

$$n(u_0) = [T(u_0)]^3 + T(u_0)q(u_0). \tag{62}$$

Если (62) верно, то $\lambda^3 + q(u_0)\lambda - n(u_0)\lambda$ имеет своим делителем $\lambda - T(u_0)$ в противоречии с (58). Если (61) верно, то $u_0^3 = n(u_0)1$ так что $T(u_0^3) = 4n(u_0)$, тогда как $T(u_0^3) = [T(u_0)]^3 + 3n(u_0)$ согласно (17), (15) с $j = 2$, (18) и (59). Следовательно, $n(u_0) = [T(u_0)]^3$, куб на F, так что $\lambda^3 - n(u_0)$ приводимо,что противоречит (58) и исключает (i).

В случае (ii) алгебраически замкнутое поле F содержит бесконечно много элементов, так что из (60) следует, что либо $q(x_0) = 0$ для всех $x_0 \in M$, либо

$$n(x_0) = [T(x_0)]^3 + T(x_0)q(x_0) \qquad \text{для всех} \quad x_0 \in M. \tag{63}$$

Однако, легко найти 3×3 матрицы $x_0 \in M$ такие, что $q(x_0) \neq 0$ (например, если элементы обычного матричного базиса обозначить как e_{ij}, то матрица $x_0 = e_{12} + e_{21}$ будет удовлетворять этому). Поэтому (63) верно и длялюбого $x = \alpha 1 + x_0 \in A$ ($T(x) = 3\alpha$), мы имеем

$$det\, x = det(\alpha 1 = x_0) = n(\alpha 1 + x_0) = \alpha^3 + \alpha^2 t(x_0) + \alpha q(x_0) + n(x_0) =$$
$$[\alpha + T(x_0)][\alpha^2 - \alpha T(x_0) + [T(x_0)]^2 + q(x_0)],$$

так что детерминант $det\, x$ имеет линейным делителем $t(x)/3 + T(x_0) = T(x) - t(x)$, противоречие. Это завершает доказательство Леммы 2 и Теоремы 5.

Замечание. Как в [7] и [9], легко видеть, что даже без допущения в Теореме 5, что алгебра A содержит 1, возможные размерности A есть $1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10$ или 16.

Литература

1. A. A. Albert. Quadratic forms permitting composition. Ann. of Math. **43** (1942), 161-177.

2. A. A. Albert. Power-associative rings. Trans. Amer. Math. Soc. **64** (1948), 552-593.

3. A. A. Albert. A theory of trace-admissible algebras. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., **35** (1949), 317-322.

4. W. Feller. An Introduction to Probability Theory and its Applications (2nd edition). Wiley, New York, 1959.

5. N. Jacobson. Composition algebras and their automorphisms. Rend. Circ. Mat. Palermo **7** (1958), 55-80.

6. N. Jacobson. Some groups of linear transformations defined by Jordan algebras, I. J. reine angew. Math. **201** (1959), 178-195.

7. I. Kaplansky. Infinite-dimensional quadratic forms permitting composition. Proc. Amer. Math. Soc. **4** (1953), 956-960.

8. R. D. Schafer. Noncommutative Jordan algebras of characteristic 0. Proc. Amer. Math. Soc. **6** (1955), 472-475.

9. R. D. Schafer. On cubic forms permitting composition. Proc. Amer. Math. Soc. **10** (1959), 917-925.

10. R. D. Schafer. Cubic forms permitting a new type of composition. J. Math. Mech. **10** (1961), 159-174.

11. R. D. Schafer. "An Introduction to Nonassociative Algebras" (multilith), Oklahoma State University, 1961.

Массачусеттский Технологический институт,
Кембридж, Массачусеттс

ИНФОРМАЦИЯ ДЛЯ АВТОРОВ

В журнале печатаются оригинальные и обзорные статьи российских и зарубежных авторов по тематике: а) Гиперкомплексные числа, б) Геометрии, связанные с гиперкомплексными числами, в) Финслеровы пространства, г) Фракталы, основанные на гиперкомплексных числах, д) Применение гиперкомплексных чисел в физике.

Редколлегия информирует авторов статей о принятых ею правилах:

1. Язык статей – русский или английский.

2. Объем статьи не должен превышать 1,5 печ. листа (36 усл. маш. стр.)

3. Автор предоставляет в редакцию файл статьи в формате LaTeX (версия LaTeX2$_\varepsilon$, для набора формул используется $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-LaTeX) и файл статьи в формате PostScript или PDF.

4. Принимаемые форматы файлов рисунков: для растровых TIFF, GIF, PNG (должна быть возможна инкапсуляция в EPS); для векторных EPS, PDF, TEX. Каждый рисунок должен быть помещен в отдельный файл. Цветовая гамма – черно-белая или серая (8 бит).

5. Текст статьи должен включать аннотацию (в ней не должно быть громоздких формул и ссылок). Глубина разбивки текста не должна превышать трех уровней.

6. Название статьи, аннотация, имена авторов и их организации предоставляются на русском и английском языках.

7. Автор указывает e-mail и телефон для оперативной связи. Возвращение статьи автору на доработку не означает, что она принята к опубликованию.

8. Отклонение от данных правил уменьшает вероятность опубликования статьи.

Гиперкомплексные числа
в геометрии и физике

Научный журнал. Основан в 2003 г.

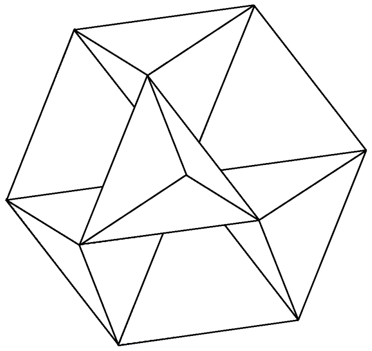
2004, № 1 (1)

Главный редактор Павлов Д. Г.
Ответственный секретарь Элиович А. А.

www.hypercomplex.ru
hypercomplex@mail.ru

Свидетельство о регистрации
ПИ № 77-15331 от 30 апреля 2003 г.

ISSN 1814-3946



Типографские данные