



## ABOUT VIABLE EINSTEIN MODELS

Petre Stavre<sup>1</sup>, Adrian Lupu<sup>2</sup>

<sup>1</sup> University of Craiova, Craiova, Romania

<sup>2</sup> "Decebal" Technical High School, Drobeta Turnu Severin, Romania

adilupucv@yahoo.fr

In this paper we will consider  $C^\infty$  differentiable,  $n$ -dimensional, pseudo-Riemannian manifolds  $(M, g)$  where  $M$ , as a topological space, is a paracompact one (and, of course,  $M$  is a connected, Hausdorff one). In such conditions there are riemannian metrics on  $M$ . For the existence of the pseudo-Riemannian metrics, especially the metrics of Lorentz type, which are necessary in the generalised theory of relativity, we need supplementary conditions, as the existence of a vector field  $V \neq 0$  on  $M$  (which is equivalent to the condition that a certain topological invariant to be 0, obtained in [1]).

Let us mention:

**Definition 1.** The triplet  $(M, g, \nabla) \stackrel{def}{=} L_\nabla$ , where  $g$  is a Lorentz metric and  $\nabla$  is the associated Levi-Civita connexion, will be called Einstein model of the generalised theory of relativity.

Let us consider an isotropic, one-dimensional distribution

$$\underset{(1)}{D} : x \rightarrow \underset{(0)}{D_x} \subset T_x M, (x \in M), \text{ i.e.}$$

$$g(V, V) = 0, \quad V \neq 0, \quad V \in \underset{(1)}{D}^{(0)}$$

**Definition 2.** A model  $(M, g, D) \stackrel{def}{=} L_D$ , where  $g$  is a pseudo-Riemannian metric (especially where  $g$  is a Lorentz metric) will be called generalised model of relativistic type.

In this definition  $D$  is a linear connection,  $D \neq \nabla$  (the global existence of the linear connections on  $M$  is verified in the above conditions for  $M$ ). If we have the Lorentz metric  $g$ , we will formulate the problem of the generalised Einstein theory of relativity with model  $L_D$ . Obviously, complicated problems occur. But even Einstein, in the last part of his life, accepted such kind of model, when the linear connection  $D$  has the torsion  $T \neq 0$ , but with a special case [2].

**Definition 3.** We will say that two models  $(M, g, D_1) \stackrel{def}{=} L_{D_1}$  and  $(M, g, D_2) \stackrel{def}{=} L_{D_2}$  are mutually viable ones if  $D_1, D_2$  preserve the distributions  $\underset{(1)}{D}^{(0)}$



at the parallel transport (related to  $D_1, D_2$ ). We will write  $L_{D_1} \stackrel{g}{\sim} L_{D_2}$

We have a particular case:

**Theorem 1.**  $(M, g, D) \stackrel{def}{=} L_D$  is an Einstein viable model if  $L_D \stackrel{g}{\sim} L_{\nabla}$ .

The viability condition is an essential one because the isotropy of the distribution  
(0)  
 $D$  must be preserved at the parallel transport.

(1)  
In [3] P. Stavre elaborates a general theory of the  $g$ -conjugated models (see also[4]). Using this theory the authors of this paper will obtain:

**Theorem 2.** The relation  $\ll \stackrel{g}{\sim} \gg$  on the set of the models  $\{(M, g, D)\} \stackrel{def}{=} \{L_D\}$  is not an equivalence one.

**Theorem 3.** A model  $(M, g, D) = L_D$  is an Einstein viable one if and only if the relation  $\ll \stackrel{g}{\sim} \gg$  is an equivalence one .

**Theorem 4.** The special model elaborated by Einstein  $(M, g, D) = L_D$  is an Einstein viable one.

The authors will obtain Einstein viable models, which will be more general than the Einstein model  $(M, g, D) = L_D$ .

The authors will obtain relations between the curvature tensors, as well as between the Ricci tensors, both for the Einstein model  $L_D$  and every other Einstein viable model. We will also study the Einstein's equations.

## References

- [1] Steenrod N. Topology of fibre bundle, Princeton Univ., 1951.
- [2] Einstein A. The Meaning of Relativity. Fifth edition. Princeton University Press, 1955.
- [3] Stavre P. Fibrat vectoriale. Aplicatii la modele Einstein. Lagrange conjugate. Vol. III, Ed. Universitatii, Craiova, 2006.
- [4] Miron R. Sur les espaces à connexions conjugués au sens de Norden. Ann. Univ. Iassy. 1963.



# THE FINSLER GEOMETRY INDUCED BY SURFACE PHENOMENA ON INTERPHASE BOUNDARY WITH AMPHIPHILIC MOLECULAR LAYER

V. Balan<sup>1</sup>, H.V. Grushevskaya<sup>2</sup>, N.G. Krylova<sup>2</sup>, A. Oana<sup>3</sup>

<sup>1</sup> *University Politehnica of Bucharest, Bucharest, Romania*

<sup>2</sup> *Belarusian State University, Minsk, Belarus*

<sup>3</sup> *University Transilvania of Brasov, Romania*

vladimir.balan@upb.ro, grushevskaja@bsu.by, nina-kr@tut.by, alexandruo@gmail.com

The talk extensively develops the mathematical background provided by a Finsler-type structure associated to the interactions within a amphiphilic molecular monolayer (monolayer), in which the motion of particles is approximated by geodesics of the geometric structure.

The three-dimensional Finsler metric provides a specific class of objects which naturally relate to the 2-dimensional effects from the electrocapillary surface physical phenomena for the monolayer.

Such objects are the Ricci curvature  $R_c$  and the Berwald curvature  $B_c$  which depend on the compression speed. It is shown that  $R_c$  is not an invariant of the monolayer, which leads to its complex dependence on the monolayer parameters. On the contrary, for very small speeds,  $B_c$  vanishes, and is null as well outside certain domains of anomaly, for larger speeds of compression. Hence we conclude that the monolayer is flat — in the framework of Finsler geometry — and hence the particles which move within it exhibit acceleration. It is assumed that the domains of anomaly correspond to phase transition and that  $B_c$  represents the second derivative of the compression isotherm  $\pi - S$ . It is shown that, in spite of the fact that the manifold of Finsler indicatrices seems to be large, still there exist only three types of indicatrices for three types of dependence of the Berwald curvature in terms of the tangent vector. These types can be identified by their different projections on the spatial plane and on space-time plane. For small speeds — when  $B_c$  is identically zero — the indicatrix tends to the one of the pseudo-Euclidean Minkowski space for rather large components of the reference point. The indicatrices which exhibit anomalies only in the spatial plane are characterized by having a singularity of  $B_c$ . The third type of indicatrices have two singularities for  $B_c$  which corresponds to anomalous behavior of the indicatrix both in the space and in the space-time planes.

There are determined the Cartan tensor and the nonlinear connection, which provide means to estimate how far is the Finsler model from the pseudo-Euclidean one and to construct Finsler adapted frames for the module of sections of the tangent bundle. Simulations illustrate this inter-relation for several classes of structure formation — which depend on compression speed and characteristics of the double electrical layer.



## References

- [1] Garas'ko G.I. Basics of Finsler Geometry for Physicists. Tetru, Moscow, 2009.
- [2] Grushevskaya H.V., Krylova N.G. Effects of Finsler geometry in physics surface phenomena: case of monolayer systems. // Hypercomplex Numbers in Geometry and Physics, 1 (15), vol. 8, pp. 128–146, 2011.
- [3] Grushevskaya H.V., Krylova N.G. A Finsler geometrization of interactions at structure formation in Langmuir – Blodgett monolayers. // Materials of 7th Int. Conf. on Non-Euclidean Geometry and its Applications, Cluj-Napoca, Romania, 5-9 July 2010. Babes-Bolyai University, Romania, p. 29, 2010.
- [4] Hrushevsky V.V., Krylova H.V. Thermodynamics of phase states in Langmuir–Blodgett monolayers. In: Low-dimensional systems-2. No. 4. Eds. S.A. Maskevich et al. Grodno State University, Grodno, 2005, pp. 30-36.
- [5] Matsumoto M., Shimada H. On Finsler spaces with 1-form metric. II: Berwald – Moor's metric  $L = (y^1 y^2 \dots y^n)^{1/n}$ . // Tensor, vol. 32, no. 2, pp. 275-278, 1978.
- [6] Rashevski P. Polymetric geometry. In: Proceedings of seminar on vector and tensor analysis with its applications into geometry and physics. Vol. 5. Ed. V.F. Kagan. State publishing company of technical and theoretical literature, Moscow, Leningrad, pp. 21-147, 1941.
- [7] Rund H. Theory of curvature in Finsler spaces. Coll. Topologie Strasbourg, no. 4, 1951. (La Bibliotheque Nationale et Universitaire de Strasbourg, 1952); Rund H. Eine Kr.ummungstheorie der Finslerschen R.aume. // Math. Ann. Vol. 125, pp. 1-18, 1952.
- [8] Rund H. Differential Geometry of Finsler Spaces. Science, Moscow, 1981.



# SPECTRAL THEORY AND GENERALIZED CONVEXITY ADVANCES IN THE $M$ -ROOT FRAMEWORK

Vladimir Balan

*University Politehnica of Bucharest, Bucharest, Romania*  
vladimir.balan@upb.ro

The talk develops the extension of the already elaborated spectral theory of the Finsler and Cartan symmetric tensors of the Berwald-Moór framework, to the Chernov and Bogoslovsky structures, in view of the recent advances regarding  $E$ -determinants and induced tensor norms. A comparison between the spectral properties of the three metrics is provided. As well, for  $m$ -th root metrics, the generalized  $\eta$ -convexity of the indicatrix is characterized.

## References

- [1] Balan V. Spectral data of Cartan and metric tensors in Berwald-Moor Finsler spaces. // Rev. Roum. Math. Pures Appl., to appear.
- [2] Balan V. Spectra of symmetric tensors and  $m$ -root Finsler models. // Linear Algebra and its Applications, 1, Vol. 436, pp. 152-162, 2012.
- [3] Balan V., Perminov N. Applications of resultants in the spectral  $m$ -root framework. // Appl. Sci. (APPS), Vol. 12, pp. 20–29, 2010.
- [4] Bejenaru A., Generalized convex functionals. // Balkan J. Geom. Appl., 1, Vol. 16, pp. 12-26, 2011.
- [5] Bejenaru A., Udriște C.  $\eta$ -monotonicity of vector fields and  $\eta$ -convexity of functions. // Selected Topics in System Science and Simulation in Engineering, The 9th International Conference on system science and simulation in engineering (ICOSSSE'10) - Iwate, Japan, October 4-6, pp. 50-58, 2010.
- [6] Coppi R., Bolasco S. (eds.) Multiway Data Analysis. Amsterdam, Elsevier, 1989.
- [7] Hu S., Huang Z.-H., Ling C., Qi L.  $E$ -determinants of Tensors. // arXiv:1109.0348v3 [math.NA] 2 Sep 2011.
- [8] de Lathauwer L. First-order perturbation analysis of the best rank- $(R_1; R_2; R_3)$  approximation in multilinear algebra. // J. Chemometrics, Vol. 18, pp. 2-11, 2004.
- [9] L. de Lathauwer, de Moor B., Vandewalle J. A multilinear singular value decomposition. // SIAM J. Matrix Anal. Appl., Vol. 21, pp. 1253-1278, 2000.
- [10] Mititelu St. Generalized Convexities. Bucharest, Fair Partners, 2011.



- [11] Pavlov D.G. Four-dimensional time. // Hypercomplex Numbers in Geometry and Physics, Vol. 1, pp. 31-39, 2004.
- [12] Pavlov D.G. Generalization of scalar product axioms. // Hypercomplex Numbers in Geometry and Physics, Vol. 1, pp. 5-18, 2004.
- [13] Qi L. Eigenvalues of a real supersymmetric tensor. // Journal of Symbolic Computation, Vol. 40, pp. 1302-1324, 2005.
- [14] Qi L. Rank and eigenvalues of a supersymmetric tensor, the multivariate homogeneous polynomial and the algebraic hypersurface it defines. // Jour. Symb. Comp., Vol. 41, pp. 1309-1327, 2006.
- [15] Qi L. The Spectral Theory of Tensors (Rough Version).// [arxiv.org/pdf/1201.3424](http://arxiv.org/pdf/1201.3424), 17 Jan 2012.
- [16] L. Qi L., Sun W., Wang Y. Numerical multilinear algebra and its applications. // Front. Math. China, 4, Vol. 2, pp. 501-526, 2007.
- [17] Udriște C. Convex functions and optimization methods on Riemannian manifolds. Mathematics and Its Applications 297, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London, 1994.



# APPLICATION OF THE ISOTOPIC FIELD-CHARGE ASSUMPTION TO THE ELECTROMAGNETIC INTERACTION

György Darvas

*Symmetrion, Budapest, Hungary*  
darvasg@iif.hu

I presented the isotopic field-charge spin theory [3],[7] and its possible applications to the description of gravitational interaction at FERT 2011 [5]. It was shown that the presence of a kinetic field with a velocity dependent metric and isotopic field-charges (namely in that case distinguished gravitational and inertial masses) involve a (velocity arrowed) direction-dependent, that means, Finsler geometry [6, 4].

This paper deals with the application of the isotopic field-charge spin theory to the electromagnetic interaction. First there is derived a modified Dirac equation in the presence of a velocity dependent gauge field and isotopic field charges (namely Coulomb and Lorentz type electric charges, as well as gravitational and inertial masses). This equation is compared with the classical Dirac equation and there are discussed the consequences [1, 13, 11, 10].

There is shown that since the presence of isotopic field-charges would distort the Lorentz invariance of the equation, there is a transformation, which restores the invariance, in accordance with the conservation of the isotopic field-charge spin [2]. It is based on the determination of the  $F^{\mu\nu}$  field tensor adapted to the above conditions.

The presence of the kinetic gauge field makes impossible to assume a flat electromagnetic interaction field. The affine connection field, which determines the curvature, is derived from the covariant derivative of the kinetic (velocity dependent) gauge field.

## References

- [1] Brinzei N., Siparov S. Equations of electromagnetism in some special anisotropic spaces, arXiv:0812.1513v1 [gr-qc], 2008.
- [2] Darvas G. Conserved Noether currents, Utiyama's theory of invariant variation, and velocity dependence in local gauge invariance, Concepts of Physics, VI, 1, c. 3-16, 2009.
- [3] Darvas G. The Isotopic Field Charge Spin Assumption, International Journal of Theoretical Physics, 50, 10, pp. 2961-2991, 2011.  
DOI: 10.1007/s10773-011-0796-9



<http://www.springerlink.com/content/g28q43v2112721r1>,  
<http://www.springerlink.com/openurl.asp?genre=article&id=doi:10.1007/s10773-011-0796-9>.

- [4] Darvas G. GTR and the Isotopic Field Charge Spin Assumption, paper presented to the Physical Interpretations of Relativity Theory -11 conference, held in Moscow, 4-7 July, 2011.
- [5] Darvas G. (under publication) Finsler geometry in GTR in the presence of a velocity dependent gauge field, paper presented at the FERT 2011, Brasov, 31 August)
- [6] Darvas G. Isotopic Field Charge Spin Conservation in General Relativity Theory, pp. 53-65, in: eds.: M.C. Duffy, V.O. Gladyshev, A.N. Morozov, P. Rowlands Physical Interpretations of Relativity Theory, Proceedings of the International Scientific Meeting PIRT-2011, Moscow, 4-7 July, Moscow, Liverpool, Sunderland: Bauman Moscow State Technical University, 347 p., 2012.
- [7] Darvas G. Another Version of Facts. On Physical Interactions, 2012 (coming).
- [8] Dirac P.A.M. The quantum gravity of the electron, Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences 117 (778): 610-624, doi:10.1098/rspa.1928.0023, 1928.
- [9] Mills R. Gauge fields, American Journal of Physics, 57 (6) June, pp. 493-507, 1989.
- [10] Pons J.M., Salisbury, D.C., and Shepley, L.C. Gauge transformations in Einstein-Yang-Mills theories, (submitted to J. Math. Phys), arXiv:gr-qc/9912086 v1, 1999.
- [11] Siparov S. Introduction to the Anisotropic Geometrodynamics, Singapore: World Scientific, 2012.
- [12] van Hooft Gerard 't Introduction to General Relativity, Princeton: Rinton Press Inc, 2002.
- [13] Voicu N. Equations of electromagnetism in some special anisotropic spaces, Part 2. // Hypercomplex Numbers in Geometry and Physics, 7, 2 (14), pp. 61-72, 2010.





# DIFFERENTIAL GEOMETRY OF FINSLER-SPACETIME TANGENT BUNDLE

**Howard E. Brandt**

*U.S. Army Research Laboratory, Adelphi, Maryland, USA*

howard.e.brandt.civ@mail.mil

I draw on my earlier work to review various aspects of the differential geometry of a Finsler-spacetime tangent bundle, all based on the possible existence of a physical upper bound on proper acceleration. The appropriate bundle coordinates are the spacetime coordinates of the measuring device in the base manifold and the four-velocity coordinates of the measuring device in the tangent space manifold [1]. The Levi-Civita connection coefficients of the spacetime tangent bundle reduce to the form given by Yano and Davies for a generic tangent bundle of a Finsler manifold [2, 3]. The components of the connection in the spacetime-spacetime-fiber sector have a form consistent with Cartan's theory of Finsler space, provided that the gauge curvature field vanishes. A vanishing gauge curvature field is equivalent to the condition that the four-velocity of the measuring device be a parallel vector field. The latter is equivalent to Cartan's condition that there be absolute parallelism of the line elements, and that the tangent space coordinates form a parallel vector field [3]. This is consistent with Deicke, who proved that a Finsler space cannot be represented as a nonholonomic subspace of a Riemannian space unless the latter condition is imposed [3], [4]. Deicke subsequently proved that a Finsler space can always be represented as a nonholonomic subspace of a space with torsion [3], [5], [6]. If bundle torsion is included in the Finsler-spacetime tangent bundle, then the bundle connection becomes compatible with Cartan's connections for Finsler space if a component of the contorsion is made to cancel the contribution of the gauge curvature field to the connection in the spacetime-spacetime-fiber sector [2]. The spacetime tangent bundle of a Finsler spacetime is almost complex [4]. Also provided that the gauge curvature field is vanishing, then the Finsler-spacetime tangent bundle is Kaehlerian with vanishing covariant derivative of the almost complex structure [7]. The vanishing of the gauge curvature field is also the condition that the Finsler-spacetime tangent bundle have a vanishing Nijenhuis tensor (torsion of the almost complex structure) in the anholonomic frame adapted to the spacetime connection, and that it be complex [8]. If bundle torsion satisfying prescribed conditions is introduced, the Finsler-spacetime tangent bundle can be made to remain almost complex, and the covariant derivative of the almost complex structure can be made to remain vanishing, without the need to impose the relatively restrictive condition of vanishing gauge curvature field [9], [10]. However, the Finsler-spacetime tangent bundle cannot be complex unless the gauge curvature field is vanishing.



## References

- [1] Brandt H.E. Physical Finsler Coordinates in spacetime. Paper presented at the VIIIth International Conference "Finsler Extension of Relativity Theory, 29 August - 4 September 2011 at Transylvania University of Brasov, in Brasov, Romania.
- [2] Brandt H.E. // *Found. Phys. Lett.* 5, pp. 221-248, 1992.
- [3] Yano K., Davies E.T. // *Rend. Circ. Mat. Palermo* 12, 211, 1963.
- [4] Deicke A. // *Arch. Math.* 4, 234, 1953.
- [5] Deicke A. // *J. London Math. Soc.* 30, 53, 1955.
- [6] Yano K., Davies E.T. *Rend. Circ mat. Palermo* (2) 3, 409 (1955).
- [7] Brandt H.E. // *Found. Phys. Lett* 5, pp. 315-336, 1992.
- [8] Brandt H.E. // *Found. Phys. Lett* 6, pp. 245-255, 1993.
- [9] Brandt H.E. // *Found. Phys. Lett* 6, pp. 339-369, 1993.
- [10] Brandt H.E. // *Found. Phys. Lett* 7, pp. 297-301, 1994.



# NEW CANDIDATES FOR A HERMITIAN APPROACH OF GRAVITY

Gheorghe Munteanu, Nicoleta Aldea

*University Transilvania of Brasov, Brasov, Romania*  
gh.munteanu@unitbv.ro, nicoleta.aldea@lycos.com

Present paper starts from the idea more clearly outlined in Relativistic Quantum Theory that many of the operators introduced here, are all Hermitian and therefore, the geometry of curved space where these operators acting should be equipped with a Hermitian metric, or their generalizations as appear in superstring theories. On the other hand, such Lagrangians generally work on the tangent space of space-time universe which can be complexified.

One such Hermitian metric appropriate for weakly gravitational fields was introduced in a previous paper, in the present work we emphasize some other properties of complex Finsler metric for weakly gravity. Namely, the circumstances under which the weakly gravitational metric is Berwald or generalized Berwald are given. Also, we find the complex Finsler metrics which are projectively related to this metric. Moreover, if the gravitational field  $\Phi$  depends only on the position, we can deform the weakly gravitational Hermitian metric  $F$  to a complex Randers metric  $\tilde{F} = F + |\beta|$  on  $T'M$ . We find the conditions when  $\tilde{F}$  and  $F$  are projectively related and when  $\tilde{F}$  is a complex Berwald metric. All these theoretical results are avouched by an interesting example.

Another distinguished candidate for gravity is, so called, the Hermitian Schwarzschild metric. In Eddinton coordinates, a bit changed, we can get the hyperbolic alternative for the isotopic and Hermitian Schwarzschild metric of  $(-, +, -, +)$  signature. Some geometric problems concerning the complex Finsler spaces with Hermitian Schwarzschild metric are studied.

Finally, we reformulate the Klein-Gordon equations on  $T'M$ , in terms of Quantum fields theory on a curved space. Some particular solutions of the Klein-Gordon equations corresponding to the weakly gravitational metric and to the Hermitian Schwarzschild metric are found.



# A SURVEY OF COMPLEX DOUGLAS SPACES

**Nicoleta Aldea, Gheorghe Munteanu**

*University Transilvania of Brasov, Brasov, Romania*

nicoleta.aldea@lycos.com, gh.munteanu@unitbv.ro

In this paper we make a survey of the projective curvature invariants of Douglas type and by means of these we give some generalizations for the notion of complex Berwald space. Various descriptions of the complex Douglas spaces are given in relation to other special classes of complex Finsler spaces. This study is made from the viewpoint of the equations of a geodesic curve. Complex Randers spaces offer examples of complex Douglas spaces.



# INTERNAL ENERGY CHANGES CAN VARY GR GEODESIC CURVES.

**I.E. Bulyzhenkov**

*Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudny, Russia*  
*P.N. Lebedev Physical Institute, Moscow, Russia*  
ibw@sci.lebedev.ru, ibphys@gmail.com

The relativistic free fall of a real thermodynamical body differs from the Einstein-Grossmann geodesic motion of the idealized point mass because part of body's gravimechanical energy can be transformed into internal energy and heat. The Keplerian cyclic motion in the Solar system corresponds to negligible generation of heat by slowly rotating planets. However, gravitational wave dissipation of accelerated masses is to be proportional to  $m^2$ . Therefore, the spiral motion of large massive stars can be accompanied by very intensive geodesic self-heating (up to nuclear fusion temperatures).

Being free from irreversible transformations of mechanical energies into heat, idealized point masses should always stay on initial cyclic trajectories and would never exhibit observed evolution options of real thermodynamical bodies. In other words, there would be no evolution of astrophysical systems in the absence of gravimechanical energy dissipation and heat power generation.

Heat production rate of massive accelerated bodies can be associated with paired emission-absorption of gravitational waves and this rate should correspond to EM wave production by accelerated electric charges. Paired gravitational waves have vanishing net radiation and keep total energy of an isolated thermodynamical system. By counting GR radiation input into star's thermodynamical energy one can find quantitative corrections to the GR geodesic motion and explain, for example, the pulsar PSR B1913+16 period decay without net losses of the binary system energy.

Internal energy changes of geodesic bodies should be counted by further developments of Einstein's General Relativity.



# HARMONIC AND BIHARMONIC MAPPINGS OF REAL FINSLER SPACES

N. Voicu

University Transilvania of Brasov, Romania  
nico.brinzei@unitbv.ro

Biharmonic mappings are a generalization of harmonic ones and they arise especially in continuum mechanics problems — linear elasticity theory, Stokes' flow.

In Riemannian geometry, *harmonic maps*  $f : M \rightarrow N$  between two Riemannian manifolds  $(M, g)$  and  $(N, h)$  are defined as critical points of the *energy functional*:

$$E_1(f) = \frac{1}{2} \int_M \|df\| d(\text{Vol}_M)$$

(where  $M$  is compact) and they are given by the harmonic equation:

$$\tau(f) := \text{trace}_g(\nabla df) = 0.$$

In particular:

- if  $N = \mathbb{R}$ , then  $\tau(f) = \text{div}(\text{grad}(f))$  is the Beltrami-Laplace operator of  $f$  and harmonic maps  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  are harmonic functions in the usual sense.
- if  $M = [a, b]$  is a real interval, then harmonic maps  $f : [a, b] \rightarrow N$  are geodesics of  $N$ .

The quantity  $\tau(f)$  is called the *tension* of  $f$ .

Biharmonic maps are defined as critical points of the bienergy functional

$$E_2(f) = \int_M \|\tau(f)\| d(\text{Vol}_M)$$

and, in Riemannian geometry, they are given by the so-called biharmonic equation:

$$\tau_2(f) := \text{trace}_g(\nabla^2 f) - \text{trace}_g R^N(df, \tau(f))df = 0,$$

where  $\nabla^2 f$  is the connection (or rough) Laplacian of  $f$  and  $R^N$  is the curvature of the Levi-Civita connection on  $N$ . Any harmonic map is a biharmonic one; the validity of the converse implication depends on the curvature  $R^N$ .

The extension of the notions of harmonic and biharmonic maps to Finsler spaces is made in a similar manner — but, obviously, the expressions of the tension  $\tau(f)$  and of the bitension  $\tau_2(f)$  become more complicated. The tension  $\tau(f)$  was found by Mo for mappings from Finsler to Riemann spaces and by Nishikawa for mappings between general Finsler spaces.



In the present paper, we find a simpler proof and a simpler expression than the existent ones for the tension  $\tau(f)$  of a mapping between two Finsler (or pseudo-Finsler) spaces. Also, we go further and find the biharmonic equation and the expression for the bitension of such a mapping. A special attention is paid to some particular low-dimensional cases.



# THE NULL BERWALD-MOOR METRIC AND THE NILPOTENT WAVEFUNCTION

**Peter Rowlands**

*University of Liverpool, Liverpool, UK*  
p.rowlands@liverpool.ac.

At the fundamental level, physics is concerned only with fermions or their interactions. Experimental evidence suggests that fermions are point-like singularities. So, at the fundamental level, physical space must incorporate a way of constructing singularities. Analysis of the Berry phase, spin  $1/2$ , *zitterbewegung*, and the  $\gamma$  algebra of the Dirac equation suggests that it requires two vector spaces, which are both commutative and dual to each other, but with one space requiring the rotation symmetry of its components to be broken. In quantum mechanics, they combine to produce a nilpotent wavefunction and a spinor structure, whose orthogonality relations generate an expression which has an exact analogy with a null Berwald-Moor metric. It appears that we can take the creation of a fermion singularity as arising from an ultimate distortion of space-time in which a region of zero space is created by combination with a second space-like structure, which is effectively a dual «antispace».





# О ФИНСЛЕРОВЫХ ГЕОМЕТРИЯХ С СИММЕТРИЧЕСКИМИ МЕТРИЧЕСКИМИ ФУНКЦИЯМИ И АНИЗОТРОПНЫХ ГРУППАХ

Н.М. Глазунов

*Национальный авиационный университет, Киев, Украина*  
glanm@yahoo.com

Пусть  $F(x, y)$  — метрическая функция (функция Финслера, норма Финслера), заданная на касательном расслоении гладкого дифференцируемого многообразия. Исследуются две геометрические задачи (I, II), задачи из теории алгебраических и проалгебраических групп (III), и их взаимосвязь (IV):

I. Семейство геометрий, порождаемое семейством метрических функций

$$F(x, y) = F(y) = (|y^1|^p + |y^2|^p + |y^3|^p + |y^4|^p)^{1/p},$$

действительное  $p \geq 1$ ,

II. Геометрия, порождаемая метрической функцией

$$F(x, y) = F(y) = (|y^1 y^2 y^3 y^4|)^{1/4}.$$

III. Анизотропные алгебраические группы и проалгебраические пополнения алгебраических групп.

IV. Действия групп на алгебраических и дифференцируемых многообразиях.

Семейство метрических функций задачи (I) является обобщением семейства метрических функций, возникшего в гипотезе Минковского о критическом определителе области  $|x|^p + |y|^p < 1$ ,  $p > 1$ , исследованной и доказанной в работе [1]. В частности, автором исследовались арифметические и геометрические свойства семейства метрических функций  $(|y^1|^p + |y^2|^p)^{1/p}$ , действительное  $p \geq 1$ . Ввиду этого в сообщении предполагается представить полученные в этом, и в направлениях II - IV результаты, а также обсудить подходы к геометрии Вселенной в большом и малом масштабах [2].

## Литература

- [1] Glazunov N.M., Golovanov A.S., Malyshev A.V. Proof of Minkowski hypothesis about critical determinant of  $|x|^p + |y|^p < 1$ ,  $p > 1$  domain. // Research in the number theory. Notes of scientific seminars of LOMI, Vol. 151, Leningrad, Nauka, pp. 40-53, 1986.



- [2] Yau S.T., Nadis S. The shape of the inner space. String theory and the geometry of the universe's hidden dimensions. New York, Basic Books, 355 p, 2010.
- [3] Glazunov N.M. Calabi-Yau manifolds, algebraic geometry and computer algebra methods (in press).



## ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ ПОЛИЧИСЛОВОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Д.Г. Павлов<sup>1</sup>, С.С. Кокарев<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> НИИ Гиперкомплексных систем в геометрии и физике, Фрязино, Россия

<sup>2</sup> Российский научно-образовательный центр "Логос", Ярославль, Россия

geom2004@mail.ru, logos-center@mail.ru

Доклад представляет собой небольшой обзор сведений по теории гладких функций поличисловой переменной  $P_n \rightarrow P_n$  и ее приложениям. На основе специальной классификации вырожденных (т.е. необратимых в обычном смысле) поличисел и теоремы об общем виде  $\mathbb{R}$ -линейного отображения  $P_n \rightarrow P_n$ , определяется понятие производной функции поличисловой переменной. Голломорфные функции поличисловой переменной выделяются среди класса дифференцируемых функций совокупностью условий (поличисловой аналог условий Коши-Римана), которые в изотропной системе координат имеют вид:  $(C^k \partial)f = 0$  ( $k = 1, \dots, n - 1$ ), где  $C$  — операция комплексного сопряжения в алгебре  $P_n$ .

Рассмотрены различные обобщенные классы голоморфности, которые определяются мономными дифференциальными уравнениями и классифицируются набором векторов неотрицательной целочисленной  $n$ -мерной решетки  $Z_n^+$ .

Рассмотрен вопрос о голоморфном и аналитическом продолжении гладких функций  $P_n \rightarrow P_n$ , заданных на подмногообразии  $P_n$ . Обсуждается поличисловая версия теоремы Коши и интегральной формулой Коши вместе с многомерным обобщением первой. На основе симметричной формы Бервальда-Моора развивается симметричный аналог исчисления внешних форм Картана (симметричное умножение, звезда Ходжа, дифференциал).

Рассмотрены трансформационные свойства производных скалярной функции поличисловой переменной и геометрических объектов, которые строятся из них. В частности, рассмотрены вещественные скаляры, из которых может строиться лагранжиан поличисловой теории поля. На основе алгебры опор строится конструкция соприкосновения, играющая важную роль в физической интерпретации поличисловой теории поля.

Выведены формулы для коэффициентов связности Леви-Чивиты, согласованной с формой Бервальда-Моора, а также формула для формы объема для  $n$ -корневых финслеровых метрик четной степени.

Рассмотрены некоторые деформационные аспекты гладких функций поличисловой переменной и показана вложимость любой  $\mathbb{R}$ -алгебры в пространство билинейных форм над  $P_n$ . В целом материал доклада может рассматриваться как предварительный набросок теории функций поличисловой переменной (ТФПП).



## ДВОЙНЫЕ ЧИСЛА В ОКРУЖЕНИИ ВЫСШИХ РАЗМЕРНОСТЕЙ

Морнев О.А.

*Институт теоретической и экспериментальной биофизики РАН, Пущино, Россия*  
mornev@mail.ru

Исследован механизм возникновения алгебры  $H_2$  гиперболических ( $\equiv$  двойных) чисел в рамках алгебры, порождаемой корнем  $n$ -ой степени  $r \equiv \sqrt[n]{I}$  из идемпотента  $I$  некоторой алгебры над полем  $\mathbb{R}$  действительных чисел (здесь  $n > 2$  — произвольное натуральное число).

В рассматриваемой ситуации алгебра  $H_2$ , имеющая ранг 2, появляется как подалгебра объемлющей циклической алгебры более высокого ранга; эта последняя алгебра генерируется степенями

$$r^0 \equiv I, \quad r^1 \equiv r, \quad r^2, \dots, r^{n-1}$$

корня  $r \equiv \sqrt[n]{I}$  и подчинена условию

$$r^0 + r^1 + r^2 + \dots + r^{n-1} \neq 0 \quad (1)$$

гарантирующему отличие рассматриваемой алгебры от известной алгебры круговых чисел. При этом двойная единица  $\rho$  ( $\rho^2 = I$ ) в  $H_2$  уже не является некоторым "бесструктурным" вектором, а определяется линейной комбинацией степеней  $r^k$  ( $0 \leq k \leq n-1$ ):

$$l\rho = \frac{1}{n} [2(r^0 + r^1 + r^2 + \dots + r^{n-1}) - nr^0] = \frac{1}{n} [2(r + r^2 + \dots + r^{n-1}) - (n-2)I] \quad (2)$$

Выражаясь образно, нетривиальная алгебраическая структура двойной единицы, выявляемая формулой (2), есть «отпечаток» размерностей объемлющей циклической алгебры, в которую встроена  $H_2$ . Подчеркнем, что оставаясь внутри гипотетической двумерной вселенной, подчинённой лишь алгебраическому формализму  $H_2$ , наблюдатель не может сделать никаких заключений об указанной структуре: последняя остаётся для него ненаблюдаемой. Для наблюдаемости этой структуры необходимо, чтобы в высших размерностях существовали объекты и события, описываемые формализмом циклической алгебры ранга, большего 2, и вносящие ненулевой возмущающий вклад в процессы, которые  $H_2$  пытается описать.

Рассмотренный механизм увеличения числа геометрических измерений вселенной (исходно моделируемой в данном простейшем случае алгеброй  $H_2$ )



является чисто алгебраическим: он основан на том факте, что при выполнении условия (1) циклическая алгебра, порождённая корнем  $r \equiv \sqrt[n]{I}$ , разлагается в сумму двух двусторонних идеалов. Этот способ, по-видимому, допускает обобщения на более реалистические пространственно-временные алгебры, вырожденным частным случаем которых является  $H_2$ , и принципиально отличается от широко используемого в физике геометрического способа «надстраивания» дополнительных размерностей, основанного на рассмотрении (локальных) прямых произведений подходяще подобранных пространств.



## МНОГОМЕСТНЫЕ ОПЕРАЦИИ НА МНОЖЕСТВЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ МАТРИЦ

А.М. Гальмак

Могилёвский государственный университет продовольствия, Могилёв, Белоруссия  
halm54@mail.ru

Для любого целого  $m \geq 1$  и любого  $r \in \{i, j, k\}$  выделим во множестве  $\mathbf{M}_{m \times n \times p}(P)$  всех пространственных матриц размера  $m \times n \times p$  над кольцом  $P$  подмножество  $\mathbf{M}^{(r)}(m, P)$  всех пространственных матриц, у которых число сечений ориентации  $(r)$  равно  $m$ .

Зафиксируем целое  $l \geq 2$ , подстановку  $\sigma \in S_m$ , и пусть  $P$  — ассоциативное кольцо. Если

$$A_1 = (a_{ijk})_1, \quad A_2 = (a_{ijk})_2, \dots, A_l = (a_{ijk})_l$$

такие пространственные матрицы из  $\mathbf{M}^{(i)}(m, P)$ , что число сечений ориентации  $(k)$  предыдущей пространственной матрицы равно числу сечений ориентации  $(j)$  последующей пространственной матрицы, то для любого  $s = 1, \dots, m$  определены произведения

$$(a_{sjk})_1 (a_{\sigma(s)jk}) \dots (a_{\sigma^{l-2}(s)jk})_{l-1} (a_{\sigma^{l-1}(s)jk})_l = U_s.$$

Полагая  $A = (a_{ijk}) \in \mathbf{M}^{(i)}(m, P)$ , где  $(a_{1jk}) = U_1, \dots, (a_{mjk}) = U_m$ , видим, что на  $\mathbf{M}^{(i)}(m, P)$  определена частичная  $l$ -арная операция

$$[A_1 A_2 \dots A_l]_{l, \sigma, m}^{(i)} = A = (a_{ijk}). \quad (1)$$

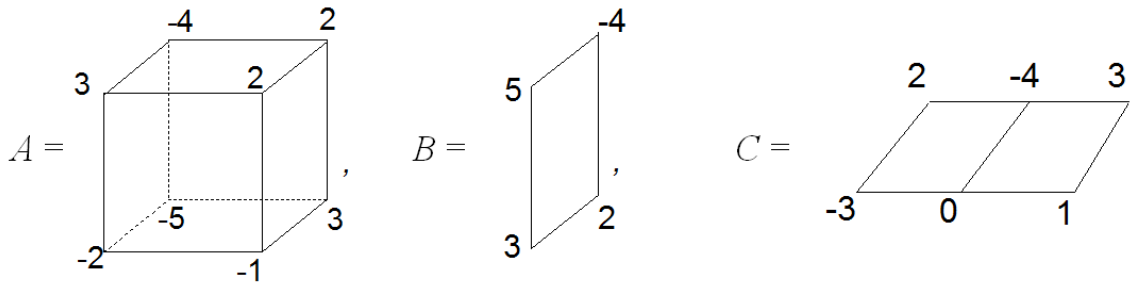
Таким образом, для любых целых  $p_0 \geq 1, \dots, p_l \geq 1$  и любых пространственных матриц

$$A_1 = (a_{ijk})_1 \in \mathbf{M}_{m \times p_0 \times p_1}(P), \quad A_2 = (a_{ijk})_2 \in \mathbf{M}_{m \times p_1 \times p_2}(P), \dots \\ \dots, A_{l-1} = (a_{ijk})_{l-1} \in \mathbf{M}_{m \times p_{l-2} \times p_{l-1}}(P), \quad A_l = (a_{ijk})_l \in \mathbf{M}_{m \times p_{l-1} \times p_l}(P)$$

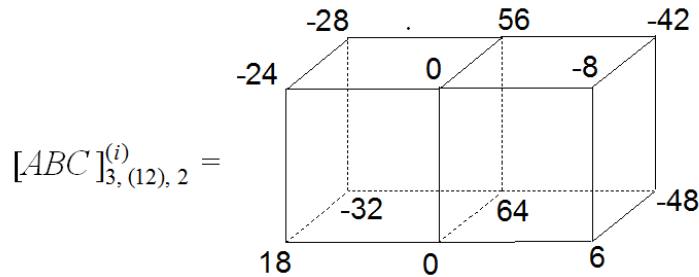
определена пространственная матрица (1) из  $\mathbf{M}_{m \times p_0 \times p_l}(P)$ . Все сечения ориентации  $(i)$  пространственной матрицы  $A$  являются матрицами размера  $p_0 \times p_l$ . На множестве  $\mathbf{M}_{m \times n \times n}(P)$  частичная  $l$ -арная операция  $[ ]_{l, \sigma, m}^{(i)}$  совпадает с  $l$ -арной операцией  $[ ]_{l, \sigma, m}^{(i)}$  из [1].

Аналогично определяются частичные  $l$ -арные операции  $[ ]_{l, \sigma, m}^{(j)}$  и  $[ ]_{l, \sigma, m}^{(k)}$  на множествах  $\mathbf{M}^{(j)}(m, P)$  и  $\mathbf{M}^{(k)}(m, P)$  соответственно.

**Пример.** Рассмотрим три пространственные матрицы:



из  $\mathbf{M}^{(i)}(2, Z)$ , размеров  $2 \times 2 \times 2$ ,  $2 \times 2 \times 1$  и  $2 \times 1 \times 3$  соответственно, для которых определена матрица  $[ABC]_{3, (12), 2}^{(i)}$ . Проведя соответствующие вычисления, можно убедиться, что



**Теорема 1.** Пусть  $P$  — ассоциативное кольцо,  $r \in \{i, j, k\}$ ,  $\sigma$  — подстановка из  $S_m$ , удовлетворяющая условию  $\sigma^l = \sigma$ ,  $A_1, A_2, \dots, A_{2l-1}$  — пространственные матрицы из  $\mathbf{M}^{(r)}(m, P)$ . Тогда, если для некоторого  $s = 0, 1, \dots, l-1$  определена пространственная матрица

$$[A_1 \dots A_s [A_{s+1} \dots A_{s+l}]_{l, \sigma, m}^{(r)} A_{s+l+1} \dots A_{2l-1}]_{l, \sigma, m}^{(r)} \in \mathbf{M}^{(r)}(m, P),$$

то для любого  $t = 0, 1, \dots, l-1$  определена пространственная матрица

$$[A_1 \dots A_t [A_{t+1} \dots A_{t+l}]_{l, \sigma, m}^{(r)} A_{t+l+1} \dots A_{2l-1}]_{l, \sigma, m}^{(r)} \in \mathbf{M}^{(r)}(m, P),$$

и верно равенство

$$\begin{aligned} & [A_1 \dots A_s [A_{s+1} \dots A_{s+l}]_{l, \sigma, m}^{(r)} A_{s+l+1} \dots A_{2l-1}]_{l, \sigma, m}^{(r)} = \\ & = [A_1 \dots A_t [A_{t+1} \dots A_{t+l}]_{l, \sigma, m}^{(r)} A_{t+l+1} \dots A_{2l-1}]_{l, \sigma, m}^{(r)}. \end{aligned}$$

Далее  $P$  — ассоциативное коммутативное кольцо с единицей. Выделим во множестве  $\mathbf{M}_{m \times n \times n}(P)$  множество  $\mathbf{GL}(P)_{m \times n \times n}^{(i)}$  всех пространственных матриц, у которых все сечения ориентации  $(i)$  являются обратимыми матрицами в  $\mathbf{M}_n(P)$ . Аналогично определяются множества  $\mathbf{GL}(P)_{n \times m \times n}^{(j)}$  и  $\mathbf{GL}(P)_{n \times n \times m}^{(k)}$ .



**Теорема 2.** Если подстановка  $\sigma \in S_m$  удовлетворяет условию  $\sigma^l = \sigma$ , то универсальные алгебры  $\langle \mathbf{GL}_{m \times n \times n}^{(i)}(P), [ ]_{l, \sigma, m}^{(i)} \rangle$ ,  $\langle \mathbf{GL}_{n \times m \times n}^{(j)}, [ ]_{l, \sigma, m}^{(j)} \rangle$  и  $\langle \mathbf{GL}_{n \times n \times m}^{(k)}, [ ]_{l, \sigma, m}^{(k)} \rangle$  являются неполуабелевыми  $l$ -арными группами, изоморфными  $l$ -арной группе  $\langle \mathbf{GL}_n(m, P), [ ]_{l, \sigma, m} \rangle$  всех  $m$ -компонентных вектор-матриц порядка  $n$  над  $P$ . Если  $\sigma$  — нетождественная подстановка, то в этих  $l$ -арных группах нет единиц.

Вектор-матрицы были определены в [2] и являются обобщением  $m$ -арных матриц Э. Поста [3].

## Литература

- [1] Гальмак А.М. Полиадические операции на множестве пространственных матриц // Веснік ВДУ ім. П.М. Машєрава. № 2 (62), с. 15–21, 2011.
- [2] Гальмак А.М. Вектор-матрицы // Веснік МДУ ім. А.А. Куляшова. №1 (37), серия В, с. 30–37, 2011.
- [3] Post E.L. Polyadic groups // Trans. Amer. Math. Soc. Vol. 48, № 2, pp. 208–350, 1940.





## ЛЕСТНИЧНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ НЕВЫРОЖДЕННЫХ ПОЛИЧИСЕЛ

Г.И. Гарасько

НИИ Гиперкомплексных систем в геометрии и физике, Фрязино, Россия  
gri9z@mail.ru, gri9z.wordpress.com

Предлагается обобщение экспоненциального представления [1] невырожденных поличисел, которое названо *лестничным представлением*. Так как в общем случае поличисел  $P_{k+2,m}$  построение лестничного представления довольно громоздко, оно проводится последовательно для поличисел  $H_4$ . Для других систем невырожденных поличисел лестничное представление строится аналогично.

Как известно [1], поличисло  $X \in H_4$  может быть представлено в экспоненциальном виде

$$X = |X| \cdot e^{\alpha j + \beta k + \gamma jk} \cdot 1, \quad (1)$$

где  $1, j, k, jk$  — «ортонормированный» базис, если все координаты  $\xi^i$  поличисла  $X$  в изотропном базисе  $e_1, e_2, e_3, e_4$  являются действительными положительными числами:  $\xi^i > 0$ .

Формула (1) в изотропном базисе запишется следующим образом:

$$X = (e_1 + e_2 + e_3 + e_4) \cdot |X| \cdot e^{\eta^1 e_1 + \eta^2 e_2 + \eta^3 e_3 + \eta^4 e_4}, \quad (2)$$

где

$$|X| = \sqrt[4]{\xi^1 \xi^2 \xi^3 \xi^4}, \quad \eta_i = \ln \left( \frac{\xi^i}{|X|} \right), \quad \eta^1 + \eta^2 + \eta^3 + \eta^4 = 0. \quad (3)$$

Из анализа формулы (2) вытекает естественное обобщение экспоненциального представления поличисел  $X \in H_4$ , которое возможно для любых поличисел, не являющихся делителями нуля ( $\xi^i \neq 0$ ):

$$X = \overset{s}{X} \cdot \left| \overset{m}{X} \right| \cdot e^{\eta^1 e_1 + \eta^2 e_2 + \eta^3 e_3 + \eta^4 e_4} \equiv \overset{s}{X}_{(1)} \cdot \left| \overset{m}{X}_{(1)} \right| \cdot e^{\ln \left( \frac{1}{\overset{1}{X}_{(1)}} \right)}, \quad (4)$$

где

$$\overset{s}{X} \equiv \text{sign}(\xi^1) e_1 + \text{sign}(\xi^2) e_2 + \text{sign}(\xi^3) e_3 + \text{sign}(\xi^4) e_4, \quad \overset{s}{X} \equiv J, \quad (5)$$

$$\overset{m}{X} \equiv |\xi^1| e_1 + |\xi^2| e_2 + |\xi^3| e_3 + |\xi^4| e_4, \quad \left| \overset{m}{X} \right| \equiv \varrho = \sqrt[4]{|\xi^1 \xi^2 \xi^3 \xi^4|}, \quad (6)$$

$$\overset{1}{X} \equiv \frac{\overset{m}{X}}{\left| \overset{m}{X} \right|}, \quad \eta^i = \frac{1}{8} \ln \left( \frac{(\xi^i)^8}{(\xi^1 \xi^2 \xi^3 \xi^4)^2} \right), \quad \eta^1 + \eta^2 + \eta^3 + \eta^4 = 0. \quad (7)$$



Из последней формулы следует, что  $\eta^i$  не могут быть все положительными или все отрицательными. Если хотя бы одна из  $\eta^i$  обращается в нуль, то далее процесс построения лестничного представления продолжен быть не может, то есть он обрывается. В результате имеем итерационный процесс:

$$X_{(2)} \equiv \ln \left( \overset{1}{X}_{(1)} \right) \rightarrow X_{(3)} \equiv \ln \left( \overset{1}{X}_{(2)} \right) \rightarrow X_{(4)} \equiv \ln \left( \overset{1}{X}_{(3)} \right). \quad (8)$$

Итак, для поличисел  $X \in H_4$ , у которых координаты в изотропном базисе на каждой итерации отличны от нуля, то есть они не являются делителями нуля, получается представление следующего вида

$$X = J_1 \varrho_1 \cdot e^{J_2 \varrho_2} \cdot e^{J_3 \varrho_3} \cdot e^{J_4 \varrho_4 \overset{1}{X}_{(4)}}, \quad (9)$$

или для координат в изотропном базисе

$$\xi^i = j_1^i \varrho_1 \cdot e^{j_2^i \varrho_2} \cdot e^{j_3^i \varrho_3} \cdot e^{\varrho_4 j_4^i \zeta^i}. \quad (10)$$

Здесь по индексу  $i$  нет суммирования,  $j_k^i = \pm 1$  — независимые знаковые коэффициенты,

$$\varrho_i = \left| \overset{m}{X}_{(i)} \right|, \quad J_k \equiv \overset{s}{X}_{(k)} = j_k^1 e_1 + j_k^2 e_2 + j_k^3 e_3 + j_k^4 e_4, \quad \overset{1}{X}_{(4)} = \zeta^m e_m. \quad (11)$$

Представление (9) будем называть *лестничным представлением* поличисел  $H_4$ .

Если итерационный процесс обрывается раньше, то вместо (9) можем получить

$$X = J_1 \varrho_1 \cdot e^{J_2 \varrho_2 \overset{1}{X}_{(2)}} \quad \text{или} \quad X = J_1 \varrho_1 \cdot e^{J_2 \varrho_2} \cdot e^{J_3 \varrho_3 \overset{1}{X}_{(3)}}, \quad (12)$$

соответственно.

Лестничное представление (9) можно продолжить до сколь угодно большого  $(m + 1)$ :

$$X = J_1 \varrho_1 e^{J_2 \varrho_2} e^{\dots e^{\varrho_m J_m} e^{\alpha_m j + \beta_m k + \gamma_m jk}}, \quad (13)$$

$$\alpha_m, \beta_m, \gamma_m \rightarrow \alpha_{m+1}, \beta_{m+1}, \gamma_{m+1}, \quad (14)$$

если все  $X_{(a)}$ ,  $a \leq m$  не являются делителями нуля. Трёхмерное координатное пространство  $\alpha \equiv x, \beta \equiv y, \gamma \equiv z$  можно рассматривать как пространственную гиперплоскость в четырёхмерном пространстве  $H_4$ , которое



мы отождествляем с пространством событий. Задавая различные начальные значения  $\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4$ , получим последовательность точек в трехмерном пространстве  $x, y, z$ , которое, для наглядности, будем считать евклидовым, а сами координаты — декартовыми прямоугольными:

$$(x_4, y_4, z_4), (x_5, y_5, z_5), \dots, (x_m, y_m, z_m), \dots \quad (15)$$

Если перейти к сферическим координатам  $r, \vartheta, \varphi$ , то такие последовательности точек можно изображать на небесной сфере координатами  $\vartheta, \varphi$ .

Из выше изложенного следуют конкретные формулы для указанного итерационного процесса в трехмерном пространстве  $x, y, z$ :

$$\left. \begin{aligned} x_{m+1} &= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{(x_m + y_m + z_m)(x_m - y_m - z_m)}{(-x_m + y_m - z_m)(-x_m - y_m + z_m)} \right|, \\ y_{m+1} &= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{(x_m + y_m + z_m)(-x_m + y_m - z_m)}{(x_m - y_m - z_m)(-x_m - y_m + z_m)} \right|, \\ z_{m+1} &= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{(x_m + y_m + z_m)(-x_m - y_m + z_m)}{(x_m - y_m - z_m)(-x_m + y_m - z_m)} \right|. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Если дополнить эти формулы формулой

$$\begin{aligned} x_{m+1}^0 &= \left| \ln \frac{|x_m + y_m + z_m|}{\rho_m} \cdot \ln \frac{|x_m - y_m - z_m|}{\rho_m} \times \right. \\ &\quad \left. \times \ln \frac{|-x_m + y_m - z_m|}{\rho_m} \cdot \ln \frac{|-x_m - y_m + z_m|}{\rho_m} \right|^{\frac{1}{4}}, \end{aligned} \quad (17)$$

где

$$\rho_m = |(x_m + y_m + z_m)(x_m - y_m - z_m)(-x_m + y_m - z_m)(-x_m - y_m + z_m)|^{\frac{1}{4}}, \quad (18)$$

получим итерационный процесс в 4-мерном пространстве  $x^0, x, y, z$ . Отметим, что в правой части формулы (17) отсутствует величина  $x_m^0$ , а в формулах (16) величины  $x_{m+1}, y_{m+1}, z_{m+1}$  выражаются только через сферические углы  $\vartheta_m, \varphi_m$ . Таким образом,

$$\left. \begin{aligned} \vartheta_{m+1} &= \Theta(\vartheta_m, \varphi_m), \\ \varphi_{m+1} &= \Phi(\vartheta_m, \varphi_m), \\ r_{m+1} &= R(\vartheta_m, \varphi_m), \\ x_{m+1}^0 &= X^0(r_m, \vartheta_m, \varphi_m). \end{aligned} \right\} \quad (19)$$



На наш взгляд, особенно интересен итерационный процесс

$$\vartheta_m, \varphi_m \quad \rightarrow \quad \vartheta_{m+1}, \varphi_{m+1}. \quad (20)$$

Используя для произвольных невырожденных поличисел  $P_{k+2 \cdot m}$  экспоненциальное представление [1] и следуя алгоритму построения *лестничного представления* для поличисел  $H_4$ , изложенному выше; можем построить *лестничное представление* для поличисел любой алгебры  $P_{k+2 \cdot m}$ .

## Литература

- [1] Гарасько Г.И. Начала финслеровой геометрии для физиков. М., ТЕТРУ, 2009.



# ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЕ ПОЛЕ: ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА И ПЕРСПЕКТИВЫ ПРИКЛАДНОГО ИСПОЛЬЗОВАНИЯ

Д.Г. Павлов

*НИИ Гиперкомплексных систем в геометрии и физике, Фрязино, Россия*  
geom2004@mail.ru

Предположение, что финслерова метрика Бервальда-Моора существенно лучше и полнее моделирует пространство-время, чем метрика Минковского [1, 2] — автоматически приводит к заключению, что в таком случае в реальности обязано существовать физическое поле, принципиальным образом отличное от четырех известных фундаментальных взаимодействий [3, 4]. Новое поле предложено называть гиперболическим. В отличие от обычных силовых взаимодействий оно связывает между собой не материальные частицы (которым в пространстве-времени соответствуют мировые линии), а элементарные события (им в пространстве-времени соответствуют уже не линии, а особые точки), существование и свойства которых менее наглядны, чем аналогичные качества частиц. Кроме того, многомерная финслерова геометрия, в которой только и могут естественным образом присутствовать гиперболические поля так же совершенно не очевидна, по крайней мере, в сравнении с использовавшимися до сих пор геометриями Галилея и Минковского (в которых таким полям нет места), а потому соответствующие идеи долгое время оставались вне пристального внимания как теоретиков, так и экспериментаторов. Однако, похоже, перенос приоритетов с элементарных частиц и псевдоримановой геометрии на фундаментальность особых событий и стоящего за ними финслерова пространства-времени с метрикой Бервальда-Моора — может положительным образом сказаться на решении многих проблем, остающихся открытыми в современной физике.

Как показывают теоретические исследования, элементарные события гиперболического поля должны обладать качеством, в определенной степени, аналогичным электрическому заряду, с той разницей, что такие заряды свойственны не частицам, а особым точкам (событиям) пространства-времени. При этом общее число гиперболических зарядов различных полярностей, включая вихревые гиперболические монополи, в финслеровом четырехмерии достигает шестнадцати. Такое, казалось бы, слишком избыточное разнообразие полярностей, на самом деле, на много менее обширно, чем известное сегодня физикам число элементарных частиц, которые по предполагаемой логике должны оказаться просто временными последовательностями различных комбинаций гиперболических зарядов.



Одиночные гиперболические заряды образуют в пространстве-времени вокруг себя источники и вихревые поля, напряженности которых уменьшаются обратно пропорционально первой степени интервала, независимо от размерности многообразия. Предсказываемая закономерность является финслеровым пространственно-временным аналогом известных пространственных законов Кулона и Ньютона для обычных точечных электрических и гравитационных зарядов.

Гипотеза существования гиперболических полей и финслеровой природы реального пространства-времени вполне может быть проверена в лабораторных экспериментах и на космологических наблюдениях. В случае ее подтверждения значительные изменения ожидают не только теоретическую физику, но и приложения, в частности, новые поля могут оказаться весьма перспективными для создания удобных средств связи, чувствительных приборов для исследования космических и земных глубин, а так же высокоэффективных энергетических установок.

## Литература

- [1] Павлов Д.Г. Четырехмерное время // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 1 (1), с. 33-42, 2004.
- [2] Гарасько Г.И. Начала финслеровой геометрии для физиков. М., Тетру, 2009.
- [3] Павлов Д.Г. Гиперболический аналог электромагнитного поля // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 1 (13), с. 3-15, 2010.
- [4] Павлов Д.Г., Кокарев С.С. Гиперболическая теория поля на плоскости двойной переменной // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 1 (13), с. 78-127, 2010.



# ОБ ЭЛЕМЕНТАХ ОБЪЕМА В ПСЕВДОФИНСЛЕРОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ С МЕТРИКАМИ ТИПА ШИМАДЫ

**А.В. Соловьев**

*Физический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия*  
a.v.solovyov@gmail.com

Традиционное для финслеровой геометрии определение элемента объема, восходящее к Г. Буземану [1], существенным образом опирается на тот факт, что в каждой точке собственно финслерова пространства соответствующее касательное пространство является нормированным. В псевдофинслеровых пространствах это не так. В них нарушается не только условие положительности длины касательного вектора, но и неравенство треугольника. В частности, евклидов объем индикатрисы вполне может оказаться бесконечным, что ведет к бессмысленному результату для финслерова элемента объема.

В докладе рассматриваются псевдофинслеровы пространства с метриками типа Шимады, определяемыми алгебраическими формами  $N$ -ой степени относительно компонент касательного вектора (частные случаи этих пространств возникают, например, в теории финслеровых  $N$ -спиноров [2]). Предложена общая формула для элемента объема в таких пространствах. Она является естественным обобщением известной формулы римановой геометрии. Нетривиальный результат получается только в случае четного числа индексов у метрического тензора псевдофинслерова пространства. Предложенный подход отличается от метода [3] и обладает тем преимуществом, что не накладывает ограничений на размерность пространства и ранг метрического тензора.

## Литература

- [1] Busemann H. Intrinsic Area. // *Annals of Math.*, v. 48, № 2, p. 234-267, 1947.
- [2] Соловьев А.В. Алгебраическая теория  $N$ -спиноров. Приложения в геометрии и физике. LAP LAMBERT Academic Publishing, 120 с, 2012.
- [3] Kokarev S.S. Deformational structures on smooth manifolds. // In «Trends in Mathematical Physics Research», Nova Science Publisher Inc. (Charles V. Benton), New-York, p. 113-154.



# О ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ИНТЕРПРЕТАЦИИ ПРИНЦИПА КАЛИБРОВОЧНОЙ ИНВАРИАНТНОСТИ

**В.Г. Жотиков**

*Московский физико-технический институт, Долгопрудный, Россия*  
zhotikov@yandex.ru

Калибровочный принцип наряду с вариационным принципом является одним из краеугольных принципов современной физики. Термины «калибровочная симметрия» и «калибровочные преобразования» были введены Г. Вейлем (H. Weyl: 1885 – 1955) в 20-е годы прошлого столетия. В то время он пытался сформулировать теорию, способную объединить электромагнетизм с общей теорией относительности. Работа была написана на немецком языке, и Г. Вейль употребил термин «Eich Invarianz», который был первоначально переведен как «масштабная инвариантность», но альтернативный перевод «калибровочная инвариантность» теперь общепринят. восходящее к Г. Буземану [1], существенным образом опирается на тот факт, Уже в девятнадцатом столетии математики пришли к мысли, что существует не одна, а много геометрий. Естественно, встал вопрос о необходимости их классификации. В 1872 году Ф. Клейн (1849 – 1925) сформулировал единую точку зрения на геометрию как на теорию инвариантов соответствующей группы преобразований.

Название конкретной геометрии, как правило, совпадает с названием группы преобразований. Например: евклидова, центрально-аффинная, эквивариантная, аффинная, центрально-проективная, проективная и т.д. Классификация групп преобразований дает классификацию геометрий, а теория инвариантов каждой группы дает аналитическую структуру каждой геометрии. Соответствующие группы преобразований называют фундаментальными группами каждой из геометрий.

Ранее было показано, что геометрическая интерпретация принципа наименьшего действия приводит одному из важных разделов современной дифференциальной геометрии — геометрии Финслера [1]. В этой связи, законным становится вопрос: а какой геометрии соответствует принцип калибровочной инвариантности? Геометрическая интерпретация принципа калибровочной инвариантности была дана выдающимся российским геометром В. Вагнером (1908-1984) в 1945 году [2]. Он показал, что геометрическая интерпретация калибровочных преобразований приводит к необходимости применения в физике идей и методов проективной геометрии. В частности, в 4-мерном пространстве-времени группа 4-вращений (однородная группа Лоренца) и группа гомологических преобразований (локальных анизотропных





дилатаций) образуют группу локальных центрально-проективных преобразований.

Новым дифференциальным инвариантом теории теперь становится произведение дифференциала локальной аффинной кривизны траектории  $dk$  на квадрат дифференциала аффинной длины ее дуги  $ds^2$ , т.е.  $dk \cdot ds^2 = \text{const}$ .

Если геометризация принципа наименьшего действия приводит к геометрии Финслера, то, в дополнение к этому, геометризация принципа калибровочной инвариантности приводит к проективной дифференциальной геометрии.

Перечислим некоторые из следствий геометрической интерпретации принципа калибровочной инвариантности. Напомним, в этой связи, что появление нового вида симметрии очень часто означает кардинальное изменение свойств исследуемого объекта, так как является следствием появления нового инварианта. Как уже отмечалось, одним из новых инвариантов оказывается инвариант проективной дифференциальной геометрии  $dk \cdot ds^2 = \text{const}$ . Обратим внимание на возможность изящного решения с помощью него проблемы взаимодействия частиц с создаваемым ими полем, или, с собственной массой частиц. В частности, оказывается, что постулаты Бора, правила квантования Бора-Зоммерфельда, как и квантовая механика атомов и молекул, оказываются следствиями последовательной геометризации вариационного принципа и принципа калибровочной инвариантности [4]. Полученные результаты применимы не только к микромиру. Так, например, ток в сверхпроводнике не затухает в силу тех же причин, что и движение электронов по орбите в атомах «без трения». Все это находит свое естественное объяснение в рамках излагаемого подхода.

Геометрическая интерпретация принципа калибровочной инвариантности и вытекающие следствия, дают основания к строгому и последовательному объяснению целого ряда явлений квантовой микро- и макрофизики, физический смысл которых остается не выясненным. Заметим, наконец, что наличие проективной симметрии пространства-времени позволяет также дать строгое математическое обоснование процедуры перенормировки, до сих пор применяемой на интуитивном уровне, в квантовой электродинамике.

## Литература

- [1] Zhotikov V. G. Finsler geometry (according to Wagner) and the equations of the motion in the relativistic dynamics. // Proceedings of the XV International Scientific Meeting PIRT–2009. Moscow, pp. 133–144, 2009.
- [2] Вагнер В.В. Гомологическое преобразование метрики Финслера. // ДАН СССР. Том 46, № 7, с. 287–290, 1945.
- [3] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. М., Наука, 460 с., 1967.



- [4] Жотиков В.Г. Постулаты Бора и правила квантования Бора-Зоммерфельда как следствия геометрии Финслера. // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Серия «Естественные науки». Специальный выпуск «Физические интерпретации теории относительности», с. 120–132, 2011.



# ГРУППА ЛОРЕНЦА — ОСНОВА ОПИСАНИЯ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ БОЗОНОВ И ФЕРМИОНОВ С ПСЕВДОРИМАНОВОЙ СТРУКТУРОЙ ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ.

В.М. Редьков<sup>1</sup>, В.В. Кисель<sup>2</sup>, Е.М. Овсиюк<sup>3</sup>

<sup>1</sup> *Институт физики НАН Беларуси, Минск*

<sup>2</sup> *Белорусский государственный педагогический университет, Минск*

<sup>3</sup> *Мозырский государственный педагогический университет, Мозырь*

v.redkov@dragon.bas-net.by, e.ovsiyuk@mail.ru

Дается обзор теории волновых уравнений элементарных частиц в присутствии внешних гравитационных полей, описываемых как псевдориманова структура пространства–времени.

Общековариантные обобщения волновых уравнений, установленных в пространстве Минковского, представлены для бозонов и фермионов в равной степени как результат применения единого тетрадного рецепта Тетроде–Вейля–Фока–Иваненко (1929 г.), базирующегося на представлениях группы Лоренца.

Группа Лоренца играет определяющую и унифицирующую роль для описания полей всех частиц (с разными спинами, массивных и безмассовых) как в плоском, так и в искривленном пространстве–времени; отличие состоит в том, что в плоском пространстве группа Лоренца играет роль глобальной симметрии для волновых уравнений, в псевдоримановом пространстве она играет роль зависящей от координат локальной группы симметрии.

Особое внимание уделяется полям Дирака и Максвелла.

Поскольку от всякой новой теории физического пространства–времени, в том числе и базирующейся на финслеровой геометрии, следует ожидать преемственности с развитыми и уже апробированными моделями на фоне плоской и псевдоримановых моделей пространства–времени, ставится вопрос: чем следует заменить базирующийся на группе Лоренца способ описания взаимодействия элементарных частиц с псевдоримановым геометрическим фоном в случае когда пространство–время наделяется финслеровой структурой.

Ответ на этот вопрос, если он возможен, должен быть достаточно универсальным и не зависящим от величины спина частицы или ее массы. Общий ответ на этот вопрос позволил бы лучше понять чего можно ожидать в физике от использования финслеровой геометрии в наиболее кардинальном аспекте, как новой геометрии физического пространства–времени.



# ВОЗМОЖНА ЛИ ФИНСЛЕРОВА ГЕОМЕТРИЗАЦИЯ ПОЛЯРИЗАЦИОННОЙ ОПТИКИ (ПОДХОДЫ СТОКСА-МЮЛЛЕРА И ДЖОНСА)?

Е.М. Овсюк<sup>1</sup>, В.М. Редьков<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Мозырский государственный педагогический университет, Мозырь <sup>2</sup> Институт  
физики НАН Беларуси, Минск

e.ovsiyuk@mail.ru, v.redkov@dragon.bas-net.by

После создания общей теории относительности методы геометрии являются неотъемлемой частью математического аппарата физики. Классическая общая теория относительности по-прежнему остается наиболее разработанным способом описания гравитации, при этом наиболее используемым является подход, когда частицы описываются квантово-механическими уравнениями, но метрика пространства–времени рассматривается как фоновая и с классических позиций.

Помимо этого фундаментального применения геометрии существует обширная область так называемых *аналоговых* исследований, в которой систематически изучаются возможности использования неевклидовой фоновой геометрии (с кривизной, с кручением, финслерова геометрия и т.п.) для эффективного описания динамических эффектов в разных разделах физики: например, в электродинамике, гидродинамике, акустике, физике твердого тела. К таким аналоговым исследованиям можно отнести известную с 60-х годов возможность закономерности в оптике поляризованного света описывать в терминах групповой структуры, изоморфной группе Лоренца. Тем самым, многие известные свойства представлений группы Лоренца можно переформулировать в утверждения относительно поведения поляризации света при его рассеивании на оптических элементах.

*В настоящей работе дается обзор некоторых возможностей применения теории группы Лоренца, ее спинорной накрывающей, а также матричного исчисления вообще для анализа вопросов поляризационной оптики. При этом речь идет об относительно простом множестве всех вещественных  $(4 \times 4)$  матриц, и есть основания предполагать, что свою роль здесь могут сыграть и методы финслеровой геометрии.*

В настоящей работе обсуждаются лишь несколько аспектов применения матричного исчисления в поляризационной оптике. В частности, известно, что полностью поляризованный свет может описываться не только вещественными 4-мерными векторами Стокса (формализм Стокса–Мюллера), но и 2-мерными комплексными векторами Джонса (формализм Джонса). Имеющая здесь ситуация (в некоторых случаях) с математической точки зрения



адекватно описывается в терминах величин, изоморфных 4-векторным и 2-спинорным представлениям некой формальной группы псевдоортогональных преобразований, изоморфной группе Лоренца. Однако при этом как правило речь идет только о 4-векторах Стокса с нулевой «релятивистской длиной», т.е. изотропных 4-векторах. До недавнего времени не существовало какого-либо формализма типа Джонса для частично поляризованного света, последнему сопоставляется 4-векторы Стокса с ненулевой и положительной «релятивистской длиной». В работе построены аналитических выражения для поляризационных 4-спиноров Джонса для полностью и частично поляризованного света.

Поскольку матрицы Мюллера — это вещественные  $4 \times 4$  матрицы, действующие на вещественный 4-мерный вектор Стокса, то для исследования множества всех возможных матриц Мюллера можно использовать параметризацию 4-мерных матриц, получаемую на основе применения матриц Дирака. Закон умножения для элементов исходной группы  $GL(4, C)$  имеет громоздкий вид, но он вполне поддается аналитическому исследованию. Найден явный вид определителя произвольной матрицы в такой параметризации, который задает естественный классифицирующий инвариант в множестве матриц. Эта параметризация применена для описания возможных поляризационных матриц Мюллера, включая и вырожденные случаи матриц с нулевым определителем, описываемых в рамках структуры полугрупп. Оказалось, что накладывая линейные связи на 16 параметров, совместимые с приведенным выше групповым законом умножения, можно получать преимущественно именно классы вырожденных матриц со структурой полугрупп. Получена полная классификация таких полугрупп ранга 1, 2, 3.



# БИНАРНАЯ ГЕОМЕТРОФИЗИКА И ФИНСЛЕРОВА ГЕОМЕТРИЯ

**Ю.С. Владимир**

*Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия*  
*Институт гравитации и космологии РУДН, Москва, Россия*

yusvlad@rambler.ru

Доклад посвящен изложению целевой направленности и основных принципов развиваемой в нашей группе программы бинарной геометрофизики и сопоставлению ее с программой варианта финслеровой геометрии, развиваемой в группе Д.Г. Павлова.

Целью исследований в области бинарной геометрофизики является построение реляционно-статистической теории, предназначенной для замены классических пространственно-временных отношений в физике микромира, из которой путем учета принципа Маха можно было бы вывести общепринятые понятия классической геометрии и физики. Другими словами, ставится задача вывода классических пространственно-временных отношений из наложения огромного количества неких элементарных физических факторов, присущих физике микромира. Тем самым, в частности, ставится задача теоретического обоснования таких ключевых свойств классической геометрии Минковского как ее размерность 4, сигнатура  $(+ - - -)$ , квадратичный характер мероопределения и др.

Об актуальности решения данной проблемы говорит тот факт, что в последнее время в работах ряда авторов все настойчивее ставится вопрос: доколе мы будем строить наши физические теории на априорно заданном классическом пространстве-времени?

Развиваемая в нашей группе программа бинарной геометрофизики в ряде вопросов пересекается с программой финслеровой геометрии Д.Г. Павлова:

1. Прежде всего, это относится к убежденности в необходимости изменения общепринятых представлений в геометрии.
2. В обеих программах важное место занимает вопрос обоснования обычно используемого квадратичного мероопределения, исходя из более общих геометрических конструкций.
3. В обеих программах самым существенным образом используется финслерова геометрия, причем это делается в варианте Павлова, где финслеровость трактуется как замена общепринятого квадратичного мероопределения на кубичную или четвертую степень метрических отношений. Фактически это означает использование многоточечных геометрий.

Главные различия наших программ состоят в следующем:



1. В бинарной геометрофизике исходными являются закономерности физики микромира, от которых изучается переход к геометрии макромира, тогда как в развитии программы финслеровой геометрии Павлова пока ограничиваются лишь задачами описания геометрии макромира.
2. В бинарной геометрофизике финслерова геометрия возникает из финслеровых спиноров и является многомерной. Так, в простейшем варианте бинарных систем комплексных отношений ранга  $(4, 4)$  возникающая унарная (на одном множестве элементов) геометрия является 9-мерной, тогда как в программе Павлова принципиально ограничиваются 4-мерной финслеровой геометрией.
3. Программа бинарной геометрофизика нацелена на описание физических взаимодействий, что означает необходимость рассмотрения производений токов взаимодействующих частиц, на которые можно смотреть как на финслеровы выражения, содержащие кроме пары релятивистских скоростей еще значения их зарядов. Последние трактуются как дополнительные компонента скоростей взаимодействующих частиц (в духе теории Калуцы).

В финслеровой геометрии Павлова таковых зарядовых компонент нет, что приводит к возникновению сразу двух проблем. Во-первых, как ввести заряды частиц и, во-вторых, как корректно избавиться от третьей и четвертой составляющих в финслеровом (4-й степени) мероопределении при переходе к общепринятой геометрии Минковского с квадратичным мероопределением.

Нам представляется, что различия двух программ существенно сократятся на том этапе развития финслеровой программы Павлова, когда она будет распространена на описание закономерностей физики микромира.

## Литература

- [1] Владимиров Ю.С. Основания физики. М., Бином. Лаборатория знаний. 2008.
- [2] Владимиров Ю.С. Физика дальнего действия. Книга 1-я. «Природа пространства-времени». М., Книжный дом Либроком, 2012.
- [3] Павлов Д.Г. Хронометрия трехмерного времени // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. 1, Vol. 1, 2004.
- [4] Павлов Д.Г. Число, геометрия и реальность // Альманах «Метафизика. Век XXI». Вып. 4, с. 317-334, 2011.



## О СЛОЕНИЯХ НА РАСПРЕДЕЛЕНИИ С ФИНСЛЕРОВОЙ МЕТРИКОЙ

А.В. Букушева

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского, Саратов, Россия  
bukusheva@list.ru

Исследуются слоения, возникающие на распределениях с финслеровой структурой. Пусть  $X$  — гладкое многообразие размерности  $n$ . Рассмотрим на многообразии четверку  $(D, \eta, \vec{\xi}, D^\perp)$ , где  $D$  — гладкое распределение коразмерности 1, определяемое формой  $\nu$ ,  $D^\perp = \text{Span}(\vec{\xi})$  — его оснащение.

Карту  $K(x^\alpha)$  ( $\alpha, \beta, \gamma = 1, \dots, n$ ) ( $a, b, c = 1, \dots, n-1$ ) на многообразии  $X$  будем называть адаптированной к распределению  $D$ , если  $D^\perp = \text{Span}\left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)$ .

На многообразии  $X$  имеем неголономное поле базисов  $(\vec{e}_a, \partial_n)$  и соответствующее ему поле кобазисов  $(dx^a, \theta^n = dx^n + \Gamma_a^n dx^a)$ . В дальнейшем ограничимся рассмотрением адаптированных координат с условием  $\vec{\xi} = \partial_n$ . Адаптированным будем называть также базис  $\vec{e}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n$  как базис, определяемый адаптированной картой.

Предположим, что задана связность над распределением  $D$  [1], т.е. распределение  $\tilde{D} = \pi_*^{-1}(D)$  разбивается в прямую сумму вида  $\tilde{D} = HD \oplus VD$ , где  $VD$  — вертикальное распределение на тотальном пространстве  $D$ . Для координатного представления объектов, заданных на  $D$ , мы используем координаты на многообразии  $D$ , индуцированные адаптированной картой [1].

Проводя необходимые вычисления, получаем:  $[\vec{e}_a, \vec{e}_b] = 2\omega_{ba}\partial_n + R_{ab}^c\partial_{n+c}$ ,  $[\vec{e}_a, \partial_n] = \partial_n\Gamma_a^n\partial_n + \partial_n G_a^b\partial_{n+b}$ ,  $[\vec{e}_a, \partial_{n+b}] = G_{ab}^c\partial_{n+c}$ , где  $R_{ba}^c = \vec{e}_b G_a^c - \vec{e}_a G_b^c$  и  $\partial_n\Gamma_a^n$  соответственно первый и второй тензоры кривизны Схоутена [2].

Предположим, что на многообразии  $D$  задана функция  $L(x^\alpha, x^{n+a})$  такая, что выполняются следующие условия:

1.  $L$  — гладкая положительная функция на  $D^0 = D \setminus \vec{0}$ ;
2.  $L$  — положительно однородна степени 1 относительно слоевых координат;
3. Квадратичная форма  $L_{\bullet a \bullet b}^2 \xi^a \xi^b = \frac{\partial^2 L^2}{\partial x^{n+a} \partial x^{n+b}} \xi^a \xi^b$  положительно определена;

Распределение  $D^0$  будем обозначать  $D$ . Назовем функцию  $L(x^\alpha, x^{n+a})$  допустимой финслеровой метрикой, а пару  $(D, L)$  — распределением с финслеровой структурой или финслеровым распределением. Как было показано в [1], с каждым распределением  $(D, L)$  ассоциируется некоторая внутренняя и соответствующая ей продолженная связность. Для задания внутренней и





продолженной связностей необходимо задать объект внутренней связности  $G_b^a(X^a, X^{n+a})$ , а также задать разложение  $TD = \widetilde{HD} \oplus VD$ , где  $HD \subset \widetilde{HD}$ . Если на многообразии задана пара  $(D, L)$ , то в  $D$  возникает внутренняя связность, порождаемая распределением  $HD = Span(\vec{\varepsilon}_a)$ , где  $\vec{\varepsilon}_a = \partial_a - \Gamma_{ac}^n \partial_n - G_{ac}^b x^{n+c} \partial_{n+b}$ ,  $G_{bc}^a = G_{\bullet b \bullet c}^a = \partial_{n+b} \partial_{n+c} G^a$ ,  $G^a = g^{ab} (\partial_c L_{\bullet b}^2 x^{n+c} - \vec{e}_b L^2)$ ,  $g_{ab} = \frac{1}{2} L_{\bullet a \bullet b}^2$ .

На распределении  $D$  как на пространстве векторного расслоения  $(D, \eta, X)$  естественным образом возникают два слоения. Первое называется вертикальным, оно образовано слоями пространства векторного расслоения и определяется интегрируемым вертикальным распределением  $VD = Span(\partial_{n+a})$ . Второе слоение образовано интегральными поверхностями распределения  $Q = Span(\partial_n, \partial_{n+a})$ . Заметим, что векторное поле  $\partial_n$  определено глобально на многообразии  $D$ . Будем обозначать это слоение той же буквой  $Q$ , что и соответствующее ему распределение. Таким образом, трансверсальным к вертикальному слоению является горизонтальное распределение продолженной связности, а трансверсальным к слоению  $Q$  — горизонтальное распределение внутренней связности. Слоение называется вполне геодезическим, если каждый его слой — вполне геодезическое многообразие.

В работе [3] было введено понятие bundle-like метрики, как такой римановой метрики, для которой ортогональное к слоению относительно метрики распределение является вполне геодезическим распределением: риманова метрика называется bundle-like метрикой относительно слоения  $F$ , если всякая геодезическая, касающаяся в одной точке ортогонального к слою  $F$  распределения, касается его во всех точках.

Назовем  $(D, L)$  распределением Ландсберга, если выполняется равенство  $G_{bc}^a = \frac{1}{2} g^{ad} (\vec{\varepsilon}_b g_{cd} + \vec{\varepsilon}_c g_{db} - \vec{\varepsilon}_d g_{bc})$ .

**Теорема 1.** Финслерово распределение  $(D, L)$  есть распределение Ландсберга тогда и только тогда, когда вертикальное слоение  $VD$  на римановом многообразии  $(D, G)$  является вполне геодезическим.

**Теорема 2.** Распределение  $\widetilde{HD}$  является вполне геодезическим распределением тогда и только тогда, когда

1.  $(D, L)$  — распределение с римановой метрикой,
2.  $\partial_n g_{ab} = 0$

## Литература

- [1] Галаев С.В. О продолжении внутренней связности неголономного многообразия с финслеровой метрикой // Сб. науч. тр. Механика. Математика,



Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, Вып. 13, с. 25-28, 2011.

- [2] Вагнер В.В. Геометрия  $(n-1)$ -мерного неголономного многообразия в  $n$ -мерном пространстве // Тр. семинара по векторному и тензорному анализу. М.: Изд-во Моск. ун-та, Вып. 5, с. 173–255, 1941.
- [3] Reinhart В.Л. Foliated manifolds with bundle-like metric // Annals of Math, Vol. 69, № 2, pp. 119–132, 1959.



## КВАТЕРНИОНЫ И СПИНОВАЯ ТОМОГРАФИЯ

А.К. Федоров, С.О. Юрченко

Московский государственный технический университет  
им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия  
lex1026@gmail.com

Квантовая томография [1-4], основанная на использовании неотрицательных функций распределения вероятностей, является актуальным направлением в нерелятивистской квантовой механике. Томографическая формулировка полностью эквивалентна другим известным на сегодняшний день формулировкам квантовой механики, а томограмма связана с различными функциями квазираспределений (например, с функций Вигнера). Стоит особо отметить, что квантовая томография также развивается как экспериментальное направление квантовой оптики. Основным приемом является метод балансного го-модинного детектирования [3].

Существует возможность рассматривать томограммы как непрерывных, так и дискретных переменных. Томографическое представление квантовой механики для непрерывных переменных использует линейное каноническое преобразование фазового пространства (матрицу симплектической группы  $Sp_2(\mathbb{R})$ ):

$$\begin{pmatrix} \varepsilon \\ \sigma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu & \eta \\ \eta' & \mu' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где  $q$  — координата,  $p$  — импульс, а  $\mu, \mu', \eta, \eta'$  — действительные числа.

В общем случае (1) — это поворот фазового пространства с взаимным масштабированием по осям фазового пространства. Симплектическая томограмма наблюдаемой величины  $\varepsilon$ , которая является линейной комбинацией квадратурных компонент:

$$\hat{\varepsilon} = \mu \hat{q} + \eta \hat{p}, \quad m = \hbar = 1,$$

определяется через комплексную волновую функцию с помощью дробного преобразование Фурье:

$$T(\varepsilon, \mu, \eta) = \frac{1}{2\pi |\eta|} \left| \int \psi(q) \exp\left(\frac{i\mu}{2\eta} q^2 - \frac{i\varepsilon}{\eta} q\right) dq \right|^2.$$

Томограмма является нормированной, положительной и однородной функцией.

В работе [1] был разработан аппарат томографии для дискретных переменных — спиновой томографии. Рассмотрим матрицу плотности, заданную в следующем виде:

$$\rho = \sum_k p_k |\psi_k\rangle \langle \psi_k|, \quad \sum_k p_k = 1, p_k \in [0, 1].$$



Томограмма состояния задается следующей формулой:

$$T(m, U) = \begin{pmatrix} T(+1/2, U) \\ T(-1/2, U) \end{pmatrix} = (U^+ \rho U)_{mm}; \quad (2)$$

$$U = \begin{pmatrix} \cos \theta/2 \exp [i(\varphi + \psi)/2] & \sin \theta/2 \exp [i(\varphi - \psi)/2] \\ -\sin \theta/2 \exp [-i(\varphi - \psi)/2] & \sin \theta/2 \exp [-i(\varphi + \psi)/2] \end{pmatrix},$$

элементы матрицы  $U$  — углы Эйлера. Условие нормировки для томограммы можно переписать в следующем виде:

$$\sum_m T(m, U) = 1.$$

Элементы матрицы  $U(2)$  описывают поворот в трёхмерном пространстве. С этой целью можно использовать не углы Эйлера, а кватернионы — инструмент, применение которого в математической и теоретической физике широко исследуется [4]. Кватернионы позволяют комбинировать вращения пространства, а также избежать проблемы, связанной с невозможностью поворота вокруг оси, независимо от совершенного вращения по другим осям.

Под кватернионами, как известно, понимается система  $\mathbf{H}$  гиперкомплексных чисел, образующая над полем вещественных чисел  $\mathbb{R}$  векторное пространство  $L(\mathbb{R})$  размерностью четыре. Рассмотрим единичный кватернион

$$\mathbf{q} = [q_0 \ q_1 \ q_2 \ q_3].$$

Соотношение между углами Эйлера и кватернионом

$$\begin{bmatrix} \varphi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \arctan_2(2(q_0q_1 + q_2q_3), 1 - 2(q_1^2 + q_2^2)) \\ \arcsin(2(q_0q_2 - q_1q_3)) \\ \arctan_2(2(q_0q_3 + q_1q_2), 1 - 2(q_2^2 + q_3^2)) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \arctan_2\{\alpha(q_0, q_1, q_2, q_3)\} \\ \arcsin\{\beta(q_0, q_1, q_2, q_3)\} \\ \arctan_2\{\gamma(q_0, q_1, q_2, q_3)\} \end{bmatrix}.$$

Выражения для матричных элементов  $U(2)$  принимают следующий вид:

$$U_{11} = \cos\left(\frac{\arcsin(\beta(q_0, q_1, q_2, q_3))}{2}\right) \exp\left[\frac{i(\arctan_2\{\alpha(q_0, q_1, q_2, q_3)\} + \arctan_2\{\gamma(q_0, q_1, q_2, q_3)\})}{2}\right],$$

$$U_{12} = \sin\left(\frac{\arcsin(\beta(q_0, q_1, q_2, q_3))}{2}\right) \exp\left[\frac{i(\arctan_2\{\alpha(q_0, q_1, q_2, q_3)\} - \arctan_2\{\gamma(q_0, q_1, q_2, q_3)\})}{2}\right],$$

$$U_{21} = -\sin\left(\frac{\arcsin(\beta(q_0, q_1, q_2, q_3))}{2}\right) \exp\left[\frac{i(\arctan_2\{\gamma(q_0, q_1, q_2, q_3)\} - \arctan_2\{\alpha(q_0, q_1, q_2, q_3)\})}{2}\right],$$

$$U_{22} = \sin\left(\frac{\arcsin(\beta(q_0, q_1, q_2, q_3))}{2}\right) \exp\left[\frac{-i(\arctan_2\{\alpha(q_0, q_1, q_2, q_3)\} + \arctan_2\{\gamma(q_0, q_1, q_2, q_3)\})}{2}\right],$$



Таким образом, продемонстрирована возможность использования кватернионов для вычисления томограмм дискретных переменных – спиновых томограмм. Спиновые томограммы активно применяются для анализа квантовых систем, например, в причинном анализе запутанных состояний.

Автор благодарен профессору Ю.Е. Лозовику и И.Н. Фокиной за плодотворные обсуждения. Работа поддержана РФФИ (проект №11-02-00858).

## Литература

- [1] Манько В.И., Манько О.В., Сафонов С.С. Описание спиноров с помощью функций распределения вероятностей. // ТМФ, 115, № 2, с. 185-198, 1998.
- [2] Федоров А.К., Юрченко С.О. Симплектические томограммы в представлении фейнмановских интегралов по траекториям. // Вест. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Серия «Естественные науки», том 45, № 2, с. 29-37, 2012.
- [3] Beck M., Smithey D.T., Raymer M.G. Experimental Determination of Quantum-phase Distribution Using Optical Homodyne Tomography. // Phys. Rev. A., 48, pp. 890–893, 1993.
- [4] Шамаров Н.Н. Применение нестандартных числовых систем в математической физике. // Современная математика. Фундаментальные направления. 23, с. 182-194, 2007.



# СВЕРХБЫСТРЫЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ПО ГАЛАКТИКЕ ЗА СЧЁТ АНИЗОТРОПНОЙ ДЕФОРМАЦИИ ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ

Ю.П. Лаптев<sup>1,2</sup>, М.Л. Фильченков<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Российский университет дружбы народов, Москва, Россия*

<sup>2</sup> *Московский государственный технический университет*

*им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия*

yplaptev@rambler.ru, fmichael@mail.ru

Если допустить, что наша Галактика осваивается развитыми цивилизациями так же, как мы осваивали океан в эпоху Великих географических открытий, то необходимо, чтобы различные цивилизации могли преодолевать расстояния их разделяющие.

Человечество создало различные средства преодоления расстояний, но только ракеты позволили покинуть Землю и начать освоение Солнечной системы, внешняя граница которой (облако Оорта, содержащее долгопериодические кометы) составляет около 0,5 пк. До ближайшей звезды, Проксима Центавра, — 1,3 пк. Радиус Галактики составляет 15 кпк. Солнце расположено на расстоянии 8 кпк от центра Галактики. Отсюда ясно, что освоение Галактики практически невозможно за время равное продолжительности человеческой жизни. При движении со скоростью, близкой к скорости света (фотонный двигатель), можно достичь любых расстояний за счёт замедления времени, но это путешествие в один конец, т.к. на Земле за это время пройдут сотни тысяч, миллионы лет.

Здесь мы приходим к мысли, что освоение Галактики было бы возможным, только при движении со сверхсветовыми скоростями (гипердвижение). Речь идет не о локальной скорости, которая не может превышать скорость света. Единственная возможность состоит в том, чтобы уменьшить расстояние, которое нужно преодолеть кораблю, по сравнению с тем, которое отделяет его от точки назначения в момент старта. Одной из возможностей, которая позволяет попасть в точку назначения более коротким путем, является кротовая нора, соединяющая точки старта и назначения через ручку. Другой возможностью является сжатие пространства перед кораблем. Этот процесс осуществляется с помощью двигателя М. Алькуберре в 1994 г. (warp drive) [1]. Предлагается метрика:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - [dx - v_s f(r_s) dt]^2 - dy^2 - dz^2, \quad (1)$$

где

$$r_s^2 = (x - x_s)^2 + y^2 + z^2 \quad (2)$$



$$v_s = \frac{dx_s}{dt} \quad (3)$$

$$f(r_s) = \frac{th\sigma(r_s + R) - th\sigma(r_s - R)}{2th\sigma R} \quad (4)$$

Корабль движется со скоростью  $v_s$  в направлении оси  $x$ . Вокруг корабля создается пузырь радиуса  $R$  толщиной  $\frac{1}{\sigma}$ , внутри и вне которого пространство Минковского, а в слое толщиной  $\frac{1}{\sigma}$  пространство сжимается в направлении движения и расширяется в обратном направлении. Таким образом, корабль за счёт сжатия пространства перед ним приближает место назначения. Пузырь Алькуберре, так же как и кротовая нора, поддерживается за счёт отрицательной энергии. Возможность отрицательной энергии подтверждается эффектом Казимира, лежащим в основе электронной микроскопии. Трудности, связанные с практической реализацией гипердвижения, состоит в том, что требуется слишком большая энергия.

Речь пока не идёт о технической реализации, а только о принципиальной возможности гипердвижения. При этом конечно возникают трудности, которые в настоящее время кажутся непреодолимыми. Выводы, которые делаются на основании уровня современной науки, не являются окончательными. Мы ещё многого не знаем. В отличие от электромагнетизма, мы не можем управлять гравитацией. Возможно, когда наши знания расширятся, нам удастся пересмотреть многие проблемы гравитации, включая её современную интерпретацию в рамках общей теории относительности.

## Литература

- [1] Alcubierre M. The warp drive: hyper-fast travel within general relativity. // Classical and Quantum Gravity, 11-5, L73-L77, 1994.



## КОНТАКТНЫЕ МЕТРИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ ФИНСЛЕРОВА ТИПА

С.В. Галаев

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского, Саратов, Россия  
sgalaev@mail.ru

Понятие допустимой финслеровой метрики впервые введено в [1], там же построен дифференциально-геометрический объект соответствующей ей нелинейной связности — *связности над распределением*. Задание связности над распределением эквивалентно разложению распределения  $\tilde{D} = \pi_*^{-1}(D)$  в прямую сумму вида  $\tilde{D} = HD \oplus VD$ , где  $VD$  — вертикальное распределение на тотальном пространстве  $D$ . Таким образом, задание связности над распределением эквивалентно заданию объекта  $G_b^a(\chi^a, \chi^b)$  такого, что  $HD = \text{span}(\vec{\varepsilon}_\alpha)$ , где  $\vec{\varepsilon}_\alpha = \partial_\alpha - \Gamma_\alpha^n \partial_n - G_\alpha^b \partial_{n+b}$ . Для случая контактного пространства с финслеровой метрикой было доказано существование и единственность *метрической продолженной связности*: существует единственная продолженная связность неголономного многообразия с допустимой финслеровой метрикой, сохраняющей длину параллельно переносимого вектора. Связность в векторном расслоении  $D$ , определяемая горизонтальным распределением  $HT = HD \oplus \text{span}(\vec{u})$ , где  $\pi_*(\vec{u}) = \partial_n$ , называется продолженной связностью неголономного многообразия. В работе [2] показано, что связность над распределением с финслеровой метрикой определяет на тотальном пространстве векторного расслоения  $(D, \pi, X)$  почти контактную метрическую структуру. Почти контактные метрические структуры играют фундаментальную роль в контактной геометрии и являются контактным аналогом почти эрмитовых структур в эрмитовой геометрии. Если  $X$  — финслерово многообразие, ограничение фундаментальной функции которого на распределении  $D$  определяет допустимую финслерову метрику, то тотальное пространство векторного расслоения  $(D, \pi, X)$  естественно рассматривать как риманово подпространство касательного расслоения  $TX$  с метрикой Сасаки-Финслера. Будем называть многообразие  $X$  многообразием почти контактной метрической структуры финслерова типа, если метрика Сасаки-Финслера индуцирует на подпространстве  $D$  многообразия  $TX$  структуру почти контактного метрического пространства. Исследуются свойства почти контактной метрической структуры финслерова типа.

### Литература

Галаев С.В. О продолжении внутренней связности неголономного многообразия с финслеровой метрикой. // Сб. науч. тр. Механика. Математика, Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, Вып.13, с. 25-28, 2011.





- [0] [1] Букушева А.В., Галаев С.В., Иванченко И.П. О почти контактных метрических структурах, определяемых связностью над распределением с финслеровой метрикой. // Сб. науч. тр. Механика. Математика, Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, Вып. 13, с. 10-14, 2011.



# НЕЙТРИНО ВСЕЛЕННОЙ И КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ГРАВИТАЦИИ

В.М. Корюкин

*Марийский государственный университет, Йошкар-Ола, Россия*  
kvm@marsu.ru

Как известно в стандартной модели Вселенной фоновые нейтрино играют незначительную роль вследствие их предполагаемой низкой плотности. Данное предположение не может быть подтверждено в прямых экспериментах по неупругому рассеянию вследствие высокого энергетического порога реакций, что позволяет рассматривать альтернативные модели и в первую очередь с привлечением «стерильных» нейтрино (нейтрино и антинейтрино с поляризацией противоположной, наблюдающейся при неупругом рассеянии) [1]. В результате предполагаемая высокая плотность «стерильных» нейтрино при достаточно низкой плотности «нормальных» нейтрино (что приводит к наблюдаемому нарушению пространственной четности слабых взаимодействий) может быть объяснена спонтанным нарушением симметрии, характеризующим физическую систему при низкой температуре, оценкой которой является температура микроволнового радиоизлучения Вселенной. При таком рассмотрении имеет смысл считать пространство-время неодносвязным, что позволяет объяснить многозначность волновых функций, используемых для описания элементарных частиц, а отсюда и квантовый характер их зарядов. Более того взаимодействие элементарных частиц с фоновыми нейтрино Вселенной, в распределении которых должно проявляться нарушение изотропности и однородности, позволило надеяться на успех экспериментального обнаружения последних на макроскопическом уровне. Естественно, что рабочее тело в детекторе при этом обязано быть достаточно массивным. Именно это обеспечило успех в подобных экспериментах. В начале 90-х годов прошлого века мы предложили механизм объяснения гравитации, привлекая когерентные потоки нейтрино от макроскопических тел и связав гравитационную постоянную с параметрами электрослабых взаимодействий [2]. Но именно квантовые законы должны приводить к модификации закона Ньютона на достаточно больших расстояниях [3]. Так потенциал гравитационного взаимодействия должен иметь вид ( $n$  — число бозонов,  $x > 0$ ):

$$\begin{aligned} V &= -D \sum_{n=0}^{\infty} n e^{-nx} / \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx} = D \frac{d}{dx} \ln \left( \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx} \right) \\ &= D \frac{d}{dx} \ln \left( \frac{1}{1 - e^{-x}} \right) = -D \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} = -\frac{D}{e^x - 1} \end{aligned} \quad (1)$$



где в общем случае  $D = \int \rho_1 \sigma_\nu \rho_\nu \sigma_\nu \rho_2 dV_1 dV_2$  ( $\rho_1$  — плотность частиц первого макроскопического тела,  $\rho_2$  — плотность частиц второго макроскопического тела,  $\rho_\nu$  — плотность тех фоновых нейтрино Вселенной, взаимодействием с которыми нельзя пренебречь,  $\sigma_\nu$  — сечение рассеяния фоновых нейтрино на частицах макроскопического тела,  $x = 2\rho_\nu \sigma_\nu r$ ). Считая  $\rho_\nu$  и  $\sigma_\nu$  постоянными и используя стандартную калибровку [4], получим:  $D = 4m_1 m_2 \rho_\nu \sigma_\nu^2$  ( $m_1, m_2$  — массы макроскопических тел;  $r$  — расстояние между ними; мы используем систему единиц:  $\hbar/2\pi = c = 1$ , где  $\hbar$  — постоянная Планка, а  $c$  — скорость света;  $1 \text{ GeV}^{-1} \approx 2 \cdot 10^{-14} \text{ см}$ ;  $1 \text{ Мпс} \approx 3,1 \cdot 10^{24} \approx 10^{38} \text{ GeV}^{-1} \text{ см}$ ).

Принимая во внимание однородность распределения галактик во Вселенной на расстояниях превышающих 50 мегапарсек ( $\sim 10^{40} \text{ GeV}^{-1}$ ), будем предполагать, что большая часть «стерильных» нейтрино и антинейтрино присутствует в форме многокомпонентной Ферми-жидкости при температуре ниже 3 К ( $< 10^{-12} \text{ GeV}$ ). В результате во взаимодействии с обычной материей могут принимать участие лишь те из них, которые находятся вблизи поверхности Ферми (энергия  $\varepsilon$  которых достаточно мало отличается от энергии Ферми  $\varepsilon_F$ ).

Как известно по теории Л.Д. Ландау, в этом случае удобнее работать не с частицами, а квазичастицами, которые, как и «стерильные» нейтрино и антинейтрино, являются фермионами, и энергия которых  $\omega$  равна  $|\varepsilon - \varepsilon_F|$ . Более того, среднее значение  $\omega$  может быть вычислено по формуле

$$\langle \omega \rangle = \int_0^\infty \frac{\omega^3 d\omega}{\exp(\omega/T_0) + 1} \Big/ \int_0^\infty \frac{\omega^2 d\omega}{\exp(\omega/T_0) + 1} \approx 3.15 T_0. \quad (2)$$

Именно это и ведет к квадратичной зависимости сечения рассеяния фоновых нейтрино на частицах макроскопического тела от их температуры  $\sigma_\nu \propto T_0^2$ .

При низкой температуре фоновых нейтрино следует ожидать их спаривания, что приведет к образованию бозе-жидкости из таких пар и должно отразиться, в конце концов, на движении галактик, которое интерпретируется как присутствие темной материи. Именно поэтому поиски частиц темной материи в лабораторных условиях и не принесли успеха. Вряд ли плотность бозе-жидкости постоянна и изучение ее флуктуаций должно стать одной из интереснейших задач внегалактической астрономии.

## References

- [1] Koryukin V.M. The confinement and the dark matter of the Universe // In the book: Relativistic Nuclear Physics and Quantum Chromodynamics: Proceedings of the XIX International Baldin Seminar on High Energy Physics Problems (Dubna, September 29 – October 4, 2008). Dubna, JINR, V.I., XVI, pp. 61-66, 2008.



- [2] Корюкин В.М. Эффект Казимира, гравитация и реликтовые нейтрино. // Известия вузов. Физика. № 10, с. 119-120, 1996.
- [3] Корюкин В.М. К вопросу о физической интерпретации потенциала Лобачевского - Черникова и его роли в теории фундаментальных взаимодействий. // Вестник Московского государственного технического университета имени Н.Э. Баумана, серия «Естественные науки», специальный выпуск «Физические интерпретации теории относительности», с. 156-162, 2011.



## О ТОЖДЕСТВЕ АЛЬТЕРНАТИВНОСТИ АЛГЕБРЫ КЭЛИ

Н.М. Кузуб

Восточно-Сибирская государственная академия образования, Иркутск, Россия  
knm1@mail.ru

Рассмотрим алгебру октав  $Q$ . Ее можно представить в виде прямой суммы:  $Q = R \cdot 1 \oplus V$ , где  $V$  — ортогональное дополнение к единице. Умножение в  $Q$  задается по правилу:

$$(t_1, x_1) \cdot (t_2, x_2) = (t_1 t_2 - \langle x_1, x_2 \rangle, t_1 x_2 + t_2 x_1 + [x_1, x_2]), \quad (1)$$

при  $t_1, t_2 \in R, x_1, x_2 \in V$ .

Пространство  $V = R^7$  является антикоммутативной алгеброй без единицы, относительно векторного произведения  $[ \ , \ ]$ , определенного в базисе  $\{e_1, \dots, e_7\}$  таблицей умножения классической алгебры Кэли:

$$\begin{array}{llll} [e_1, e_2] = e_3 & [e_1, e_3] = -e_2 & [e_1, e_4] = e_5 & [e_1, e_5] = -e_4 \\ [e_1, e_6] = -e_7 & [e_1, e_7] = e_6 & [e_2, e_3] = e_1 & [e_2, e_4] = e_6 \\ [e_2, e_5] = e_7 & [e_2, e_6] = -e_4 & [e_2, e_7] = -e_5 & [e_3, e_4] = e_7 \\ [e_3, e_5] = -e_6 & [e_3, e_6] = e_5 & [e_3, e_7] = -e_4 & [e_4, e_5] = e_1 \\ [e_4, e_6] = e_2 & [e_4, e_7] = e_3 & [e_5, e_6] = -e_3 & [e_5, e_7] = e_2 \\ [e_6, e_7] = -e_1. \end{array} \quad (2)$$

Теперь предположим, что в таблице умножения знаки произведений не зафиксированы, т.е.  $[e_i, e_j] = c_{ij} e_k$ , где  $c_{ij} = \pm 1$ , причем  $i, j, k$  подчинены закону из таблицы (2). Из антикоммутативности произведения следует, что  $c_{ij} = -c_{ji}$ ,  $i, j = \overline{1, 7}$ . Алгебра октав неассоциативная, но для нее выполняется свойство альтернативности:

$$x_1^2 x_2 = x_1 (x_1 x_2), \quad x_1, x_2 \in Q.$$

Согласно закону умножения в алгебре  $Q$  (1), это свойство сводится к тождеству:

$$[x, [x, y]] = \langle x, y \rangle x - x^2 y, \quad x, y \in V. \quad (3)$$

Свойство альтернативности в унитарной алгебре равносильно соотношению (3) в пространстве  $V$ .

Потребуем, чтобы произведение  $[x, [x, y]]$  являлось линейной комбинацией векторов  $x$  и  $y$ :

$$[x, [x, y]] = \gamma(x, y)x + \beta(x)y, \quad (4)$$



$\gamma(x, y)$  — билинейная форма,  $\beta(x)$  — форма квадратичная. Если

$$x = \sum_{i=1}^7 x_i e_i, \quad y = \sum_{j=1}^7 y_j e_j,$$

то

$$\gamma(x, y) = \sum_{j=1}^7 \sum_{i=1}^7 \gamma_{ij} x_i y_j, \quad \beta(x) = \sum_{i=1}^7 \sum_{j=i}^7 \beta_{ij} x_i x_j.$$

Рассматривая тождество (4) и приравнивая соответствующие коэффициенты, получим соотношения на  $\gamma_{ij}, \beta_{ij}$ :

$$\beta_{ij} = 0, \quad \gamma_{ij} = 0, \quad \gamma_{ii} = -\beta_{ii}, \quad i \neq j, \quad i, j = \overline{1, 7}.$$

Коэффициенты  $\beta_{ii}$  выражаются через коэффициенты  $c_{ij}$ , которые в свою очередь связаны 14 соотношениями.

Получаем семь свободных переменных среди  $c_{ij}$ , которые могут принимать значения  $\pm 1$ . Остальные переменные выражаются через них.

**Предложение.** Если в таблице умножения алгебры Кэли варьировать знаки произведений, сохранив предположение об антикоммутативности, то условие альтернативности эквивалентно более слабому предположению, что произведение  $[x, [x, y]]$  является линейной комбинацией векторов  $x$  и  $y$ , причем существует  $2^7 = 128$  таких алгебр.

Исследуя вопрос об изоморфизме этих алгебр, получаем, что из них неизоморфными являются только две. Зафиксировав знаки произведений, определяем, в одном случае, таблицу умножения алгебры Кэли, во втором обобщенной алгебры Кэли-Диксона:

$$\begin{aligned} [e_1, e_2] &= e_3 & [e_1, e_3] &= -e_2 & [e_1, e_4] &= -e_5 & [e_1, e_5] &= e_4 \\ [e_1, e_6] &= -e_7 & [e_1, e_7] &= e_6 & [e_2, e_3] &= e_1 & [e_2, e_4] &= -e_6 \\ [e_2, e_5] &= e_7 & [e_2, e_6] &= e_4 & [e_2, e_7] &= -e_5 & [e_3, e_4] &= -e_7 \\ [e_3, e_5] &= -e_6 & [e_3, e_6] &= e_5 & [e_3, e_7] &= e_4 & [e_4, e_5] &= e_1 \\ [e_4, e_6] &= e_2 & [e_4, e_7] &= e_3 & [e_5, e_6] &= e_3 & [e_5, e_7] &= -e_2 \\ [e_6, e_7] &= e_1. \end{aligned} \tag{5}$$

Хотя  $V$  не является алгеброй Ли (не выполняется тождество Якоби), но можно определить оператор  $ad_x$  по формуле  $ad_x y = [x, y]$  и симметричную билинейную форму.

Рассмотрим форму Киллинга для этих случаев:  $B(x, y) = tr(ad_x, ad_y)$ ,  $x, y \in V$ .

Скалярное произведение находим по формуле:  $\langle x, y \rangle = M \cdot B(x, y)$ ,  $M$  — некоторая константа.



В первом случае получим евклидову метрику семимерного пространства. Во втором скалярное произведение имеет сигнатуру (3, 4):

$$\langle x, y \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 - x_4y_4 - x_5y_5 - x_6y_6 - x_7y_7.$$

Полученное скалярное произведение индуцирует метрику семимерного псевдоевклидова пространства.

## Литература

- [1] Артин Э. Геометрическая алгебра, Наука, М., 1969.
- [2] Желваков К.А., Слинько А.М., Шестаков И.П., Ширшов А.И. Кольца, близкие к ассоциативным. Наука, М., 1978.
- [3] Постников М.М. Группы и алгебры Ли. Наука, М., 1982.



# КОСМОЛОГИЧЕСКОЕ КРАСНОЕ СМЕЩЕНИЕ: ШКАЛА РАССТОЯНИЙ, ИЗОТРОПИЯ И НЕЛИНЕЙНОСТЬ

С.Ф. Левин

Московский институт экспертизы и испытаний, Москва, Россия

AntoninaEL@rostest.ru

Красное смещение  $z$  в спектрах внегалактических источников одни исследователи связывают с эффектом Доплера и с гравитационным смещением, другие — с потерями энергии на преодоление «сопротивления вакуума» или со «старением света», третьи — с абсолютными звёздными величинами  $M$  этих объектов. Тем не менее, зависимости красного смещения или логарифма т.н. лучевой скорости  $\lg cz$  от видимых звёздных величин  $m$  (диаграмма Хаббла) и фотометрического расстояния  $D_L = 10^{-5+0,2(m-M)}$  в мегапарсеках (Мпс), представляющие собой случайные функции с линейной характеристикой положения (закон Хаббла) стали основой шкал космологических расстояний. Их точность определяется рассеянием красных смещений и анизотропией характеристики положения: среднее абсолютное отклонение для диаграммы Хаббла  $d \sim 0.5$  в единицах красного смещения при анизотропии постоянной Хаббла  $\delta H_0 \sim 12\%$  [1, 2].

Ещё одним фактором, существенно влияющим на точность шкал космологических расстояний, является «неаккуратное» применение статистических методов обработки данных астрофизических измерений. Причём одной из причин этой «неаккуратности» стала недооценка необходимости проверять условия применимости математической статистики, что особенно наглядно демонстрирует анализ противоречий и погрешностей стандартной  $\Lambda$ CDM-модели [3].

Причиной красного смещения может быть комбинация перечисленных выше факторов. В этой связи рассмотрим представление красного смещения в виде двух составляющих — собственной  $z_0 = K \cdot 10^{-0,2M}$ , где  $K = 2,6 \cdot 10^{-6}$  [4], и космологической, представленной 2-параметрическими моделями [3]:

$$z_k = q_0 \{ (H_0/c) D_L - (q_0 - 1) [\sqrt{1 + 2(H_0/c) D_L} - 1] \} \quad (1)$$

$$z_k = (H_0/c) D_L [1 + k(H_0/c) D_L]^k \quad (2)$$

где  $q_0$  — параметр замедления,  $k$  — параметр формы;  $c$  — скорость света.

При  $q_0 = 1$  модель (1) сводится к закону Хаббла 1929 г., а при  $k = -1$  модель (2) — к редукции модели Ф. Хойля в варианте 1966 г. [5]

$$z_k = (H_0/c) D_L / [1 - (H_0/c) D_L] \quad (3)$$





где  $c/H_0 = R_0$  — масштабный фактор в (1) или точка разрыва 2-го рода в (3).

Если в выборке из  $N$  объектов собственное красное смещение  $n$ -го источника как поправку Арпа–Трюмплера выразить через фотометрическое расстояние  $D_{Ln}$  и наблюдаемую звёздную величину  $m_n$  в виде  $z_{0n} = K \cdot 10^{5-0,2m_n} D_{Ln}$ , то уравнение для наблюдаемого красного смещения примет вид

$$z_n = (1 + K \cdot 10^{5-0,2m_n} D_{Ln})[1 + z_k(D_{Ln})] - 1 \quad (4)$$

Исследование уравнения (4) для моделей (1) и (3) по данным измерений угловых координат, красных смещений и звездных величин  $N = 200$  квазаров [1] при  $H_0 = 74,2 \pm 3,6 \text{ км} \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{Мпс}^{-1}$  и  $q_0 = \{0; 1/2; 1\}$  показало следующее.

1. При  $q_0 = -1/2$  у ряда уравнений системы (4) действительных решений нет.
2. Остальные варианты моделей выявили для космологической составляющей красного смещения существенное уменьшение рассеяния относительно характеристики положения. Наименьшую погрешность интерпретации данных дали модель (1) при  $q_0 = 1$  ( $d = 2,72 \cdot 10^{-14}$ ) и модель (3) ( $d = 1,33 \cdot 10^{-14}$ ).
3. При структурной составляющей погрешности неадекватности  $\pm 1,39 \cdot 10^{-13}$  [6] модели (3) соответствует уравнение шкалы космологических расстояний

$$D_L = z / [(1 + z)(H_0/c) + K \cdot 10^{5-0,2m}] \quad (5)$$

4. Проверка модели (3) и закона Хаббла для 172 радиогалактик [1] дала соответственно  $d = 5,024 \cdot 10^{-15}$  против  $d = 1,994 \cdot 10^{-14}$ , для 10 ярчайших скоплений галактик —  $d = 5,358 \cdot 10^{-15}$  против  $d = 1,563 \cdot 10^{-14}$ . Модель (3) для 67 галактик Местной группы даёт  $d = 7,524 \cdot 10^{-15}$ , исключая ближнюю зону в радиусе 3 Мпс, в т.ч. и все случаи фиолетовых смещений.
5. Согласие модели (3) с данными [1] в пределах от 0,01 до 9,16 млрд. световых лет не зависит от угловых координат и морфологических типов объектов.
6. В модели (3) при  $D_L = 0$  «эквивалентное по эффекту Доплера ускорение»  $c \cdot H_0 = 7,21 \cdot 10^{-10} \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}$ , далее оно нарастает до  $9,59 \cdot 10^{-10} \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}$  при  $D_L = 5,4$  млрд. св. лет и спадает до нуля при  $D_L = R_0 = 13,8$  млрд. св. лет. Эти эффекты дают «аномалию Пионеров» ( $8,74 \cdot 10^{-10} \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}$ ) и замедление «ускорения расширения Вселенной» только по данным измерений. Для закона Хаббла они отсутствуют.

Таким образом, в секторах прозрачности Млечного Пути обнаружена изотропия космологической составляющей красного смещения. Анизотропия наблюдаемого красного смещения вызвана неоднородностью распределения квазаров с экстремальными смещениями в полосе, перпендикулярной экватору



Местного Сверхскопления. Эффект является локальным, согласуется с особенностями условий измерений и методов статистической обработки.

## Литература

- [1] Ленг К. Астрофизические формулы. Ч. 2. М., Мир, 384 с., 1978.
- [2] Левин С.Ф. Анизотропия красного смещения // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 1 (15), т. 8, с. 147–178, 2011.
- [3] Левин С.Ф. Измерительные задачи статистической идентификации шкалы космологических расстояний // Измерительная техника. № 12. с. 17–22, 2011.
- [4] Arp H.C. Red shifts of high-luminosity stars – the K-effect, the Trumpler effect and mass-loss correction // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. V. 258. pp. 800–810, 1992.
- [5] Левин С.Ф. Оптимальная интерполяционная фильтрация статистических характеристик случайных функций в детерминированной версии метода Монте–Карло и закон красного смещения. М., НСК АН СССР, 56 с, 1980.
- [6] Р 50.2.004–2000. ГСИ. Определение характеристик математических моделей зависимостей между физическими величинами при решении измерительных задач. Основные положения.



# ИНВЕРСИЯ ВЫДЕЛЕННОГО НАПРАВЛЕНИЯ И СООТВЕТСТВУЮЩИЕ ИЗМЕНЕНИЯ В ГРУППЕ ИЗОМЕТРИЙ АКСИАЛЬНО СИММЕТРИЧНОГО ФИНСЛЕРОВА ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ

**Г.Ю. Богословский**

*НИИ ядерной физики имени Д.В. Скобельцына, МГУ имени М.В. Ломоносова,  
Москва, Россия*

bogoslov@theory.sinp.msu.ru

Показано, что инверсия выделенного направления в аксиально-симметричном финслеровом пространстве-времени не изменяет геометрию Лобачевского пространства 3-скоростей.

Однако она приводит к инверсии соответствующего семейства орисфер в пространстве 3-скоростей.

Этот результат означает, что в предельном случае нулевой анизотропии пространства-времени, т.е. в случае пространства Минковского, существуют две альтернативные 3-параметрические группы преобразований, связывающих инерциальные системы отсчета. В определении одной из них используется направление на произвольно выбранную звезду, а в определении другой — противоположное направление.



# ОБ ОДНОЙ МЕТРИКЕ ПОЛЯ КВАТЕРНИОНОВ

**В.А. Куракин, Ю.И. Ханукаев**

*Московский физико-технический институт, Москва, Россия*

*vkurakin@hotmail.com, khan.yuri@gmail.com*

Для моделирования реальности И.Ньютон ввел пространство и время как математические категории, полагая, что свойства пространства полностью определяются системой аксиом и теорем Евклида. Вопрос о моделировании реального пространства и времени остался открытым.

Последние считаются четырехмерным континуумом (вакуумом), возбужденное состояние которого характеризуется электрической и магнитной напряженностью — силами, действующими на массу, несущую заряд.

В 1911 году А.В. Конвей и независимо в 1912 году Л. Зильберштейн построили кватернионный аналог специальной теории относительности полностью эквивалентный тензорной формулировке, данной Г. Минковским в 1908 году. Итак,

- реальное пространство-время, называемое вакуумом, не есть «пустое» математическое пространство и время И. Ньютона; вакуум есть некая сущность, которую только для некоторых задач можно моделировать пространством и временем И. Ньютона;
- некоторые свойства возмущённого состояния вакуума описываются уравнениями Максвелла, которые форминвариантны относительно преобразований Х. Лоренца;
- единственным аргументом в пользу векторного описания физических полей является консерватизм мышления, и нет причин, по которым они не могут быть полями кватернионов или октав;
- авторами была выдвинута гипотеза о кватернионной природе всех физических полей.

Однако все эти построения не проясняют суть процессов микромира.

Авторами было сделано предположение, что сила взаимодействия любых двух точечных зарядов определяется выражением

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_r \sigma \frac{\alpha}{r^2} \cos \sqrt{\frac{\alpha}{r}}, \quad \sigma, \alpha - const$$

Отметим ряд свойств. Во-первых, рассматриваемая сила не противоречит макроскопическому описанию (при больших значениях  $r$  имеем кулоновское поле). Во-вторых, без привлечения каких-либо дополнительных гипотез осцилляции силы при  $r \rightarrow 0$  позволяют объяснить многие опытные факты



(спектральное распределение излучения, теплоемкость твердого тела, фотоэффект, спектры атомов, дифракцию зарядов). В-третьих, при малых значениях  $r$  имеются положения равновесия, и близкие к круговым устойчивые движения, не требующие постулатов Н.Бора; становится очевидным факт статической устойчивости образований в виде атомов, кристаллических решеток, деформируемых образований типа несжимаемая жидкость, проясняется природа валентных связей и т.д.

Однако при псевдоевклидовой метрике введенный потенциал не является гармоническим.

Эта проблема решается сопоставлением произвольной точке пространственно-временного континуума вектора-октавы или двух векторов-кватернионов. Возникающие наблы-операторы декларируют зависимость функций от восьми переменных: от времени  $x^0$  и времени  $X^0$ , от координат  $x^\alpha$  и координат  $X^\alpha$ . Пространство четырехмерное и реально имеем четыре переменные, но каждая переменная в качестве аргумента в описании поля фигурирует дважды и потому имеет двойное начертание:

$$\begin{aligned} \nabla \circ \mathbf{V} = & -\frac{i}{c} \frac{\partial v}{\partial t} - \operatorname{div} \bar{v} + \frac{i}{c} \frac{\partial V}{\partial T} - \operatorname{Div} \bar{V} - \frac{i}{c} \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \operatorname{grad} v + \\ & + \operatorname{rot} \bar{v} - \frac{i}{c} \frac{\partial \bar{V}}{\partial T} - \operatorname{Grad} V - \operatorname{Rot} \bar{V} - \\ & - \frac{i}{c} \frac{\partial V}{\partial t} - \operatorname{div} \bar{V} - \frac{i}{c} \frac{\partial v}{\partial T} + \operatorname{Div} \bar{v} - \frac{i}{c} \frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + \operatorname{grad} V - \\ & - \operatorname{rot} \bar{V} + \frac{i}{c} \frac{\partial \bar{v}}{\partial T} + \operatorname{Grad} v - \operatorname{Rot} \bar{v}. \end{aligned}$$

Ограничимся случаем, когда каждый кватернион, составляющий октаву, зависит от своих переменных:

$$\begin{aligned} v(t, x, y, z, T, X, Y, Z) &= v(t, x, y, z), \\ \bar{v}(t, x, y, z, T, X, Y, Z) &= \bar{v}(t, x, y, z), \\ V(t, x, y, z, T, X, Y, Z) &= V(T, X, Y, Z), \\ \bar{V}(t, x, y, z, T, X, Y, Z) &= \bar{V}(T, X, Y, Z), \end{aligned}$$

тогда

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \operatorname{Rot} &\equiv 0, \quad \operatorname{Div} \operatorname{rot} \equiv 0, \\ \operatorname{grad} \operatorname{Div} &\equiv 0, \quad \operatorname{Grad} \operatorname{div} \equiv 0, \\ \operatorname{rot} \operatorname{Grad} &\equiv 0, \quad \operatorname{Rot} \operatorname{grad} \equiv 0. \end{aligned}$$

При наличии центральной симметрии пространственно временной интервал имеет вид

$$ds^2 = dr \circ dr^* = \left( \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} dt \right)^2 - \left( \frac{d\rho}{dr} dr \right)^2 - (\rho d\theta)^2 - (\rho \sin \theta d\phi)^2,$$



где  $\rho(r)$  — функция, обеспечивающая осцилляции потенциала при малых значениях  $r$ . Таким образом, всё свелось к замене  $r \rightarrow \rho(r)$ .

Рассмотренное выше, статическое поле есть суперпозиция двух полей:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}^\pm &= \text{grad}V^\pm = \frac{\mathbf{e}_1}{d\rho^\pm/dr} \frac{\partial V^\pm}{\partial r} = \mathbf{e}_1 \frac{\partial V^\pm}{\partial \rho^\pm} = \mathbf{e}_1 \frac{\partial}{\partial \rho^\pm} \left( \frac{1}{\rho^\pm} \right) = \\ &= -\mathbf{e}_1 \frac{1}{\rho^\pm \rho^\pm} = -\mathbf{e}_1 \frac{\alpha^2}{r^2} \exp\left(\pm i2\sqrt{\frac{k}{r}}\right) \rightarrow \rho^\pm = \frac{r}{\alpha} \exp\left(\mp i\sqrt{\frac{k}{r}}\right).\end{aligned}$$

Потенциалы  $V^+ = 1/\rho^+$  и  $V^- = 1/\rho^-$  можно рассматривать как скалярные компоненты взаимно сопряженных кватернионов, составляющих октаву.

При больших значениях  $r$  метрика пространственно-временного континуума псевдоевклидова, а при малых — имеем два экземпляра осциллирующих комплексно сопряжённых континуумов.

Таким образом, осцилляции поля кватернионов или октав в малой окрестности нуля, можно трактовать как следствие свойства пространства, отраженное в метрике.



# РЕГИСТРАЦИЯ ВЫСОКОЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ИЗ ОБЛАСТИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО РАЗРЯДА В ПОТОКЕ ВОДЫ

**Н.Ф. Перевозчиков, Г.И. Дьяконов, Г.Н. Певгов,  
В.Ф. Шарихин**

*Московский физико-технический институт, Долгопрудный, Россия*  
n125252p@rambler.ru

В работе [1] в экспериментах по электровзрыву металлических проволочек в жидкости на фотопленках фиксировалось высокоэнергетическое излучение. Вид этих следов отличался от следов на фотоэмульсиях при ядерных экспериментах. В работах других авторов [2, 3] при разных условиях наблюдались похожие результаты — фиксировались следы на фотопленке, менялись структура и элементный состав материала электродов и другие явления. Мы провели эксперименты с квазидуговым разрядом в потоке воды. На электроды особой формы, которые находились в потоке воды, подавалось переменное напряжение 1кВ, (ток разряда 25А). Рулонная фотопленка в пластиковых кассетах находилась на расстояниях 15–25 см.

В первом же эксперименте на облучённой фотоплёнке нами были обнаружены «следы». В дальнейшем при вариации условий эксперимента были найдены оптимальные условия высокой воспроизводимости результатов. На контрольных фотоплёнках, расположенных вне зоны облучения «следов» не было. Так же как и в экспериментах [3] размеры следов на фотоплёнке варьировались от 10 мм до 10 мкм. Поэтому все фотоплёнки сканировались на фотосканере с высоким разрешением, а отдельные фрагменты изучались с использованием оптического микроскопа и регистрировались цифровой фотокамерой. Обработка цифровых изображений позволила выявить различные типы следов. Простейшими следами являлись объекты в виде точек, которые при большом увеличении имели вид кругов или овалов диаметром от 10 мкм до 200–300 мкм. Часто следы были в виде прямых или изогнутых прерывистых линий, серпиков и «грибков» Примеры таких следов приведены на рис. 1 и 2.

На рис. 1 приведена «грибообразная» фигура. Размер «шляпки» на этой фотографии 5 мм. Такие фигуры регистрировались очень часто и их размер был от 2 до 10 мм. На рис. 2 показана фотография части «шляпки» с увеличением 40, где наблюдается слоистая структура похожая на след ударной волны. В местах фотопленки, где наблюдаются грибки, видна деформация полимерной основы, что указывает на большой энергетический выход. В одном случае деформация оказалась весьма значительной — по площади 5 мм и по высоте 2 мм.

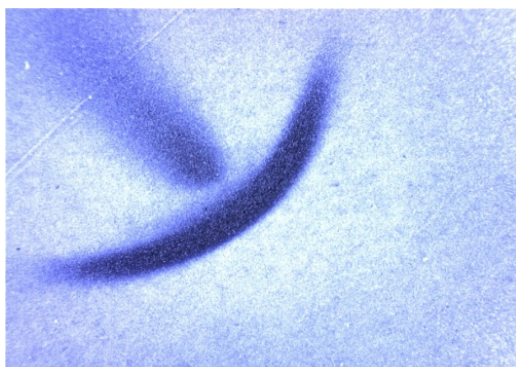


Рис.1

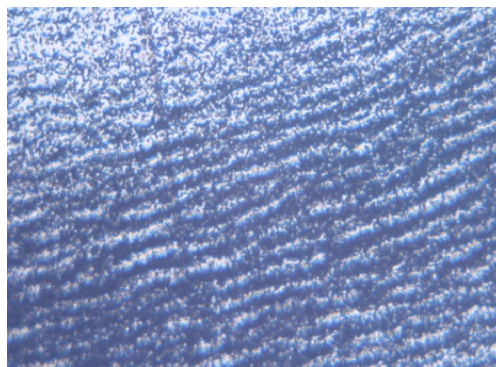


Рис.2

Необходимо отметить большое сходство следов на фотоплёнках в наших экспериментах и в экспериментах с электровзрывом проводников в воде [1]. Всё это означает, что фиксируемое нами излучение реально и соответствует наблюдениям других исследователей. Очевидно также, что фиксируемое излучение резко отличается по своим проявлениям от известных к настоящему времени излучений, полей и частиц.

Работа выполнена при частичной поддержке гранта РНПВШ, Г. З. 31

## Литература

- [1] Уруцкоев Л.И., Ликсонов В.И., Циноев В.Г. Экспериментальное обнаружение «странного» излучения и трансформации химических элементов // Прикладная физика, № 4. с. 83–100, 2000.
- [2] Богданович Б.Ю., Волков Н.В., Нестерович А.В. Экспериментальное исследование квазипериодического импульсного разряда в потоке жидкости // Инженерная физика, М., МИФИ, № 1, с. 19-23, 2000.
- [3] Евмененко В.В., Малахов Ю.И., Шарихин.Ф.В. Исследование взаимодействия лазерного излучения с омагниченной водой. Труды VIII Международной научно — технической конференции «Оптические методы исследования потоков», Москва, Россия, 28 июня – 1 июля 2005 г. с. 373 – 376.





# О ЛОГАРИФМИЧЕСКОМ ВЫЧЕТЕ В ТРЕХМЕРНОЙ ГАРМОНИЧЕСКОЙ АЛГЕБРЕ С ДВУМЕРНЫМ РАДИКАЛОМ

С.А. Плакса, В.С. Шпаковский

Украина

Пусть  $\mathbb{A}_3$  — трехмерная коммутативная ассоциативная банахова алгебра над полем комплексных чисел  $\mathbb{C}$ , базис которой состоит из единицы алгебры 1 и элементов  $\rho_1, \rho_2$ , для которых выполняются правила умножения:

$$\rho_1\rho_2 = \rho_2^2 = 0, \quad \rho_1^2 = \rho_2.$$

Рассмотрим базис

$$e_1 = 1, \quad e_2 = i + \rho_2, \quad e_3 = (1 - i)\rho_1$$

алгебры  $\mathbb{A}_3$ , удовлетворяющий условию  $e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 0$ , т. е. являющийся *гармоническим*.

Выделим в алгебре  $\mathbb{A}_3$  линейную оболочку  $E_3 := \{\zeta = x + ye_2 + ze_3 : x, y, z \in \mathbb{R}\}$  над полем действительных чисел  $\mathbb{R}$ , порожденную векторами гармонического базиса  $1, e_2, e_3$ .

Непрерывная функция  $\Phi : \Omega_\zeta \rightarrow \mathbb{A}_3$  называется *моногенной* в области  $\Omega_\zeta \subset E_3$ , если  $\Phi$  дифференцируема по Гато в каждой точке этой области, то есть если для каждого  $\zeta \in \Omega_\zeta$  существует элемент  $\Phi'(\zeta)$  алгебры  $\mathbb{A}_3$  такой, что выполняется равенство

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\Phi(\zeta + \varepsilon h) - \Phi(\zeta)) \varepsilon^{-1} = h\Phi'(\zeta) \quad \forall h \in E_3.$$

$\Phi'(\zeta)$  называется *производной Гато* функции  $\Phi$  в точке  $\zeta$ .

Пусть  $\zeta_0 := x_0 + y_0e_2 + z_0e_3 \in E_3$  и функция  $\Phi : \mathcal{K}_{\zeta_0}(0, R) \rightarrow \mathbb{A}_3$  моногенна в кольцевой цилиндрической области

$$\mathcal{K}_{\zeta_0}(0, R) := \{\zeta = x + ye_2 + ze_3 : 0 < (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < R^2, z \in \mathbb{R}\}.$$

Если при этом логарифмическая производная  $\Phi'(\zeta)(\Phi(\zeta))^{-1}$  также является моногенной функцией в области  $\mathcal{K}_{\zeta_0}(0, R)$ , то *логарифмическим вычетом* функции  $\Phi$  в точке  $\zeta_0$  назовем интеграл

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{\zeta_0}(r)} \Phi'(\zeta)(\Phi(\zeta))^{-1} d\zeta,$$



где  $\Gamma_{\zeta_0}(r) := \{\zeta = x + ye_2 + ze_3 : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2\}$  и  $r < R$ . Из теоремы Коши для моногенных функций в алгебре  $\mathbb{A}_3$  следует, что величина логарифмического вычета не зависит от  $r$  при  $0 < r < R$  и, кроме того, справедливо равенство

$$\int_{\Gamma_{\zeta_1}(r)} \Phi'(\zeta)(\Phi(\zeta))^{-1}d\zeta = \int_{\Gamma_{\zeta_0}(r)} \Phi'(\zeta)(\Phi(\zeta))^{-1}d\zeta \quad \forall \zeta_1 = \zeta_0 + z_1e_3,$$

т. е. логарифмические вычеты функции  $\Phi$  во всех точках прямой  $\{\zeta_0 + ze_3 : z \in \mathbb{R}\}$  равны.

В случае, когда функция  $\Phi$  моногенна в области  $\mathcal{K}_{\zeta_0}(0, R)$  и не принимает в этой области значений в радикале  $\mathcal{I} := \{\lambda_1\rho_1 + \lambda_2\rho_2 : \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}\}$ , назовем прямую  $\{\zeta_0 + ze_3 : z \in \mathbb{R}\}$  *сингулярностью логарифмической производной* функции  $\Phi$ , если точка  $\zeta_0$  является неустранимой особой точкой функции  $\Phi$  или же  $\Phi(\zeta_0) \in \mathcal{I}$ . Если при этом функция  $\Phi$  представима в виде

$$\Phi(\zeta) = (\zeta - \zeta_0)^{n_0}\varphi_0(\zeta) + \psi(\zeta)\rho_1 + \phi(\zeta)\rho_2, \quad (1)$$

где  $n_0$  — некоторое целое число,  $\varphi_0$  — моногенная в цилиндрической области  $\mathcal{K}_{\zeta_0}(R) := \{\zeta = x + ye_2 + ze_3 : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < R^2, z \in \mathbb{R}\}$  функция, не принимающая в этой области значений в радикале  $\mathcal{I}$ , а  $\psi$  и  $\phi$  — моногенные в области  $\mathcal{K}_{\zeta_0}(0, R)$  функции, то показатель степени  $n_0$  в разложении (1) назовем *показателем сингулярности* логарифмической производной функции  $\Phi$  в точке  $\zeta_0$ .

**Теорема.** Пусть  $D$  — область в комплексной плоскости и функция  $\Phi$  моногенна всюду в области  $\Pi_\zeta := \{\zeta = x + ye_2 + ze_3 : x + iy \in D\}$  за исключением, быть может, некоторого множества особых точек. Пусть область  $G$ , компактно принадлежащая области  $D$ , ограничена замкнутой жордановой спрямляемой кривой  $\gamma$  и такая, что в области  $G_\zeta := \{\zeta = x + ye_2 + ze_3 : x + iy \in G\}$  содержится лишь конечное множество  $\{L_k\}_{k=1}^m$  сингулярностей  $L_k := \{\zeta_k + ze_3 : z \in \mathbb{R}\}$  логарифмической производной функции  $\Phi$ , при этом показатель сингулярности  $n_k$  логарифмической производной функции  $\Phi$  в точке  $\zeta_k$  конечен при всех  $k = 1, 2, \dots, m$ , а граница  $\partial G_\zeta$  области  $G_\zeta$  не содержит указанных сингулярностей. Тогда справедливо равенство

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\zeta} \Phi'(\zeta)(\Phi(\zeta))^{-1}d\zeta = \sum_{k=1}^m n_k,$$

где  $\Gamma_\zeta$  — замкнутая жорданова спрямляемая кривая на поверхности  $\partial G_\zeta$ , гомотопная кривой  $\{x + ye_2 : x + iy \in \gamma\}$ .



# ТЕОРИЯ ИНВАРИАНТОВ В ПРИЛОЖЕНИИ К НЕЛИНЕЙНЫМ АЛГЕБРАИЧЕСКИМ УРАВНЕНИЯМ

**Ш.Р. Шакиров**

*Калифорнийский университет, Беркли, США*  
*Институт Теоретической и Экспериментальной Физики, Москва, Россия*  
shakirov@itep.ru

Нелинейные алгебраические уравнения и системы уравнений представляют большой интерес не только с точки зрения чистой математики, но также с точки зрения самых разнообразных приложений, начиная от гладкой геометрии – описания Финслеровых метрических функций типа Шимады (задающихся корнем  $m$ -той степени из однородной  $m$ -формы) – и заканчивая дискретной геометрией фракталов типа Мандельброта и сопутствующих им конечно-разностных динамических систем. В этих и многих других областях возникает необходимость описывать основные объекты исследования с помощью полиномиальных уравнений достаточно высокой степени. Точные решения таких уравнений выражаются в элементарных функциях (например, в радикалах) лишь в исключительных случаях; в общем случае точное решение, как правило, недоступно для исследования и приходится прибегать к приближенным и численным методам.

Во многих задачах, в особенности в задачах фундаментальной теоретической физики, применение приближенных решений неудовлетворительно или неэффективно. По этой причине, в последние годы все активнее начинают развиваться новые методы работы с точными, не приближенными, решениями алгебраических уравнений. Одним из наиболее интересных направлений исследования в этой области является современная *теория инвариантов*.

Применение теории инвариантов к нелинейным алгебраическим уравнениям во многом основано на наблюдении, что на решениях алгебраических уравнений и систем действует симметрическая группа. Несмотря на то, что отдельные решения (ветви) не выражаются в элементарных функциях, симметрические комбинации решений являются элементарными и, более того, полиномиальными функциями от коэффициентов уравнений! Простейший и наиболее широко известный пример этого явления – дискриминант полинома  $m$ -той степени,

$$D = \prod_{i < j}^m (\lambda_i - \lambda_j)^2$$

где  $\lambda_i$  – корни полинома. Более сложные и интересные примеры включают в себя общие дискриминанты форм от многих переменных, результаты систем многих уравнений, и другие подобные величины. Все эти величины по



построению являются инвариантами алгебраической системы, то есть, не зависят от выбора системы координат (замен переменных).

Каждый инвариант алгебраического уравнения или системы позволяет ответить на определенный вопрос о решениях этого уравнения или системы. Дискриминант, к примеру, позволяет – не вычисляя самих решений – ответить на вопрос, существуют ли два совпадающих решения. Таким образом, теория инвариантов дает крайне полезный в приложениях способ изучать *качественные* свойства решений нелинейных алгебраических уравнений и систем.

Особую важность, таким образом, имеют практические, конструктивные методы явного построения инвариантов алгебраических систем. В частности, в рамках данного исследования я рассматриваю задачу о так называемом инварианте Кэли-Сэлмона в классической геометрии планарных кривых. В конце 19 века А. Кэли доказал, что планарная кривая степени 4 имеет касательную кратности 4 тогда и только тогда, когда определенный инвариант, называемый инвариантом Кэли-Сэлмона, обращается в ноль. Кэли доказал что данный инвариант имеет степень 60, но в силу чрезвычайно высокой вычислительной сложности задачи не нашел явной формулы для этого инварианта. Мною получена явная формула для инварианта Кэли-Сэлмона как определителя  $21 \times 21$  матрицы с полиномиальными компонентами.



# МАТРИЧНАЯ ГЕНЕТИКА, ГИПЕРКОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА И ПРАВИЛА ДЛИННЫХ ГЕНЕТИЧЕСКИХ СЕКВЕНЦИЙ

С.В. Петухов, В.И. Свирин, И.В. Степанян

*Институт машиноведения РАН, Москва, Россия*

spetoukhov@gmail.com, vitaly.i.svirin@gmail.com, neurocomp.pro@gmail.com

Представлены результаты исследований в области матричной генетики, изучающей многоуровневую систему взаимосвязанных молекулярно-генетических алфавитов на основе применения матричных методов теории помехоустойчивого кодирования. Выявлены связи данной системы алфавитов с системами гиперкомплексных чисел (в том числе, с кватернионами Гамильтона и сплит-кватернионами Кокла и их расширениями), ортогональными системами функций Радемахера и Уолша, матрицами Адамара и др. Излагаются числовые представления системы генетических алфавитов на основе диадических групп и матриц диадических сдвигов, позволяющие выявить скрытые закономерности организации генетической информации. Предлагаются новые подходы для исследования длинных последовательностях нуклеотидов ДНК, а также выявленные особенности представительного ряда таких секвенций, включая полный геном человека, состоящий из 2.843.411.612 триплетов. Речь идет о дихотомических алфавитных деревьях с инверсионно-диадическими симметриями для названных последовательностей, а также выявляемых для таких последовательностей правилах количественных соответствий между триплетами, принадлежащими к определенным бинарно-оппозиционным подмножествам множества 64 триплетов. Например, приводятся данные о закономерной организации генома человека при его исследовании в связи с мозаичными генетическими  $(8 \times 8)$ -матрицами типа  $[C\ T; A\ G]^{(3)}$ , соответствующих по своей черно-белой мозаике расстановке знаков плюс и минус в матричном представлении бикватернионов Гамильтона (здесь C, T, A, G обозначают цитозин, аденин, тимин и гуанин, а в скобках указана третья кронекеровская степень матрицы). Также приводятся данные о закономерной организации длинных генетических секвенций, свертываемых по отдельным позициям триплетов (позиционно-языковой подход к исследованию секвенций ДНК). Выявленные закономерности свидетельствуют о существовании своеобразных числовых аттракторов в структуре генетических секвенций и дают основу для разрабатываемых авторами доклада подходов к применению идеологии динамического хаоса при моделировании генетического кодирования. Обсуждаются вопросы программного обеспечения и нейрокомпьютерного моделирования в области матричной генетики, а также практические приложения полученных результатов.



Представляемые результаты дополняют понимание живого организма как алгоритмической машины многоканального помехоустойчивого кодирования, в которой молекулярно-генетическая информация используется для реализации законов Менделя на организменном уровне. Освещаются структурные параллелизмы между системой молекулярно-генетических алфавитов и системой наследования признаков у целостных организмов, подчиняющейся законам Менделя и представляемой классическими решетками Пеннета. Можно полагать, что законы Менделя наследования признаков открыли только верхушку огромного алгебраического айсберга информационной организации живой материи и что матричная генетика открывает его новые части. Дополнительно отмечаются аналогии между системой генетических алфавитов и символьной системой древнекитайской «Книги Перемен», написанной несколько тысяч лет назад.

Система молекулярно-генетических алфавитов, общая для всех живых организмов, своими алгебраическими свойствами подсказывает новый — алгебраический — путь познания живой материи и развития алгебраической биологии, связанной с гиперкомплексными числами. Живая материя, обеспечивающая передачу наследственной информации по цепи поколений, предстает информационной сущностью, глубоко алгебраичной по своей природе.

## Литература

- [1] Петухов С.В. Матричная генетика, алгебры генетического кода, помехоустойчивость. М., Регулярная и хаотическая динамика, 316 с, 2008.
- [2] Петухов С.В. Гиперкомплексные числа и алгебраическая система генетических алфавитов. Элементы алгебраической биологии. // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, № 2 (16), т. 8, с. 118-139, 2011.
- [3] Petoukhov S.V., He M. Symmetrical Analysis Techniques for Genetic Systems and Bioinformatics: Advanced Patterns and Applications. Hershey, USA, IGI Global, 2010.
- [4] Petoukhov S.V. Dyadic groups, dyadic trees and symmetries in long nucleotide sequences. <http://arxiv.org/abs/1204.6247> (from 27.05.2012).
- [5] Степанян И.В. Научно-методические основы и биоинформационные технологии управления профессиональными рисками в медицине труда. Автореферат диссертации доктора биологических наук, М., 2012.



## ТЕЛА ГИПЕРКОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

Турбин А.Ф., Ю.Д. Жданова

*Институт математики НАН Украины, Киев, Украина*  
*Государственный университет информационно-коммуникационных технологий,*  
*Киев, Украина*  
turbin@imath.ua, yuzhdanova@yandex.ru

Теорема Адамса Дж. Ф. (см. [1]): конечномерные алгебры с делением над существуют лишь в размерностях 1, 2, 4, 8.

Пусть  $Alg_n^1(R, +, *_1)$  и  $Alg_n^2(R, +, *_2)$  — две (не обязательно ассоциативные)  $n$ -мерные действительные алгебры гиперкомплексных чисел,  $Alg_n^1(Z, +, *_1)$  и  $Alg_n^2(Z, +, *_2)$  — их подалгебры, кольца целых гиперкомплексных чисел.

**Определение.** Алгебры  $Alg_n^1(R, +, *_1)$  и  $Alg_n^2(R, +, *_2)$  назовем арифметически изоморфными, если они изоморфны как абстрактные алгебры и кольца  $Alg_n^1(Z, +, *_1)$  и  $Alg_n^2(Z, +, *_2)$  изоморфны как абстрактные кольца.

С точностью до арифметического изоморфизма конечномерные алгебры гиперкомплексных чисел с делением имеются во всех размерностях  $n \geq 4$ .

$n$ -мерные ( $n \geq 4$ ) действительные алгебры гиперкомплексных чисел, с делением, приводимые в докладе, построены как простые расширения поля эллиптических чисел [2].

**Поле эллиптических чисел.** Пусть  $\{V^2(R), +\}$  — двумерное аффинно векторное пространство над полем скаляров  $R$ , рассматриваемое как абелева топологическая группа по сложению,  $\vec{\tau}_1, \vec{\tau}_2$  — базисные векторы.

Операция умножения  $*$  векторов  $\vec{x} = x_1\vec{\tau}_1 + x_2\vec{\tau}_2$  и  $\vec{y} = y_1\vec{\tau}_1 + y_2\vec{\tau}_2$  из  $V^2(R)$  вводится равенством

$$\begin{aligned} \vec{x} * \vec{y} &= (x_1\vec{\tau}_1 + x_2\vec{\tau}_2) * (y_1\vec{\tau}_1 + y_2\vec{\tau}_2) = \\ &= (x_2y_2 - x_1y_2 - x_2y_1)\vec{\tau}_1 + (x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1)\vec{\tau}_2 \end{aligned} \quad (1)$$

Для  $\vec{\tau}_0 := -\vec{\tau}_1 - \vec{\tau}_2$  из (1) следует  $\vec{\tau}_0 * \vec{x} = \vec{x} * \vec{\tau}_0 = \vec{x}$ , т.е.  $\vec{\tau}_0$  — единица построенной алгебры  $\{V^2(R), +, *\}$ .

Если  $\vec{y} = x_2\vec{\tau}_1 + x_1\vec{\tau}_2 = \vec{x}'$ , то  $\vec{x} * \vec{x}' = \Delta(\vec{x})\vec{\tau}_0$ , где  $\Delta(\vec{x}) = x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2$ .

Эллиптическая форма  $\Delta(\vec{x}) = x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2$  положительно определена, поэтому, любой ненулевой элемент двумерной коммутативной алгебры эллиптических чисел  $Ell(R) = \{V^2(R), +, *\}$  обратим:  $\vec{x}^{-1} = \frac{1}{\Delta(\vec{x})}\vec{x}'$ , отсюда

**Теорема 1.** Алгебра эллиптических чисел  $Ell(R)$  является полем.

**Теорема 2.** Поле  $C$  комплексных чисел и поле  $Ell_2(R)$  эллиптических чисел



арифметически неизоморфны.

Пусть  $V^4(R)$  — четырехмерное аффинно векторное пространство над полем действительных чисел  $R$ ,  $\vec{\tau}_i, i = 1, 2, 3, 4$ , — фиксированный базис. Умножение  $*$  в  $V^4(R)$  вводится так, чтобы  $\vec{\tau}_0 * \vec{x} = \vec{x} * \vec{\tau}_0 = \vec{x}$ , где  $\vec{\tau}_0 = -\vec{\tau}_1 - \vec{\tau}_2$ , и для  $\vec{x}' = x_2\vec{\tau}_1 + x_1\vec{\tau}_2 - x_3\vec{\tau}_3 - x_4\vec{\tau}_4$ ,

$$\vec{x} * \vec{x}' = \vec{x}' * \vec{x} = \Delta(\vec{x})\vec{\tau}_0$$

где  $\Delta(\vec{x}) = (x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2) + x_3^2 + x_4^2$ . Тогда  $\vec{x}^{-1} = \frac{1}{\Delta(\vec{x})}\vec{x}'$  и четырёхмерная ассоциативная некоммутативная алгебра гиперкомплексных чисел  $ASELLN_4(R) = V^4(R, +, *)$  является расширением поля эллиптических чисел  $Ell(R)$ .

**Теорема 3.** Четырёхмерная алгебра суперэллиптических чисел  $ASELLN_4(R)$  является телом.

**Теорема 4.** Тело кватернионов  $\mathbb{H}$  и тело суперэллиптических чисел  $ASELLN_4(R)$  арифметически неизоморфны.

Предложенная конструкция продолжения поля эллиптических чисел  $Ell(R)$  переносится в любые размерности  $n \geq 5$  и позволяет строить тела суперэллиптических чисел  $ASELLN_n(R)$ , в которых для  $\vec{x} = (x_1\vec{\tau}_1 + x_2\vec{\tau}_2) + \sum_{k=3}^n x_k\vec{\tau}_k$

$$\text{и } \vec{x}' = (x_1\vec{\tau}_1 + x_2\vec{\tau}_2) - \sum_{k=3}^n x_k\vec{\tau}_k$$

$$\vec{x} * \vec{x}' = \Delta(\vec{x})\vec{\tau}_0,$$

$$\text{Где } \Delta(\vec{x}) = (x_1^2 - x_1x_2\vec{\tau}_2 + x_2^2) + \sum_{k=3}^n x_k^2 \text{ и } \vec{x}^{-1} = \frac{1}{\Delta(\vec{x})}\vec{x}'.$$

## Литература

- [1] Общая алгебра. Т. 1. Под общ. Ред. Л.А. Скорнякова. М., Наука, Гл. ред. Физ.-мат. Лит. 592 с, 1990.
- [2] Turbin A.F. Arithmetic classification of 4-dimensional algebras of hypercomplex numbers. 6th International Algebraic Conference in Ukraine (July 1-7, 2007, Kamyanets-Podilsky, Ukraine). Abstracts. Kyiv Institute of Mathematics of NAS of Ukraine. pp. 210-211, 2007.





# ИЗМЕНЕНИЕ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ СВОЙСТВ ВЕЩЕСТВ В УСЛОВИЯХ ЛОКАЛЬНЫХ ВАРИАЦИЙ ВЕКТОРНОГО ПОТЕНЦИАЛА ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

**Е.И. Егоров**

*Омск, Россия*  
omsert@mail.ru

Экспериментально показано, что чрезвычайно малые, локальные вариации ВП приводят к воспроизводимо регистрируемым изменениям таких фундаментальных характеристик вещества, как плотность и спектр, которые после прекращения воздействия, релаксируют к показаниям, соответствующим ВП более крупного масштаба.

Изменения ВП в локальной области производились инженерными устройствами, изготовленными в соответствие с заявкой автора на Патент РФ [1], которые представляют собой соленоидальные структуры, охватывающие области, в которых производится варьирование ВП. Принцип генерации ВП в классическом приближении электродинамики Дж.К. Максвелла может быть описан уравнениями теории поля [2].

Показана возможность регистрации чрезвычайно низкочастотных (суточных и более) изменений ВП в приземной области посредством оптических систем, что, судя по всему, позволяет регистрировать движение Земли относительно некоего суммарного ВП, формируемого, в том числе, и глобально-галактическими ВП, которые могут обеспечивать глобальную анизотропию физического пространства.

## **Литература**

- [1] Егоров Е.И. Заявка на Патент РФ № 2009132235/20(045270) с приоритетом от 26.08.2009 г.
- [2] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля // М., Наука, с. 137, 1973.



## Н-АРНЫЕ ОПЕРАЦИИ НА МНОЖЕСТВЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ МАТРИЦ. СЛУЧАЙ $N=3$ , КАК ПРЕДМЕТ БОЛЕЕ ДЕТАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАНИЯ

А.В. Лапшин

*НИИ Гиперкомплексных систем в геометрии и физике, Фрязино, Россия  
Учебно-научный институт Гравитации и Космологии РУДН, Москва, Россия  
lavexander@mail.ru*

Определено понятие  $n$ -арного произведения  $n$  пространственных  $n$ -мерных матриц. Предложен алгоритм последовательного увеличения размерности на единицу, визуализированный с помощью системы из  $n-1$  косы, каждая из которых соответствует одному из индексов суммирования. Более подробно рассмотрено тернарное произведение трёх пространственных 3-х мерных матриц вида:

$$D_{ijk} = \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^r A_{ilm} B_{lmk} C_{mjl}. \quad (1)$$

Рассмотрен ряд частных случаев применения такой операции. Введены три типа тождественного отображения произвольной кубической матрицы на себя тремя различными парами единичных кубических матриц вида:

$$id_{left} : A_{ijk} \overset{l}{E} \overset{l}{E} = A_{ijk}; \quad E_{ijk}^l = \begin{cases} 1, & \text{if } j = k, \\ 0, & \text{if } j \neq k; \end{cases} \quad i, j, k \in [1, n]; \quad (2)$$

$$id_{center} : \overset{c}{E} A_{ijk} \overset{c}{E} = A_{ijk}; \quad E_{ijk}^c = \begin{cases} 1, & \text{if } i = k, \\ 0, & \text{if } i \neq k; \end{cases} \quad i, j, k \in [1, n]; \quad (3)$$

$$id_{right} : \overset{r}{E} \overset{r}{E} A_{ijk} = A_{ijk}; \quad E_{ijk}^r = \begin{cases} 1, & \text{if } i = j, \\ 0, & \text{if } i \neq j; \end{cases} \quad i, j, k \in [1, n]. \quad (4)$$

Рассмотрены «тернарные квадраты», т.е. матрицы вида:

$$B = AAE; \quad C = AEA; \quad D = EAA; \quad E = \overset{l}{E}, \overset{c}{E}, \overset{r}{E}. \quad (5)$$