ИДЕМПОТЕНТЫ И НИЛЬПОТЕНТЫ В КЛИФФОРДОВОЙ АЛГЕБРЕ ЕВКЛИДОВА 3-ПРОСТРАНСТВА И ИХ СВЯЗЬ С ФИЗИКОЙ

О. А. Морнев

Институт теоретической и экспериментальной биофизики РАН, г. Пущино
mornev@mail.ru

Исследована структура идемпотентов и нильпотентов индекса 2 пространственной алгебры – клиффордовой алгебры Cl_3, порождённой линейным трёхмерным евклидовым пространством E_3 над полем действительных чисел. Найден общий вид указанных элементов и выявлены их алгебраические свойства и геометрическая интерпретация. Обнаружена эквивалентность действия групп фазовых преобразований (U_1) и вращений и (SO_3) на нильпотенты индекса 2: фазовые преобразования нильпотента, реализуемые его умножением на комплексные экспоненты, приводят к пространственным поворотам нильпотента в E_3 (обратное также верно). Показано, что нильпотенты индекса 2 – единственные элементы алгебры Cl_3, для которых указанная эквивалентность действия групп U_1 и SO_3 имеет место; таким образом, это свойство нильпотентов является характеристическим. Полученные результаты применены к анализу геометрии вакуумных решений уравнений Максвелла без источников, описывающих плоские гармонические электромагнитные волны – фотоны с двумя типами спиральности. На основе предпринятого анализа выдвинута неформальная гипотеза о том, что реальное физическое пространство имеет не менее шести измерений: в минимальном случае его базис состоит из шести линейно независимых элементов – трёх векторов и трёх бивекторов, порождённых этими векторами.

Ключевые слова: клиффордова алгебра, геометрическая алгебра, пространственная алгебра, идемпотенты, нильпотенты, группа фазовых преобразований U_1, группа вращений SO_3, комплексные числа, кватернионы, электромагнитные волны, фотоны, размерность пространства.

Полвека назад Марсель Рисс (Marcel Riesz) своими лекциями, прочитанными в Мерилендском университете (США) между октябрём 1957 – январём 1958, фактически объявил, что в основе унифицированного алгебро-геометрического описания физической реальности – не только её квантовых аспектов – с неизбежностью должны лежать адекватно интерпретированные алгебры Клиффорда. Кончина Рисса оборвала намеченный путь, и в книге [1], изданной по его лекциям, недостаёт двух глав (лишь сравнительно недавно одна из них была найдена и опубликована во втором издании его лекций [2]). Однако точка зрения Рисса была осознана, подхвачена и затем чрезвычайно эффективно (и эффектно) развита и внедрена в сознание научного сообщества Дэвидом Хестенесом (David Hestenes) [3–5], который был удостоен за свои усилия медали Эрстеда [6]. Ныне предвидение Рисса подтверждается всё большим числом публикаций, включая монографии как фундаментальной [7–9], так и прикладной направленности [9–11].

Вышедшие на физическую арену из недр квантовой теории, алгебры Клиффорда[1] позволяют по-новому взглянуть также и на геометрию макроскопического мира. При этом роль классического фундамента, над которым надстраиваются последующие – "релятивистский" и "квантовый" – этажи возводимого здания, отводят *геометрической алгебре*

[1] Эти алгебры ассоциативны, но некоммутативны и входят в класс унитальных алгебр, т. е. алгебр с единицей. Положение алгебр Клиффорда в математике можно уяснить по руководствам [12–15].

физического пространства[2] – клиффордовой алгебре Cl_3, порождённой линейным трёхмерным евклидовым пространством E_3 над полем действительных чисел [3, 5, 7, 9].

Эффективность пространственной алгебры как инструмента, отвечающего нуждам физики, обусловлена тремя обстоятельствами.

Во-первых, её носитель (т. е. линейное пространство, несущее структуру алгебры) образован прямой суммой линейных пространств скаляров, векторов, бивекторов и тривекторов – объектов, имеющих непосредственный геометрический смысл.

Во-вторых, мультипликативная операция этой алгебры, вбирая в себя свойства привычных скалярного, векторного, смешанного и внешнего произведений, позволяет не только компоновать из объектов одних подпространств носителя объекты других его подпространств, но и измерять эти объекты в числах.

В третьих, Cl_3 содержит подалгебры, изоморфные двум замечательным алгебрам – алгебрам комплексных чисел и кватернионов; поэтому вся мощь последних может быть сразу же задействована в Cl_3.

В силу известной теоремы Фробениуса невозможно определить операцию деления на всей пространственной алгебре; иными словами, Cl_3 содержит делители нуля. Общеалгебраическими примерами делителей нуля являются *взаимно ортогональные идемпотенты* (ненулевые элементы $\boldsymbol{E}_+$ и $\boldsymbol{E}_-$ алгебры, такие, что $\boldsymbol{E}_+^2 = \boldsymbol{E}_+$, $\boldsymbol{E}_-^2 = \boldsymbol{E}_-$, $\boldsymbol{E}_+\boldsymbol{E}_- = \boldsymbol{E}_-\boldsymbol{E}_+ = 0$), а также *нильпотенты индекса 2* (ненулевые элементы $\boldsymbol{N}$, удовлетворяющие условию $\boldsymbol{N}^2 = 0$). Алгебра Cl_3 содержит и те, и другие. Известно (это будет видно также и из дальнейшего), что помимо тривиального идемпотента – единицы $\mathbf{1}$, идемпотентами этой унитальной алгебры являются все *паравекторы*[3] вида $\boldsymbol{E}_\pm = \frac{1}{2}(\mathbf{1} \pm \boldsymbol{\sigma})$, где $\boldsymbol{\sigma}$ – произвольный единичный пространственный вектор; при этом эти идемпотентные паравекторы удовлетворяют равенству $\mathbf{1} = \boldsymbol{E}_+ + \boldsymbol{E}_-$ и ортогональны друг другу. Примерами же нильпотентов в Cl_3 являются суммы вида $\boldsymbol{U} + \boldsymbol{B}$, где $\boldsymbol{U}$и $\boldsymbol{B}$ – произвольные пространственные вектор и бивектор с равными нормами.

Исчерпываются ли элементами указанного вида все идемпотенты и нильпотенты в Cl_3? Если же нет, то каков их общий вид? Постановка этих вопросов диктуется не только интересом чисто математического характера, но также и физической подоплёкой.

В случае идемпотентов мотивировка такова. Напомним (см., например, [16–18]), что если $\mathcal{A}$ – унитальная алгебра над полем с характеристикой, не равной 2, то разложение её единицы в сумму двух взаимно ортогональных идемпотентов несёт информацию о свойствах этой алгебры в целом: из равенства $\mathbf{1} = \boldsymbol{E}_+ + \boldsymbol{E}_-$ следует, что $\mathcal{A}$ разлагается в прямую сумму двух односторонних идеалов (левых идеалов $\mathcal{A}\boldsymbol{E}_+$, $\mathcal{A}\boldsymbol{E}_-$, или правых идеалов $\boldsymbol{E}_+\mathcal{A}$, $\boldsymbol{E}_-\mathcal{A}$):

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}\boldsymbol{E}_+ \oplus \mathcal{A}E_- = \boldsymbol{E}_+\mathcal{A} \oplus \boldsymbol{E}_-\mathcal{A}.$$

Здесь – выход физику: в случае алгебры Cl_3 элементы левых/правых идеалов, порождённых идемпотентными паравекторами $\boldsymbol{E}_\pm = \frac{1}{2}(\mathbf{1} \pm \boldsymbol{\sigma})$ (эти идеалы являются минимальными), интерпретируются как двухкомпонентные спиноры Паули (см., например, [3, 7]), а последние тесно связаны с квантовомеханическим формализмом. Кроме того, указанные идемпотентные паравекторы недавно стали использоваться как отправные элементы при построении новых способов представления и обработки классической и квантовой информации [19–22].

В свете сказанного представляется вполне естественной задача нахождения общего вида идемпотентов алгебры Cl_3. В настоящей работе дано полное решение этой задачи:

[2] (Geometric) Space Algebra [3, 5, 7], Algebra of Physical Space [9]. Ниже для обозначения этой алгебры будет использоваться словосочетание пространственная алгебра.

[3] Термином "паравектор" обозначают аддитивные комбинации скаляров и векторов.

показано, что каждый идемпотент этой алгебры является суммой скаляра, вектора и бивектора, при этом вектор лежит в плоскости бивектора, а квадраты норм вектора и бивектора разнятся на единицу. Идемпотенты, включающие ненулевые бивекторы, оказываются *составными:* они разлагаются в суммы идемпотентных паравекторов и нильпотентов индекса 2; как следствие, идеалы, порождаемые в Cl_3 такими идемпотентами, не являются минимальными. Однако поскольку нильпотенты, входящие в составные идемпотенты в качестве слагаемых, имеют нетривиальный физический смысл (см. ниже), составные идемпотенты и порождаемые ими идеалы требуют дальнейшего продумывания.

Изучение нильпотентов алгебры Cl_3 является второй задачей настоящей работы. В физике эти алгебраические элементы играют существенную роль хотя бы потому, что именно они определяют в формализме Cl_3 структуру свободных электромагнитных волн – фотонов с двумя типами спиральности [3, 6, 23]. Кроме того, нильпотенты стали восприниматься как ключевой ингредиент при построении модернизированных версий квантовой теории и описании фермионных состояний [24–27].

В настоящей работе поставлена и решена задача нахождения общего вида нильпотентов индекса 2 алгебры Cl_3. Показано, что в Cl_3 каждый нильпотент представляет собой прямую сумму пространственных вектора и бивектора, при этом вектор лежит в плоскости бивектора и имеет равную с ним норму. Из этого следует, что все нильпотенты в Cl_3 исчерпываются элементами $\boldsymbol{U}+\boldsymbol{B}$, упомянутыми выше.

Если последний факт рассматривать изолированно, то он представляется локальным, а потому не очень интересным. Однако этот факт играет ключевую роль при исследовании третьей задачи, результат решения которой заставляет вновь задуматься о физической природе вращений – феномена, несомненная удивительность которого, как правило, ускользает от сознания. Суть дела такова.

Как уже отмечалось выше, Cl_3 содержит две подалгебры, изоморфные алгебрам комплексных чисел и кватернионов. Поэтому в Cl_3 естественным образом представлены несколько классических групп: группа U_1 фазовых преобразований[4], группа SU_2, накрывающая группу вращений SO_3, и, тем самым, сама группа SO_3. Группа U_1 действует в Cl_3 умножениями элементов этой алгебры на комплексные экспоненты $\exp(\pm\boldsymbol{i}\varphi)$; в общем случае это приводит к "перемешиванию" скаляров (действительных чисел) с тривекторами, а векторов – с бивекторами. Что же касается группы вращений SO_3, то она действует на элементы Cl_3 унимодулярными кватернионами по обычным правилам кватернионной алгебры – в соответствии с известной формулой Гамильтона-Кэли; при этом скаляры и тривекторы оказываются инвариантными по отношению к действию SO_3, а векторы и бивекторы, вообще говоря, поворачиваются.

Возникает вопрос о наличии в Cl_3 таких элементов, на которые оба типа преобразований действуют одинаково, заставляя эти элементы вращаться. В данной работе показано, что такие элементы существуют: ими являются нильпотенты индекса 2, и только они.

Сказанное содержательно означает, что в алгебре Cl_3, порождённой трёхмерным евклидовым пространством, имеются объекты, имеющие ясную с точки зрения трёхмерия геометрическую интерпретацию, изменение "фазы" которых, индуцируемое умножениями на комплексные экспоненты $\exp(\pm\boldsymbol{i}\varphi)$, выглядит как пространственное вращение.

Этот факт, очевидный для евклидовой плоскости (её вращения реализуются именно комплексными экспонентами), при выходе в трёхмерное пространство представляется неожиданным и, устанавливая наглядную связь между обоими типами преобразований, обогащает физическую интуицию.

Указанная связь (вне формализма Cl_3 её, по-видимому, вряд ли возможно уловить) имеет прямой выход в физику: она позволяет по-новому осмыслить процессы, связанные

[4] Преобразования этой группы иногда именуются дуальными вращениями.

с распространением электромагнитных волн, а также поднимает некоторые вопросы общефизического характера. Кое-что об этом будет сказано в конце статьи.

Структура статьи.

В разделе 1 представлен очерк основ пространственной алгебры (вынужденно не полный – релятивистские аспекты опущены), поскольку без использования её языка ни формулировка, ни решение поставленных задач не представляются возможными. Построение этой алгебры, намеченное в настоящей работе, в некоторых пунктах отличается как от общих построений [12–15] математиков, так и от того, как оно излагается в монографиях [3, 5, 7] физиков. Сразу же вводится таблица умножения Cl_3, апеллирующая к ортонормированному базису порождающего пространства E_3. Это позволяет с самого начала подключить физико-геометрическую интуицию и осознать естественность возникающей конструкции, которая интегрирует и обобщает понятия скалярного, векторного и внешнего произведений векторов, повсеместно используемых в точном естествознании. Операция внешнего произведения векторов в Cl_3 определяется в п. 1.4 через операцию векторного произведения – ход, опирающийся на существование метрики, но противоположный принятому в [3, 5, 7]. Кроме того, в п.п. 1.8.1, 1.8.3 автор счёл необходимым явно сформулировать и доказать два простых, но принципиальных утверждения, решающим образом упрощающих технику вычислений в Cl_3. Эти утверждения неоднократно используются в последующих разделах работы.

Разделы 2, 3 отведены полному исследованию структуры идемпотентов и нильпотентов индекса 2 алгебры Cl_3.

В разделе 4 решается задача нахождения таких элементов Cl_3, которые под действием оператора вращения, реализованного унимодулярными кватернионами, умножаются на комплексные числа. Показано, что в нетривиальном случае искомыми элементами являются нильпотенты индекса 2, умножающиеся при поворотах на экспоненты $\exp(\boldsymbol{i}\varphi)$, и только они. Тем самым устанавливается эквивалентность действия групп фазовых преобразований и вращений на такие нильпотенты.

Эти результаты применяются в разделе 5 к анализу геометрии вакуумных решений уравнений Максвелла без источников, описывающих плоские гармонические электромагнитные волны – фотоны с двумя типами спиральности. На языке клиффордовой алгебры эти решения были описаны Риссом [1, 2], а затем исследованы Хестенесом [3, 23], выявившим, что в Cl_3 их структура описывается нильпотентом $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{i}\boldsymbol{B}$, где $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{B}$ – электрический и магнитный векторы поля волны.

Из полученных в предыдущих разделах результатов следует, что бегущая электромагнитная волна может интерпретироваться как вращение электромагнитных нильпотентов $\boldsymbol{E} + \boldsymbol{i}\boldsymbol{B}$, расфазированных (повёрнутых друг относительно друга) вдоль оси волнового вектора по гармоническому закону; нильпотенты, сохраняя сдвиг фаз, крутятся вокруг этой оси с постоянной угловой скоростью, равной циклической частоте волны, при этом направление их вращения определяет ту или иную круговую поляризацию волны и, соответственно, спиральность фотона. Анализ указанных решений подводит к неформальной гипотезе о том, что реальное физическое пространство не трёхмерно, а, по меньшей мере, шестимерно: в минимальном случае его базис включает шесть линейно независимых элементов и состоит из трёх векторов и трёх бивекторов, порождённых этими векторами.

Разделы статьи разбиты на подразделы. Номера формул включают два числа: первое является номером раздела, в котором формула появляется в первый раз, второе указывает на её порядковый номер в разделе.

В статье принято стандартное соглашение о суммировании: по повторяющимся нижним латинским индексам ведётся суммирование от 1 до 3, при этом символ суммирования опускается (в некоторых случаях суммы расписываются с указанием всех их членов).

Используются стандартные обозначения: $\mathbb{R}$ есть алгебра (и получаемое расширением этой алгебры поле) действительных чисел, $\mathbb{C}$ есть алгебра (и получаемое расширением этой алгебры поле) комплексных чисел, $\mathbb{H}$ есть алгебра (и получаемое расширением этой алгебры тело) кватернионов.

Изредка будут упоминаться определения и факты, касающиеся алгебр *вообще*; в таких случаях алгебры предполагаются ассоциативными и определёнными над полями с характеристикой, не равной 2. (Пусть ворчуны судят, когда такие предположения излишни.)

1 ВВЕДЕНИЕ. ОСНОВЫ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ АЛГЕБРЫ [3, 5, 7]

1.1. БАЗИС, ЭЛЕМЕНТЫ, ОПЕРАЦИИ

Геометрическая алгебра пространства есть клиффордова алгебра Cl_3 над полем $\mathbb{R}$, порождённая линейным трёхмерным евклидовым пространством E_3 с ортонормированным базисом $\boldsymbol{\sigma}_1$, $\boldsymbol{\sigma}_2$, $\boldsymbol{\sigma}_3$. Это определение уже подразумевает, что Cl_3 является ассоциативной унитальной (т. е. имеющей единицу) алгеброй ранга 8. Напомним, что ранг алгебры есть размерность её носителя.

Носитель алгебры Cl_3 представляет собой восьмимерное линейное пространство над полем $\mathbb{R}$, базис которого наследует элементы базиса пространства E_3 и имеет вид

$$\underbrace{\mathbf{1}\,;}_{\substack{\text{единица алгебры}\\ \text{(скалярный элемент)}}}\qquad \underbrace{\boldsymbol{\sigma}_1,\ \boldsymbol{\sigma}_2,\ \boldsymbol{\sigma}_3\,;}_{\substack{\text{базисные векторы}\\ \text{(ориентированные}\\ \text{линейные элементы)}}}\qquad \underbrace{\boldsymbol{\sigma}_{23},\ \boldsymbol{\sigma}_{31},\ \boldsymbol{\sigma}_{12}\,;}_{\substack{\text{базисные бивекторы}\\ \text{(ориентированные}\\ \text{плоскостные элементы)}}}\qquad \underbrace{\boldsymbol{\sigma}_{123}\,.}_{\substack{\text{базисный тривектор}\\ \text{(ориентированный}\\ \text{объемный элемент)}}}$$

Базисные векторы, бивекторы и тривектор составляют пространственную часть этого базиса (рис. 1).

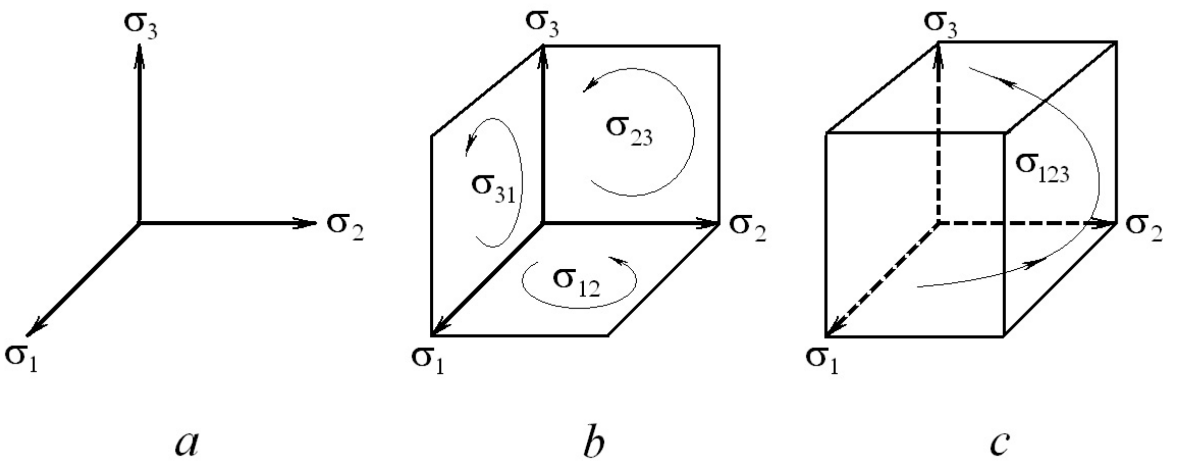

Рис. 1: Геометрическая структура пространственной части базиса алгебры Cl_3. ***a*** – базисные векторы, ***b*** – базисные бивекторы, ***c*** – базисный тривектор. Ориентации бивекторов и тривектора указаны стрелками. Единица **1** не принадлежит пространственной части базиса алгебры.

Характерная черта пространственной алгебры, определяющая её эффективность, состоит в том, что бивекторы и тривектор, входящие в её базис, строятся из ортов евклидова пространства E_3 с помощью операции клиффордова умножения, которая определяется естественным с точки зрения алгебры и геометрии способом. Список свойств этой операции включает следующие правила.

1^0. Произведения действительных чисел на элементы базиса Cl_3 подчиняются обычным законам ассоциативности и коммутативности.

2^0. Элемент $\mathbf{1}$, являясь единицей алгебры Cl_3, коммутирует со всеми элементами её базиса; результат умножения единицы $\mathbf{1}$ на любой базисный элемент алгебры (в том числе на саму себя) есть сам этот элемент. Поэтому Cl_3 содержит подалгебру вида $\{\lambda\mathbf{1}\}$ ($\lambda \in \mathbb{R}$), изоморфную алгебре действительных чисел. Поскольку указанный изоморфизм ставит в соответствие единице $\mathbf{1}$ обычную действительную единицу: $\mathbf{1} \leftrightarrow 1$, обе единицы можно отождествлять друг с другом. Имея в виду такое отождествление, элементы Cl_3 вида $\lambda\mathbf{1}$ называют скалярами и при их записи значок $\mathbf{1}$ часто опускают (мы, как правило, не будем этого делать).

3^0. Значения произведений базисных элементов друг на друга находят, используя соотношения, которые фактически определяют таблицу умножения алгебры Cl_3:

$$\boldsymbol{\sigma}_1^2 = \boldsymbol{\sigma}_2^2 = \boldsymbol{\sigma}_3^2 \equiv \boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_1 = \boldsymbol{\sigma}_2\boldsymbol{\sigma}_2 = \boldsymbol{\sigma}_3\boldsymbol{\sigma}_3 = \mathbf{1} \leftrightarrow 1; \tag{1.1}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_k\boldsymbol{\sigma}_l = -\boldsymbol{\sigma}_l\boldsymbol{\sigma}_k \qquad \text{при} \quad k \neq l; \tag{1.2}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{23} = \boldsymbol{\sigma}_2\boldsymbol{\sigma}_3; \quad \boldsymbol{\sigma}_{31} = \boldsymbol{\sigma}_3\boldsymbol{\sigma}_1; \quad \boldsymbol{\sigma}_{12} = \boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_2; \tag{1.3}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{123} = \boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_2\boldsymbol{\sigma}_3. \tag{1.4}$$

Соотношения (1.1), (1.2) показывают, что квадраты пространственных ортов равны единице алгебры, а попарные произведения различных ортов антисимметричны. Что же касается соотношений (1.3) и (1.4), то они определяют способ порождения базисных бивекторов и тривектора алгебры Cl_3 из пространственных ортов $\boldsymbol{\sigma}_1$, $\boldsymbol{\sigma}_2$, $\boldsymbol{\sigma}_3$.

4^0. Общий элемент алгебры Cl_3 – гиперкомплексное *p-число*[5] – порождается линейной комбинацией элементов базиса; умножение p-чисел подчинено требованиям ассоциативности и дистрибутивности и осуществляется с применением правил, указанных в п.п. 1^0 – 3^0.

Рассмотрим детальнее строение p-чисел. Пусть $\boldsymbol{A} \in Cl_3$ – такое число. Будучи линейной комбинацией элементов базиса, оно может быть представлено суммой

$$\begin{gathered}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_S + \boldsymbol{A}_V + \boldsymbol{A}_B + \boldsymbol{A}_T = \\ = \lambda_0\mathbf{1} + (\lambda_1\boldsymbol{\sigma}_1 + \lambda_2\boldsymbol{\sigma}_2 + \lambda_3\boldsymbol{\sigma}_3) + (\lambda_{23}\boldsymbol{\sigma}_{23} + \lambda_{31}\boldsymbol{\sigma}_{31} + \lambda_{12}\boldsymbol{\sigma}_{12}) + \lambda_{123}\boldsymbol{\sigma}_{123} = \\ = \lambda_0\mathbf{1} + (\lambda_1\boldsymbol{\sigma}_1 + \lambda_2\boldsymbol{\sigma}_2 + \lambda_3\boldsymbol{\sigma}_3) + (\lambda_{23}\boldsymbol{\sigma}_2\boldsymbol{\sigma}_3 + \lambda_{31}\boldsymbol{\sigma}_3\boldsymbol{\sigma}_1 + \lambda_{12}\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_2) + \lambda_{123}\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_2\boldsymbol{\sigma}_3,\end{gathered} \tag{1.5}$$

в которую входят следующие слагаемые:

1. скаляр $\quad \boldsymbol{A}_S \equiv \lambda_0\mathbf{1} = \mathbf{1}\lambda_0 \leftrightarrow \lambda_0$;
2. вектор $\quad \boldsymbol{A}_V \equiv \lambda_1\boldsymbol{\sigma}_1 + \lambda_2\boldsymbol{\sigma}_2 + \lambda_3\boldsymbol{\sigma}_3$;
3. бивектор $\quad \boldsymbol{A}_B \equiv \lambda_{23}\boldsymbol{\sigma}_{23} + \lambda_{31}\boldsymbol{\sigma}_{31} + \lambda_{12}\boldsymbol{\sigma}_{12} = \lambda_{23}\boldsymbol{\sigma}_2\boldsymbol{\sigma}_3 + \lambda_{31}\boldsymbol{\sigma}_3\boldsymbol{\sigma}_1 + \lambda_{12}\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_2$;
4. тривектор $\quad \boldsymbol{A}_T \equiv \lambda_{123}\boldsymbol{\sigma}_{123} = \boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_2\boldsymbol{\sigma}_3$

(в специальных случаях некоторые из этих слагаемых могут быть нулевыми).

Подпространства носителя алгебры, содержащие $\boldsymbol{A}_S$, $\boldsymbol{A}_V$, $\boldsymbol{A}_B$ и $\boldsymbol{A}_T$, называются соответственно пространством $\{S\}$ скаляров (оно одномерно), пространством $\{V\}$ векторов (оно трёхмерно), пространством $\{B\}$ бивекторов (оно также трёхмерно) и пространством $\{T\}$ тривекторов (оно одномерно).

Носитель алгебры Cl_3 (для него принимается обозначение Supp Cl_3) является прямой суммой всех указанных пространств:

$$\mathrm{Supp}\, Cl_3 = \{S\} \oplus \{V\} \oplus \{B\} \oplus \{T\}.$$

[5] Термин введён Хестенесом [3] в честь Вольфганга Паули и поясняется в п. 1.8.1.

При этом пространство $\{V\}$ отождествляется с E_3: $\{V\} \cong E_3$. Чтобы подчеркнуть последнее обстоятельство, векторы этого пространства часто именуют *пространственными векторами*; их можно отождествлять с векторами физического пространства, с которым наблюдатель ежедневно имеет дело, и которое, как подсказывает ему наивная интуиция, в малом является трёхмерным и евклидовым.

Отметим, что ввиду антисимметрии произведений базисных ортов, указанной в (1.2), перестановка множителей в (1.3) определяет бивекторы $\boldsymbol{\sigma}_{32}$, $\boldsymbol{\sigma}_{13}$, $\boldsymbol{\sigma}_{21}$ с противоположной ориентацией:

$$\boldsymbol{\sigma}_{23} = -\boldsymbol{\sigma}_3\boldsymbol{\sigma}_2 \equiv -\boldsymbol{\sigma}_{32}, \quad \boldsymbol{\sigma}_{31} = -\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_3 \equiv -\boldsymbol{\sigma}_{13}, \quad \boldsymbol{\sigma}_{21} = \boldsymbol{\sigma}_{12} = -\boldsymbol{\sigma}_2\boldsymbol{\sigma}_1 \equiv -\boldsymbol{\sigma}_{21}.$$

Что же касается перестановки множителей в (1.4), то при чётной перестановке получаются тривекторы с той же ориентацией, что и у тривектора $\boldsymbol{\sigma}_{123}$ (все эти тривекторы можно отождествить), а при нечётной перестановке – тривекторы с противоположной ориентацией; например,

$$\boldsymbol{\sigma}_{312} = \boldsymbol{\sigma}_3\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_2 = \boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_2\boldsymbol{\sigma}_3 = \boldsymbol{\sigma}_{123}, \quad \text{но} \quad \boldsymbol{\sigma}_{321} = \boldsymbol{\sigma}_3\boldsymbol{\sigma}_2\boldsymbol{\sigma}_1 = -\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_2\boldsymbol{\sigma}_3 = -\boldsymbol{\sigma}_{123}.$$

Базисный тривектор $\boldsymbol{\sigma}_{123}$ обладает двумя важными свойствами.

Одно из них состоит в том, что $\boldsymbol{\sigma}_{123}$ коммутирует с базисными векторами $\boldsymbol{\sigma}_1$, $\boldsymbol{\sigma}_2$, $\boldsymbol{\sigma}_3$ (это легко проверяется с помощью соотношений (1.1)–(1.4)). Поэтому $\boldsymbol{\sigma}_{123}$ коммутирует со всеми линейными комбинациями этих векторов и их произведениями. Тем самым *базисный тривектор $\boldsymbol{\sigma}_{123}$ и вместе с ним все тривекторы коммутируют со всеми p-числами:*

$$\boldsymbol{\sigma}_{123}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\sigma}_{123} \qquad (\boldsymbol{A} \in Cl_3).$$

При вычислениях в Cl_3 это свойство вносит принципиальные упрощения и будет впредь постоянно использоваться – часто без особых оговорок.

Другое свойство элемента $\boldsymbol{\sigma}_{123}$ состоит в том, что *при возведении в квадрат базисный тривектор ведёт себя как мнимая единица алгебры комплексных чисел:* из (1.1)–(1.4) вытекает, что

$$\boldsymbol{\sigma}_{123}^2 = \boldsymbol{\sigma}_{123}\boldsymbol{\sigma}_{123} = (\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_2\boldsymbol{\sigma}_3)(\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_2\boldsymbol{\sigma}_3) = -\boldsymbol{\sigma}_1^2\boldsymbol{\sigma}_2^2\boldsymbol{\sigma}_3^2 = -\mathbf{1}, \tag{1.6}$$

и поэтому $\boldsymbol{\sigma}_{123}$ обычно обозначают буквой i. Чтобы подчеркнуть существенно тривекторную природу клиффордовой "мнимой единицы", для её обозначения будет использоваться полужирный шрифт:

$$\boldsymbol{\sigma}_{123} \equiv \boldsymbol{i}.$$

Равенство (1.6) является чрезвычайно важным: оно обуславливает существование в Cl_3 подалгебры, изоморфной алгебре комплексных чисел, элементы которой коммутируют со всеми p-числами – со всеми вытекающими отсюда следствиями (см. п.п. 1.6, 1.7).

1.2. ИНВОЛЮЦИИ И ГРАДУИРОВКА ПРОСТРАНСТВЕННОЙ АЛГЕБРЫ

Напомним, что инволюция – это такая определённая на элементах алгебры операция, повторное применение которой есть тождественное преобразование; другими словами, повторное применение инволютивной операции к некоторому (любому) элементу алгебры не изменяет его.

Обращаясь к общему выражению (1.5), представляющему произвольный элемент алгебры Cl_3, нетрудно обнаружить в этой алгебре две естественные инволюции: одна из них заключается в обращении порядка всех множителей в произведениях базисных векторов

(1.5), а другая – в обращении направлений всех пространственных ортов $\boldsymbol{\sigma}_1$, $\boldsymbol{\sigma}_2$, $\boldsymbol{\sigma}_3$ на противоположные.

1.2.1. Обращение порядка множителей. Из (1.5) следует, что обращение порядка всех множителей в произведениях базисных векторов преобразует p-число

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_S + \boldsymbol{A}_V + \boldsymbol{A}_B + \boldsymbol{A}_T$$

в p-число вида

$$\boldsymbol{A}^\dagger = \boldsymbol{A}_S + \boldsymbol{A}_V - \boldsymbol{A}_B - \boldsymbol{A}_T;$$

при этом $\boldsymbol{A}^{\dagger\dagger} = \boldsymbol{A}$ ($\boldsymbol{A}^\dagger$ есть инволюция).

1.2.2. Обращение направлений пространственных ортов. Эта операция реализуется заменами

$$\boldsymbol{\sigma}_1 \to -\boldsymbol{\sigma}_1, \quad \boldsymbol{\sigma}_2 \to -\boldsymbol{\sigma}_2, \quad \boldsymbol{\sigma}_3 \to -\boldsymbol{\sigma}_3.$$

Из (1.5) следует, что эти замены преобразуют p-число

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_S + \boldsymbol{A}_V + \boldsymbol{A}_B + \boldsymbol{A}_T$$

в p-число вида

$$\bar{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{A}_S - \boldsymbol{A}_V + \boldsymbol{A}_B - \boldsymbol{A}_T;$$

при этом $\bar{\bar{\boldsymbol{A}}} = \boldsymbol{A}$ ($\bar{\boldsymbol{A}}$ есть инволюция).

Так как обращение направлений пространственных ортов не меняет знака бивекторов, последние ведут себя как *псевдовекторы*; имея это в виду, пространство бивекторов часто называют пространством псевдовекторов, удерживая термин "псевдовектор" и для обозначения самих элементов этого пространства.

Что же касается базисного тривектора $\boldsymbol{i} = \boldsymbol{\sigma}_{123}$, то он при обращении направлений пространственных ортов меняет знак: $\bar{\boldsymbol{i}} = -\boldsymbol{i}$. Тем самым клиффордова тривекторная мнимая единица $\boldsymbol{i}$ и вместе с ней все тривекторы ведут себя как *псевдоскаляры*; по этой причине тривекторы называют также псевдоскалярами, а о пространстве тривекторов говорят как о пространстве псевдоскаляров.

С помощью инволюций, указанных в этом и предыдущем пунктах, и их произведений нетрудно сконструировать проекционные операторы, отображающих носитель $\mathrm{Supp}\, Cl_3$ на его подпространства и их прямые суммы. Здесь эти вопросы не будут затрагиваться.

1.2.3. Градуировка. Чётные и нечётные p-числа. Алгебра Cl_3 является *градуированной (по модулю 2)* в том смысле, что в ней естественным образом выделяются *чётные* и *нечётные* элементы. Определение чётности/нечётности вводится с помощью операции изменения направлений пространственных ортов.

P-число $\boldsymbol{A}$ называется чётным (нечётным), когда $\bar{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{A}$ $\;(\bar{\boldsymbol{A}} = -\boldsymbol{A})$.

Чётными p-числами являются все линейные комбинации скаляров и бивекторов – элементы подпространства $\{S\} \oplus \{B\} \subset \mathrm{Supp}\, Cl_3$. С помощью (1.1)–(1.4) проверяется, что произведения таких комбинаций остаются в $\{S\} \oplus \{B\}$, и поэтому совокупность чётных p-чисел является подалгеброй пространственной алгебры. Эта подалгебра называется *чётной подалгеброй* алгебры Cl_3 и обозначается через Cl_3^+. В п. 1.6.4 будет показано, что элементы чётной подалгебры можно отождествлять с кватернионами.

Нечётными p-числами являются линейные комбинации векторов и тривекторов, но не все их произведения. Нечётные p-числа принадлежат подпространству $\{V\} \oplus \{T\} \subset \mathrm{Supp}\, Cl_3$, но не являются подалгеброй в Cl_3.

1.3. ДУАЛЬНОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕННОЙ АЛГЕБРЕ

В алгебре Cl_3 важную роль играет операция перехода от p-числа $\boldsymbol{A}$ к дуальному p-числу, которое получается умножением $\boldsymbol{A}$ на тривектор $\boldsymbol{i} = \boldsymbol{\sigma}_{123}$ и имеет вид $\boldsymbol{iA} = \boldsymbol{Ai}$.

Очевидно, что скалярам дуальны тривекторы, а тривекторам – скаляры: действительно, элемент, дуальный единице $\mathbf{1}$, есть базисный тривектор $\boldsymbol{i}\mathbf{1} = \boldsymbol{i}$, а последнему дуальна единица со знаком "минус": $\boldsymbol{ii} = -\mathbf{1}$.

Что же касается векторов, то им дуальны бивекторы, а бивекторам – векторы. В этом нетрудно убедиться, если, используя правила умножения (1.1)–(1.4), написать равенства

$$\begin{cases} \boldsymbol{i\sigma}_1 = \boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{i} = \boldsymbol{\sigma}_2\boldsymbol{\sigma}_3 = \boldsymbol{\sigma}_{23} \\ \boldsymbol{i\sigma}_2 = \boldsymbol{\sigma}_2\boldsymbol{i} = \boldsymbol{\sigma}_3\boldsymbol{\sigma}_1 = \boldsymbol{\sigma}_{31} \\ \boldsymbol{i\sigma}_3 = \boldsymbol{\sigma}_3\boldsymbol{i} = \boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_2 = \boldsymbol{\sigma}_{12} \end{cases} \qquad \begin{cases} \boldsymbol{i\sigma}_{23} = \boldsymbol{ii\sigma}_1 = -\boldsymbol{\sigma}_1 \\ \boldsymbol{i\sigma}_{31} = \boldsymbol{ii\sigma}_2 = -\boldsymbol{\sigma}_2 \\ \boldsymbol{i\sigma}_{12} = \boldsymbol{ii\sigma}_3 = -\boldsymbol{\sigma}_3 \end{cases} \tag{1.7}$$

Поэтому если, например, $\boldsymbol{V}$ есть вектор, то элемент $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{iV} = \boldsymbol{Vi}$ является дуальным ему бивектором; при этом сам вектор $\boldsymbol{V}$ выражается через дуальный ему бивектор формулой $\boldsymbol{V} = -\boldsymbol{iB} = -\boldsymbol{Bi}$.

Замечание. Операция перехода от некоторого p-числа $\boldsymbol{A}$ к дуальному p-числу $\boldsymbol{iA} = \boldsymbol{Ai}$ НЕ является инволюцией, поскольку в цепочке отображений $\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{iA} \to -\boldsymbol{A} \to -\boldsymbol{iA} \to \boldsymbol{A}$, порождаемой пошаговым умножением элементов на $\boldsymbol{i}$, исходное p-число $\boldsymbol{A}$ возникает только через четыре шага[6] (через два шага появляется $-\boldsymbol{A}$, а не $\boldsymbol{A}$).

1.4. СКАЛЯРНОЕ, ВЕКТОРНОЕ И ВНЕШНЕЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ВЕКТОРОВ

Пусть $\boldsymbol{U} = U_k\boldsymbol{\sigma}_k$ и $\boldsymbol{V} = V_k\boldsymbol{\sigma}_k$ – два пространственных вектора. Используя правила (1.1)–(1.4) и соотношения (1.7), нетрудно установить, что клиффордово произведение этих векторов может быть представлено формулой

$$\begin{gathered} \boldsymbol{UV} = \mathbf{1}(U_1V_1 + U_2V_2 + U_3V_3) + \\ +\boldsymbol{i}\ \left[(U_2V_3 - U_3V_2)\,\boldsymbol{\sigma}_1 + (U_3V_1 - U_1V_3)\,\boldsymbol{\sigma}_2 + (U_1V_2 - U_2V_1)\,\boldsymbol{\sigma}_3\right] \end{gathered}$$

В правой части этого выражения сумма в круглых скобках при множителе $\mathbf{1}$ определяет обычное евклидово скалярное произведение векторов $\boldsymbol{U}$ и $\boldsymbol{V}$ в ортонормированном базисе, тогда как слагаемые внутри квадратных скобок определяют векторное произведение этих векторов в том же базисе. Введём стандартные обозначения

$$\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{V} = U_1V_1 + U_2V_2 + U_3V_3,$$

$$\boldsymbol{U}\times\boldsymbol{V} = (U_2V_3 - U_3V_2)\,\boldsymbol{\sigma}_1 + (U_3V_1 - U_1V_3)\,\boldsymbol{\sigma}_2 + (U_1V_2 - U_2V_1)\,\boldsymbol{\sigma}_3.$$

Тогда выражение для произведения $\boldsymbol{UV}$ можно переписать в следующей элегантной форме (символ единицы $\mathbf{1}$ опущен):

$$\boldsymbol{UV} = \boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{V} + \boldsymbol{i}(\boldsymbol{U}\times\boldsymbol{V}). \tag{1.8}$$

Член $\boldsymbol{i}(\boldsymbol{U}\times\boldsymbol{V})$ в правой части (1.8) является бивектором, дуальным вектору $\boldsymbol{U}\times\boldsymbol{V}$. Этот бивектор называется *внешним произведением* векторов $\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{V}$ и обозначается посредством $\boldsymbol{U}\wedge\boldsymbol{V}$ (его плоскость определяется плоскостью, в которой расположена пара $\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{V}$, и ортогональна вектору $\boldsymbol{U}\times\boldsymbol{V}$). Таким образом,

$$\boldsymbol{U}\wedge\boldsymbol{V} = \boldsymbol{i}(\boldsymbol{U}\times\boldsymbol{V}), \qquad \boldsymbol{U}\times\boldsymbol{V} = -\boldsymbol{i}(\boldsymbol{U}\wedge\boldsymbol{V}). \tag{1.9}$$

[6] Поэтому, в частности, можно говорить о взаимной дуальности пространств векторов и бивекторов, однако фраза "элемент $\boldsymbol{X}$ дуален элементу $\boldsymbol{Y}$ " не может быть заменена фразами "элементы $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{Y}$ взаимно дуальны" или "элементы $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{Y}$ являются дуальными друг другу".

В силу антисимметрии векторного произведения относительно перестановки векторов $\boldsymbol{U}$ и $\boldsymbol{V}$ их внешнее произведение также антисимметрично относительно такой перестановки:

$$\boldsymbol{U} \wedge \boldsymbol{V} = -\boldsymbol{V} \wedge \boldsymbol{U}.$$

Отсюда следует, что если векторы $\boldsymbol{U}$ и $\boldsymbol{V}$ коллинеарны, то их внешнее произведение равно нулю.

Используя (1.9), формулу (1.8) для клиффордова произведения двух пространственных векторов можно представить в эквивалентной – не менее элегантной – форме

$$\boldsymbol{U}\boldsymbol{V} = \boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{V} + \boldsymbol{U} \wedge \boldsymbol{V}. \tag{1.10}$$

Из (1.10) следует, что в общем случае клиффордово произведение двух векторов является суммой двух объектов: скаляра и бивектора. В нижеперечисленных важных частных случаях один из этих объектов обнуляется.

1. Если векторы $\boldsymbol{U}$ и $\boldsymbol{V}$ ортогональны друг другу ($\boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{V} = 0$), то их клиффордово произведение порождает бивектор (ориентированный в порядке следования сомножителей):

$$\boldsymbol{U}\boldsymbol{V} = \boldsymbol{U} \wedge \boldsymbol{V} = \boldsymbol{i}(\boldsymbol{U} \times \boldsymbol{V}); \tag{1.11}$$

отсюда следует также, что *внешнее произведение двух взаимно ортогональных векторов равно их клиффордову произведению.*

2. Если векторы $\boldsymbol{U}$ и $\boldsymbol{V}$ коллинеарны ($\boldsymbol{U} \wedge \boldsymbol{V} = 0$), то их клиффордово произведение является скалярной величиной:

$$\boldsymbol{U}\boldsymbol{V} = \boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{V}.$$

3. Клиффордов квадрат вектора $\boldsymbol{U}$ равен квадрату евклидова модуля этого вектора:

$$\boldsymbol{U}^2 \equiv \boldsymbol{U}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{U} = |\boldsymbol{U}|^2 . \tag{1.12a}$$

Равенство (1.12a) позволяет ввести в алгебре Cl_3 понятие *нормы* $\|\boldsymbol{U}\|$ *вектора* $\boldsymbol{U}$, которая определяется естественным способом – с помощью последнего из написанных соотношений:

$$\|\boldsymbol{U}\| = \sqrt{\boldsymbol{U}^2} = \sqrt{|\boldsymbol{U}|^2} = |\boldsymbol{U}| . \tag{1.12b}$$

Подчеркнём, что скалярное, векторное и внешнее произведения пространственных векторов $\boldsymbol{U}$и $\boldsymbol{V}$ не являются в алгебре Cl_3 независимыми операциями, вводимыми в дополнение к клиффордову произведению векторов, а могут быть выражены через последнее. Для этого нужно переставить множители в (1.8), (1.10) и, учитывая симметрию скалярного и антисимметрию векторного и внешнего произведений, написать

$$\boldsymbol{V}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{V} - \boldsymbol{i}(\boldsymbol{U} \times \boldsymbol{V}) = \boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{V} - \boldsymbol{U} \wedge \boldsymbol{V}. \tag{1.13}$$

После этого, используя (1.8), (1.10) и (1.13), нетрудно получить

$$\boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{V} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{U}\boldsymbol{V} \ + \ \boldsymbol{V}\boldsymbol{U}) \equiv \frac{1}{2}\{\boldsymbol{U},\ \boldsymbol{V}\}, \tag{1.14}$$

$$\boldsymbol{U} \times \boldsymbol{V} = -\frac{\boldsymbol{i}}{2}(\boldsymbol{U}\boldsymbol{V} \ - \ \boldsymbol{V}\boldsymbol{U}) \equiv -\frac{\boldsymbol{i}}{2}[\boldsymbol{U},\ \boldsymbol{V}], \tag{1.15}$$

$$\boldsymbol{U} \wedge \boldsymbol{V} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{U}\boldsymbol{V} \ - \ \boldsymbol{V}\boldsymbol{U}) \equiv \frac{1}{2}[\boldsymbol{U},\ \boldsymbol{V}] \tag{1.16}$$

(фигурными и квадратными скобками в правых частях (1.14)–(1.16) обозначены антикоммутатор и, соответственно, коммутатор пары элементов – в данном случае векторов).

В заключение этого пункта укажем выражение, позволяющее определить угол θ между векторами $\boldsymbol{U}$ и $\boldsymbol{V}$ по их клиффордову произведению. Напомним, что θ можно найти, используя стандартную формулу векторного исчисления $\cos\theta = (\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{V}) \Big/ \sqrt{(\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{U})\,(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{V})}$. Привлекая (1.14), эту формулу можно представить в виде выражения

$$\cos\theta = \frac{1}{2\sqrt{\boldsymbol{U}^2\boldsymbol{V}^2}}\,(\boldsymbol{U}\boldsymbol{V} \;+\; \boldsymbol{V}\boldsymbol{U}) \equiv \frac{1}{2\sqrt{\boldsymbol{U}^2\boldsymbol{V}^2}}\,\{\boldsymbol{U},\;\boldsymbol{V}\}\,,$$

которое и определяет величину θ.

1.5. СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ БИВЕКТОРОВ. НОРМА БИВЕКТОРА

Пусть $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{C}$ – бивекторы, а $\boldsymbol{U}$ и $\boldsymbol{V}$ – векторы, которым $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{C}$ дуальны: это означает, что $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{i}\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{i}\boldsymbol{V}$. Рассмотрим клиффордово произведение бивекторов $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{C}$. Ввиду перестановочности $\boldsymbol{i}$ со всеми p-числами это произведение выражается через произведение векторов $\boldsymbol{U}$ и $\boldsymbol{V}$:

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{C} = (\boldsymbol{i}\boldsymbol{U})\,(\boldsymbol{i}\boldsymbol{V}) = (\boldsymbol{i}\boldsymbol{i})\,(\boldsymbol{U}\boldsymbol{V}) = -\boldsymbol{U}\boldsymbol{V}; \tag{1.17}$$

в частности,

$$\boldsymbol{B}^2 = -\boldsymbol{U}^2 = -\,|\boldsymbol{U}|^2\,. \tag{1.18}$$

Если применить в правой части (1.17) формулы (1.8), (1.10) предыдущего пункта, то клиффордово произведение бивекторов $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{C}$ можно выразить через скалярное, векторное и внешнее произведения векторов $\boldsymbol{U}$ и $\boldsymbol{V}$:

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{C} = -\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{V} - \boldsymbol{i}(\boldsymbol{U}\times\boldsymbol{V}) = -\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{V} - \boldsymbol{U}\wedge\boldsymbol{V}. \tag{1.19}$$

Равенство (1.19) показывает, что в общем случае произведение $\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}$ содержит скалярную и бивекторную части; обозначив эти части символами $(\boldsymbol{B}\boldsymbol{C})_S$ и $(\boldsymbol{B}\boldsymbol{C})_B$ соответственно, можно написать

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{C} = (\boldsymbol{B}\boldsymbol{C})_S + (\boldsymbol{B}\boldsymbol{C})_B\,,$$

где

$$(\boldsymbol{B}\boldsymbol{C})_S = -\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{V}, \qquad (\boldsymbol{B}\boldsymbol{C})_B = -\boldsymbol{i}\,(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) = -\,(\boldsymbol{B}\wedge\boldsymbol{C})\,.$$

Скалярное произведение бивекторов есть, по определению, скалярная часть их клиффордова произведения, взятая с противоположным знаком; *по-другому, скалярное произведение бивекторов равно скалярному произведению векторов, которым эти бивекторы дуальны:*

$$\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C} = -\,(\boldsymbol{B}\boldsymbol{C})_S = \boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{V}.$$

Теперь можно ввести понятие нормы $\|\boldsymbol{B}\|$ бивектора $\boldsymbol{B}$, определив её формулой

$$\|\boldsymbol{B}\| = \sqrt{\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{B}} = \sqrt{-\,(\boldsymbol{B}\boldsymbol{B})_S} = \sqrt{\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{U}} = \|\boldsymbol{U}\| = |\boldsymbol{U}|\,. \tag{1.20}$$

Соотношение (1.20) показывает, что *норма бивектора равна модулю вектора, которому этот бивектор дуален.* Из него следует также, что *норма внешнего произведения $\boldsymbol{U}\wedge\boldsymbol{V}$ векторов $\boldsymbol{U}$ и $\boldsymbol{V}$ равна площади параллелограмма, построенного на этих векторах.* (Действительно, в силу (1.20) и (1.9), $\|\boldsymbol{U}\wedge\boldsymbol{V}\| = |\boldsymbol{U}\times\boldsymbol{V}|$, а модуль этого векторного произведения равен площади указанного параллелограмма.)

Угол между бивекторами $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{i}\boldsymbol{U}$ и $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{i}\boldsymbol{V}$ определяется как угол между векторами $\boldsymbol{U}$ и $\boldsymbol{V}$, которым эти бивекторы дуальны; косинус этого угла находится по формуле, указанной в конце предыдущего пункта.

Не останавливаясь здесь на более общих конструкциях, относящихся к произведениям элементов Cl_3, отсылаем читателя за справками к литературе [3, 4, 7, 20].

1.6. ДВЕ ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ ПОДАЛГЕБРЫ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ АЛГЕБРЫ

Вот нетривиальный факт, относящийся к алгебре Cl_3: будучи определёна над полем действительных чисел, эта алгебра содержит в качестве своих подалгебр алгебры, изоморфные алгебрам комплексных чисел и кватернионов. Тем самым в Cl_3 уже "упакованы" два экстраординарных математических орудия, которые возникли в математике порознь и, будучи привнесёнными в физику, давно используются в ней – однако, вне какой-либо связи друг с другом.

1.6.1. Подалгебра алгебры Cl_3, изоморфная алгебре комплексных чисел. В конце п. 1.1 отмечалось, что при возведении в квадрат базисный тривектор $\boldsymbol{\sigma}_{123} \equiv \boldsymbol{i}$ ведёт себя как "мнимая единица":

$$\boldsymbol{\sigma}_{123}^2 \equiv \boldsymbol{i}^2 = -\mathbf{1}.$$

Учитывая это равенство и таблицу умножения (1.1) – (1.4), нетрудно усмотреть, что линейное подпространство $\{S\} \oplus \{T\}$ p-чисел вида

$$\lambda_0 \mathbf{1} \ + \ \lambda_{123}\boldsymbol{\sigma}_{123} \equiv \lambda_0 \mathbf{1} \ + \ \lambda_{123}\boldsymbol{i} \equiv \boldsymbol{A}_S + \boldsymbol{A}_T,$$

с определённой на нём операцией клиффордова произведения является подалгеброй, которая изоморфна алгебре $\mathbb{C}$ комплексных чисел вида $\lambda_0 + \lambda_{123}\boldsymbol{i}$.

Поскольку алгебра $\mathbb{C}$ расширяется до *поля* (в математическом смысле), то и подалгебра пространственной алгебры, изоморфная $\mathbb{C}$, также может рассматриваться как поле. Элементы этого последнего поля – *комплексные p-числа* – имеют вид $z = \alpha\mathbf{1} + \beta\boldsymbol{i}$ $(\alpha,\ \beta \in \mathbb{R})$, и с ними можно оперировать как с обычными комплексными числами: складывать, вычитать, умножать и даже делить одно комплексное p-число на другое, ненулевое, предварительно сопоставив числу $z = \alpha\mathbf{1} + \beta\boldsymbol{i}$ сопряжённое ему число $z^\dagger = \alpha\mathbf{1} - \beta\boldsymbol{i}$ (операция сопряжения определяется с помощью инволюции, описанной в п. 1.2.1)

Важное свойство комплексных p-чисел состоит в том, что они коммутируют с любым элементом пространственной алгебры – просто в силу того, что тривектор $\boldsymbol{i}$ обладает этим свойством.

Наряду с описанной подалгеброй алгебра Cl_3 содержит много других подалгебр, изоморфных $\mathbb{C}$. Они порождаются в Cl_3 следующим способом. Произвольно зафиксируем в Cl_3 бивектор $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{i}\boldsymbol{U}$ (здесь $\boldsymbol{U}$ – вектор, которому дуален $\boldsymbol{B}$) и, используя (1.20), построим по нему нормированный бивектор

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{B}/\ \|\boldsymbol{B}\| = \boldsymbol{i}\boldsymbol{U}/\ |\boldsymbol{U}|. \tag{1.21}$$

Отсюда (а также из (1.12a)) следует, что $\boldsymbol{b}^2 = -\mathbf{1}$. Теперь легко убедиться, что множество p-чисел $\{\alpha\mathbf{1} + \beta\boldsymbol{b}\}$ $(\alpha,\ \beta \in \mathbb{R})$ является подалгеброй алгебры Cl_3, изоморфной $\mathbb{C}$. Однако эта подалгебра является "плохой" в том смысле, что её элементы не коммутируют со всеми p-числами, так как они не коммутируют с бивекторами, не пропорциональными $\boldsymbol{b}$.

В этом состоит коренное отличие подалгебр $\{\alpha\mathbf{1} + \beta\boldsymbol{b}\}$ от вышеописанной подалгебры $\{\alpha\mathbf{1} + \beta\boldsymbol{i}\}$. Таким образом, последняя выделена в Cl_3, тогда как первые следует интерпретировать как подалгебры алгебры кватернионов, представленной в Cl_3 чётными p-числами. Это явление будет разъяснено в п. 1.6.5.

1.6.2. Подалгебра алгебры Cl_3, изоморфная алгебре кватернионов. Напомним (см., например, [28, 29]), что алгебра $\mathbb{H}$ кватернионов есть алгебра гиперкомплексных чисел вида

$$Q_H = \mu_0 + \mu_1\boldsymbol{i}' + \mu_2\boldsymbol{j}' + \mu_3\boldsymbol{k}', \tag{1.22}$$

где $\mu_0,\ \mu_k \in \mathbb{R}$ – действительные числа, $\boldsymbol{i}',\ \boldsymbol{j}',\ \boldsymbol{k}' \in \mathbb{H}$ – "кватернионные единицы", подчинённые соотношениям

$$\boldsymbol{i}'^2 = \boldsymbol{j}'^2 = \boldsymbol{k}'^2 = \boldsymbol{i}' * \boldsymbol{j}' * \boldsymbol{k}' = -1$$

(звёздочкой обозначена операция умножения в $\mathbb{H}$, $\boldsymbol{i}'^2 \equiv \boldsymbol{i}' * \boldsymbol{i}'$, $\boldsymbol{j}'^2 \equiv \boldsymbol{j}' * \boldsymbol{j}'$, $\boldsymbol{k}'^2 \equiv \boldsymbol{k}' * \boldsymbol{k}'$).

Алгебра $\mathbb{H}$ вкладывается в Cl_3 так. Рассмотрим чётную подалгебру Cl_3^+ алгебры Cl_3, представленную p-числами вида

$$\boldsymbol{Q} = \lambda_0 \mathbf{1} + \lambda_{12}\boldsymbol{\sigma}_{12} + \lambda_{23}\boldsymbol{\sigma}_{23} + \lambda_{31}\boldsymbol{\sigma}_{31} \equiv \mathbf{A}_S + \mathbf{A}_B. \tag{1.23}$$

Алгебраическое поведение этих чисел совпадает с поведением кватернионов. Действительно, рассмотрим бивекторы

$$\boldsymbol{I} \equiv -\boldsymbol{\sigma}_{23} = -\boldsymbol{\sigma}_2\boldsymbol{\sigma}_3, \quad \boldsymbol{J} \equiv -\boldsymbol{\sigma}_{31} = -\boldsymbol{\sigma}_3\boldsymbol{\sigma}_1, \quad \boldsymbol{K} \equiv -\boldsymbol{\sigma}_{12} = -\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_2.$$

Используя правила (1)–(4), нетрудно убедиться, что $\boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{J}$, $\boldsymbol{K}$ перемножаются как кватернионные единицы:

$$\boldsymbol{I}^2 = \boldsymbol{J}^2 = \boldsymbol{K}^2 = \boldsymbol{IJK} = -\mathbf{1}$$

(здесь $\boldsymbol{I}^2 \equiv \boldsymbol{II}$, $\boldsymbol{J}^2 \equiv \boldsymbol{JJ}$, $\boldsymbol{K}^2 \equiv \boldsymbol{KK}$). Поэтому между кватернионными единицами и бивекторами $\boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{J}$, $\boldsymbol{K}$ имеется взаимно однозначное соответствие:

$$\begin{cases} \boldsymbol{i}' \in \mathbb{H} & \leftrightarrow & \boldsymbol{I} \equiv -\boldsymbol{\sigma}_{23} = -\boldsymbol{\sigma}_2\boldsymbol{\sigma}_3 \in Cl_3 \\ \mathbf{j}' \in \mathbb{H} & \leftrightarrow & \boldsymbol{J} \equiv -\boldsymbol{\sigma}_{31} = -\boldsymbol{\sigma}_3\boldsymbol{\sigma}_1 \in Cl_3 \\ \mathbf{k}' \in \mathbb{H} & \leftrightarrow & \boldsymbol{K} \equiv -\boldsymbol{\sigma}_{12} = -\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_2 \in Cl_3 \end{cases} \tag{1.24}$$

Это соответствие сопоставляет обычному кватерниону (1.22) чётное p-число (1.23), которое, используя $\boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{J}$, $\boldsymbol{K}$, можно представить в виде

$$\boldsymbol{Q} = \lambda_0\mathbf{1} - \lambda_{23}\boldsymbol{I} - \lambda_{31}\boldsymbol{J} - \lambda_{12}\boldsymbol{K} = \mu_{\mathbf{0}}\mathbf{1} + \mu_{\mathbf{1}}\boldsymbol{I} + \mu_{\mathbf{2}}\boldsymbol{J} + \mu_{\mathbf{3}}\boldsymbol{K}, \tag{1.25}$$

где $\mu_0 = \lambda_0$, $\mu_1 = -\lambda_{23}$, $\mu_2 = -\lambda_{31}$, $\mu_3 = -\lambda_{12}$. Соответствие между обычными кватернионами Q_H и чётными p-числами $\boldsymbol{Q}$ является взаимно однозначным; кроме того, можно убедиться, что аддитивные и мультипликативные операции в алгебрах $\mathbb{H}$ и Cl_3 сохраняют это соответствие.

Следовательно, *чётная подалгебра Cl_3^+ алгебры Cl_3 изоморфно представляет в Cl_3 алгебру $\mathbb{H}$ кватернионов.*

Далее чётная подалгебра $Cl_3^+ \subset Cl_3$ будет называться *алгеброй p-кватернионов*; элементы этой подалгебры – чётные p-числа – будут называться p-кватернионами.

Поскольку алгебра $\mathbb{H}$ обычных кватернионов расширяется до *тела* (в математическом смысле), постольку алгебра p-кватернионов также может рассматриваться как тело. С p-кватернионами можно оперировать также, как с элементами $\mathbb{H}$: их можно складывать, вычитать, умножать, а также выполнять левое и правое деления одного p-кватерниона на другой, ненулевой, предварительно сопоставив каждому p-кватерниону $\boldsymbol{Q} = \mu_0\mathbf{1} + \mu_{\mathbf{1}}\boldsymbol{I} + \mu_{\mathbf{2}}\boldsymbol{J} + \mu_{\mathbf{3}}\boldsymbol{K}$ сопряжённый ему кватернион $\boldsymbol{Q}^\dagger = \mu_0\mathbf{1} - \mu_{\mathbf{1}}\boldsymbol{I} - \mu_{\mathbf{2}}\boldsymbol{J} - \mu_{\mathbf{3}}\boldsymbol{K}$ (операция сопряжения определяется с помощью инволюции, описанной в п. 1.2.1).

1.6.3. Каноническое представление и норма p-кватернионов. В силу соотношений дуальности (1.7) бивекторы $\boldsymbol{I} \equiv -\boldsymbol{\sigma}_{23}$, $\boldsymbol{J} \equiv -\boldsymbol{\sigma}_{31}$, $\boldsymbol{K} \equiv -\boldsymbol{\sigma}_{12}$, играющие в Cl_3 роль кватернионных единиц, удовлетворяют равенствам

$$\boldsymbol{I} \equiv -\boldsymbol{i}\boldsymbol{\sigma}_1, \quad \boldsymbol{J} \equiv -\boldsymbol{i}\boldsymbol{\sigma}_2, \quad \boldsymbol{K} \equiv -\boldsymbol{i}\boldsymbol{\sigma}_3. \tag{1.26}$$

Поэтому выражение (1.25), описывающее p-кватернион, всегда можно представить в виде

$$\boldsymbol{Q} = \mu_0 \mathbf{1} + \mu_k \boldsymbol{i}\boldsymbol{\sigma}_k = \mu_0 \mathbf{1} + \boldsymbol{i}\boldsymbol{V},$$

где $\boldsymbol{V} = \mu_k \boldsymbol{\sigma}_k$ есть пространственный вектор с нормой $\|\boldsymbol{V}\| = \sqrt{\mu_k \mu_k}$. В свою очередь, этот вектор удовлетворяет очевидному равенству $\boldsymbol{V} = \mu\boldsymbol{\sigma}$, где

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{V} / \|\boldsymbol{V}\| = \boldsymbol{V} / \sqrt{\mu_k \mu_k} \qquad (\|\boldsymbol{\sigma}\| = 1)$$

есть единичный вектор, сонаправленный с вектором $\boldsymbol{V}$, $\mu = \sqrt{\mu_k \mu_k} \geqslant 0$ – неотрицательное действительное число.

Из этих замечаний следует, что любой p-кватернион алгебры Cl_3 может быть представлен в следующей канонической форме:

$$\boldsymbol{Q} = \mu_0 \mathbf{1} + \mu \boldsymbol{i}\boldsymbol{\sigma} \qquad (\|\boldsymbol{\sigma}\| = 1;\ \ \mu_0, \mu \in \mathbb{R}), \tag{1.27}$$

или, эквивалентно,

$$\boldsymbol{Q} = \mu_0 \mathbf{1} + \mu \boldsymbol{b} \qquad (\|\boldsymbol{b}\| = 1;\ \ \mu_0, \mu \in \mathbb{R}), \tag{1.28}$$

где $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{i}\boldsymbol{\sigma}$ – бивектор, дуальный вектору $\boldsymbol{\sigma}$. Условие $\mu \geqslant 0$ здесь уже не предъявляется: при $\mu < 0$ элемент $\mu\boldsymbol{i}\boldsymbol{\sigma}$ в (1.27) всегда можно интерпретировать как элемент $|\mu|\boldsymbol{i}\boldsymbol{\sigma}' = -|\mu|\boldsymbol{i}\boldsymbol{\sigma}$, в котором числовой коэффициент положителен, а вектор $\boldsymbol{\sigma}' = -\boldsymbol{\sigma}$ направлен противоположно вектору $\boldsymbol{\sigma}$.

Норма p-кватерниона вводится так: с помощью инволюции, описанной в п. 1.2.1, p-кватерниону $\boldsymbol{Q}$ ставится в соответствие сопряжённый p-кватернион

$$\boldsymbol{Q}^\dagger = \mu_0 \mathbf{1} - \mu \boldsymbol{i}\boldsymbol{\sigma},$$

после чего норма $\|\boldsymbol{Q}\|$ p-кватерниона $\boldsymbol{Q}$ определяется выражением

$$\|\boldsymbol{Q}\| = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{Q}^\dagger = \sqrt{\mu_0^2 + \mu^2}. \tag{1.29}$$

Так как $(\boldsymbol{Q}^\dagger)^\dagger = \boldsymbol{Q}^{\dagger\dagger} = \boldsymbol{Q}$ и $\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Q}^\dagger = \boldsymbol{Q}^\dagger\boldsymbol{Q}$, то $\|\boldsymbol{Q}^\dagger\| = \boldsymbol{Q}^\dagger(\boldsymbol{Q}^\dagger)^\dagger = \boldsymbol{Q}^\dagger\boldsymbol{Q} = \|\boldsymbol{Q}\|$, т. е. p-кватернион и сопряжённый ему имеют равные нормы.

1.6.4. Подалгебры алгебры p-кватернионов, изоморфные алгебре комплексных чисел. Теперь можно прояснить причину существования в Cl_3 "плохих" подалгебр, рассмотренных в конце пункта 1.6.1, которые изоморфны алгебре $\mathbb{C}$ комплексных чисел, но не коммутируют со всеми p-числами. Напомним, что каждая такая подалгебра образована множеством элементов вида $\{\alpha\mathbf{1} + \beta\boldsymbol{b}\}$, α, $\beta \in \mathbb{R}$, где $\boldsymbol{b}$ ($\boldsymbol{b}^2 = -1$, $\|\boldsymbol{b}\|^2 = 1$) есть произвольно фиксированный единичный бивектор. Но это же множество элементов возникает, если в представлении (1.28) p-кватерниона зафиксировать $\boldsymbol{b}$ и разрешить входящим в (1.28) числам μ_0, μ пробегать $\mathbb{R}$. Поэтому подалгебры $\{\alpha\mathbf{1} + \beta\boldsymbol{b}\} \subset Cl_3$ на самом деле являются подалгебрами алгебры p-кватернионов (носитель каждой такой подалгебры есть двумерное подпространство пространства $\{S\} \oplus \{B\}$ чётных p-чисел, натянутое на базис $\mathbf{1}$, $\boldsymbol{b}$). А так как p-кватернионы с различными $\boldsymbol{b}$, вообще говоря, не коммутируют друг с другом, то это свойство наследуется и указанными подалгебрами.

1.6.5. Унимодулярные p-кватернионы и их экспоненциальное представление. P-кватернионы, имеющие единичную норму, называются унимодулярными (они будут обозначаться строчными латинскими буквами). Из (1.29) следует, что в случае унимодулярного p-кватерниона выполнено $\mu_0^2 + \mu^2 = 1$; поэтому μ_0 и μ можно параметризовать тригонометрическими функциями: $\mu_0 = \cos\varphi$, $\mu = \sin\varphi$. Это позволяет представлять унимодулярные p-кватернионы p-числами вида

$$\boldsymbol{q}(\boldsymbol{\sigma},\ \varphi) = \mathbf{1}\cos\varphi + \boldsymbol{i\sigma}\sin\varphi \equiv \exp(\boldsymbol{i\sigma}\varphi) \qquad (\|\boldsymbol{\sigma}\| = 1)\,. \tag{1.30}$$

P-кватернион

$$\boldsymbol{q}(\boldsymbol{\sigma},\ -\varphi) = \mathbf{1}\cos\varphi - \boldsymbol{i\sigma}\sin\varphi \equiv \exp(-\boldsymbol{i\sigma}\varphi) \qquad (\|\boldsymbol{\sigma}\| = 1)\,, \tag{1.31}$$

сопряжённый p-кватерниону $\boldsymbol{q}(\boldsymbol{\sigma},\ \varphi)$, также является унимодулярным. Кроме того,

$$\boldsymbol{q}(\boldsymbol{\sigma},\ \varphi)\boldsymbol{q}(\boldsymbol{\sigma},\ -\varphi) = \boldsymbol{q}(\boldsymbol{\sigma},\ -\varphi)\boldsymbol{q}(\boldsymbol{\sigma},\ \varphi) = \mathbf{1};$$

поэтому $\boldsymbol{q}(\boldsymbol{\sigma},\ \varphi)$ и $\boldsymbol{q}(\boldsymbol{\sigma},\ -\varphi)$ являются взаимно обратными элементами:

$$\boldsymbol{q}^{-1}(\boldsymbol{\sigma},\ \varphi) = \boldsymbol{q}(\boldsymbol{\sigma},\ -\varphi) = \cos\varphi - \boldsymbol{i\sigma}\sin\varphi = \exp(-\boldsymbol{i\sigma}\varphi);$$
$$\boldsymbol{q}^{-1}(\boldsymbol{\sigma},\ -\varphi) = \boldsymbol{q}(\boldsymbol{\sigma},\ \varphi) = \cos\varphi + \boldsymbol{i\sigma}\sin\varphi = \exp(\boldsymbol{i\sigma}\varphi).$$

Другая – эквивалентная запись написанных соотношений получается заменой $\boldsymbol{i\sigma} \to \boldsymbol{b}$; после этой замены выражения (1.30) и (1.31) можно представить в виде

$$\boldsymbol{q}(\boldsymbol{b},\ \varphi) = \cos\varphi + \boldsymbol{b}\sin\varphi \equiv \exp(\boldsymbol{b}\varphi) \qquad (\|\boldsymbol{b}\| = 1)\,,$$
$$\boldsymbol{q}(\boldsymbol{b},\ -\varphi) = \cos\varphi - \boldsymbol{b}\sin\varphi \equiv \exp(-\boldsymbol{b}\varphi) \qquad (\|\boldsymbol{b}\| = 1)\,.$$

По отношению к умножению унимодулярные p-кватернионы (как и их прообразы – унимодулярные кватернионы алгебры $\mathbb{H}$) образуют некоммутативную группу, являющуюся изоморфным представлением группы SU_2. А поскольку SU_2 накрывает группу вращений SO_3, постольку унимодулярные p-кватернионы тесно связаны с преобразованиями последней группы: они порождают повороты элементов алгебры Cl_3. В п. 1.7.2 это обстоятельство будет рассмотрено более детально.

1.6.6. Отличия комплексных p-чисел и p-кватернионов от обычных. При обычных применениях комплексных чисел и кватернионов в физике первые часто интерпретируются как скаляры, а вторые – как линейные комбинации действительных чисел и векторов пространственного базиса, отождествляемых с кватернионными единицами.

Клиффордова интерпретация комплексных чисел и кватернионов демонстрирует неадекватность такого подхода: в алгебре Cl_3 мнимая единица $\boldsymbol{i}$ при преобразованиях пространственной системы координат в E_3 ведёт себя как тривектор ($\equiv$ псевдоскаляр), а кватернионные единицы $\boldsymbol{I},\ \boldsymbol{J},\ \boldsymbol{K}$ – как бивекторы ($\equiv$ псевдовекторы). На это обстоятельство указывал ещё Рисс [1, 2].

Более того, как будет продемонстрировано в п. 1.7.1, в алгебре Cl_3 даже действительные числа, заполняющие непространственную ось вдоль единичного элемента $\mathbf{1}$, приобретают статус неких вырожденных геометрических объектов, так как затрагиваются естественными для Cl_3 фазовыми преобразованиями, перемешиваясь с тривекторами – и даже превращаясь в последние.

1.7. ФАЗОВЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ВРАЩЕНИЯ В Cl_3

Так как алгебра Cl_3 содержит подалгебры, изоморфные алгебрам комплексных чисел и кватернионов, в Cl_3 выполняются все соотношения, присущие этим последним алгебрам, – в частности, формула Эйлера, связывающая в алгебре комплексных чисел показательную и тригонометрические функции и порождающая фазовые преобразования, а также формула Гамильтона-Кэли, описывающая в алгебре кватернионов пространственные повороты. Сейчас эти факты и вытекающие из них следствия будут рассмотрены более подробно.

1.7.1. Действие группы U_1 в Cl_3. Фазовые преобразования. Рассмотрим в алгебре Cl_3 p-числа вида

$$\exp(\boldsymbol{i}\varphi) \equiv \cos\varphi + \boldsymbol{i}\sin\varphi, \tag{1.32}$$

где $\varphi \in \mathbb{R}$ – действительный параметр (*"фазовый угол"*). Каждое такое число является значением заданной на $\mathbb{R}$ функции – *комплексной p-экспоненты*, отображающей $\mathbb{R}$ в Cl_3; в общем случае это число представляет собой сумму скаляра и тривектора.

По отношению к клиффордовому умножению множество p-чисел вида (1.32) является аддитивной группой; в частности,

$$\exp(\boldsymbol{i}\varphi)\exp(\boldsymbol{i}\chi) = \exp\left[\boldsymbol{i}(\varphi+\chi)\right], \qquad \left[\exp(\boldsymbol{i}\varphi)\right]^{-1} = \exp(-\boldsymbol{i}\varphi),$$

а единичный элемент этой группы совпадает с единицей $\mathbf{1}$ алгебры Cl_3.

Эта группа изоморфно представляет в Cl_3 коммутативную группу U_1; она будет называться *группой фазовых преобразований* и отождествляться с U_1.

Действие группы U_1 на p-число $\boldsymbol{A}$ определяется соотношением

$$\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}' = \exp(\boldsymbol{i}\varphi)\,\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\exp(\boldsymbol{i}\varphi) \tag{1.33}$$

(комплексная p-экспонента $\exp(\boldsymbol{i}\varphi)$, определённая правой частью (1.32), может переставляться со всеми элементами Cl_3, поскольку $\boldsymbol{i}$ коммутирует с ними всеми).

Под действием группы U_1 прямая сумма $\{S\} \oplus \{T\}$ пространств скаляров и тривекторов, а также прямая сумма $\{V\} \oplus \{B\}$ пространств векторов и бивекторов преобразуются в себя.

Сказанное, в частности, означает, что под действием фазовых преобразований скаляры переходят в линейные комбинации скаляров и тривекторов, а векторы – в линейные комбинации векторов и бивекторов. Однако скаляры и тривекторы никогда не переходят ни в векторы, ни в бивекторы (и наоборот).

При специальных значениях φ картина становится более простой.

Именно, если $\varphi = \pi m$ ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$), то под действием фазовых преобразований, соответствующих этим значениям φ, каждое из пространств $\{S\}$, $\{V\}$, $\{B\}$ и $\{T\}$ переходит в себя; при этом p-числа каждый раз меняют свои знаки на противоположные.

При $\varphi = \pi/2 + \pi m$ ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) фазовые преобразования, действуя на p-числа, переводят скаляры в тривекторы (и наоборот), а векторы – в бивекторы (и наоборот).

Всё вышесказанное содержательно означает, что с геометрической точки зрения комплексные p-экспоненты действуют в Cl_3 совсем не так, как обычные комплексные экспоненты на евклидовой плоскости: вторые всего лишь поворачивают эту плоскость, тогда как первые гладко преобразуют друг в друга объекты, которым наивная интуиция приписывает, так сказать, различный "топологический статус". В частности, скаляры, которые представляются точками непространственной оси $\mathbf{1}$ и отождествляются с действительными числами, могут под действием фазовых преобразований "раздуваться" в тривекторы, интерпретируемые как трёхмерные геометрические объекты, а тривекторы могут коллапсировать в точки оси $\mathbf{1}$.

1.7.2. Действие группы SO_3 в Cl_3. Пространственные повороты. В конце п. 1.6.5 уже упоминалось, что по отношению к умножению, определённому в кватернионной алгебре $\mathbb{H}$, множество принадлежащих $\mathbb{H}$ унимодулярных кватернионов является изоморфным представлением группы SU_2. Поэтому множество унимодулярных p-кватернионов – элементов чётной подалгебры алгебры Cl_3 – изоморфно представляет в Cl_3 эту же группу SU_2. Но последняя дважды накрывает группу вращений SO_3; поэтому действие SO_3 представлено в обеих алгебрах $\mathbb{H}$ и Cl_3. В алгебре $\mathbb{H}$ группа SO_3 действует унимодулярными кватернионами в соответствии с известной формулой Гамильтона-Кэли.

Перенеся последнюю в алгебру Cl_3, можно реализовать действие SO_3 в этой алгебре посредством унимодулярных p-кватернионов. Процедура переноса осуществляется так.

Сначала рассмотрим формулу Гамильтона-Кэли, описывающую в $\mathbb{H}$ поворот пространственного вектора $\boldsymbol{U}_0$ вокруг оси, определяемой единичным вектором $\boldsymbol{\sigma}$, на угол φ в новое положение $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}(\boldsymbol{\sigma},\ \varphi)$. Эта формула имеет вид [28, 29] (звёздочкой обозначена мультипликативная операция в $\mathbb{H}$)

$$\boldsymbol{U}_0 \to \boldsymbol{U}(\boldsymbol{\sigma},\ \varphi) = q(\boldsymbol{\sigma},\ \varphi) * \boldsymbol{U}_0 * q^{-1}(\boldsymbol{\sigma},\ \varphi),$$

где

$$q(\boldsymbol{\sigma},\ \varphi) = \cos\frac{\varphi}{2} + \boldsymbol{\sigma}\sin\frac{\varphi}{2} \in \mathbb{H},$$

$$q^{-1}(\boldsymbol{\sigma},\ \varphi) = q(\boldsymbol{\sigma},\ -\varphi) = \cos\frac{\varphi}{2} - \boldsymbol{\sigma}\sin\frac{\varphi}{2} \in \mathbb{H}$$

суть унимодулярные кватернионы, а вектор $\boldsymbol{\sigma}$ задан разложением

$$\boldsymbol{\sigma} = \mu_1\boldsymbol{i}' + \mu_2\boldsymbol{j}' + \mu_3\boldsymbol{k}' \qquad (\mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2 = 1).$$

В этом разложении кватернионные единицы $\boldsymbol{i}'$, $\boldsymbol{j}'$, $\boldsymbol{k}'$ отождествляются с базисными ортами трёхмерного евклидова пространства; при этом предполагается, что исходный и повёрнутый векторы $\boldsymbol{U}_0$ и $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}(\boldsymbol{\sigma},\ \varphi)$ разложены по этому же базису:

$$\boldsymbol{U}_0 = U_{01}\boldsymbol{i}' + U_{02}\boldsymbol{j}' + U_{03}\boldsymbol{k}', \qquad \boldsymbol{U} = U_1\boldsymbol{i}' + U_2\boldsymbol{j}' + U_3\boldsymbol{k}'.$$

Теперь перенесём формулу Гамильтона-Кэли из $\mathbb{H}$ в Cl_3. С этой целью, используя соответствия (1.24) и формулы (1.26), заменим в формуле Гамильтона-Кэли и сопутствующих ей соотношениях кватернионные единицы $\boldsymbol{i}'$, $\boldsymbol{j}'$, $\boldsymbol{k}' \in \mathbb{H}$ бивекторами $\boldsymbol{I} = -\boldsymbol{i}\boldsymbol{\sigma}_1,\ \boldsymbol{J} = -\boldsymbol{i}\boldsymbol{\sigma}_2,\ \boldsymbol{K} = -\boldsymbol{i}\boldsymbol{\sigma}_3 \in Cl_3$:

$$\boldsymbol{i}' \ \to\ -\boldsymbol{i}\boldsymbol{\sigma}_1, \quad \boldsymbol{j}' \ \to\ -\boldsymbol{i}\boldsymbol{\sigma}_2, \quad \boldsymbol{k}' \ \to\ -\boldsymbol{i}\boldsymbol{\sigma}_3.$$

При таких заменах

1) векторы $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{U}_0$, $\boldsymbol{U}$ переходят в бивекторы $-\boldsymbol{i}\boldsymbol{\sigma}$, $-\boldsymbol{i}\boldsymbol{U}_0$, $-\boldsymbol{i}\boldsymbol{U}$; действительно,

$$\boldsymbol{\sigma} = \mu_1\boldsymbol{i}' + \mu_2\boldsymbol{j}' + \mu_3\boldsymbol{k}' \ \ \to \ \ -\boldsymbol{i}\,(\mu_1\boldsymbol{\sigma}_1 + \mu_2\boldsymbol{\sigma}_2 + \mu_3\boldsymbol{\sigma}_3) = -\boldsymbol{i}\boldsymbol{\sigma},$$

$$\boldsymbol{U}_0 = U_{01}\boldsymbol{i}' + U_{02}\boldsymbol{j}' + U_{03}\boldsymbol{k}' \ \ \to \ \ -\boldsymbol{i}\,(U_{01}\boldsymbol{\sigma}_1 + U_{02}\boldsymbol{\sigma}_2 + U_{03}\boldsymbol{\sigma}_3) = -\boldsymbol{i}\boldsymbol{U}_0,$$

$$\boldsymbol{U} = U_1\boldsymbol{i}' + U_2\boldsymbol{j}' + U_3\boldsymbol{k}' \ \ \to \ \ -\boldsymbol{i}\,(U_1\boldsymbol{\sigma}_1 + U_2\boldsymbol{\sigma}_2 + U_3\boldsymbol{\sigma}_3) = -\boldsymbol{i}\boldsymbol{U};$$

2) унимодулярные кватернионы $q(\boldsymbol{\sigma},\ \varphi)$, $q(\boldsymbol{\sigma},\ -\varphi) \in \mathbb{H}$ переходят в унимодулярные p-кватернионы $\boldsymbol{q}(\boldsymbol{\sigma},\ -\varphi)$, $\boldsymbol{q}(\boldsymbol{\sigma},\ \varphi) \in Cl_3$; действительно,

$$q(\boldsymbol{\sigma},\ \varphi) = \cos\frac{\varphi}{2} + \boldsymbol{\sigma}\sin\frac{\varphi}{2} \quad \to \quad \boldsymbol{q}(\boldsymbol{\sigma},\ -\varphi) = \cos\frac{\varphi}{2} - \boldsymbol{i}\boldsymbol{\sigma}\sin\frac{\varphi}{2} \equiv \exp\left(-\boldsymbol{i}\boldsymbol{\sigma}\frac{\varphi}{2}\right) \ ;$$

$$q(\boldsymbol{\sigma},\ -\varphi) = \cos\frac{\varphi}{2} - \boldsymbol{\sigma}\sin\frac{\varphi}{2} \quad \to \quad \boldsymbol{q}(\boldsymbol{\sigma},\ \varphi) = \cos\frac{\varphi}{2} + \boldsymbol{i}\boldsymbol{\sigma}\sin\frac{\varphi}{2} \equiv \exp\left(\boldsymbol{i}\boldsymbol{\sigma}\frac{\varphi}{2}\right) \ .$$

После этого формула Гамильтона-Кэли принимает вид

$$\boldsymbol{i}\boldsymbol{U}_0 \to \boldsymbol{i}\boldsymbol{U}(\boldsymbol{\sigma},\ \varphi) = \exp\left(-\boldsymbol{i}\boldsymbol{\sigma}\frac{\varphi}{2}\right)\boldsymbol{i}\boldsymbol{U}_0\exp\left(\boldsymbol{i}\boldsymbol{\sigma}\frac{\varphi}{2}\right).$$

Этот вариант формулы Гамильтона-Кэли описывает в алгебре Cl_3 пространственный поворот бивектора $\boldsymbol{i}\boldsymbol{U}_0$ вокруг оси, определяемой единичным вектором $\boldsymbol{\sigma}$, на угол φ.

Теперь, учитывая, что элемент $\boldsymbol{i}$ коммутирует со всеми p-числами, вынесем его в последней формуле за знак комплексной p-экспоненты влево и после этого умножим обе части полученного равенства на $-\boldsymbol{i}$. В результате возникает ещё одна разновидность формулы Гамильтона-Кэли

$$\boldsymbol{U}_0 \to \boldsymbol{U}(\boldsymbol{\sigma},\ \varphi) = \exp\left(-\boldsymbol{i\sigma}\frac{\varphi}{2}\right)\boldsymbol{U}_0 \exp\left(\boldsymbol{i\sigma}\frac{\varphi}{2}\right);$$

эта формула описывает в алгебре Cl_3 пространственный поворот вектора $\boldsymbol{U}_0$ вокруг оси, определяемой единичным вектором $\boldsymbol{\sigma}$, на угол φ.

Преобразования, описывающиеся обоими вариантами формулы Гамильтона-Кэли, являются именно *поворотами*, ибо они сохраняют скалярные произведения как векторов, так и бивекторов: в этом нетрудно убедиться, используя последнюю из написанных формул, а также равенство (1.14), связывающее скалярное произведение векторов с их клиффордовыми произведениями[7].

Указанные преобразования определяют действие группы вращений SO_3 на векторы и бивекторы алгебры Cl_3. Это действие распространяется на любые p-числа $\boldsymbol{A}_0 \in Cl_3$ формулами

$$\boldsymbol{A}_0 \to \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\sigma},\ \varphi) = \left(\cos\frac{\varphi}{2} - \boldsymbol{i\sigma}\sin\frac{\varphi}{2}\right)\boldsymbol{A}_0\left(\cos\frac{\varphi}{2} + \boldsymbol{i\sigma}\sin\frac{\varphi}{2}\right) \equiv$$
$$\equiv \exp\left(-\boldsymbol{i\sigma}\frac{\varphi}{2}\right)\boldsymbol{A}_0 \exp\left(\boldsymbol{i\sigma}\frac{\varphi}{2}\right) \tag{1.34}$$

или, в другой записи,

$$\boldsymbol{A}_0 \to \boldsymbol{A}(\boldsymbol{b},\ \varphi) = \left(\cos\frac{\varphi}{2} - \boldsymbol{b}\sin\frac{\varphi}{2}\right)\boldsymbol{A}_0\left(\cos\frac{\varphi}{2} + \boldsymbol{b}\sin\frac{\varphi}{2}\right) \equiv$$
$$\equiv \exp\left(-\boldsymbol{b}\frac{\varphi}{2}\right)\boldsymbol{A}_0 \exp\left(\boldsymbol{b}\frac{\varphi}{2}\right); \tag{1.35}$$

здесь $\boldsymbol{\sigma}$ ($\|\boldsymbol{\sigma}\| = 1$) – единичный вектор оси вращения, φ – угол поворота, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{i\sigma}$ ($\|\boldsymbol{b}\| = 1$) – единичный бивектор плоскости вращения, дуальный вектору $\boldsymbol{\sigma}$. Бивектор $\boldsymbol{b}$ определяет как плоскость вращения, так и направление вращения в этой плоскости, поскольку он (этот бивектор) навязывает указанной плоскости свою ориентацию.

Рассмотрим, как группа вращений действует на p-числа $\boldsymbol{A}_0$ того или иного вида.

Случаи, когда $\boldsymbol{A}_0$ является либо вектором, либо бивектором, фактически уже были рассмотрены выше: под действием преобразований (1.34), (1.35) эти объекты, вообще говоря, поворачиваются. При этом возникает задача о сложении двух последовательных поворотов; она решается в алгебре Cl_3 тем же способом, что и в алгебре $\mathbb{H}$ [7, 28].

Если же $\boldsymbol{A}_0$ есть либо скаляр, либо тривектор, то такие объекты инвариантны относительно вышеуказанных преобразований. В самом деле, как элемент $\mathbf{1}$, так и элемент $\boldsymbol{i}$, подставленные в (1.34), (1.35) вместо $\boldsymbol{A}_0$, можно вынести за любую из комплексных p-экспонент, после чего произведение обеих p-экспонент даст единицу. (Действительные же коэффициенты, которые могут стоять при $\mathbf{1}$ и $\boldsymbol{i}$ в качестве множителей, выносятся за p-экспоненты автоматически.)

Теперь можно рассмотреть, как преобразования (1.34), (1.35) действуют на произвольное p-число $\boldsymbol{A_0} = \boldsymbol{A}_{S_0} + \boldsymbol{A}_{V_0} + \boldsymbol{A}_{B_0} + \boldsymbol{A}_{T_0}$, содержащее скалярную ($\boldsymbol{A}_{S_0}$), векторную ($\boldsymbol{A}_{V_0}$), бивекторную ($\boldsymbol{A}_{B_0}$) и тривекторную ($\boldsymbol{A}_{T_0}$) части. Используя, например, (1.34), получаем

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\sigma},\ \varphi) = \exp\left(-\boldsymbol{i\sigma}\frac{\varphi}{2}\right)(\boldsymbol{A}_{S_0} + \boldsymbol{A}_{V_0} + \boldsymbol{A}_{B_0} + \boldsymbol{A}_{T_0})\exp\left(\boldsymbol{i\sigma}\frac{\varphi}{2}\right) =$$

[7] Из сохранения скалярных произведений векторов уже следует сохранение скалярных произведений бивекторов, поскольку последние произведения определяются через скалярные произведения векторов, которым эти бивекторы дуальны (см. п. 1.5).

$$= \boldsymbol{A}_{S_0} + \exp\left(-\boldsymbol{i\sigma}\frac{\varphi}{2}\right)\boldsymbol{A}_{V_0}\exp\left(\boldsymbol{i\sigma}\frac{\varphi}{2}\right) + \exp\left(-\boldsymbol{i\sigma}\frac{\varphi}{2}\right)\boldsymbol{A}_{B_0}\exp\left(\boldsymbol{i\sigma}\frac{\varphi}{2}\right) + \boldsymbol{A}_{T_0} =$$
$$= \boldsymbol{A}_{S_0} + \boldsymbol{A}_V(\boldsymbol{\sigma},\ \varphi) + \boldsymbol{A}_B(\boldsymbol{\sigma},\ \varphi) + \boldsymbol{A}_{T_0};$$

это означает, что действие группы вращений на произвольное p-число приводит к поворотам его векторной и бивекторной частей, сохраняя скалярную и тривекторную части неизменными.

В заключение отметим, что ввиду наличия коэффициента $1/2$ в аргументах тригонометрических функций и p-экспонент, входящих в (1.34), (1.35), поворот векторов и бивекторов на один и тот же угол φ индуцируется не одной парой унимодулярных p-кватернионов $\exp(-\boldsymbol{i\sigma}\varphi/2)$, $\exp(\boldsymbol{i\sigma}\varphi/2)$, а двумя парами: вторая пара, индуцирующая такой же поворот, имеет вид

$$\exp\left[-\boldsymbol{i\sigma}\left(\varphi/2+\pi\right)\right], \qquad \exp\left[\boldsymbol{i\sigma}\left(\varphi/2+\pi\right)\right].$$

Как и в случае обычных кватернионов, указанное явление объясняется тем, что группа унимодулярных p-кватернионов является изоморфным представлением группы SU_2 и поэтому дважды накрывает группу SO_3.

1.8. ПАРАВЕКТОРНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ АЛГЕБРЫ И ЕЁ ЦЕНТР

1.8.1. Паравекторное представление алгебры $\boldsymbol{Cl_3}$. Алгебра $\boldsymbol{Cl_3}$ как алгебра Паули. Лемма о базисе. Вначале чисто формально рассмотрим унитальную алгебру над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел, порождённую четырьмя линейно независимыми элементами: единицей $\breve{\mathbf{1}}$ и тремя векторами $\breve{\boldsymbol{\sigma}}_k$ $(k = 1,\ 2,\ 3)$, снабжёнными таблицей умножения

$$\breve{\boldsymbol{\sigma}}_1^2 = \breve{\boldsymbol{\sigma}}_2^2 = \breve{\boldsymbol{\sigma}}_3^2 = \breve{\mathbf{1}},$$
$$\breve{\boldsymbol{\sigma}}_2 \circ \breve{\boldsymbol{\sigma}}_3 = -\breve{\boldsymbol{\sigma}}_3 \circ \breve{\boldsymbol{\sigma}}_2 = i\breve{\boldsymbol{\sigma}}_1, \quad \breve{\boldsymbol{\sigma}}_3 \circ \breve{\boldsymbol{\sigma}}_1 = -\breve{\boldsymbol{\sigma}}_1 \circ \breve{\boldsymbol{\sigma}}_3 = i\breve{\boldsymbol{\sigma}}_2, \quad \breve{\boldsymbol{\sigma}}_1 \circ \breve{\boldsymbol{\sigma}}_2 = -\breve{\boldsymbol{\sigma}}_2 \circ \breve{\boldsymbol{\sigma}}_1 = i\breve{\boldsymbol{\sigma}}_3,$$

где i $(i^2 = -1)$ – мнимая единица поля $\mathbb{C}$, кружком обозначена операция умножения, $\breve{\boldsymbol{\sigma}}_1^2 \equiv \breve{\boldsymbol{\sigma}}_1 \circ \breve{\boldsymbol{\sigma}}_1$, $\breve{\boldsymbol{\sigma}}_2^2 \equiv \breve{\boldsymbol{\sigma}}_2 \circ \breve{\boldsymbol{\sigma}}_2$, $\breve{\boldsymbol{\sigma}}_3^2 \equiv \breve{\boldsymbol{\sigma}}_3 \circ \breve{\boldsymbol{\sigma}}_3$. Элементами этой алгебры являются линейные комбинации $z_0\breve{\mathbf{1}} + z_k\breve{\boldsymbol{\sigma}}_k$ с комплексными числами $z_0,\ z_k \in \mathbb{C}$ в качестве коэффициентов. Каждая такая комбинация есть сумма скалярного элемента $z_0\breve{\mathbf{1}}$, который можно отождествить с числом z_0, и вектора $z_k\breve{\boldsymbol{\sigma}}_k$. Суммы скаляров и векторов принято называть *паравекторами*; поэтому о так определённой алгебре можно говорить как об *алгебре паравекторов над полем комплексных чисел.*

Изоморфным представлением рассмотренной алгебры паравекторов является известная алгебра комплексных матриц 2×2 – алгебра Паули, повседневно используемая в квантовой механике: базисом этой алгебры служат матрицы Паули

$$\hat{\mathbf{1}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{\boldsymbol{\sigma}}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\boldsymbol{\sigma}}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\boldsymbol{\sigma}}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

таблица матричного умножения которых имеет тот же вид, что и в случае алгебры паравекторов.

Другим изоморфным представлением алгебры паравекторов, как выяснится чуть ниже, является пространственная алгебра Cl_3.

Из этих замечаний следует, что все три упомянутые алгебры в некотором смысле одинаковы. В частности, алгебра Cl_3, определённая над полем $\mathbb{R}$, изоморфна алгебре Паули, определённой над полем $\mathbb{C}$; этот изоморфизм ставит в соответствие пространственным ортам $\boldsymbol{\sigma}_1$, $\boldsymbol{\sigma}_2$, $\boldsymbol{\sigma}_3 \in Cl_3$ комплексные матрицы Паули $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_1$, $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_2, \hat{\boldsymbol{\sigma}}_3$, а элементу $\mathbf{1} \in Cl_3$ – единичную матрицу $\hat{\mathbf{1}}$.

Термин "p-число", введённый Дэвидом Хестенесом [3] в честь Вольфганга Паули для именования элементов Cl_3, подчеркивает, что пространственная алгебра вмещает в себя всё, что содержит алгебра его знаменитого предшественника: физикам, имеющим дело с квантовой механикой, нет нужды обращаться к комплексным матрицам, хитроумные детали строения которых практически полностью затеняют простые и ясные геометрические истоки.

Связь алгебры Cl_3 с алгеброй паравекторов выявляется, если обратиться к разложению (1.5) произвольного p-числа $\boldsymbol{A}$ по базису Cl_3 и, используя соотношения дуальности (1.7), переписать это разложение в виде

$$\boldsymbol{A} = \alpha_0 \mathbf{1} + \alpha_k \boldsymbol{\sigma}_k + \beta_k \boldsymbol{i} \boldsymbol{\sigma}_k + \mathbf{i}\beta_0 = (\alpha_0 \mathbf{1} + \beta_0 \boldsymbol{i})\mathbf{1} + (\alpha_k \mathbf{1} + \beta_k \boldsymbol{i})\boldsymbol{\sigma}_k = z_0 \mathbf{1} + z_k \boldsymbol{\sigma}_k; \qquad (1.36)$$

здесь α_0, β_0, α_k, β_k ($k = 1, 2, 3$) – действительные числа, а z_0 и z_k являются комплексными p-числами, определёнными равенствами

$$z_0 = \alpha_0 \mathbf{1} + \beta_0 \boldsymbol{i}, \qquad z_k = \alpha_k \mathbf{1} + \beta_k \boldsymbol{i} \qquad (k = 1,\ 2,\ 3). \qquad (1.37)$$

Представление (1.36) показывает, что *любой элемент алгебры* Cl_3 *может интерпретироваться как паравектор* $z_0\mathbf{1} + z_k\boldsymbol{\sigma}_k$ *над полем комплексных p-чисел.* Перемножая такие паравекторы, удобно вместо таблицы исходной умножения (1.1)–(1.4) алгебры Cl_3 использовать равносильную таблицу

$$\boldsymbol{\sigma}_1^2 = \boldsymbol{\sigma}_2^2 = \boldsymbol{\sigma}_3^2 = \mathbf{1}, \qquad \boldsymbol{i}^2 = -\mathbf{1},$$

$$\boldsymbol{\sigma}_2\boldsymbol{\sigma}_3 = -\boldsymbol{\sigma}_3\boldsymbol{\sigma}_2 = \boldsymbol{i}\boldsymbol{\sigma}_1, \quad \boldsymbol{\sigma}_3\boldsymbol{\sigma}_1 = -\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_3 = \boldsymbol{i}\boldsymbol{\sigma}_2, \quad \boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_2 = -\boldsymbol{\sigma}_2\boldsymbol{\sigma}_1 = \boldsymbol{i}\boldsymbol{\sigma}_3.$$

Сравнение этой таблицы умножения с таблицей умножения, написанной в начале настоящего пункта, подводит к заключению, что *алгебра* Cl_3 *над полем* $\mathbb{R}$ *изоморфна вышерассмотренной алгебре паравекторов над полем* $\mathbb{C}$.

Изоморфизм почти очевиден. Нужно доказать лишь, что базисные элементы $\mathbf{1}$ и $\boldsymbol{\sigma}_k$ ($k = 1,\ 2,\ 3$), входящие в (1.36), линейно независимы над полем комплексных p-чисел. (Только в этом случае множество элементов $\{z_0\mathbf{1} + z_k\boldsymbol{\sigma}_k\}$ с уже существующими на нём операциями сложения и умножения можно рассматривать как алгебру с базисом $\mathbf{1}$, $\boldsymbol{\sigma}_k$ ($k = 1,\ 2,\ 3$)). Вот доказательство.

Лемма о базисе. *В алгебре* Cl_3 *равенство*

$$z_0\mathbf{1} + z_k\boldsymbol{\sigma}_k = 0 \qquad (1.38)$$

выполняется тогда и только тогда, когда $z_0 = 0$, $z_k = 0$ ($k = 1,\ 2,\ 3$).

<u>*Доказательство.*</u> В силу (1.36) имеет место эквивалентность

$$\alpha_0\mathbf{1} + \alpha_k\boldsymbol{\sigma}_k + \beta_k\boldsymbol{i}\boldsymbol{\sigma}_k + i\beta_0 = 0 \ \Leftrightarrow\ z_0\mathbf{1} + z_k\boldsymbol{\sigma}_k = 0. \qquad (1.39)$$

Здесь левое равенство выполняется в том и только том случае, когда выполняются равенства

$$\alpha_0 = \beta_0 = 0, \quad \alpha_k = \beta_k = 0 \quad (k = 1, 2, 3), \qquad (1.40)$$

ибо базисные элементы $\mathbf{1}$, $\boldsymbol{\sigma}_k$, $\boldsymbol{i}\boldsymbol{\sigma}_k$, $\boldsymbol{i}$ линейно независимы над $\mathbb{R}$. А так как правое равенство в (1.39) эквивалентно левому, то оно также выполняется тогда и только тогда, когда выполняются равенства (1.40). Но эти равенства равносильны равенствам $z_0 = 0$, $z_k = 0$

($k = 1,\ 2,\ 3$), ибо элементы $\mathbf{1}$, $\boldsymbol{i}$, входящие в $z_0 = \alpha_0\mathbf{1} + \beta_0\boldsymbol{i}$ и $z_k = \alpha_k\mathbf{1} + \beta_k\boldsymbol{i}$, линейно независимы над $\mathbb{R}$. Лемма доказана.

Замечание. Представление Cl_3 в виде алгебры паравекторов оказывается весьма удобным в вычислениях и будет в дальнейшем неоднократно использоваться. При этом лемма о базисе оказывается крайне полезным инструментом: если в ходе вычислений возникает "комплексное" уравнение вида

$$\tilde{z}_0(p_1,\ ...,\ p_n\ )\mathbf{1} + \tilde{z}_k(p_1,\ ...,\ p_n)\boldsymbol{\sigma}_k = 0$$

относительно некоторых параметров $p_1,\ ...,\ p_n$, то его можно не преобразовывать к форме разложения по базису алгебры Cl_3 (что бывает громоздким делом), а, применив лемму о базисе, сразу же заменить системой уравнений $\tilde{z}_0(p_1,\ ...,\ p_n\ ) = 0$, $\tilde{z}_k(p_1,\ ...,\ p_n\ ) = 0$ ($k = 1$, 2, 3) и работать уже с нею. Эту простую, но принципиальную лемму автор в доступной ему литературе не обнаружил.

1.8.2. Центр пространственной алгебры. Напомним, что центром алгебры называется множество её элементов, коммутирующих со всеми элементами алгебры. Центр любой алгебры является её подалгеброй.

Центр Cl_3 наверняка содержит все линейные комбинации скаляров и тривекторов – ведь они коммутируют со всеми p-числами. С другой стороны, в нём наверняка не содержатся ни векторы, ни бивекторы, ни их линейные комбинации, ибо в Cl_3 для каждого такого элемента всегда найдётся элемент, не коммутирующий с ним.

Поэтому *центром пространственной алгебры является алгебра комплексных p-чисел – подалгебра алгебры Cl_3, порождённая образующими $\mathbf{1}$, $\boldsymbol{i}$ и изоморфная $\mathbb{C}$.*

1.8.3. Лемма о сокращении и её следствие. Лемма о базисе, доказанная в п. 1.8.1, сейчас будет дополнена ещё одним утверждением, которое позволяет некоторые уравнения, заданные в алгебре Cl_3, сокращать на ненулевые p-числа. Законность такой операции необходимо обосновать, так как Cl_3 содержит делители нуля.

Лемма о сокращении. Пусть $\boldsymbol{A} \neq 0$ *– ненулевой элемент алгебры Cl_3, $z \in \mathbb{C}$ – элемент её центра. Тогда равенство $z\boldsymbol{A} = 0$ эквивалентно равенству $z = 0$.* (Другими словами, если $\boldsymbol{A} \neq 0$, то равенство $z\boldsymbol{A} = 0$ можно сократить на $\boldsymbol{A}$; это утверждение относится и к равенству $\boldsymbol{A}z = 0$).

<u>*Доказательство*</u>. Напишем для элемента $\boldsymbol{A}$ разложение $\boldsymbol{A} = z_0\mathbf{1} + z_k\boldsymbol{\sigma}_k$ и представим равенство $z\boldsymbol{A} = 0$ в виде $zz_0\mathbf{1} + zz_k\boldsymbol{\sigma}_k = 0$. Последнее по лемме о базисе эквивалентно четырём равенствам

$$zz_0 = 0, \qquad zz_k = 0 \qquad (k = 1,\ 2,\ 3). \tag{1.41}$$

Но, по условию, $\boldsymbol{A} = z_0\mathbf{1} + z_k\boldsymbol{\sigma}_k \neq 0$. Поэтому в силу леммы о базисе хотя бы одно из комплексных p-чисел z_0, z_k ($k = 1,\ 2,\ 3$), входящих в (1.41), не равно нулю. Тогда, поделив на это ненулевое p-число именно то из равенств (1.41), в которое это p-число входит, получаем $z = 0$. В обратном направлении эквивалентность очевидна: $z = 0 \ \Rightarrow\ z\boldsymbol{A} = 0$.

Следствие. *Пусть $\boldsymbol{A} \in Cl_3$, $\boldsymbol{A} \neq 0$, z, $\zeta \in \mathbb{C}$. Тогда равенство $z\boldsymbol{A} = \zeta\boldsymbol{A}$ эквивалентно равенству $z = \zeta$* (равенство $z\boldsymbol{A} = \zeta\boldsymbol{A}$ в этом утверждении можно заменить любым из равенств $z\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\zeta$, $\boldsymbol{A}z = \zeta\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A}z = \boldsymbol{A}\zeta$).

<u>*Доказательство*</u>. $z\boldsymbol{A} = \zeta\boldsymbol{A}$ эквивалентно $(z - \zeta)\boldsymbol{A} = 0$; отсюда $z - \zeta = 0$ по лемме о сокращении, и поэтому $z = \zeta$. Обращение рассуждений: $z = \zeta \ \Rightarrow\ \mathrm{z} - \zeta = 0 \ \Rightarrow\ (z - \zeta)\boldsymbol{A} = 0 \ \Rightarrow\ z\boldsymbol{A} = \zeta\boldsymbol{A}$.

* * *

Завершая на этом очерк основ пространственной алгебры, перейдём к изложению конкретных результатов.

2 ИДЕМПОТЕНТЫ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ АЛГЕБРЫ

Идемпотент – это элемент алгебры, который обладает свойством обычной числовой единицы не меняться при умножении на саму себя. Напомним несколько определений.

Стандартные общеалгебраические определения.

1. *Элемент* $\boldsymbol{E} \neq 0$ *алгебры* $\mathcal{A}$, *удовлетворяющий соотношению* $\boldsymbol{E}^2 = \boldsymbol{E}$, *называется идемпотентом.* (Поскольку $0 \cdot 0 = 0$, постольку нуль любой алгебры является идемпотентом; о нём говорят как о *тривиальном*, или *нулевом*, идемпотенте. Все другие идемпотенты, если они существуют в $\mathcal{A}$, называются *ненулевыми*).

2. *Два идемпотента* $\boldsymbol{E}_+$ *и* $\boldsymbol{E}_-$ ($\boldsymbol{E}_+ \neq \boldsymbol{E}_-$) *алгебры* $\mathcal{A}$, *удовлетворяющие равенствам* $\boldsymbol{E}_+\boldsymbol{E}_- = \boldsymbol{E}_-\boldsymbol{E}_+ = 0$, *называются (взаимно) ортогональными.*

3. *Идемпотент* $\boldsymbol{E}$ *алгебры* $\mathcal{A}$, *разлагающийся в сумму* $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_+ + \boldsymbol{E}_-$ *двух ненулевых взаимно ортогональных идемпотентов* $\boldsymbol{E}_+ \in \mathcal{A}$ *и* $\boldsymbol{E}_- \in \mathcal{A}$ ($\boldsymbol{E}_+\boldsymbol{E}_- = \boldsymbol{E}_-\boldsymbol{E}_+ = 0$), *называется непримитивным.* (Нетрудно показать, что любой непримитивный идемпотент является ненулевым).

Из определения 1 следует, что если $\mathcal{A}$ является унитальной алгеброй, то её единица $\mathbf{1}_{\mathcal{A}}$ является идемпотентом – это тривиально и неинтересно. Принципиальный же интерес представляет нетривиальный случай, когда $\mathbf{1}_{\mathcal{A}}$ является непримитивным идемпотентом и разлагается в сумму ненулевых ортогональных идемпотентов

$$\mathbf{1}_{\mathcal{A}} = \boldsymbol{E}_+ + \boldsymbol{E}_-, \qquad \boldsymbol{E}_+\boldsymbol{E}_- = \boldsymbol{E}_-\boldsymbol{E}_+ = 0.$$

Если такое разложение существует, то вследствие известных теорем (см., например, [17–19]) унитальная алгебра $\mathcal{A}$ разлагается в прямые суммы двух односторонних идеалов – как левых идеалов $\mathcal{A}\boldsymbol{E}_+$ и $\mathcal{A}\boldsymbol{E}_-$, так и правых идеалов $\boldsymbol{E}_-\mathcal{A}$ и $\boldsymbol{E}_+\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}\boldsymbol{E}_+ \oplus \mathcal{A}E_- = \boldsymbol{E}_+\mathcal{A} \oplus \boldsymbol{E}_-\mathcal{A}.$$

Определяющее свойство идемпотентов – равенство $\boldsymbol{E}^2 = \boldsymbol{E}$ – показывает, что эти элементы алгебр играют роль проекционных операторов (проекторов), причём взаимно ортогональные идемпотенты можно рассматривать как взаимно ортогональные проекторы. Такие взаимно ортогональные проекторы отображают всю алгебру на порождённые ими идеалы, которые не имеют общих элементов, кроме нуля алгебры.

Напомним, что для существования написанного разложения алгебры $\mathcal{A}$ в сумму двух идеалов достаточно, чтобы $\mathcal{A}$ содержала хотя бы один нетривиальный идемпотент, отличный от $\mathbf{1}_{\mathcal{A}}$ (далее такие идемпотенты будут именоваться *неединичными*). Если неединичный идемпотент (скажем, $\boldsymbol{E}_+$) найден, то второй идемпотент $\boldsymbol{E}_-$, ортогональный первому, определяется выражением [16–18]

$$\boldsymbol{E}_- = \mathbf{1}_{\mathcal{A}} - \boldsymbol{E}_+.$$

Действительно, $\boldsymbol{E}_-$ является идемпотентом, ибо

$$\boldsymbol{E}_-^2 = \boldsymbol{E}_-\boldsymbol{E}_- = (\mathbf{1}_{\mathcal{A}} - \boldsymbol{E}_+)(1_{\mathcal{A}} - \boldsymbol{E}_+) = 1_{\mathcal{A}} - 2\boldsymbol{E}_+ + \boldsymbol{E}_+^2 = 1_{\mathcal{A}} - \boldsymbol{E}_+ = \boldsymbol{E}_-,$$

а выкладки

$$\boldsymbol{E}_+\boldsymbol{E}_- = \boldsymbol{E}_+(\mathbf{1}_{\mathcal{A}} - \boldsymbol{E}_+) = \boldsymbol{E}_+ - \boldsymbol{E}_+^2 = \boldsymbol{E}_+ - \boldsymbol{E}_+ = 0,$$
$$\boldsymbol{E}_-\boldsymbol{E}_+ = (\mathbf{1}_{\mathcal{A}} - \boldsymbol{E}_+)\boldsymbol{E}_+ = \boldsymbol{E}_+ - \boldsymbol{E}_+^2 = \boldsymbol{E}_+ - \boldsymbol{E}_+ = 0$$

показывают, что $\boldsymbol{E}_+$ и $\boldsymbol{E}_-$ ортогональны друг другу.

В пространственной алгебре Cl_3 имеются неединичные идемпотенты. В частности, таковым является паравектор $\frac{1}{2}(\mathbf{1} + \boldsymbol{\sigma})$, где $\boldsymbol{\sigma}$ ($\boldsymbol{\sigma}^2 = \mathbf{1}$) – произвольный вектор единичной длины [3, 5, 7]. В этом легко убедиться:

$$\frac{1}{2}(\mathbf{1}+\boldsymbol{\sigma})\frac{1}{2}(\mathbf{1}+\boldsymbol{\sigma})=\frac{1}{4}\left(\mathbf{1}+2\boldsymbol{\sigma}+\boldsymbol{\sigma}^{\mathbf{2}}\right)=\frac{1}{2}(\mathbf{1}+\boldsymbol{\sigma}).$$

Второй неединичный идемпотент, ортогональный первому, получается по вышеуказанному рецепту и имеет вид $\mathbf{1}-\frac{1}{2}(\mathbf{1}+\boldsymbol{\sigma})=\frac{1}{2}(\mathbf{1}-\boldsymbol{\sigma})$. Поэтому Cl_3 разлагается в прямую сумму двух односторонних идеалов. Символически это разложение можно представить в виде

$$Cl_3=\left[Cl_3\frac{\mathbf{1}+\boldsymbol{\sigma}}{2}\right]\oplus\left[Cl_3\frac{\mathbf{1}-\boldsymbol{\sigma}}{2}\right]=\left[\frac{\mathbf{1}+\boldsymbol{\sigma}}{2}Cl_3\right]\oplus\left[\frac{\mathbf{1}-\boldsymbol{\sigma}}{2}Cl_3\right].$$

Идеалы, входящие в это разложение, являются минимальными (каждый из них не содержит других идеалов кроме самого себя и нулевого идеала) [3]; элементы этих идеалов отождествляют [3, 7] с двухкомпонентными спинорами Паули, используемыми в квантовой механике частиц со спином. Кроме того, вышеуказанные идемпотентные паравекторы и порождаемые ими идеалы недавно стали использоваться как отправные элементы при построении новых способов представления и обработки классической и квантовой информации [19–22].

Возникает задача описания вообще всех идемпотентов пространственной алгебры. Она решена в следующем пункте. Затем будет рассмотрен вопрос о разложимости идемпотентов в суммы, в которые в качестве слагаемых входят идемпотенты простой структуры – идемпотентные паравекторы и некоторые другие элементы Cl_3.

2.1. Идемпотенты пространственной алгебры. Идемпотентами алгебры Cl_3 являются её нуль, единица $\mathbf{1}$ и неединичные идемпотенты. Структура последних описывается следующим утверждением.

Теорема о структуре неединичных идемпотентов алгебры Cl_3. *Элемент $\boldsymbol{E}\in Cl_3$ является неединичным идемпотентом тогда и только тогда, когда он имеет вид*

$$\boldsymbol{E}=\frac{1}{2}(\mathbf{1}+\boldsymbol{U}+\boldsymbol{i}\boldsymbol{V}), \tag{2.1}$$

где $\boldsymbol{U},\ \boldsymbol{V}\in Cl_3$ – пространственные векторы, удовлетворяющие условиям

$$\boldsymbol{U}^2-\boldsymbol{V}^2=\mathbf{1}, \tag{2.2}$$

$$\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{V}\equiv\frac{1}{2}(\boldsymbol{U}\boldsymbol{V}\ +\ \boldsymbol{V}\boldsymbol{U})=0. \tag{2.3}$$

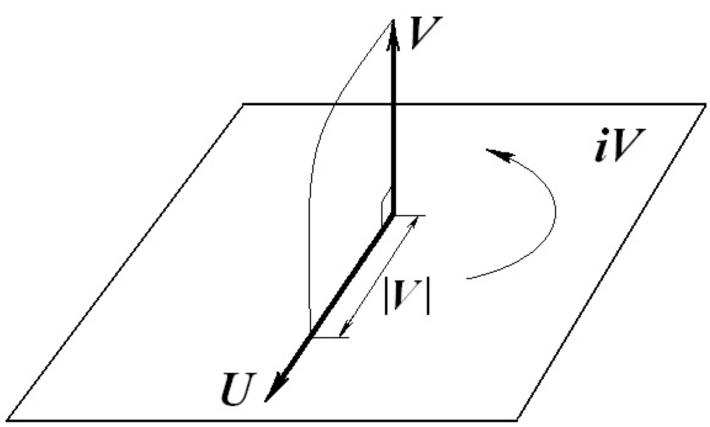

Рис. 2: Пространственная часть идемпотента $\boldsymbol{E}$. Вектор $\boldsymbol{U}$ ($|\boldsymbol{U}|>|\boldsymbol{V}|$), ортогональный вектору $\boldsymbol{V}$, лежит в плоскости бивектора $\boldsymbol{iV}$. Ориентация бивектора $\boldsymbol{iV}$ указана стрелкой.

Комментарий. Выражение (2.1) показывает, что неединичный идемпотент алгебры Cl_3 пропорционален сумме единичного элемента, вектора $\boldsymbol{U}$ и бивектора $\boldsymbol{iV}$ (пространственная часть идемпотента $\boldsymbol{E}$, образованная указанными вектором и бивектором, схематически изображена на рис. 2). Вектор $\boldsymbol{U}$ здесь никогда не равен нулю: из (2.2) следует неравенство $|\boldsymbol{U}| \geqslant 1$. Равенство $|\boldsymbol{U}| = 1$ достигается лишь при $\boldsymbol{V} = 0$, и тогда бивекторная часть в (2.1) нулевая. В этом последнем случае $\boldsymbol{E}$ имеет вид

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{2}\,(\mathbf{1} + \boldsymbol{U}) \qquad (|\boldsymbol{U}| = 1)\,,$$

т. е. является идемпотентным паравектором. Если же $\boldsymbol{V} \neq 0$, то бивектор $\boldsymbol{iV}$ отличен от нуля; тогда вектор $\boldsymbol{U}$, будучи ортогонален вектору $\boldsymbol{V}$ (условие (2.3)), всегда лежит в плоскости бивектора $\boldsymbol{iV}$ (рис. 2).

Доказательство теоремы. Достаточность. Тот факт, что элемент (2.1) при условиях (2.2), (2.3) является идемпотентом, проверяется прямой выкладкой

$$\boldsymbol{E}^2 = \frac{1}{2}\,(\mathbf{1} + \boldsymbol{U} + \boldsymbol{iV})\,\frac{1}{2}\,(\mathbf{1} + \boldsymbol{U} + \boldsymbol{iV}) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\mathbf{1} + \boldsymbol{U} + \boldsymbol{iV} + \boldsymbol{U} + \boldsymbol{U}^2 + \boldsymbol{iUV} + \boldsymbol{iV} + \boldsymbol{iVU} - \boldsymbol{V}^2\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\mathbf{1} + 2\boldsymbol{U} + 2\boldsymbol{iV} + \boldsymbol{U}^2 - \boldsymbol{V}^2 + 2\boldsymbol{i}\frac{\boldsymbol{UV} + \boldsymbol{VU}}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\mathbf{1} + \boldsymbol{U} + \boldsymbol{iV} + \boldsymbol{i}\,(\boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{V})\right] = \frac{1}{2}\,(\mathbf{1} + \boldsymbol{U} + \boldsymbol{iV})\,.$$

Необходимость. Покажем, что в Cl_3 любой неединичный идемпотент $\boldsymbol{E} \neq \mathbf{1}$ имеет вид (2.1) и удовлетворяет условиям (2.2), (2.3).

С этой целью напишем выражение для $\boldsymbol{E}$ в паравекторном представлении (1.36):

$$\boldsymbol{E} = z_0\mathbf{1} + z_k\boldsymbol{\sigma}_k, \tag{2.4}$$

где z_0, z_k $(k = 1,\ 2,\ 3)$ – комплексные p-числа.

Так как $\boldsymbol{E}$ является, по условию, идемпотентом, для него выполнено

$$(z_0 + z_k\boldsymbol{\sigma}_k)(z_0 + z_l\boldsymbol{\sigma}_l) = z_0 + z_k\boldsymbol{\sigma}_k. \tag{2.5}$$

Раскроем левую часть (2.5):

$$(z_0 + z_k\boldsymbol{\sigma}_k)(z_0 + z_l\boldsymbol{\sigma}_l) = z_0^2 + 2z_0z_k\boldsymbol{\sigma}_k + z_kz_l\boldsymbol{\sigma}_k\boldsymbol{\sigma}_l \tag{2.6}$$

Обратимся к последнему члену в правой части (2.6) и представим его в виде

$$z_kz_l\boldsymbol{\sigma}_k\boldsymbol{\sigma}_l = \sum_{k=1}^{3} z_k^2\boldsymbol{\sigma}_k^2 + (z_kz_l\boldsymbol{\sigma}_k\boldsymbol{\sigma}_l)_{k\neq l}\,. \tag{2.7}$$

Здесь $\boldsymbol{\sigma}_k^2 = 1$ при $k = 1,\ 2,\ 3$ и $\boldsymbol{\sigma}_k\boldsymbol{\sigma}_l = -\boldsymbol{\sigma}_l\boldsymbol{\sigma}_k$ при $k \neq l$ в силу таблицы умножения базиса Cl_3. Поэтому в правой части (2.7)

$$\sum_{k=1}^{3} z_k^2\boldsymbol{\sigma}_k^2 = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 \equiv z_kz_k \quad \text{и} \quad (z_kz_l\boldsymbol{\sigma}_k\boldsymbol{\sigma}_l)_{k\neq l} = 0,$$

ибо член $(z_k z_l \boldsymbol{\sigma}_k \boldsymbol{\sigma}_l)_{k\neq l}$ является свёрткой симметричного объекта $z_k z_l = z_l z_k$ с антисимметричным объектом $\boldsymbol{\sigma}_k \boldsymbol{\sigma}_l = -\boldsymbol{\sigma}_l \boldsymbol{\sigma}_k$. Отсюда для (2.7) получаем $z_k z_l \boldsymbol{\sigma}_k \boldsymbol{\sigma}_l = z_k z_k$, и поэтому (2.6) редуцируется к равенству

$$(z_0 + z_k \boldsymbol{\sigma}_k)(z_0 + z_l \boldsymbol{\sigma}_l) = z_0^2 + z_k z_k + 2 z_0 z_k \boldsymbol{\sigma}_k. \tag{2.8}$$

Подставляя правую часть (2.8) в левую часть (2.5), получаем равенство

$$z_0^2 + z_k z_k + 2 z_0 z_k \boldsymbol{\sigma}_k = z_0 + z_k \boldsymbol{\sigma}_k,$$

которое по лемме о базисе (п. 1.8.1) равносильно паре равенств

$$z_0^2 + z_k z_k = z_0, \tag{2.9}$$

$$2 z_0 z_k = z_k \qquad (k = 1,\ 2,\ 3). \tag{2.10}$$

Равенства (2.9), (2.10) получены для идемпотента $\boldsymbol{E} \neq 0$ – ненулевого элемента алгебры Cl_3, который, в силу посылки, отличен также и от единицы: $\boldsymbol{E} \neq \mathbf{1}$. Поэтому комплексные числа z_0, z_k $(k = 1,\ 2,\ 3)$ в (2.9), (2.10) с необходимостью удовлетворяют следующим условиям: $z_0 \neq 0$ и $z_k \neq 0$ хотя бы для одного значения $k \in \{1,\ 2,\ 3\}$. Покажем это.

Действительно, если $z_0 = 0$, то из (2.10) следует $z_k = 0$ для всех $k = 1,\ 2,\ 3$; но тогда $\boldsymbol{E} = \frac{1}{2}(z_0 \mathbf{1} + z_k \boldsymbol{\sigma}_k) \equiv 0$ в противоречии с условием $\boldsymbol{E} \neq 0$. Если, далее, $z_0 \neq 0$, но $z_k = 0$ для всех $k = 1,\ 2,\ 3$, то из (2.9) следует $z_0 = 1$; но тогда $\boldsymbol{E} = \frac{1}{2}(z_0 \mathbf{1} + z_k \boldsymbol{\sigma}_k) \equiv \mathbf{1}$ в противоречии с посылкой $\boldsymbol{E} \neq \mathbf{1}$.

Теперь пусть $J \in \{1,\ 2,\ 3\}$ – именно то значение индекса k, при котором $z_J \neq 0$. Из (2.10) при $k = J$ имеем $2 z_0 z_J = z_J$ и, поделив это равенство на $z_J \neq 0$, находим

$$z_0 = 1/2. \tag{2.11}$$

Получив (2.11), сделаем шаг в сторону и напишем для комплексных чисел z_k, входящих в представление (2.4) идемпотента $\boldsymbol{E}$, выражения

$$z_k = \frac{1}{2}\alpha_k + \boldsymbol{i}\frac{1}{2}\beta_k \qquad (\alpha_k,\ \beta_k \in \mathbb{R},\quad k = 1,\ 2,\ 3) \tag{2.12}$$

(коэффициенты 1/2 введены здесь для удобства). Подставляя (2.11) и (2.12) в представление (2.4) и определяя пространственные векторы $\boldsymbol{U}$ и $\boldsymbol{V}$ соотношениями

$$\boldsymbol{U} = \alpha_k \boldsymbol{\sigma}_k, \qquad \boldsymbol{V} = \beta_k \boldsymbol{\sigma}_k, \tag{2.13}$$

получаем

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{1} + \boldsymbol{U} + \boldsymbol{i}\boldsymbol{V}\right). \tag{2.14}$$

Для выявления взаимосвязей входящих в (2.14) векторов $\boldsymbol{U}$ и $\boldsymbol{V}$ вернёмся к (2.11) и подставим (2.11) вместе с (2.12) в (2.9); после очевидных преобразований (2.9) приводится к равенству $\alpha_k\alpha_k - \beta_k\beta_k + 2i\alpha_k\beta_k = 1$, которое после отделения действительной и мнимой частей даёт

$$\alpha_k\alpha_k - \beta_k\beta_k = 1, \qquad \alpha_k\beta_k = 0.$$

В векторных обозначениях (2.13) два последних равенства переписываются в виде

$$\boldsymbol{U}^2 - \boldsymbol{V}^2 = \mathbf{1}, \qquad \boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{V} = 0. \tag{2.15}$$

Теперь видно, что выражение (2.14) и равенства (2.15) совпадают с выражением (2.1) и равенствами (2.2), (2.3). Теорема доказана.

2.2. Составные идемпотенты и их разложение. *Нееденичный идемпотент алгебры Cl_3 будет называться простым, simple (составным, composite), если вектор $\boldsymbol{V}$ в представлении* (2.1) *этого идемпотента является нулевым (ненулевым).*

Как следует из комментария к формулировке теоремы предыдущего пункта, все простые идемпотенты в Cl_3 являются идемпотентными паравекторами. Но допускает ли идемпотентный паравектор наряду с представлением $\frac{1}{2}\,(\mathbf{1}+\boldsymbol{U})$, $\boldsymbol{U}^2 = 1$ ещё одно представление $\frac{1}{2}\,(\mathbf{1}+\boldsymbol{U}'+\boldsymbol{iV})$, в котором $\boldsymbol{V} \neq 0$? Как показывает следующая теорема, ответ отрицателен.

Теорема о простоте идемпотентных паравекторов. *Все идемпотентные паравекторы алгебры Cl_3 являются простыми идемпотентами.*

Доказательство. Предположим обратное: пусть идемпотентный паравектор $(1/2)\,(\mathbf{1}+\boldsymbol{U})$ является составным. Тогда, по определению,

$$\frac{1}{2}\,(\mathbf{1}+\boldsymbol{U}) = \frac{1}{2}\,(\mathit{1}+\boldsymbol{U}'+\boldsymbol{iV})\,,$$

где $\boldsymbol{U}' \neq 0$ и $\boldsymbol{V} \neq 0$ – ненулевые векторы, удовлетворяющие условиям (2.2), (2.3). Но из написанного равенства вытекает равенство $\boldsymbol{U}' - \boldsymbol{U} + \boldsymbol{iV} = 0$, а из него по лемме о базисе (п. 1.8.1) следует $\boldsymbol{U}' = \boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{V} = 0$. Противоречие с посылкой $\boldsymbol{V} \neq 0$.

Следствие. *Идемпотент алгебры Cl_3 является простым тогда и только тогда, когда он является идемпотентным паравектором.*

Простой и составной идемпотенты – существенно различные алгебро-геометрические объекты: простой идемпотент является элементом четырёхмерного пространства, являющегося прямой суммой пространств скаляров и векторов, тогда как составной идемпотент принадлежит семимерному пространству – прямой сумме пространств скаляров, векторов и бивекторов.

Теорема о разложении составного идемпотента. *Составной идемпотент разлагается в сумму простого идемпотента и нильпотента индекса 2 – такого элемента алгебры Cl_3, вторая степень которого равна нулю.*

Доказательство. Обращаясь к представлению (2.1) и, предполагая, что $\boldsymbol{V} \neq 0$, зададим два вектора $\boldsymbol{W}$ и $\boldsymbol{\sigma}$ так, чтобы выполнялись условия

$$\boldsymbol{W}^2 = \boldsymbol{V}^2, \quad \boldsymbol{W}\cdot\boldsymbol{V} = 0, \quad \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{U} - \boldsymbol{W}, \quad \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{W} = \mathit{0}. \tag{2.16}$$

Здесь первые два условия говорят о том, что вектор $\boldsymbol{W}$ равен по модулю вектору $\boldsymbol{V}$ и ортогонален ему; поэтому $\boldsymbol{W}$ лежит в плоскости бивектора $\boldsymbol{iV}$, ортогональной вектору $\boldsymbol{V}$ (рис. 3).

Из третьего условия следует, что вектор $\boldsymbol{\sigma}$ также лежит в плоскости $\boldsymbol{iV}$, ибо этой плоскости принадлежат оба вектора $\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{W}$ (рис. 2, 3). Это следует также из выкладки

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{V} = (\boldsymbol{U}-\boldsymbol{W})\cdot\boldsymbol{V} = \boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{V} - \boldsymbol{W}\cdot\boldsymbol{V} = 0,$$

в которой $\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{V} = 0$ по условию (2.3), а $\boldsymbol{W}\cdot\boldsymbol{V} = 0$ по второму из условий (2.16).

Четвёртое условие (2.16) утверждает, что векторы $\boldsymbol{\sigma}$ и $\boldsymbol{W}$ взаимно ортогональны (рис. 3).

Вектор $\boldsymbol{\sigma}$, подчинённый указанным условиям, является единичным (рис. 3). В этом можно убедиться, если, используя третье из условий (2.16), написать $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{W} + \boldsymbol{\sigma}$ и затем вычислить $\boldsymbol{U}^2$; применяя в выкладке формулу (1.14) и четвёртое из условий (2.16), получаем

$$\begin{aligned}\boldsymbol{U}^2 = \boldsymbol{UU} = (\boldsymbol{W}+\boldsymbol{\sigma})(\boldsymbol{W}+\boldsymbol{\sigma}) = \boldsymbol{W}^2 + (\boldsymbol{W\sigma}+\boldsymbol{\sigma W}) + \boldsymbol{\sigma}^2 = \\ = \boldsymbol{W}^2 + 2\,(\boldsymbol{W}\cdot\boldsymbol{\sigma}) + \boldsymbol{\sigma}^2 = \boldsymbol{W}^2 + \boldsymbol{\sigma}^2.\end{aligned}$$

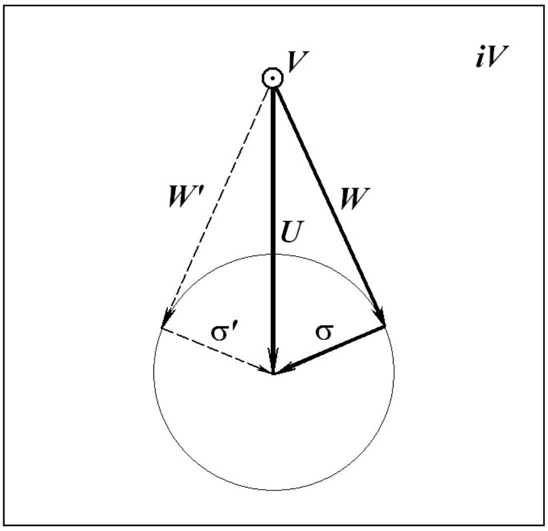

Рис. 3: К разложению составного идемпотента. Вектор $\boldsymbol{V}$ ортогонален плоскости бивектора $\boldsymbol{iV}$, векторы $\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{W}$ и $\boldsymbol{\sigma}$ лежат в плоскости $\boldsymbol{iV}$. Конец вектора $\boldsymbol{W}$ касается единичной окружности с центром в концевой точке вектора $\boldsymbol{U}$. Пара векторов $\{\boldsymbol{W},\ \boldsymbol{\sigma}\}$ определяет разложение (2.17) составного идемпотента $\boldsymbol{E}$. Ещё одно разложение $\boldsymbol{E}$ определяется парой векторов $\{\boldsymbol{W}',\ \boldsymbol{\sigma}'\}$.

Отсюда $\boldsymbol{\sigma}^2 = \boldsymbol{U}^2 - \boldsymbol{W}^2 = \boldsymbol{U}^2 - \boldsymbol{V}^2 = \mathbf{1}$ в силу первого из условий (2.16) и условия (2.2).

Используя $\boldsymbol{W}$ и $\boldsymbol{\sigma}$, выражение (2.1), описывающее идемпотент, можно представить в виде

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{1} + \boldsymbol{U} + \boldsymbol{iV}\right) = \frac{1}{2}\left[\mathbf{1} + (\boldsymbol{U} - \boldsymbol{W}) + \boldsymbol{W} + \boldsymbol{iV}\right] = \frac{1}{2}\left(\mathbf{1} + \boldsymbol{\sigma}\right) + \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{W} + \boldsymbol{iV}\right). \qquad (2.17)$$

Составной идемпотент оказался разложенным в сумму простого идемпотента – идемпотентного паравектора $(1/2)(\mathbf{1}+\boldsymbol{\sigma})$ и элемента $(1/2)(\boldsymbol{W}+\boldsymbol{iV})$, в котором векторы $\boldsymbol{W}$ и $\boldsymbol{V}$ имеют равные модули и ортогональны друг другу. Этот последний элемент при умножении на себя самого даёт нуль (см. ниже, п. 3.1); тем самым он является нильпотентом индекса 2 – свойствам таких объектов будут посвящены следующие разделы статьи.

Замечание. Разложение (2.17) составного идемпотента не единственно: пара векторов $\{\boldsymbol{W},\ \boldsymbol{\sigma}\}$, лежащих в плоскости бивектора $\boldsymbol{iV}$, определена с точностью до зеркального отражения обоих векторов относительно вектора $\boldsymbol{U}$, принадлежащего той же плоскости (рис. 3). Такое отражение переводит векторы $\{\boldsymbol{W},\ \boldsymbol{\sigma}\}$ в пару векторов $\{\boldsymbol{W}',\ \boldsymbol{\sigma}'\}$, которые, как и их прообразы, лежат в плоскости $\boldsymbol{iV}$ и удовлетворяют условиям (2.16). Векторы $\boldsymbol{W}'$ и $\boldsymbol{\sigma}'$, будучи подставлены в (2.17) вместо $\boldsymbol{W}$ и $\boldsymbol{\sigma}$, порождают ещё одно разложение составного идемпотента $\boldsymbol{E}$.

2.3. Неминимальность идеалов, порождаемых составными идемпотентами. Обратимся к разложению (2.17) составного идемпотента и, обозначив этот идемпотент через $\boldsymbol{E}_+$, напишем (2.17) в виде

$$\boldsymbol{E}_+ = \boldsymbol{e}_+ + \boldsymbol{N},$$

где $\boldsymbol{e}_+ = (1/2)\,(\mathbf{1}+\boldsymbol{\sigma})$, $\boldsymbol{N} = (1/2)\,(\boldsymbol{W}+\boldsymbol{iV}) \neq 0$. Так как $\boldsymbol{E}_+$ и $\boldsymbol{e}_+$ – неединичные идемпотенты, то в силу замечаний, сделанных в начале настоящего раздела статьи, существуют ортогональные им неединичные идемпотенты $\boldsymbol{E}_-$ и $\boldsymbol{e}_-$, определённые выражениями

$$\boldsymbol{e}_- = \mathbf{1} - \boldsymbol{e}_+ = \frac{1}{2}\left(\mathbf{1} - \boldsymbol{\sigma}\right), \qquad \boldsymbol{E}_- = \mathbf{1} - \boldsymbol{E}_+ = \mathbf{1} - \boldsymbol{e}_+ - \boldsymbol{N} = \boldsymbol{e}_- - \boldsymbol{N}.$$

Две пары взаимно ортогональных идемпотентов $\{\boldsymbol{e}_+,\ \boldsymbol{e}_-\}$ и $\{\boldsymbol{E}_+,\ \boldsymbol{E}_-\}$ порождают два разложения алгебры Cl_3 в прямые суммы односторонних идеалов – левых или правых.

Рассмотрим два разложения Cl_3 в прямые суммы левых идеалов. Разложение, порождённое парой $\{\boldsymbol{e}_+,\ \boldsymbol{e}_-\}$, имеет вид

$$Cl_3 = Cl_3\boldsymbol{e}_+ \oplus Cl_3\boldsymbol{e}_-.$$

Разложение же, индуцированное парой $\{\boldsymbol{E}_+,\ \boldsymbol{E}_-\}$, выглядит так:

$$Cl_3 = Cl_3\boldsymbol{E}_+ \oplus Cl_3\boldsymbol{E}_- = [Cl_3\boldsymbol{e}_+ + Cl_3\boldsymbol{N}] \oplus [Cl_3\boldsymbol{e}_- - Cl_3\boldsymbol{N}]\,.$$

Из этих разложений следует, что имеют место следующие включения идеалов:

$$Cl_3\boldsymbol{e}_+ \subset Cl_3\boldsymbol{E}_+ = Cl_3\boldsymbol{e}_+ + Cl_3\boldsymbol{N},$$
$$Cl_3\boldsymbol{e}_- \subset Cl_3\boldsymbol{E}_- = Cl_3\boldsymbol{e}_- - Cl_3\boldsymbol{N}.$$

Здесь левые идеалы $Cl_3\boldsymbol{E}_+$ и $Cl_3\boldsymbol{E}_-$, порождённые парой составных идемпотентов $\{\boldsymbol{E}_+,\ \boldsymbol{E}_-\}$, содержат левые идеалы $Cl_3\boldsymbol{e}_+$ и $Cl_3\boldsymbol{e}_-$, соответственно; поэтому *левые идеалы, порождаемые в алгебре Cl_3 взаимно ортогональными составными идемпотентами, не являются минимальными.*

Повторяя эти рассуждения для разложений Cl_3 в прямые суммы правых идеалов, приходим к заключению, что *правые идеалы, порождаемые в алгебре Cl_3 взаимно ортогональными составными идемпотентами, также не являются минимальными.*

С другой стороны, левые и правые идеалы, порождаемые идемпотентными паравекторами, являются минимальными [3]. Именно эти минимальные идеалы традиционно привлекают внимание: их элементы, как уже отмечалось ранее, отождествляют [3, 7] с двухкомпонентными спинорами Паули, используемыми в квантовой механике частиц со спином. Однако поскольку составные идемпотенты и порождаемые ими неминимальные идеалы содержат нильпотентные элементы, имеющие нетривиальный геометрический смысл и содержательную физическую интерпретацию (см. последующие разделы работы), связь этих идемпотентов и идеалов с физикой требует дальнейшего анализа.

3 НИЛЬПОТЕНТЫ ИНДЕКСА 2 ПРОСТРАНСТВЕННОЙ АЛГЕБРЫ

В силу теоремы Фробениуса, алгебра Cl_3 не является алгеброй с делением. Один из эффектов, сопутствующий этому обстоятельству, состоит в наличии в Cl_3 *нильпотентов.*

Стандартное общеалгебраическое определение. *Элемент алгебры, первые $p-1$ степеней которого отличны от нуля, а p-ая степень равна нулю, называется нильпотентом индекса p. В частности, нильпотент $\boldsymbol{N}$ индекса 2 определяется условиями*

$$\boldsymbol{N} \neq 0, \qquad \boldsymbol{N}^2 = 0. \tag{3.1}$$

Как будет показано в разделе 4, нильпотенты индекса 2 выделены в Cl_3 с точки зрения эквивалентности действия на них фазовых преобразований и вращений. В настоящем же разделе, являющимся подготовительным для раздела 4, будет установлен общий вид нильпотентов индекса 2 пространственной алгебры и выявлен их геометрический смысл.

3.1. Структура нильпотентов индекса 2 пространственной алгебры. Нетрудно убедиться, что элемент $\boldsymbol{N} \in Cl_3$ вида

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{U} + \boldsymbol{i}\boldsymbol{V}, \tag{3.2}$$

где $\boldsymbol{U}$ и $\boldsymbol{V}$ — ненулевые, равные по модулю, взаимно ортогональные векторы:

$$\boldsymbol{U}^2 = \boldsymbol{V}^2 \neq 0, \qquad \boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{V} \equiv \frac{1}{2}(\boldsymbol{U}\boldsymbol{V}\ +\ \boldsymbol{V}\boldsymbol{U}) = 0, \tag{3.3}$$

является нильпотентом индекса 2. Это показывает следующая выкладка, использующая формулу (1.14) и условия (3.3):

$$\boldsymbol{N}^2 = (\boldsymbol{U} + \boldsymbol{i}\boldsymbol{V})(\boldsymbol{U} + \boldsymbol{i}\boldsymbol{V}) = \boldsymbol{U}^2 + \boldsymbol{i}\boldsymbol{U}\boldsymbol{V} + \boldsymbol{i}\boldsymbol{V}\boldsymbol{U} + \boldsymbol{i}^2\boldsymbol{V}^2 = \boldsymbol{U}^2 - \boldsymbol{V}^2 + 2\boldsymbol{i}\,(\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{V}) \equiv 0.$$

Оказывается, что элементами этого вида исчерпываются все нильпотенты пространственной алгебры.

Теорема о структуре нильпотентов алгебры $\boldsymbol{Cl_3}$. *Элемент $\boldsymbol{N} \in Cl_3$ является нильпотентом индекса 2 тогда и только тогда, когда он имеет вид* (3.2) *и удовлетворяет условиям* (3.3).

Доказательство. То, что каждый такой элемент является нильпотентом индекса 2, уже продемонстрировано представленной выше выкладкой. Остаётся убедиться, что в алгебре Cl_3 любой нильпотент $\boldsymbol{N}$ индекса 2 имеет вид (3.2) и удовлетворяет условиям (3.3). Покажем это.

Напишем выражение для $\boldsymbol{N}$ в паравекторном представлении (1.36):

$$\boldsymbol{N} = z_0 + z_k\boldsymbol{\sigma}_k, \tag{3.4}$$

где $z_0 = \alpha_0 + i\beta_0$, $z_k = \alpha_k + i\beta_k$, при этом α_0, β_0, α_k, β_k $(k = 1,\ 2,\ 3)$ суть действительные числа.

Так как $\boldsymbol{N}$ является, по условию, нильпотентом индекса 2, для него выполнено

$$\boldsymbol{N} = (z_0 + z_k\boldsymbol{\sigma}_k)^2 = (z_0 + z_k\boldsymbol{\sigma}_k)(z_0 + z_l\boldsymbol{\sigma}_l) = 0.$$

Раскрывая здесь скобки, получаем

$$z_0^2 + 2z_0z_k\boldsymbol{\sigma}_k + z_kz_l\boldsymbol{\sigma}_k\boldsymbol{\sigma}_l = 0. \tag{3.5}$$

Левая часть (3.5) совпадает с левой частью равенства (2.6), полученного в предыдущем разделе; поэтому левую часть (3.5) можно сразу же заменить выведенным там выражением (2.8). После такой замены равенство (3.5) переходит в равенство

$$z_0^2 + z_kz_k + 2z_0z_k\boldsymbol{\sigma}_k = 0.$$

По лемме о базисе (п. 1.8.1) это равенство равносильно паре равенств

$$z_0^2 + z_kz_k = 0, \tag{3.6a}$$

$$z_0z_k\boldsymbol{\sigma}_k = 0. \tag{3.6b}$$

Равенства (3.6) получены для нильпотента $\boldsymbol{N} \neq 0$ – элемента, который является ненулевым по определению. Поэтому среди комплексных чисел z_0, z_k, $(k = 1,\ 2,\ 3)$, связанных этими равенствами и входящих в представление (3.4) нильпотента, имеются числа, отличные от нуля.

Покажем, что все такие ненулевые числа расположены среди чисел z_k $(k = 1,\ 2,\ 3)$, тогда как $z_0 = 0$. Действительно, если $z_0 \neq 0$, то умножая (3.6 b) на $z_0^{-1} \neq 0$, получаем $z_k\boldsymbol{\sigma}_k = 0$. Отсюда $z_k = 0$ $(k = 1,\ 2,\ 3)$ по лемме о базисе (п. 1.8.1). Но тогда из (3.6 a) имеем $z_0 = 0$. Противоречие.

Из сказанного следуют два факта.

Во-первых, представление (3.4) нильпотента $\boldsymbol{N}$ не содержит слагаемого $z_0 = 0$, и поэтому $\boldsymbol{N}$ можно представить в виде

$$\boldsymbol{N} = z_k\boldsymbol{\sigma}_k = (\alpha_k + \boldsymbol{i}\beta_k)\,\boldsymbol{\sigma}_k = \alpha_k\boldsymbol{\sigma}_k + \boldsymbol{i}\beta_k\boldsymbol{\sigma}_k = \boldsymbol{U} + \boldsymbol{i}\boldsymbol{V}, \tag{3.7}$$

где векторы $\boldsymbol{U}$ и $\boldsymbol{V}$ определены соотношениями

$$\boldsymbol{U} = \alpha_k \boldsymbol{\sigma}_k, \qquad \boldsymbol{V} = \beta_k \boldsymbol{\sigma}_k. \tag{3.8}$$

Представление (3.7) совпадает с (3.2).

Во-вторых, при $z_0 = 0$ равенство (3.6 b) выполняется автоматически, и система (3.6) сводится к одному равенству $z_k z_k = 0$. Подставляя в него значения $z_k = \alpha_k + \boldsymbol{i}\beta_k$, получаем комплексное равенство

$$\alpha_k\alpha_k - \beta_k\beta_k + 2\boldsymbol{i}\alpha_k\beta_k = 0,$$

равносильное двум действительным равенствам

$$\alpha_k\alpha_k = \beta_k\beta_k, \qquad \alpha_k\beta_k = 0.$$

Переписывая их в векторных обозначениях (3.8), получаем

$$\boldsymbol{U}^2 = \boldsymbol{V}^2, \qquad \boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{V} = 0.$$

Два последних равенства совпадают с (3.3).

Заключительный шаг доказательства: оба вектора $\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{V}$ в представлении (3.7) отличны от нуля, ибо если один из них равен нулю, то другой в силу равенства $\boldsymbol{U}^2 = \boldsymbol{V}^2$ также является нулевым, а это противоречит условию $\boldsymbol{N} \neq 0$.

Этим завершается доказательство теоремы.

3.2. Геометрическая интерпретация нильпотента индекса 2. Направляющий вектор нильпотента. Рассмотрим нильпотент

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{U} + \boldsymbol{i}\boldsymbol{V} \quad (\boldsymbol{U}^2 = \boldsymbol{V}^2 \neq 0, \quad \boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{V} = 0).$$

Здесь $\boldsymbol{V}$ является вектором, а $\boldsymbol{i}\boldsymbol{V}$ – бивектором. Плоскость этого бивектора ортогональна вектору $\boldsymbol{V}$, а поскольку вектор $\boldsymbol{U}$ также ортогонален $\boldsymbol{V}$, постольку $\boldsymbol{U}$ лежит в плоскости $\boldsymbol{i}\boldsymbol{V}$ (рис. 4).

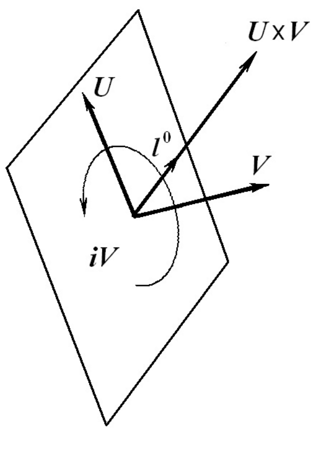

Рис. 4: Вектор $\boldsymbol{U}$ лежит в плоскости бивектора $\boldsymbol{i}\boldsymbol{V}$. Дуга со стрелкой указывает ориентацию этого бивектора. Единичный вектор $\boldsymbol{l}^0$, лежащий в плоскости $\boldsymbol{i}\boldsymbol{V}$, является направляющим вектором нильпотента $\boldsymbol{N}$.

Теперь напомним, что норма бивектора равна норме (т. е. модулю) вектора, которому этот бивектор дуален (п. 1.5). Но векторы $\boldsymbol{U}$ и $\boldsymbol{V}$ имеют равные модули. Поэтому можно утверждать, что *в алгебре Cl_3 любой нильпотент представляется бивектором и лежащим в его плоскости вектором с равными нормами* (рис. 4). В этом заключается геометрическая интерпретация нильпотентов.

Пара векторов $\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{V}$ определяет третий вектор $\boldsymbol{U}\times\boldsymbol{V}$, перпендикулярный первым двум. Используя (1.9), (1.15), (1.16) и учитывая, что $|\boldsymbol{U}|=|\boldsymbol{V}|$, $\boldsymbol{UV}=-\,\boldsymbol{VU}$, для $\boldsymbol{U}\times\boldsymbol{V}$ можно написать

$$\boldsymbol{U}\times\boldsymbol{V}=-\boldsymbol{i}(\boldsymbol{U}\wedge\boldsymbol{V})\equiv-\frac{\boldsymbol{i}}{2}(\boldsymbol{UV}-\ \boldsymbol{VU})=-\boldsymbol{iUV}=\boldsymbol{iVU}. \qquad (3.9)$$

Определение. *Единичный вектор* $\boldsymbol{l}^0=(\boldsymbol{U}\times\boldsymbol{V})\,/\,|\boldsymbol{U}\times\boldsymbol{V}|$, *сонаправленный с вектором* $\boldsymbol{U}\times\boldsymbol{V}$, *будет называться направляющим вектором нильпотента* $\boldsymbol{N}$.

В силу (3.9), вектор $\boldsymbol{l}^0$ определяется любым из следующих выражений:

$$\boldsymbol{l}^0=\frac{1}{|\boldsymbol{U}|\ \ |\boldsymbol{V}|}(\boldsymbol{U}\times\boldsymbol{V})=\frac{1}{\boldsymbol{U}^2}(\boldsymbol{U}\times\boldsymbol{V})=\frac{1}{\boldsymbol{V}^2}(\boldsymbol{U}\times\boldsymbol{V})=$$

$$=-\frac{\boldsymbol{i}}{\boldsymbol{U}^2}\boldsymbol{UV}=-\frac{\boldsymbol{i}}{\boldsymbol{V}^2}\boldsymbol{UV}=\frac{\boldsymbol{i}}{\boldsymbol{U}^2}\boldsymbol{VU}=\frac{\boldsymbol{i}}{\boldsymbol{V}^2}\boldsymbol{VU}. \qquad (3.10)$$

Нильпотент как геометрический объект можно вращать вокруг оси, проходящей вдоль его направляющего вектора $\boldsymbol{l}^0$ (рис. 4); в формализме алгебры Cl_3 такое вращение можно реализовать унимодулярными кватернионами. При этом выявляются неожиданные свойства нильпотентов, анализу которых посвящён следующий раздел статьи. Пока же будут выведены полезные равенства и доказано одно утверждение, которые там будут использоваться.

3.3. Представления нильпотента $\boldsymbol{N}=\boldsymbol{U}+\boldsymbol{iV}$, связанные с его направляющим вектором. Два полезных равенства. Используя выражения (3.10), можно получить представления нильпотента $\boldsymbol{N}=\boldsymbol{U}+\boldsymbol{iV}$, в которые входят один из векторов $\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{V}$ и направляющий вектор $\boldsymbol{l}^0$. Вначале заметим, что из (3.10) вытекают равенства

$$\boldsymbol{iVU}=\boldsymbol{U}^2\boldsymbol{l}^0, \qquad (3.11)$$

$$\boldsymbol{UV}=\boldsymbol{iV}^2\boldsymbol{l}^0. \qquad (3.12)$$

Умножая (3.11) и (3.12) на $\boldsymbol{U}$ и, соответственно, $\boldsymbol{V}$ справа и сокращая на ненулевые скаляры $\boldsymbol{U}^2$, $\boldsymbol{V}^2$, имеем

$$\boldsymbol{iV}=\boldsymbol{l}^0\boldsymbol{U}, \qquad (3.13)$$

$$\boldsymbol{U}=\boldsymbol{l}^0\boldsymbol{iV}. \qquad (3.14)$$

Подставляя (3.13) в $\boldsymbol{N}=\boldsymbol{U}+\boldsymbol{iV}$, получаем

$$\boldsymbol{N}=\boldsymbol{U}+\boldsymbol{iV}=\left(\boldsymbol{1}+\boldsymbol{l}^0\right)\boldsymbol{U}; \qquad (3.15)$$

подстановка (3.14) в $\boldsymbol{N}=\boldsymbol{U}+\boldsymbol{iV}$ даёт

$$\boldsymbol{N}=\boldsymbol{U}+\boldsymbol{iV}=\left(\boldsymbol{1}+\boldsymbol{l}^0\right)\boldsymbol{iV}. \qquad (3.16)$$

Формулы (3.15), (3.16) суть искомые представления нильпотента $\boldsymbol{N}=\boldsymbol{U}+\boldsymbol{iV}$.

Из (3.13) – (3.16) вытекают два полезных равенства, первое из которых получается почленным суммированием (3.13), (3.14), а второе – почленным суммированием (3.15), (3.16):

$$\boldsymbol{N}=\boldsymbol{l}^0\boldsymbol{N}, \qquad (3.17)$$

$$\boldsymbol{N}=\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{1}+\boldsymbol{l}^0\right)\boldsymbol{N}. \qquad (3.18)$$

С равенством (3.17) тесно связано утверждение, которое формулируется и доказывается в следующем пункте (это утверждение, а также равенство (3.18) будут использоваться в следующем разделе статьи, в п. 4.2.2).

3.4. *Лемма о направляющем векторе нильпотента.* *Пусть* $\boldsymbol{\sigma}$ ($\boldsymbol{\sigma}^2 = \mathbf{1}$) *– произвольный единичный вектор. Нильпотент* $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{U} + \boldsymbol{i}\boldsymbol{V}$ *удовлетворяет равенству*

$$\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{N} = \boldsymbol{N}, \tag{3.19}$$

тогда и только тогда, когда его направляющий вектор $\boldsymbol{l}^0$ *удовлетворяет равенству*

$$\boldsymbol{l}^0 = \boldsymbol{\sigma}. \tag{3.20}$$

Доказательство. Достаточность. Если $\boldsymbol{l}^0 = \boldsymbol{\sigma}$, то (3.19) сводится к уже доказанному равенству (3.17).

Необходимость. Перепишем (3.19) в виде

$$\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{N} - \boldsymbol{N} = 0. \tag{3.21}$$

Подставим выражение $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{U} + \boldsymbol{i}\boldsymbol{V}$ в (3.21); это даёт

$$\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{U} + \boldsymbol{i}\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{V} - \boldsymbol{U} - \boldsymbol{i}\boldsymbol{V} = 0. \tag{3.22}$$

Используя (1.10), разложим клиффордовы произведения $\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{U}$ и $\boldsymbol{i}\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{V}$ векторов $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{U}$ и $\boldsymbol{V}$, входящие в (3.22), в суммы скалярного и внешнего произведений:

$$\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{U} + \boldsymbol{\sigma}\wedge\boldsymbol{U}, \qquad \boldsymbol{i}\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{V} = \boldsymbol{i}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{V}) + \boldsymbol{i}(\boldsymbol{\sigma}\wedge\boldsymbol{V}). \tag{3.23}$$

Здесь $\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{\sigma}$ и $\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{\sigma}$ суть скаляры, а $\boldsymbol{\sigma}\wedge\boldsymbol{U}$ и $\boldsymbol{\sigma}\wedge\boldsymbol{V}$ суть бивекторы; поэтому элемент $\boldsymbol{i}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{V})$, будучи дуален скаляру, является тривектором, а элемент $\boldsymbol{i}(\boldsymbol{\sigma}\wedge\boldsymbol{V})$, будучи дуален бивектору, является вектором. Подставляя (3.23) в (3.22) и собирая вместе скаляры, векторы, бивекторы и тривекторы, получаем

$$F_S + \boldsymbol{F}_V + \boldsymbol{F}_B + \boldsymbol{F}_T = 0, \tag{3.24}$$

где

$$\begin{aligned}
&F_S = \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{U} && \text{(скаляр)},\\
&\boldsymbol{F}_V = -\boldsymbol{U} + \boldsymbol{i}(\boldsymbol{\sigma}\wedge\boldsymbol{V}) && \text{(вектор)},\\
&\boldsymbol{F}_B = -\boldsymbol{i}\boldsymbol{V} + (\boldsymbol{U}\wedge\boldsymbol{\sigma}) && \text{(бивектор)},\\
&\boldsymbol{F}_T = \boldsymbol{i}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{V}) && \text{(тривектор)}.
\end{aligned}$$

Для выполнения равенства (3.24) необходимо и достаточно, чтобы каждый член в его левой части был равен нулю. Приравнивая F_S и $\boldsymbol{F}_T$ нулю, получаем

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{U} = \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{V} = 0. \tag{3.25}$$

Равенства (3.25) показывают, что если нильпотент $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{U} + \boldsymbol{i}\boldsymbol{V}$ удовлетворяет равенству (3.19), то оба взаимно ортогональных вектора $\boldsymbol{U}$ и $\boldsymbol{V}$, входящие в его представление, ортогональны единичному вектору $\boldsymbol{\sigma}$. Но $\boldsymbol{U}$ и $\boldsymbol{V}$ определяют по формулам (3.10) единичный направляющий вектор $\boldsymbol{l}^0$, который также ортогонален векторам $\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{V}$:

$$\boldsymbol{l}^0 = \frac{1}{\boldsymbol{U}^2}\left(\boldsymbol{U}\times\boldsymbol{V}\right) = \frac{1}{\boldsymbol{V}^2}\left(\boldsymbol{U}\times\boldsymbol{V}\right). \tag{3.26}$$

Очевидно, что $\boldsymbol{l}^0$ лежит на прямой, проходящей через вектор $\boldsymbol{\sigma}$; покажем, что $\boldsymbol{l}^0 = \boldsymbol{\sigma}$. С этой целью напишем условия $\boldsymbol{F}_V = 0$ и $\boldsymbol{F}_B = 0$, вытекающие из (3.24), в явном виде:

$$\boldsymbol{F}_V \equiv -\boldsymbol{U} + \boldsymbol{i}(\boldsymbol{\sigma} \wedge \boldsymbol{V}) = 0, \qquad \boldsymbol{F}_B \equiv -\boldsymbol{i}\boldsymbol{V} + (\boldsymbol{\sigma} \wedge \boldsymbol{U}) = 0.$$

Из этих равенств следует, что

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{i}(\boldsymbol{\sigma} \wedge \boldsymbol{V}) = -\boldsymbol{i}(\boldsymbol{V} \wedge \boldsymbol{\sigma}) = \boldsymbol{V} \times \boldsymbol{\sigma}, \tag{3.27}$$

$$\boldsymbol{V} = -\boldsymbol{i}(\boldsymbol{\sigma} \wedge \boldsymbol{U}) = \boldsymbol{\sigma} \times \boldsymbol{U} \tag{3.28}$$

(здесь внешние произведения векторов выражены через векторные произведения по формулам (1.9), указанным в п. 1.4). Теперь подставим одно из двух последних соотношений, скажем, (3.28), в первый член правой части (3.26) и применим для преобразования получившегося выражения известные формулы векторного исчисления; это даёт

$$\boldsymbol{l}^0 = \frac{1}{\boldsymbol{U}^2}\,(\boldsymbol{U} \times \boldsymbol{V}) = \frac{1}{\boldsymbol{U}^2}\,[\boldsymbol{U} \times (\boldsymbol{\sigma} \times \boldsymbol{U})] = \frac{1}{\boldsymbol{U}^2}\,[(\boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{U})\,\boldsymbol{\sigma} - (\boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{\sigma})\,\boldsymbol{U}] = \frac{1}{\boldsymbol{U}^2}\boldsymbol{U}^2\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma},$$

ибо $\boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0$ в силу (3.25). Тот же результат получится, если подставить (3.27) во второй член правой части (3.26). Итак, если нильпотент удовлетворяет равенству (3.19), то $\boldsymbol{l}^0 = \boldsymbol{\sigma}$. Лемма доказана.

4 ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЕ СВОЙСТВО НИЛЬПОТЕНТОВ ИНДЕКСА 2: ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ДЕЙСТВИЯ НА НИЛЬПОТЕНТ ФАЗОВЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ И ВРАЩЕНИЙ

В этом разделе будет показано, что действие фазовых преобразований, реализуемых комплексными p-экспонентами $\exp(\pm\boldsymbol{i}\varphi)$, на нильпотент индекса 2 приводит к повороту нильпотента вокруг его направляющего вектора на угол $\mp\varphi$ (и наоборот, такой поворот нильпотента всегда может быть реализован посредством фазовых преобразований). Основу доказательства составляет решение следующей задачи.

4.1. Задача. Рассмотрим в алгебре Cl_3 оператор вращения $R(\boldsymbol{\sigma},\ \varphi)$, действие которого на элементы $\boldsymbol{A} \in Cl_3$ определяется через унимодулярные кватернионы выражением

$$R(\boldsymbol{\sigma},\ \varphi)\boldsymbol{A} \equiv \exp\left(-\boldsymbol{i}\boldsymbol{\sigma}\,\frac{\varphi}{2}\right)\boldsymbol{A}\exp\left(\boldsymbol{i}\boldsymbol{\sigma}\,\frac{\varphi}{2}\right) \qquad (|\boldsymbol{\sigma}| = \boldsymbol{1},\ \varphi \in \mathbb{R}) \tag{4.1}$$

(см. формулы (1.34), (1.35)), где $\boldsymbol{\sigma}$ – единичный направляющий вектор оси вращения, φ – угол поворота вокруг этой оси, а участвующие в (4.1) p-экспоненты удовлетворяют соотношениям

$$\exp\left(\pm\boldsymbol{i}\boldsymbol{\sigma}\,\frac{\varphi}{2}\right) = \cos\frac{\varphi}{2} \pm \boldsymbol{i}\boldsymbol{\sigma}\sin\frac{\varphi}{2}. \tag{4.2}$$

Произвольно зафиксируем ось вращения фиксацией вектора $\boldsymbol{\sigma}$ и поставим задачей нахождение таких ненулевых элементов $\boldsymbol{A} \in Cl_3$, которые при поворотах вокруг $\boldsymbol{\sigma}$ на всевозможные углы φ преобразуются простейшим образом, а именно, умножаются на элементы центра этой алгебры – комплексные p-числа.

Иными словами, *задача состоит в отыскании таких p-чисел, на которые одинаковым образом действуют две группы: группа вращений SO_3, действующая унимодулярными p-кватернионами, и мультипликативная группа центра указанной алгебры, действующая умножениями на комплексные p-числа.*

Эта задача сводится к решению уравнения

$$R(\boldsymbol{\sigma},\ \varphi)\boldsymbol{A} = \lambda(\varphi)\boldsymbol{A}, \qquad \boldsymbol{A} \in Cl_3, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \tag{4.3}$$

относительно неизвестных ненулевых элементов $\boldsymbol{A} \neq 0$, не зависящих от φ, и неизвестных ненулевых комплексных p-чисел $\lambda = \lambda(\varphi) \neq 0$ (последние, не опасаясь двусмысленности, можно отождествлять с элементами поля $\mathbb{C}$).

4.2. Решение задачи. Вначале напомним, что при фиксированной оси вращения повороты вокруг неё на различные углы φ образуют коммутативную подгруппу группы вращений:

$$R(\boldsymbol{\sigma},\ \chi)R(\boldsymbol{\sigma},\ \varphi) = R(\boldsymbol{\sigma},\ \varphi)R(\boldsymbol{\sigma},\ \chi) = R(\boldsymbol{\sigma},\ \varphi + \chi)$$

(это сразу же следует из (4.1), (4.2) и перестановочности элемента $\boldsymbol{i}$ со всеми элементами Cl_3). Единицей этой подгруппы является элемент $R(\boldsymbol{\sigma},\ 0) = \mathbf{1}$, совпадающий с единицей Cl_3, а элемент $R^{-1}(\boldsymbol{\sigma},\ \varphi)$ этой подгруппы, обратный к элементу $R(\boldsymbol{\sigma},\ \varphi)$, имеет вид

$$R^{-1}(\boldsymbol{\sigma},\ \varphi) = R(\boldsymbol{\sigma},\ -\varphi).$$

Учтя указанные факты, умножим обе части (4.3) на $R(\boldsymbol{\sigma},\ \chi)$ слева; тогда в левой части получится

$$R(\boldsymbol{\sigma},\ \chi)R(\boldsymbol{\sigma},\ \varphi) = R(\boldsymbol{\sigma},\ \varphi + \chi)\boldsymbol{A} = \lambda(\varphi + \chi)\boldsymbol{A},$$

а справа возникнет выражение

$$R(\boldsymbol{\sigma},\ \chi)\lambda(\varphi)\boldsymbol{A} = \lambda(\varphi)R(\boldsymbol{\sigma},\ \chi)\boldsymbol{A} = \lambda(\varphi)\lambda(\chi)\boldsymbol{A}$$

(при его написании мы воспользовались перестановочностью комплексных p-чисел со всеми элементами Cl_3). В итоге получаем уравнение

$$\lambda(\varphi + \chi)\boldsymbol{A} = \lambda(\varphi)\lambda(\chi)\boldsymbol{A},$$

которое по следствию из леммы о сокращении (п. 1.8.3) эквивалентно уравнению

$$\lambda(\varphi + \chi) = \lambda(\varphi)\lambda(\chi). \tag{4.4}$$

Но, как хорошо известно, в предположении гладкости функции $\lambda(\varphi)$ функциональное уравнение (4.4) имеет решение

$$\lambda(\varphi) = \exp(\boldsymbol{i}\omega\varphi), \tag{4.5}$$

где $\omega \in \mathbb{C}$ – некоторая, вообще говоря, p-комплексная константа (элемент $\boldsymbol{i}$ выделен из ω для удобства). Здесь возникают два существенно различных случая:

$$\omega = 0 \ \ \Rightarrow \ \ \lambda(\varphi) \equiv 1 \tag{4.6}$$

и $\omega \neq 0$. Займёмся ими поочерёдно.

4.2.1. Случай $\omega = 0,\ \ \lambda(\varphi) \equiv \mathbf{1}$. При выполнении равенства (4.6) уравнение (4.3) имеет вид

$$R(\boldsymbol{\sigma},\ \varphi)\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}. \tag{4.7}$$

Уравнение (4.7) может быть прочитано как условие инвариантности элемента $\boldsymbol{A}$ относительно поворотов вокруг оси $\boldsymbol{\sigma}$ на всевозможные углы φ. Следующие простые соображения позволяют сразу же перечислить все такие элементы и тем самым найти все решения этого уравнения.

Примем во внимание, что восьмимерное линейное пространство, являющееся носителем алгебры Cl_3, разлагается в прямую сумму двумерного носителя её центра, трёхмерного пространства векторов и трёхмерного пространства бивекторов. Но:

1. центр Cl_3 инвариантен относительно действия оператора $R(\boldsymbol{\sigma},\ \varphi)$ в левой части (4.7);

2. подпространство пространства векторов, инвариантное относительно действия оператора $R(\boldsymbol{\sigma},\ \varphi)$, одномерно, совпадает с осью вращения и имеет вид $\mu\boldsymbol{\sigma}$, $\mu \in \mathbb{R}$;
3. подпространство пространства бивекторов, инвариантное относительно действия оператора $R(\boldsymbol{\sigma},\ \varphi)$, также одномерно и имеет вид $\nu\boldsymbol{i\sigma}$, $\nu \in \mathbb{R}$ (здесь $\boldsymbol{i\sigma}$ – единичный бивектор, дуальный вектору $\boldsymbol{\sigma}$, плоскость этого бивектора ортогональна оси вращения).

Поэтому элементы $\boldsymbol{A} \in Cl_3$, являющиеся решениями уравнения (4.8), имеют вид

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} &= \{\,\text{элемент центра } Cl_3\,\} + \mu\boldsymbol{\sigma} + \nu\boldsymbol{i\sigma} = \\ &= (\alpha + \boldsymbol{i}\beta)\mathbf{1} + (\mu + \boldsymbol{i}\nu)\boldsymbol{\sigma} = a + b\boldsymbol{\sigma}, \end{aligned} \tag{4.8}$$

где $a = \alpha + \boldsymbol{i}\beta \in \mathbb{C}$ и $b = \mu + \boldsymbol{i}\nu \in \mathbb{C}$ суть произвольные комплексные p-числа.

Вариант решения задачи (4.3), представленный выражением (4.8), является тривиальным. Мы отыскивали такие элементы $\boldsymbol{A} \in Cl_3$, которые под действием группы вращений умножаются на комплексные p-числа. Найденные элементы $\boldsymbol{A} = a\mathbf{1} + b\boldsymbol{\sigma}$ обладают этим свойством – однако умножаются они, как следует из (4.8), на единицу алгебры, т. е. вообще не меняются. Содержательным оказывается второй случай.

4.2.2. Случай $\omega \neq 0$, $\lambda(\varphi) = \exp(\boldsymbol{i}\omega\varphi)$. В этом случае уравнение (4.3) имеет вид

$$R(\boldsymbol{\sigma},\ \varphi)\boldsymbol{A} = \exp(\boldsymbol{i}\omega\varphi)\boldsymbol{A}. \tag{4.9}$$

В силу определений (4.1), (4.2) оператор $R(\boldsymbol{\sigma},\ \varphi)$ в (4.9) является 2π-периодическим по φ и имеет 2π своим минимальным периодом. Тогда функция $\exp(\boldsymbol{i}\omega\varphi)$ в правой части (4.9) должна быть периодической с тем же минимальным периодом. Отсюда (и из того факта, что $\boldsymbol{A}$, по условию, не зависит от φ) сразу же следует, что, во-первых, параметр ω в показателе этой p-экспоненты является действительным числом и, во-вторых, $\omega = \pm 1$. Поэтому функция $\lambda(\varphi)$ в уравнении (4.9) имеет вид

$$\lambda(\varphi) = \exp(\pm\boldsymbol{i}\varphi), \tag{4.10}$$

а уравнение (4.9) распадается на два уравнения

$$R(\boldsymbol{\sigma},\ \varphi)\boldsymbol{A} = \exp(-\boldsymbol{i}\varphi)\boldsymbol{A}, \tag{4.11}$$

$$R(\boldsymbol{\sigma},\ \varphi)\boldsymbol{A} = \exp(\boldsymbol{i}\varphi)\boldsymbol{A}. \tag{4.12}$$

В уравнениях (4.11), (4.12) слева стоит оператор вращения, а справа – комплексные p-экспоненты, действующие на элемент $\boldsymbol{A}$ умножением; эти экспоненты представляют в Cl_3 группу фазовых преобразований U_1. Поэтому *уравнения (4.11) и (4.12) определяют такие элементы* $\boldsymbol{A} \in Cl_3$, *для которых действие оператора вращения* $R(\boldsymbol{\sigma},\ \varphi)$ *эквивалентно действию фазовых преобразований.*

Сейчас будет доказано, что в нетривиальном случае $\boldsymbol{A} \neq 0$ этими элементами являются нильпотенты индекса 2 алгебры Cl_3, и только они. Попутно будет выявлена связь параметров этих нильпотентов с параметрами оператора вращения в (4.11), (4.12).

Предварительно выведем две полезных формулы.

Одна из них – *перестановочное соотношение для элементов* $\boldsymbol{A}$ *и* $\boldsymbol{\sigma}$, входящих в уравнения (4.11), (4.12). Для вывода этого соотношения рассмотрим (4.11), (4.12) при $\varphi = \pi$. Подставляя это значение φ в левые части (4.11), (4.12) и используя (4.1), (4.2), находим

$$R(\boldsymbol{\sigma},\ \pi)\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{i\sigma A i\sigma} = -\boldsymbol{i i \sigma A \sigma} = \boldsymbol{\sigma A \sigma},$$

Правые же части (4.11), (4.12) при $\varphi = \pi$ имеют вид

$$\exp(\pm \boldsymbol{i}\pi)\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{A}.$$

Таким образом, при указанном значении $\varphi = \pi$ оба уравнения (4.11), (4.12) сводятся к одному уравнению

$$\boldsymbol{\sigma A \sigma} = -\boldsymbol{A}. \tag{4.13}$$

Умножая обе части (4.13) на $\boldsymbol{\sigma}$ слева и учитывая равенство $\boldsymbol{\sigma}^2 = \mathbf{1}$, получаем искомое перестановочное соотношение

$$\boldsymbol{A\sigma} = -\boldsymbol{\sigma A}. \tag{4.14}$$

Вот вторая формула: *если $\boldsymbol{A}$ удовлетворяет перестановочному соотношению* (4.14), *то*

$$R(\boldsymbol{\sigma},\ \varphi)\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}R^{-1}(\boldsymbol{\sigma},\ \varphi), \tag{4.15}$$

где $R^{-1}(\boldsymbol{\sigma},\ \varphi) \equiv R(\boldsymbol{\sigma},\ -\varphi)$ – оператор, обратный оператору $R(\boldsymbol{\sigma},\ \varphi)$.

Формула (4.15) получается так. Во-первых, из выражений (4.1), (4.2), определяющих $R(\boldsymbol{\sigma},\ \varphi)$, вытекает равенство

$$R(-\boldsymbol{\sigma},\ \varphi) = R(\boldsymbol{\sigma},\ -\varphi) = R^{-1}(\boldsymbol{\sigma},\ \varphi). \tag{4.16}$$

Во-вторых, привлекая (4.1), (4.2) и используя (4.14), нетрудно убедиться, что

$$R(\boldsymbol{\sigma},\ \varphi)\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}R(-\boldsymbol{\sigma},\ \varphi). \tag{4.17}$$

Подстановка (4.16) в правую часть (4.17) даёт (4.15).

Теперь всё готово для доказательства того, что ненулевыми решениями уравнений (4.11), (4.12) являются нильпотенты индекса 2.

Обратимся, например, к уравнению (4.11) и возведём обе его части в квадрат:

$$[R(\boldsymbol{\sigma},\ \varphi)\boldsymbol{A}]\ \ [R(\boldsymbol{\sigma},\ \varphi)\boldsymbol{A}] = [\exp(-\boldsymbol{i}\varphi)\boldsymbol{A}]\,[\exp(-\boldsymbol{i}\varphi)\boldsymbol{A}]\,. \tag{4.18}$$

Используя (4.15), левую часть (4.18) можно преобразовать так:

$$[R(\boldsymbol{\sigma},\ \varphi)\boldsymbol{A}]\ \ [R(\boldsymbol{\sigma},\ \varphi)\boldsymbol{A}] = \left[\boldsymbol{A}R^{-1}(\boldsymbol{\sigma},\ \varphi)\right][R(\boldsymbol{\sigma},\ \varphi)\boldsymbol{A}] =$$
$$= \boldsymbol{A}\left[R^{-1}(\boldsymbol{\sigma},\ \varphi)R(\boldsymbol{\sigma},\ \varphi)\right]\boldsymbol{A} = \boldsymbol{AA} = \boldsymbol{A}^2,$$

Правая же часть (4.18) в силу перестановочности комплексных p-чисел с любыми элементами алгебры Cl_3 переписывается в виде

$$[\exp(-\boldsymbol{i}\varphi)\boldsymbol{A}]\ \ [\exp(-\boldsymbol{i}\varphi)\boldsymbol{A}] = \exp(-2\boldsymbol{i}\varphi)\boldsymbol{A}^2.$$

Тем самым (4.18) приводится к уравнению

$$\boldsymbol{A}^2 = \exp(-2\boldsymbol{i}\varphi)\boldsymbol{A}^2.$$

Это уравнение должно выполняться при любом значении φ. Подставляя в него $\varphi = \pi/2$, получаем $\boldsymbol{A}^2 = -\boldsymbol{A}^2$, то есть $2\boldsymbol{A}^2 = 0$; отсюда

$$\boldsymbol{A}^2 = 0.$$

Последнее равенство показывает, что если существует ненулевой элемент $\boldsymbol{A} \in Cl_3$, удовлетворяющий уравнению (4.11), то он является нильпотентом индекса 2. Поэтому по теореме о структуре таких нильпотентов, доказанной в предыдущем разделе статьи, $\boldsymbol{A}$ имеет вид

$$\boldsymbol{A} \equiv \boldsymbol{N} = \boldsymbol{U} + \boldsymbol{i}\boldsymbol{V}, \quad \boldsymbol{U}^2 = \boldsymbol{V}^2, \quad \boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{V} = 0.$$

К этому же результату можно придти, отправляясь от уравнения (4.12) и повторяя вышеизложенные рассуждения.

Остаётся выяснить, каким условиям должны подчиняться нильпотенты $\boldsymbol{N}$, если они являются решениями уравнений (4.11), (4.12), а затем убедиться, что все нильпотенты, подчинённые искомым условиям, в действительности удовлетворяют указанным уравнениям.

Снова начнём с уравнения (4.11) (уравнение (4.12) исследуется аналогично). В этом месте удобно перейти от операторного представления левой части (4.11) к её явному экспоненциальному представлению. Привлекая (4.1), (4.2) и используя перестановочное соотношение (4.14), нетрудно убедиться, что действие оператора $R(\boldsymbol{\sigma},\ \varphi)$ на нильпотент $\boldsymbol{N}$ можно описать выражением

$$R(\boldsymbol{\sigma},\ \varphi)\boldsymbol{N} \equiv \exp\left(-\boldsymbol{i\sigma}\frac{\varphi}{2}\right)\boldsymbol{N}\exp\left(\boldsymbol{i\sigma}\frac{\varphi}{2}\right) = \boldsymbol{N}\exp\left(\boldsymbol{i\sigma}\varphi\right) = \exp\left(-\boldsymbol{i\sigma}\varphi\right)\boldsymbol{N}. \tag{4.19}$$

Действительно, в силу (4.2) и (4.14) справедливы равенства

$$\exp\left(-\boldsymbol{i\sigma}\frac{\varphi}{2}\right)\boldsymbol{N} = \boldsymbol{N}\cos\frac{\varphi}{2} - \boldsymbol{i\sigma N}\sin\frac{\varphi}{2} = \boldsymbol{N}\cos\frac{\varphi}{2} + \boldsymbol{Ni\sigma}\sin\frac{\varphi}{2} = \boldsymbol{N}\exp\left(\boldsymbol{i\sigma}\frac{\varphi}{2}\right),$$

$$\boldsymbol{N}\exp\left(\boldsymbol{i\sigma}\frac{\varphi}{2}\right) = \boldsymbol{N}\cos\frac{\varphi}{2} + \boldsymbol{iN\sigma}\sin\frac{\varphi}{2} = \cos\frac{\varphi}{2}\boldsymbol{N} - \boldsymbol{i\sigma}\sin\frac{\varphi}{2}\boldsymbol{N} = \exp\left(-\boldsymbol{i\sigma}\frac{\varphi}{2}\right)\boldsymbol{N},$$

из которых уже следует (4.19).

Используя (4.19), перепишем (4.11) в виде равносильного (на нильпотентах) уравнения

$$\exp\left(-\boldsymbol{i\sigma}\varphi\right)\boldsymbol{N} = \exp(-\boldsymbol{i}\varphi)\boldsymbol{N}$$

и приведём его заменой $\varphi \to -\varphi$ к уравнению[8]

$$\exp\left(\boldsymbol{i\sigma}\varphi\right)\boldsymbol{N} = \exp(\boldsymbol{i}\varphi)\boldsymbol{N}. \tag{4.20}$$

Наша задача состоит в отыскании нильпотента $\boldsymbol{N}$ индекса 2, удовлетворяющего (4.20) при всех значениях φ. Но если такой нильпотент существует, то он должен удовлетворять (4.20) также и при $\varphi = \pi/2$. В этом случае экспоненциальные множители в левой и правой частях (4.20) имеют значения $\exp\left(\boldsymbol{i\sigma}\pi/2\right) = \boldsymbol{i\sigma}$, $\exp\left(\boldsymbol{i}\pi/2\right) = \boldsymbol{i}$, и (4.20) редуцируется к уравнению

$$\boldsymbol{\sigma N} = \boldsymbol{N}. \tag{4.21}$$

Пусть теперь $\boldsymbol{l}^0$ – направляющий вектор нильпотента $\boldsymbol{N}$; применяя к (4.21) лемму о направляющем векторе нильпотента, доказанную в п. 3.4, находим $\boldsymbol{l}^0 = \boldsymbol{\sigma}$.

Итак, получен следующий результат: если нильпотент $\boldsymbol{N}$ индекса 2 является решением уравнения (4.20) (а, следовательно, и исходного уравнения (4.11)), то его направляющий вектор $\boldsymbol{l}^0$ совпадает с вектором $\boldsymbol{\sigma}$, определяющим ось вращения в операторе $R(\boldsymbol{\sigma},\ \varphi)$.

Убедимся в обратном: если направляющий вектор $\boldsymbol{l}^0$ нильпотента $\boldsymbol{N}$ индекса 2 удовлетворяет условию $\boldsymbol{l}^0 = \boldsymbol{\sigma}$, то такой нильпотент тождественно удовлетворяет уравнению (4.11), т. е. является его решением.

Для проверки этого подставим $\boldsymbol{N}$ в левую часть (4.11) и напишем

$$R(\boldsymbol{\sigma},\ \varphi)\boldsymbol{N} \equiv \exp\left(-\boldsymbol{i\sigma}\ \frac{\varphi}{2}\right)\boldsymbol{N}\exp\left(\boldsymbol{i\sigma}\ \frac{\varphi}{2}\right). \tag{4.22}$$

[8] Соотношение (4.20) выявляет ещё одно замечательное свойство нильпотентов индекса 2: действие группы U_1 фазовых преобразований на эти объекты, описывающееся правой частью 4.20, эквивалентно не только действию группы вращений, но и действию группы SU_2 (p-кватернион в левой части (4.20) является элементом SU_2). Связанные с этими фактами вопросы выходят за рамки настоящей статьи и здесь не обсуждаются.

Покажем, что (4.22) при $\boldsymbol{l}^0 = \boldsymbol{\sigma}$ приводится к выражению, стоящему в правой части (4.11). Для этого воспользуемся следующими равенствами (они ниже будут прокомментированы):

$$\boldsymbol{N} \exp\left(\boldsymbol{i\sigma}\,\frac{\varphi}{2}\right) = \exp\left(-\boldsymbol{i\sigma}\,\frac{\varphi}{2}\right)\boldsymbol{N}; \tag{4.23}$$

$$\boldsymbol{N} = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{1}+\boldsymbol{\sigma}\right)\boldsymbol{N}; \tag{4.24}$$

$$\exp\left(-\boldsymbol{i\sigma}\,\frac{\varphi}{2}\right)\left(\boldsymbol{1}+\boldsymbol{\sigma}\right) = \exp\left(-\boldsymbol{i}\frac{\varphi}{2}\right)\left(\boldsymbol{1}+\boldsymbol{\sigma}\right). \tag{4.25}$$

Равенство (4.23) получается так. Тот факт, что векторы $\boldsymbol{U}$ и $\boldsymbol{V}$ в представлении $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{U} + \boldsymbol{iV}$ нильпотента $\boldsymbol{N}$ ортогональны его направляющему вектору $\boldsymbol{l}^0 = \boldsymbol{\sigma}$, влечёт равенства

$$\boldsymbol{\sigma N} = \boldsymbol{\sigma U} + \boldsymbol{i\sigma V} = -\boldsymbol{U\sigma} - \boldsymbol{iV\sigma} = -\boldsymbol{N\sigma}. \tag{4.26}$$

Учитывая (4.26) и обращаясь к тригонометрическому представлению (4.2), получаем (4.23):

$$\boldsymbol{N}\exp\left(\boldsymbol{i\sigma}\frac{\varphi}{2}\right) = \boldsymbol{N}\cos\frac{\varphi}{2} + \boldsymbol{iN\sigma}\,\sin\frac{\varphi}{2} = \cos\frac{\varphi}{2}\boldsymbol{N} - \boldsymbol{i\sigma}\,\sin\frac{\varphi}{2}\boldsymbol{N} = \exp\left(-\boldsymbol{i\sigma}\frac{\varphi}{2}\right)\boldsymbol{N}.$$

Равенство (4.24) есть равенство (3.18), переписанное для нильпотента $\boldsymbol{N}$ с направляющим вектором $\boldsymbol{l}^0 = \boldsymbol{\sigma}$.

Равенство (4.25) следует из тригонометрического представления (4.2) и того факта, что единичный вектор $\boldsymbol{\sigma}$ ($\boldsymbol{\sigma}^2 = \boldsymbol{1}$) удовлетворяет очевидному равенству $\boldsymbol{\sigma}\left(\boldsymbol{1}+\boldsymbol{\sigma}\right) = \left(\boldsymbol{1}+\boldsymbol{\sigma}\right)$; действительно,

$$\exp\left(-\boldsymbol{i\sigma}\frac{\varphi}{2}\right)\left(\boldsymbol{1}+\boldsymbol{\sigma}\right) = \cos\frac{\varphi}{2}\left(\boldsymbol{1}+\boldsymbol{\sigma}\right) - \boldsymbol{i\sigma}\left(\boldsymbol{1}+\boldsymbol{\sigma}\right)\,\sin\frac{\varphi}{2} =$$

$$= \left(\cos\frac{\varphi}{2} - \boldsymbol{i}\,\sin\frac{\varphi}{2}\right)\left(\boldsymbol{1}+\boldsymbol{\sigma}\right) = \exp\left(-\boldsymbol{i}\frac{\varphi}{2}\right)\left(\boldsymbol{1}+\boldsymbol{\sigma}\right).$$

Используя равенства (4.23) – (4.25), выражение (4.22) можно преобразовать так:

$$\begin{gathered} R(\boldsymbol{\sigma},\,\varphi)\boldsymbol{N} \equiv \exp\left(-\boldsymbol{i\sigma}\,\frac{\varphi}{2}\right)\boldsymbol{N}\exp\left(\boldsymbol{i\sigma}\,\frac{\varphi}{2}\right) = \\ = \exp\left(-\boldsymbol{i\sigma}\varphi\right)\boldsymbol{N} = \\ = \frac{1}{2}\exp\left(-\boldsymbol{i\sigma}\varphi\right)\left(\boldsymbol{1}+\boldsymbol{\sigma}\right)\boldsymbol{N} = \\ = \exp\left(-\boldsymbol{i}\varphi\right)\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{1}+\boldsymbol{\sigma}\right)\boldsymbol{N} = \\ = \exp\left(-\boldsymbol{i}\varphi\right)\boldsymbol{N}. \end{gathered}$$

В правой части написанной цепочки равенств стоит то же выражение, что и в правой части уравнения (4.11); следовательно, *любой нильпотент индекса 2, направляющий вектор* $\boldsymbol{l}^0$ *которого совпадает с вектором* $\boldsymbol{\sigma}$ *оси вращения, является решением уравнения* (4.11).

Остаётся рассмотреть случай уравнения (4.12). Последний можно привести к только что рассмотренному случаю. С этой целью выполним в (4.12) замену $\varphi \to -\varphi$ и напишем

$$R(\boldsymbol{\sigma},\,-\varphi)\boldsymbol{N} = \exp(-\boldsymbol{i}\varphi)\boldsymbol{N}. \tag{4.27}$$

Теперь напомним, что $R(\boldsymbol{\sigma},\,-\varphi) = R(-\boldsymbol{\sigma},\,\varphi)$ (см. равенство (4.16)). Поэтому, введя обозначение $\boldsymbol{\sigma}' = -\boldsymbol{\sigma}$, можно переписать (4.27) в виде

$$R(\boldsymbol{\sigma}',\,\varphi)\boldsymbol{N} = \exp(-\boldsymbol{i}\varphi)\boldsymbol{N}. \tag{4.28}$$

Уравнение (4.28), равносильное уравнению (4.12), с точностью до обозначений совпадает с уже исследованным уравнением (4.11). Отсюда следует, что *решениями уравнения (4.12) являются все нильпотенты индекса 2 с направляющими векторами* $\boldsymbol{l}^0 = \boldsymbol{\sigma}' = -\boldsymbol{\sigma}$, *направленными против вектора* $\boldsymbol{\sigma}$ *оси вращения.*

Поставленная задача полностью решена.

4.3. Эквивалентность действия на нильпотенты индекса 2 фазовых преобразований и вращений. Результатом исследования, изложенного в предыдущем пункте, является следующее

Утверждение. *Множество элементов пространственной алгебры, которые под действием оператора вращения* $R(\boldsymbol{\sigma},\ \varphi)$ *умножаются на элементы её центра – комплексные р-числа, содержит следующие элементы (и только их):*

1. *элементы* $a\mathbf{1} + b\boldsymbol{\sigma}$ $(a \in \mathbb{C},\ b \in \mathbb{C})$ *(они инвариантны относительно действия оператора* $R(\boldsymbol{\sigma},\ \varphi)$*);*
2. *нильпотенты индекса 2 с направляющими векторами* $\boldsymbol{l}^0 = \boldsymbol{\sigma}$ *(под действием оператора вращения такие нильпотенты умножаются на* $\exp(-\boldsymbol{i}\varphi)$*);*
3. *нильпотенты индекса 2 с направляющими векторами* $\boldsymbol{l}^0 = -\boldsymbol{\sigma}$ *(под действием оператора вращения такие нильпотенты умножаются на* $\exp(\boldsymbol{i}\varphi)$*).*

Из пунктов (ii) и (iii) этого утверждения извлекается такое

Следствие. *Действие на нильпотенты индекса 2 группы* U_1 *фазовых преобразований эквивалентно действию на них группы* SO_3 *в том смысле, что*

$$\exp(-\boldsymbol{i}\varphi)\boldsymbol{N}_{\boldsymbol{l}^0=\boldsymbol{\sigma}} = R(\boldsymbol{\sigma},\ \varphi)\boldsymbol{N}_{\boldsymbol{l}^0=\boldsymbol{\sigma}}, \tag{4.29}$$

$$\exp(\boldsymbol{i}\varphi)\boldsymbol{N}_{\boldsymbol{l}^0=-\boldsymbol{\sigma}} = R(\boldsymbol{\sigma},\ \varphi)\boldsymbol{N}_{\boldsymbol{l}^0=-\boldsymbol{\sigma}}, \tag{4.30}$$

где $\boldsymbol{N}_{\boldsymbol{l}^0=\boldsymbol{\sigma}}$ *и* $\boldsymbol{N}_{\boldsymbol{l}^0=-\boldsymbol{\sigma}}$ *– нильпотенты индекса 2 с направляющими векторами* $\boldsymbol{l}^0 = \boldsymbol{\sigma}$ *и* $\boldsymbol{l}^0 = -\boldsymbol{\sigma}$ *соответственно,* $R(\boldsymbol{\sigma},\ \varphi)$ *– оператор вращения:*

$$R(\boldsymbol{\sigma},\ \varphi)(\cdot) = \exp\left(-\boldsymbol{i}\boldsymbol{\sigma}\varphi/2\right)(\cdot)\exp\left(\boldsymbol{i}\boldsymbol{\sigma}\varphi/2\right).$$

Указанное свойство нильпотентов индекса 2 является характеристическим: такие нильпотенты – единственные элементы алгебры Cl_3*, для которых действия групп* U_1 *и* SO_3 *эквивалентны в вышеуказанном смысле.*

Равенства (4.29), (4.30) могут быть переписаны в другой форме, которая показывает, как действует каждое из фазовых преобразований $\exp(-\boldsymbol{i}\varphi)$, $\exp(\boldsymbol{i}\varphi)$ на оба нильпотента $\boldsymbol{N}_{\boldsymbol{l}^0=\boldsymbol{\sigma}}$, $\boldsymbol{N}_{\boldsymbol{l}^0=-\boldsymbol{\sigma}}$ вместе. С этой целью заменим $\varphi \to -\varphi$ сначала в (4.30), а затем в (4.29) и напишем

$$\exp(-\boldsymbol{i}\varphi)\boldsymbol{N}_{\boldsymbol{l}^0=-\boldsymbol{\sigma}} = R(\boldsymbol{\sigma},\ -\varphi)\boldsymbol{N}_{\boldsymbol{l}^0=-\boldsymbol{\sigma}}, \tag{4.31}$$

$$\exp(\boldsymbol{i}\varphi)\boldsymbol{N}_{\boldsymbol{l}^0=\boldsymbol{\sigma}} = R(\boldsymbol{\sigma},\ -\varphi)\boldsymbol{N}_{\boldsymbol{l}^0=\boldsymbol{\sigma}}. \tag{4.32}$$

Теперь объединение (4.29) с (4.31) и (4.30) с (4.32) даёт следующие равенства:

$$\exp(-\boldsymbol{i}\varphi)\left\{\begin{array}{c}\boldsymbol{N}_{\boldsymbol{l}^0=\boldsymbol{\sigma}}\\ \boldsymbol{N}_{\boldsymbol{l}^0=-\boldsymbol{\sigma}}\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c}R(\boldsymbol{\sigma},\ \varphi)\boldsymbol{N}_{\boldsymbol{l}^0=\boldsymbol{\sigma}}\\ R(\boldsymbol{\sigma},\ -\varphi)\boldsymbol{N}_{\boldsymbol{l}^0=-\boldsymbol{\sigma}}\end{array}\right\}, \tag{4.33}$$

$$\exp(\boldsymbol{i}\varphi)\left\{\begin{array}{c}\boldsymbol{N}_{\boldsymbol{l}^0=\boldsymbol{\sigma}}\\ \boldsymbol{N}_{\boldsymbol{l}^0=-\boldsymbol{\sigma}}\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c}R(\boldsymbol{\sigma},\ -\varphi)\boldsymbol{N}_{\boldsymbol{l}^0=\boldsymbol{\sigma}}\\ R(\boldsymbol{\sigma},\ \varphi)\boldsymbol{N}_{\boldsymbol{l}^0=-\boldsymbol{\sigma}}\end{array}\right\}. \tag{4.34}$$

Равенства (4.33), (4.34) можно представить в иной, более обозримой форме. Обратим внимание на тот факт, что выражения $R(\boldsymbol{\sigma},\ \varphi)\boldsymbol{N}_{\boldsymbol{l}^0=\boldsymbol{\sigma}}$ и $R(\boldsymbol{\sigma},\ -\varphi)\boldsymbol{N}_{\boldsymbol{l}^0=\boldsymbol{\sigma}}$ в верхних строках правых частей (4.33), (4.34) содержат один и тот же вектор $\boldsymbol{\sigma}$, который участвует как в аргументе оператора R, так и в индексе нильпотента $\boldsymbol{N}$. Поэтому в этих выражениях можно убрать явное указание на вектор $\boldsymbol{\sigma}$ и выполнить такую замену обозначений:

$$R(\boldsymbol{\sigma},\ \varphi)\boldsymbol{N}_{\boldsymbol{l}^0=\boldsymbol{\sigma}} \to R(\boldsymbol{l}^0,\ \varphi)\boldsymbol{N}_{\boldsymbol{l}^0}, \tag{4.35}$$

$$R(\boldsymbol{\sigma},\ -\varphi)\boldsymbol{N}_{\boldsymbol{l}^0=\boldsymbol{\sigma}} \to R(\boldsymbol{l}^0,\ -\varphi)\boldsymbol{N}_{\boldsymbol{l}^0}. \tag{4.36}$$

Если теперь воспользоваться равенствами

$$R(\boldsymbol{\sigma},\ -\varphi)\boldsymbol{N}_{\boldsymbol{l}^0=-\boldsymbol{\sigma}} = R(-\boldsymbol{\sigma},\ \varphi)\boldsymbol{N}_{\boldsymbol{l}^0=-\boldsymbol{\sigma}},$$

$$R(\boldsymbol{\sigma},\ \varphi)\boldsymbol{N}_{\boldsymbol{l}^0=-\boldsymbol{\sigma}} = R(-\boldsymbol{\sigma},\ -\varphi)\boldsymbol{N}_{\boldsymbol{l}^0=-\boldsymbol{\sigma}},$$

вытекающими из определений (4.1), (4.2) оператора вращения, то аналогичную замену обозначений можно выполнить и в нижних строках правых частей (4.33), (4.34):

$$R(\boldsymbol{\sigma},\ -\varphi)\boldsymbol{N}_{\boldsymbol{l}^0=-\boldsymbol{\sigma}} = R(-\boldsymbol{\sigma},\ \varphi)\boldsymbol{N}_{\boldsymbol{l}^0=-\boldsymbol{\sigma}} \to R(\boldsymbol{l}^0,\ \varphi)\boldsymbol{N}_{\boldsymbol{l}^0}, \tag{4.37}$$

$$R(\boldsymbol{\sigma},\ \varphi)\boldsymbol{N}_{\boldsymbol{l}^0=-\boldsymbol{\sigma}} = R(-\boldsymbol{\sigma},\ -\varphi)\boldsymbol{N}_{\boldsymbol{l}^0=-\boldsymbol{\sigma}} \to R(\boldsymbol{l}^0,\ -\varphi)\boldsymbol{N}_{\boldsymbol{l}^0}. \tag{4.38}$$

После указанных замен верхняя и нижняя строки правой части равенства (4.33) будут содержать одно и то же выражение $R(\boldsymbol{l}^0,\ \varphi)\boldsymbol{N}_{\boldsymbol{l}^0}$, пришедшее туда из (4.35), (4.37). Что же касается правой части равенства (4.34), то в её верхней и нижней строках будет содержаться выражение $R(\boldsymbol{l}^0,\ -\varphi)\boldsymbol{N}_{\boldsymbol{l}^0}$, унаследованное от (4.36), (4.38). Поэтому равенства (4.33), (4.34) можно переписать в следующем компактном виде:

$$\exp(-\boldsymbol{i}\varphi)\boldsymbol{N}_{\boldsymbol{l}^0} = R(\boldsymbol{l}^0,\ \varphi)\boldsymbol{N}_{\boldsymbol{l}^0}. \tag{4.39}$$

$$\exp(\boldsymbol{i}\varphi)\boldsymbol{N}_{\boldsymbol{l}^0} = R(\boldsymbol{l}^0,\ -\varphi)\boldsymbol{N}_{\boldsymbol{l}^0}. \tag{4.40}$$

Эти два равенства согласованы друг с другом: замена $\varphi \to -\varphi$ переводит одно из них в другое. Из (4.39), (4.40) вытекает следующая

Теорема об эквивалентности действия групп фазовых преобразований и вращений на нильпотенты индекса 2 пространственной алгебры. *Комплексная p-экспонента* $\exp(\pm\boldsymbol{i}\varphi)$*, действуя умножением на любой нильпотент индекса 2 алгебры* Cl_3*, индуцирует поворот этого нильпотента вокруг его направляющего вектора* $\boldsymbol{l}^0$ *на угол* $\mp\varphi$*. Обратно, в алгебре* Cl_3 *поворот любого нильпотента индекса 2 вокруг его направляющего вектора* $\boldsymbol{l}^0$ *на угол* $\pm\varphi$ *всегда может быть индуцирован умножением этого нильпотента на комплексную p-экспоненту* $\exp(\mp\boldsymbol{i}\varphi)$*. Кроме нильпотентов индекса 2, в алгебре* Cl_3 *не существует других элементов, характеризующихся описанным свойством.*

Устанавливая связь между фазовыми преобразованиями и вращениями в алгебре Cl_3, полученный результат имеет следующий содержательный смысл, имеющий непосредственное отношение к физике.

Рассмотрим любую из p-экспонент, участвующих в формулировке теоремы, – например, $\exp(-\boldsymbol{i}\varphi)$. Пусть $\varphi = \omega t$, где ω – циклическая частота, t – время. Вообразим, что каждой точке физического пространства (в малом оно является трёхмерным, евклидовым и входит в носитель порождённой этим пространством алгебры Cl_3 как прямое слагаемое) соотнесён некоторый нильпотент индекса 2, т. е. задано пространственное поле нильпотентов $\boldsymbol{N}(\boldsymbol{x})$.

Тогда под действием фазового преобразования $\exp(-\boldsymbol{i}\omega t)\boldsymbol{N}(\boldsymbol{x})$, индуцированного p-экспонентой $\exp(-\boldsymbol{i}\omega t)$, все нильпотенты поля будут вращаться с постоянной угловой скоростью ω вокруг своих направляющих векторов. Если следить за вращением нильпотентов от концов этих векторов, то при $\omega > 0$ каждый из них вращается "против хода часовой стрелки" в сторону положительного направления отсчёта углов φ; при $\omega < 0$ картина обратная: каждый нильпотент вращается "по ходу часовой стрелки" в сторону отрицательного направления отсчёта углов φ.

Пусть направляющие векторы нильпотентов в различных пространственных точках $\boldsymbol{x}$ направлены случайно; тогда пространство будет заполнено "мешаниной" вращающихся нильпотентов. Если же направления направляющих векторов при переходе от точки к точке как-то согласовать друг с другом, то картина вращений, вообще говоря, станет более упорядоченной; в этой картине могут появиться даже волны, если в некоторый момент времени t подходящим образом задать значения углов поворота ("фазы") нильпотентов в различных точках $\boldsymbol{x}$.

Именно это имеет место при распространении свободных электромагнитных волн. Следующий раздел посвящён применению полученных результатов к анализу этого случая.

5 ФИЗИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ: НИЛЬПОТЕНТЫ, ФОТОНЫ И РАЗМЕРНОСТЬ ФИЗИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА

Здесь результаты двух предыдущих разделов применяются к анализу динамики свободно распространяющихся плоских монохроматических электромагнитных волн – поляризованных фотонов, описывающихся решениями уравнений Максвелла без источников. Перевод этих уравнений и их решений на язык клиффордовой алгебры был выполнен Марселем Риссом [1, 2], а затем усовершенствован Хестенесом [3, 23] (см. также [6]). В конце раздела будут сделаны несколько замечаний относительно структуры реального физического пространства и сформулирована одна неформальная гипотеза, вытекающая из предпринятого анализа. В завершение будут указаны возможные направления дальнейшего поиска.

5.1. Решения уравнений Максвелла на языке алгебры Cl_3. Отправляясь от анализа Рисса, Хестенес продемонстрировал [3], что с точки зрения алгебры Cl_3 электромагнитное поле $\boldsymbol{F}$ представляет собой комбинацию $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{E}+\boldsymbol{iB}$, где $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{B}$ – электрический и магнитный векторы (таким образом, магнитное поле описывается бивектором $\boldsymbol{iB}$), и показал, что в рамках формализма Cl_3 решения уравнений Максвелла без источников, описывающие плоские гармонические электромагнитные волны, имеют вид [23]

$$\boldsymbol{F}_{\pm}(\mathbf{x},\ t) = \boldsymbol{f} \exp\left[\pm \boldsymbol{i}(\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})\right], \qquad |\boldsymbol{k}| = \omega/c; \tag{5.1}$$

здесь знаки "плюс" и "минус" соответствуют волнам с правой и левой круговыми поляризациями, $\boldsymbol{x}$ – радиус-вектор точек пространства, t – время, c – скорость света, $\boldsymbol{k}$ – волновой вектор, $\omega > 0$ – круговая частота волны, а выражение

$$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{F}_{\pm}(0,\ 0) = \boldsymbol{E}_0 + \boldsymbol{iB}_0 \tag{5.2}$$

определяет электромагнитное поле в точке $\mathbf{x} = 0$ в момент времени $t = 0$.

Рисс и Хестенес выявили следующие свойства решений (5.1) [1, 2, 23, 6]:

1. векторы $\boldsymbol{E}_0$ и $\boldsymbol{B}_0$ имеют равные модули и ортогональны друг другу: $\boldsymbol{E}_0^2 = \boldsymbol{B}_0^2$, $\boldsymbol{E}_0\cdot\boldsymbol{B}_0 = 0$;
2. волновой вектор $\boldsymbol{k}$ лежит в плоскости магнитного бивектора $\boldsymbol{iB}_0$, ортогонален лежащему в этой же плоскости электрическому вектору $\boldsymbol{E}_0$ и направлен так, что $\boldsymbol{E}_0$, $\boldsymbol{B}_0$ и $\boldsymbol{k}$ являются положительно ориентированной тройкой векторов;
3. написанный в (5.2) объект $\boldsymbol{f}$ удовлетворяет равенству $\boldsymbol{f}^2 \equiv (\boldsymbol{E}_0 + \boldsymbol{iB}_0)^2 = 0$.

Выбрав в (5.1) знак "плюс" и применив специальный приём, Хестенес нашёл [23], что в любой точке плоскости $\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{x} = 0$, перпендикулярной волновому вектору $\boldsymbol{k}$, электрическое поле, заданное решением (5.1), меняется по закону $\boldsymbol{E}_+(t) = \boldsymbol{E}_0 \cos\omega t - \boldsymbol{B}_0 \sin\omega t$; такое решение описывает циркулярно поляризованную волну с правой поляризацией, поскольку наблюдатель, повернувшись лицом к набегающей волне, видит вращение вектора $\boldsymbol{E}$ по часовой стрелке. Решение же, описывающее волну с левой поляризацией, получается выбором в (5.1) знака "минус". Хестенес подчеркнул [23], что описанный результат, относящийся к волнам (5.1) в пустоте, невозможно получить вне формализма геометрической алгебры. Кроме того, в своей более ранней работе [3] он отметил, что указанным волнам с правой и левой поляризациями соответствуют фотоны с двумя типами спиральности.

Дополнительный шаг был сделан Вильямом Бейлисом (William Baylis) [30, 31], который обратил внимание на тот факт, что пространственный поворот объекта $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{E}_0 + \boldsymbol{i}\boldsymbol{B}_0$ вокруг волнового вектора $\boldsymbol{k}$ эквивалентен его фазовому преобразованию – "дуальному вращению", заданному p-экспонентой в (5.1). (Ссылаясь на Пенроуза, Бейлис именует объект $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{E}_0 + \boldsymbol{i}\boldsymbol{B}_0$, $\boldsymbol{f}^2 = 0$ термином "нуль-флаг" [31]). Хотя в работах [30, 31] отсутствуют общие теоремы, изложенные в разделах 2 – 4, геометрическая интерпретация распространения электромагнитной волны, диктуемая формализмом пространственной алгебры, их автору вполне ясна. Судя по представленным в [30, 31] выкладкам и комментариям к ним, для их автора, по-видимому, важна возможность интерпретировать пространственное вращение "нуль-флага" как фазовое преобразование. С точки зрения же автора настоящей работы акценты должны быть расставлены противоположным образом.

В следующем пункте на основе результатов, полученных в предыдущих разделах, будет описана геометрическая интерпретация решения (5.1), описывающего свободно распространяющуюся электромагнитную волну[9]. Вначале, однако, сделаем пару замечаний.

Во-первых, факт выполнения обнаруженного Риссом и Хестенесом равенства $\boldsymbol{f}^2 \equiv (\boldsymbol{E}_0 + \boldsymbol{i}\boldsymbol{B}_0)^2 = 0$ не удивителен: из свойств векторов $\boldsymbol{E}_0$ и $\boldsymbol{B}_0$, указанных в пункте (i) и результатов, изложенных в разделе 3, следует, что объект $\boldsymbol{f} \equiv (\boldsymbol{E}_0 + \boldsymbol{i}\boldsymbol{B}_0)$ является нильпотентом индекса 2 алгебры Cl_3, и поэтому написанное равенство выполняется автоматически.

Во-вторых, как следует из пункта (2.), направляющий вектор $\boldsymbol{l}^0 = (\boldsymbol{E}_0 \times \boldsymbol{B}_0) / |\boldsymbol{E}_0 \times \boldsymbol{B}_0|$ нильпотента $\boldsymbol{f} \equiv (\boldsymbol{E}_0 + \boldsymbol{i}\boldsymbol{B}_0)$ сонаправлен с волновым вектором $\boldsymbol{k}$, определяющим направление распространения волны: $\boldsymbol{l}^0 = \boldsymbol{k}/\,|\boldsymbol{k}|$.

Оба этих факта сразу же позволяют высветить геометрическую картину распространения электромагнитной волны и зримо представить динамику происходящих процессов.

5.2. Распространение электромагнитной волны как вращение элементов пространственного поля нильпотентов. Рассмотрим структуру электромагнитной волны более детально; для этого представим выражение (5.1) в виде

$$\boldsymbol{F}_\pm(\boldsymbol{x},\ t) = \boldsymbol{N}(\boldsymbol{x}) \exp(\pm \boldsymbol{i}\omega t), \tag{5.3}$$

где

$$\boldsymbol{N}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f} \exp\left[-\boldsymbol{i}\,(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})\right] \equiv (\boldsymbol{E}_0 + \boldsymbol{i}\boldsymbol{B}_0) \exp\left[-\boldsymbol{i}\,(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})\right]. \tag{5.4}$$

Здесь $\boldsymbol{f} \equiv \boldsymbol{E}_0 + \boldsymbol{i}\boldsymbol{B}_0$ является нильпотентом с направляющим вектором $\boldsymbol{l}^0 = \boldsymbol{k}/\,|\boldsymbol{k}|$, на который действует комплексная p-экспонента в (5.4). Поэтому $\boldsymbol{N}(\boldsymbol{x})$ также является нильпотентом, имеющим тот же направляющий вектор; в каждой точке $\boldsymbol{x}$ нильпотент $\boldsymbol{N}(\boldsymbol{x})$ повёрнут относительно $\boldsymbol{f}$ вокруг своего направляющего вектора $\boldsymbol{l}^0 = \boldsymbol{k}/\,|\boldsymbol{k}|$ на угол $\varphi = (\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})$. Из (5.3) следует, что

$$\boldsymbol{F}_\pm(\boldsymbol{x},\ 0) = \boldsymbol{N}(\boldsymbol{x});$$

[9] К этой интерпретации автор пришёл независимо от работ [30, 31], с которыми познакомился уже после того, как предварительный вариант настоящей статьи был написан.

таким образом, при $t = 0$ в пространстве существует поле нильпотентов, которые повёрнуты ("расфазированы") друг относительно друга по гармоническому закону (5.4) вдоль прямых, параллельных волновому вектору $\boldsymbol{k}$. Эти нильпотенты можно назвать электромагнитными.

Электромагнитная волна (5.1) эволюционирует во времени; с помощью (5.3) динамика этой эволюции прочитывается так.

На поле электромагнитных нильпотентов $\boldsymbol{N}(\boldsymbol{x})$ действует комплексная p-экспонента, $\exp(\pm\boldsymbol{i}\omega t)$, понуждающая электрический вектор и магнитный бивектор в каждой точке пространства периодически преобразовываться друг в друга: $\boldsymbol{E} \to \boldsymbol{iB}$, $\boldsymbol{iB} \to \boldsymbol{E}$. В силу результатов предыдущего раздела эти фазовые преобразования проявляются как вращения нильпотентов $\boldsymbol{N}(\boldsymbol{x})$ вокруг их направляющих векторов, сонаправленных с волновым вектором $\boldsymbol{k}$. Вращения устроены следующим образом. Если в (5.3) выбрать знак "плюс", то на нильпотенты действует экспонента $\exp(\boldsymbol{i}\omega t)$, индуцирующая их вращение вокруг направляющих векторов в отрицательном направлении (т.е. "по ходу часовой стрелки", если наблюдать от конца вектора $\boldsymbol{k}$). Этот случай соответствует циркулярно поляризованной волне с правой поляризацией. Если же в (5.3) выбрать знак "минус", действующая на нильпотенты экспонента $\exp(-\boldsymbol{i}\omega t)$ будет вращать их в положительном направлении ("против хода часовой стрелки"), что соответствует циркулярно поляризованной волне с левой поляризацией. Эти два направления вращения нильпотентов определяют два значения спиральности фотонов.

Таким образом, *бегущая плоская гармоническая электромагнитная волна есть вращение элементов пространственного поля электромагнитных нильпотентов, расфазированных по гармоническому закону вдоль направления волнового вектора.*

5.3. Как устроено физическое пространство? Описанная в предыдущем пункте геометрическая картина представляется весьма изящной. Однако она скрывает под собой нечто другое – и более существенное.

Дело в том, что нильпотенты индекса 2 пространственной алгебры – шестимерные объекты: они являются векторами специального вида в шестимерном линейном пространстве, являющемся прямой суммой трёхмерных линейных пространств векторов и бивекторов. Здесь же протекает и эволюция этих специальных векторов под действием фазовых преобразований – последние никогда не приводят к вырождению нильпотентов ни в трёхмерные векторы, ни в трёхмерные бивекторы (своеобразный геометрический "entanglement" между объектами двух различных трёхмерных пространств).

Поэтому осмысленно полагать, что физические объекты – фотоны "живут" именно в указанном шестимерном пространстве, и именно оно имеет – по крайней мере, в рассматриваемом контексте – онтологический статус физического пространства, тогда как вращение описывающих фотон электромагнитных нильпотентов в трёхмерном пространстве наблюдателя просто-напросто являет собой "метафору" периодических переходов "вектор $\boldsymbol{E} \leftrightarrow$ бивектор $\boldsymbol{iB}$".

Неформальная рабочая гипотеза. *Реальное физическое пространство не трёхмерно, а является, по меньшей мере, шестимерным пространством, натянутым на базис из трёх линейно независимых векторов и трёх линейно независимых бивекторов, порождённых этими векторами.*

Отметим, что гипотеза о шестимерности физического пространства уже неоднократно выдвигалась (см., например, [32, 33] и представленные там ссылки); вопрос всегда заключался в том, где искать три дополнительных измерения и как их интерпретировать. В соответствии с высказанной нами гипотезой эти дополнительные измерения скрыты не за "занавесом" Реальности, а находятся здесь же: они реализованы тремя линейно независимыми бивекторами $\boldsymbol{\sigma}_{23} = \boldsymbol{\sigma}_2\boldsymbol{\sigma}_3$, $\boldsymbol{\sigma}_{31} = \boldsymbol{\sigma}_3\boldsymbol{\sigma}_1$, $\boldsymbol{\sigma}_{12} = \boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_2$, порождёнными ортами

$\boldsymbol{\sigma}_1, \boldsymbol{\sigma}_2, \boldsymbol{\sigma}_3$ нашего трёхмерного пространства (при этом базис шестимерного пространства автоматически удовлетворяет условиям $\boldsymbol{\sigma}_1^2 = \boldsymbol{\sigma}_2^2 = \boldsymbol{\sigma}_3^2 = \mathbf{1}$, $\boldsymbol{\sigma}_{23}^2 = \boldsymbol{\sigma}_{31}^2 = \boldsymbol{\sigma}_{12}^2 = -\mathbf{1}$, которые являются аналогами условий, постулируемых в [32] и других публикациях). Если принять эту гипотезу, то сразу же возникает вопрос о возможности существования и типе физической симметрии между нашим векторным и "их" бивекторным пространствами. Таким образом, формализм Cl_3 с неизбежностью подводит к некоторым физическим вопросам фундаментального характера.

5.4. Дальнейшее. В настоящее время в задачах механики твёрдого тела с неподвижной точкой широко применяются кватернионные и бикватернионные методы [34–36]. Используя геометрическую интерпретацию нильпотентов индекса 2 и их алгебраические свойства, выявленные в настоящей работе, можно попытаться привлечь эти объекты к указанным задачам, полностью заменив ими кватернионы. Это даст возможность работать только с фазовыми преобразованиями и, возможно, прольёт свет на некоторые известные, но, по-видимому, до сих пор содержательно не понятые (по крайней мере, автором настоящей статьи) примеры успешного решения некоторых из таких задач методами теории спиноров (один такой пример описан в гл. 1 монографии [37]).

Один из шагов в этом направлении состоит в построении представления алгебры Cl_3, так сказать, "в нильпотентах". Автор надеется вернуться к этим вопросам.

ВЫВОДЫ

1. Найден общий вид идемпотентов пространственной алгебры – клиффордовой алгебры Cl_3, порождённой линейным трёхмерным евклидовым пространством E_3 над полем действительных чисел. Показано, что каждый идемпотент $\boldsymbol{E} \in Cl_3$ представляется выражением $\boldsymbol{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{1} + \boldsymbol{U} + \boldsymbol{i}\boldsymbol{V})$, где $\boldsymbol{i}$ ($\boldsymbol{i}^2 = -\mathbf{1}$) – базисный тривектор алгебры, $\boldsymbol{U}$ и $\boldsymbol{V}$ – векторы, удовлетворяющие условиям $\boldsymbol{U}^2 - \boldsymbol{V}^2 = \mathbf{1}$, $\boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{V} = 0$. Введены понятия простого (simple) и составного (composite) идемпотентов: при $\boldsymbol{V} = 0$ ($\boldsymbol{V} \neq 0$) идемпотент называется простым (составным). Простыми идемпотентами являются идемпотентные паравекторы – элементы вида $\boldsymbol{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{1} + \boldsymbol{U})$, $\boldsymbol{U}^2 = \mathbf{1}$, все они и только они. Построено разложение составного идемпотента в сумму идемпотентного паравектора и нильпотента индекса 2. На основе этого разложения установлено, что левые и правые идеалы, порождаемые в алгебре Cl_3 составными идемпотентами, не являются минимальными.

2. Найден общий вид нильпотентов $\boldsymbol{N}$ индекса 2 алгебры Cl_3. Показано, что все такие нильпотенты описываются выражением $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{U} + \boldsymbol{i}\boldsymbol{V}$, где $\boldsymbol{U}$ и $\boldsymbol{V}$ – векторы, подчинённые условиям $\boldsymbol{U}^2 = \boldsymbol{V}^2$, $\boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{V} = 0$, а в остальном произвольные. Введено понятие направляющего вектора нильпотента – единичного вектора $\boldsymbol{l}^0$, определённого выражением $\boldsymbol{l}^0 = (\boldsymbol{U} \times \boldsymbol{V}) \,/\, |\boldsymbol{U} \times \boldsymbol{V}|$.

3. Показано, что нильпотенты индекса 2 алгебры Cl_3, и только они, обладают следующим свойством: действие на них фазовых преобразований, реализуемых умножениями нильпотентов на комплексные экспоненты $\exp(\pm \boldsymbol{i}\varphi) \in Cl_3$ (действие группы U_1), приводит к пространственным поворотам нильпотентов вокруг их направляющих векторов на углы $\mp\varphi$ (действие группы SO_3). Наоборот, пространственные повороты нильпотентов всегда могут быть реализованы посредством фазовых преобразований этих элементов.

4. Эквивалентность действия групп U_1 и SO_3 на нильпотенты индекса 2 привлечена к анализу геометрии вакуумных решений уравнений Максвелла без источников, описывающих плоские гармонические электромагнитные волны – фотоны с двумя типами спиральности. На основе предпринятого анализа сформулирована неформальная гипотеза о том, что реальное физическое пространство является, по меньшей мере, шестимерным пространством, натянутым на базис из трёх линейно независимых пространственных векторов и трёх линейно независимых бивекторов, порождённых этими векторами.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Riesz M. Clifford Numbers and Spinors. – Lecture series No. 38, The Institute for Fluid Dynamics and Applied Mathematics, University of Maryland, 1958.

[2] Riesz M. Clifford Numbers and Spinors: With Riesz's Private Lectures to E. Folke Bolinder and a Historical Review by Pertti Lounesto. – Dordrect/Boston/London: Kluwer Academic Publisher, 1993.

[3] Hestenes D. Space Time Algebra. – New York: Gordon & Breach, 1966.

[4] Hestenes D., Sobczyk G. Clifford Algebra to Geometric Calculus, a Unified Language for Mathematics and Physics. – Dordrecht/Boston: Kluwer Academic Publisher, 1986.

[5] Hestenes D. New Foundations for Classical Mechanics. – Dordrecht: D. Reidel Publishing Company, 1986, 1987.

[6] Hestenes D. Oersted Medal Lecture 2002: Reforming the Mathematical Language of Physics. - http://geocalc.clas.asu.edu/pdf/OerstedMedalLecture.pdf

[7] Casanova G. L'Algèbre Victorielle – Presses Universitaires de France, 1976 (Перевод на русский: Казанова Г. Векторная алгебра. – М. : Мир, 1979. Переиздано: Казанова Г. От алгебры Клиффорда до атома водорода. – Волгоград: Платон, 1997).

[8] Lasenby A., Doran C. Geometric Algebra for Physicists. – Cambridge: Cambridge U. Press, 2002

[9] Baylis W. E. Clifford (Geometric) Algebras with Applications in Physics, Mathematics, and Engineering. – Birkhauser Verlag AG, 1999.

[10] Corrochano B. E., Sobczyk G. Geometric Algebra with Applications in Science and Engineering – Boston: Birkhauser, 2001.

[11] L. Dorst, C. Doran & J. Lasenby (Eds.), Applications of Geometrical Algebra in Computer Science and Engineering. – Boston: Birkhauser, 2002.

[12] Ван дер Варден Б. Л. Алгебра. – М.: Наука, 1976.

[13] Кострикин А. И., Манин Ю.И. Линейная алгебра и геометрия – М.: Наука, 1986.

[14] Шафаревич И. Р. Алгебра – 1. (Итоги науки и техники. Серия "Современные проблемы математики / Фундаментальные направления"). М.: ВИНИТИ, 1986.

[15] Шафаревич И. Р. Основные понятия алгебры. – Москва – Ижевск: РХД, 2001.

[16] Калужнин Л. А. Введение в общую алгебру – М.: Наука, 1973.

[17] Скорняков Л. А. Элементы алгебры. – М.: Наука, 1980.

[18] Скорняков Л. А. Элементы общей алгебры. М.: Наука, 1983.

[19] Тарханов В. И. Геометрическая алгебра, ЯМР и обработка информации. СПб: Изд-во СПбГПУ, 2002.

[20] Эбанга А., Тарханов В. И. Паравекторная логика операций на состояниях геометрического байта. – Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета (НТВ СПбГПУ), 2008, № 3 (59), с. 278-283.

[21] Ebanga A., Tarkhanov V.I. Information in eight dimensions: structuring and processing. – Proc. SPIE, 2008, Vol. 7006, 70060P; DOI:10.1117/12.802298. DOI Link: http://dx.doi.org/10.1117/12.802298.

[22] Tarkhanov V. I., Nesterov M. M. Geometric information in eight dimensions vs. quantum information. – Proc. SPIE, 2008, Vol. 7023, 70230J; DOI:10.1117/12.801913. DOI Link: http://dx.doi.org/10.1117/12.801913.

[23] Hestenes D. Vectors, Spinors and Complex Numbers in Classical and Quantum Physics. – Am. J. Phys. 1971, Vol. 39/9, P. 1013–1028.

[24] Rowlands P., Cullerne J. P. QED using the Nilpotent Formalism. – arXiv:quant-ph/0109069v1. http://arxiv1.library.cornell.edu/abs/quant-ph/0109069v1

[25] 2003-01-15. Rowlands P. The nilpotent Dirac equation and its applications in particle physics. – arXiv:quant-ph/0301071v1. http://arxiv.org/abs/quant-ph/0301071v1

[26] Rowlands P. Removing redundancy in relativistic quantum mechanics – arXiv:physics/0507188v1. http://arxiv.org/abs/physics/0507188v1

[27] Rowlands P. A Mathematical Description of The Fermionic State. – Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 2007, том 4, 1 (7), с.

[28] Кантор И. Л., Солодовников А. С. Гиперкомплексные числа. – М.: Наука, 1973.

[29] Арнольд В. И. Геометрия комплексных чисел, кватернионов и спинов. – М.: МЦНМО, 2002.

[30] Baylis W. E. Applications of Clifford Algebras in Physics. – http://cronus.uwindsor.ca/users/b/baylis/main.nsf/.../cainphys.pdf

[31] Baylis W. E. Geometry of Paravector Space, with Applications to Relativistic Physics. – http://cronus.uwindsor.ca/users/b/baylis/main.nsf/.../baylis1.pdf

[32] Попов Н. Н. Новые представления о структуре пространства–времени и проблема геометризации материи. – М.: УРСС, 2002.

[33] Ефремов А. П. Кватернионные пространства, системы отсчёта и поля. – М.: Издательство Российского университета дружбы народов, 2005.

[34] Бранец В. Н., Шмыглевский И. П. Применение кватернионов в задачах ориентации твёрдого тела. – М.: Наука, 1973.

[35] Бранец В. Н., Шмыглевский И. П. Введение в теорию бесплатформенных инерциальных навигационных систем. – М.: Наука, 1992.

[36] Челноков Ю. Н. Кватернионные и бикватернионные модели и методы механики твёрдого тела и их приложения. – М: Физматлит, 2003.

[37] Бакай А. С., Степановский Ю. П. Адиабатические инварианты. – Киев: "Наукова Думка", 1981.

Idempotents and Nilpotents in the Clifford Algebra of Euclidean 3-Space and Their Interconnections in Physics

O. Mornev

Institute of Theoretical and Experimental Biophysics of RAS, Pushchino, Russia
mornev@mail.ru

Within the framework of Space Algebra, the Clifford algebra Cl_3 generated by the three-dimensional Euclidean space E_3 over $\mathbb{R}$, a structure of idempotents and nilpotents of index 2 is investigated. The general view of these elements is derived *ab init*, and their algebraic and geometric properties are revealed. The equivalence of action of the groups of phase transformations (U_1) and rotations (SO_3) on the nilpotents of index 2 is discovered: the phase transformations of the nilpotent, which are realized by its multiplications on the complex exponents, lead to spatial rotations of the nilpotent in E_3, and vice versa. It is proved that the nilpotents of index 2 are the unique elements of Cl_3, for which the equivalence of action of the groups U_1 and SO_3 takes place; thus, this property of nilpotents is a characteristic one. The results obtained are applied to analyzing geometry of vacuum solutions to the Maxwell equations without sources, which describe plane harmonic electromagnetic waves, the photons, with two types of helicity. On the basis of the analysis performed, the non-formal hypothesis is formulated that the real physical space is at least a six-dimensional one: in the minimal case its basis consists of six linearly independent elements, three vectors and three bivectors generated by these base vectors.

Key words: Clifford algebra, geometric algebra, space algebra, idempotents, nilpotents, group U_1 of phase transformations, group SO_3 of rotations, complex numbers, quaternions, electromagnetic waves, photons, dimensionality of space.