ФИНСЛЕРОВЫ N-СПИНОРЫ В РАМКАХ РЕЛЯЦИОННОГО ПОДХОДА

С. В. Болохов

Российский университет дружбы народов, Москва
bol-rgs@yandex.ru

Показана связь математических объектов, называемых финслеровыми спинорами, с аппаратом реляционной модели пространства-времени. Указан ряд физических приложений формализма финслеровых спиноров в контексте реляционного подхода.

Ключевые слова: финслерова геометрия, спиноры, реляционный подход.

1 Введение

Данная работа посвящена рассмотрению математических объектов, называемых финслеровыми N-спинорами, в контексте их связи с аппаратом реляционной теории простраства-времени и рядом физических приложений.

Исторически идея финслеровых спиноров возникла в русле реляционной модели как специфический способ обобщения картановских 2-спиноров на случай высших размерностей (наряду со стандартным способом, основанным на идеологии алгебр Клиффорда). Мы начнем с краткого обзора принципов реляционной теории (а в более широком смысле – реляционного подхода как особой методологии при построении физической теории).

Реляционнный подход к физике наиболее полно и последовательно представлен в работах Владимирова и его группы [1–7]. Одной из мотиваций для развития данного подхода стал поиск наиболее адекватного представления о природе классического пространства-времени и физических взаимодействий, который бы мог разрешить ряд концептуальных трудностей традиционной квантовополевой парадигмы. Сегодня распространено убеждение, что современные квантовополевые модели не решают проблем, связанных с описанием физических процессов на планковских масштабах длин и энергий, поскольку на этих масштабах традиционное преставление о пространстве-времени как о гладком многообразии, по-видимому, теряет смысл. На сцену выходит проблема корректного совмещения принципов теории относительности с квантовой теорией, которая формулируется как проблема квантования гравитации. Многолетние безуспешные попытки её решения заставляют предположить, что искомая теория, возможно, должна быть сформулирована на совершенно иных концептуальных предпосылках, значительно корректирующих наши представления о природе пространства-времени, материи и фундаментальных взаимодействий.

Ключевой особенностью реляционного подхода является отказ от традиционного представления о пространстве-времени как об априорно заданном гладком многообразии, на фоне которого развертывается динамика физической системы. Реляционная парадигма предполагает вторичный и существенно макроскопический характер пространства-времени, природа которого связывается с результатом статистического наложения большой совокупности микроскопических процессов, дающих в усредненном пределе классическую геометрию как некоторый эффективный фон. Можно сказать, что пространство-время рассматривается как особая система отношений (relations) между микрообъектами – это и есть ключевая идея реляционного подхода [7].

2 Математический аппарат реляционной теории

Отказ от пространства-времени как самостоятельной категории влечет за собой необходимость найти адекватную математическую модель, которая бы на микромасштабах соответствовала реляционному характеру пространства-времени, а на макромасштабах приводила бы к эффективной римановой геометрии ОТО и привычным соотношениям теории поля. Как оказалось, достаточно перспективным для этих целей представляется математический аппарат теории систем отношений над различными полями и алгебрами, истоки которого возникли в работах новосибирских математиков 60-х гг. [8,9] Данный аппарат в применении к физике микромира получил развитие в работах Ю. С. Владимирова [7].

2.1 Множества элементов

В соответствии с принципами реляционной теории пространство состояний частиц и динамика многочастичной системы описывается в терминах *бинарной геометрии*, заданной на двух абстрактных множествах элементов $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ (представляющих собой математический прообраз "начального" и "конечного" квантового состояний системы в духе теории S-матрицы.) Элементы первого множества обозначаются латинскими буквами (i, k, j...), а второго – греческими (α, β, γ...).

Задается отображение $U : \mathcal{M} \times \mathcal{N} \longrightarrow \mathbf{C}$, которое каждой паре элементов $\{i \in \mathcal{M}, \alpha \in \mathcal{N}\}$ из разных множеств ставит в соответствие комплексное число $u_{i\alpha} \in \mathbf{C}$, называемое парным отношением.

Бинарная геометрия определяется выделением такого подкласса указанных отображений, которые удовлетворяют так называемому принципу фундаментальной симметрии (см. ниже). Здесь надо отметить, что наша привычная геометрия носит *унарный* характер, поскольку строится лишь на одном множестве точек. При этом бинарная геометрия оказывается в известном смысле первичной по отношению к унарной, поскольку допускает процедуру перехода к последней путем специальной процедуры склейки элементов из множеств $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ [7].

2.2 Фундаментальная симметрия

Принцип фундаментальной симметрии означает, что существует универсальный алгебраический закон, связывающий всевозможные парные отношения между элементами произвольно выбранных подмножеств фиксированной размерности.

Именно, существуют пара целых положительных чисел r, s (“ранг”) и не равная тождественно нулю алгебраическая функция $\Phi_{(r,s)}(\bullet, \bullet, ..., \bullet)$ от $r \times s$ аргументов, которая обращается в нуль при подстановке в нее набора всевозможных $r \times s$ парных отношений между любыми r элементами первого и s элементами второго множества:

$$
\begin{gathered}
\exists r, s \in Z_+, \quad \Phi_{(r,s)}\underbrace{(\bullet, \bullet,\ ...,\ \bullet)}_{r\times s} \neq 0 : \\
\forall \underbrace{(i, j, ..., m)}_{r} \subset \mathcal{M},\ \underbrace{(\alpha, \beta, ..., \epsilon)}_{s} \subset \mathcal{N} : \quad \Phi_{(r,s)}(u_{i\alpha}, ..., u_{m\epsilon})\Bigg|_{\substack{(i,j,...,m) \subset \mathcal{M} \\ (\alpha,\beta,...,\epsilon) \subset \mathcal{N}}} = 0
\end{gathered}
\tag{1}
$$

Определение. *Совокупность, состоящая из пары множеств $\mathcal{M}, \mathcal{N}$, отображения U и функции $\Phi_{(r,s)}$, удовлетворяющей свойству фундаментальной симметрии, называется бинарной системой комплексных отношений (БСКО) ранга (r,s)*:

$$
\text{БСКО}(r, s) \equiv \big(\mathcal{M}, \mathcal{N}; \quad U : \mathcal{M} \times \mathcal{N} \longrightarrow \mathbf{C}; \quad \Phi_{(r,s)}(\bullet, \bullet, ..., \bullet)\big) \tag{2}
$$

Для случая так называемой невырожденной БСКО симметричного ранга $(r,\ r)$ (именно такие системы рассматриваются в дальнейшем) функциональное уравнение (1) среди всех классов своих решений для функции $\Phi_{(r,s)}$ допускает простое решение, имеющее вид антисимметричной формы (определителя) от набора всевозможных парных отношений между двумя подмножествами порядка r:

$$\Phi_{(r,r)}(u_{i\alpha}, u_{i\beta}, ..., u_{j\gamma}) = \begin{vmatrix} u_{i\alpha} & u_{i\beta} & ... & u_{i\gamma} \\ u_{k\alpha} & u_{k\beta} & ... & u_{k\gamma} \\ ... & ... & ... & ... \\ u_{j\alpha} & u_{j\beta} & ... & u_{j\gamma} \end{vmatrix} = 0, \tag{3}$$

где сами бинарные отношения могут быть параметризованы в виде

$$u_{i\alpha} = \sum_{l=1}^{r-1} i^l \alpha^l. \tag{4}$$

Набор комплексных величин $i^1, ..., i^{r-1}$ называются *параметрами* элемента i (соответственно, $\alpha^1, ..., \alpha^{r-1}$ суть параметры элемента α).

2.3 Элементарный базис

Параметры элементов, возникшие в (4), являются аналогом понятия координат точки в обычной геометрии. Прийти к параметрам можно следующим образом. Выделим в законе (1) по $r-1$ элементов в каждом из множеств $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ и назовем их *эталонными*. (Здесь и далее рассматриваются только БСКО симметричного ранга.) Тогда отношение $u_{i\alpha}$ между двумя произвольными (неэталонными) элементами i, α полностью определяется остальными отношениями, фигурирующими в (1). Их число, равное, очевидно, r^2-1, распадается на $(r-1)^2$ отношений между эталонными элементами (их можно считать раз и навсегда заданными, т. е. фиксированными) и на $2(r-1)$ отношений (назовем их *параметрами*) элементов i, α к эталонным. Таким образом, в теории БСКО ранга (r, r) парное отношение $u_{i\alpha}$ в соответствии с (4) характеризуется $r-1$ параметрами элемента i и аналогичными $r-1$ параметрами элемента α.

Система эталонных элементов называется *элементарным базисом* БСКО. Базис – это своеобразный аналог тела системы отсчета, в которой каждый элемент задается своими координатами (параметрами) по отношению к базисным элементам.

Выбор системы эталонных элементов достаточно произволен. В общем случае переход между двумя элементарными базисами задается фундаментальным представлением группы $GL(r-1, \mathrm{C})$ в пространстве параметров элементов:

$$i'^m = C^m_n i^n, \quad \alpha'^m = K^m_n \alpha^n. \tag{5}$$

Коэффициенты C^m_n и K^m_n определяют класс используемых бинарных систем отношений. В ряде случаев можно считать их взаимно комплексно сопряженными.

2.4 Фундаментальные отношения и 2-компонентные спиноры

В теории БСКО ранга (r, r) важную роль играют так называемые *фундаментальные* $(r-1)\times(r-1)$ *отношения* – отличные от нуля миноры максимального ранга в (3). Легко показать, используя (4), что фундаментальные отношения раскладываются в произведения детерминантов, составленных из параметров элементов одного сорта (т. е. относящихся либо к множеству $\mathcal{M}$, либо к множеству $\mathcal{N}$):

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta & ... \\ i & k & ... \end{bmatrix} \equiv \begin{vmatrix} u_{i\alpha} & u_{i\beta} & ... \\ u_{k\alpha} & u_{k\beta} & ... \\ ... & ... & ... \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i^1 & k^1 & ... \\ i^2 & k^2 & ... \\ ... & ... & ... \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \alpha^1 & \beta^1 & ... \\ \alpha^2 & \beta^2 & ... \\ ... & ... & ... \end{vmatrix} \tag{6}$$

В теории БСКО минимального невырожденного ранга (3,3) естественным образом возникает понятие двухкомпонентных спиноров. В самом деле, в такой теории элементы множеств характеризуются набором из двух комплексных параметров $i \longrightarrow (i^1, i^2), \alpha \longrightarrow (\alpha^1, \alpha^2)$, т. е. являются векторами двумерного комплексного пространства $\mathbf{C}^2$, в котором действует группа $GL(2, C)$, задаваемая линейными преобразованиями (5). Ограничимся такими преобразованиями, которые оставляют инвариантными 2×2-определители справа в (6), каждый из которых представляет собой антисимметричную форму вида $[i, k] = i^1 k^2 - i^2 k^1$, $[\alpha, \beta] = \alpha^1 \beta^2 - \alpha^2 \beta^1$. Пространство двухкомпонентных комплексных столбцов оснащенное указанной инвариантной антисимметричной формой $[\bullet, \bullet]$, является пространством обычных картановских 2-спиноров. При этом общая группа $GL(2, C)$ сужается до 6-параметрической группы преобразований $SL(2, C)$ (отвечающей за спинорное представление группы Лоренца), которая фиксирует привилегированный класс элементарных базисов (систем эталонных элементов), аналогичных инерциальным системам отсчета в СТО.

Заметим, что указанные антисимметричные формы задают метрику $\epsilon_{\alpha\beta}$ на множествах $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$, что позволяет ввести ко- и контравариантные компоненты спиноров и развить обычную спинорную алгебру.

Если далее потребовать, чтобы преобразования (5) оставляли инвариантным парное отношение $u_{i\alpha}$, то они будут соответствовать 3-параметрической группе $SU(2)$, изоморфной (с точн. до фактора Z_2) группе вращений $SO(3)$ в трехмерном пространстве. Можно сказать, что БСКО ранга $(3, 3)$ обуславливает 4-мерность и сигнатуру классического пространства-времени, а также позволяет выявить его спинорную структуру. Отметим, что последняя не закладывается в теорию изначально в качестве постулата (как это делается, скажем, в твисторной программе Пенроуза), а возникает достаточно естественным путем из свойств бинарной геометрии.

3 Финслеровы N-спиноры

Реляционная теория допускает БСКО различных рангов. Из изложенного в предыдущем пункте следует, что в общем случае элементы БСКО ранга (r, r) описываются $(r-1)$-мерными комплексными векторами вида $i = (i^1 ... i^{r-1}) \in \mathrm{C}^{r-1}$, закон преобразования которых можно свести к группам $SL(r-1, C)$ или $SU(r-1)$ требованием инвариантности соответствующих антисимметричных форм в (6) и парных отношений (4). При этом на смену стандартному 2-компонентному спинору приходит обобщенное понятие *финслерова спинора.* Данные объекты можно рассматривать как один из вариантов обобщения картановских 2-спиноров наряду с обычным подходом, где спиноры в пространствах высшей размерности конструируются на базе представлений алгебр Клиффорда над полем действительных чисел.

Дадим более формальное определение пространства финслеровых N-спиноров.

3.1 Пространство финслеровых спиноров

Рассмотрим N-мерное комплексное векторное пространство $\mathbf{C}^N$. На любых N векторах данного пространства зададим антисимметричную комплекснозначную N-форму $[\bullet, \bullet, ..., \bullet]$ (“полисимплектическое скалярное произведение”), инвариантную относительно действия фундаментального представления группы $SL(N, C)$ в пространстве $\mathbf{C}^N$:

$$\forall \underbrace{\xi, \eta, ...\chi}_{\text{N vectors}} \in \mathbf{C}^N \; \exists \, [\xi, \eta, ...\chi] = \varepsilon_{abc...}\xi^a \eta^b \chi^c ... = inv[SL(N,C)]; \tag{1}$$

При этом действие группы SL(N,C) задается обычной комплексной матрицей D с единичным детерминантом:

$$\xi' = D\xi, \quad \det D = 1; \qquad D \in SL(N,C) \tag{2}$$

Определение. *N-мерное комплексное векторное пространство* $\mathbf{C}^N$*, оснащенное полисимплектическим скалярным N-произведением (1), называется пространством финслеровых N-спиноров* FS^N [4]:

$$\mathrm{FS}^N = \Big(\mathbf{C}^N, \quad \underbrace{[\bullet, \bullet, ..., \bullet]}_{\text{N arguments}} \; = \; inv[SL(N,C)] \Big) \tag{3}$$

Исходя из данного определения, можно заключить, что произвольный элемент БСКО ранга (r,r) представляет собой финслеров $(r-1)$-спинор с ассоциированной группой преобразования $SL(r-1,C)$.

3.2 Финслерова геометрия и групповая структура

Чтобы прояснить смысл термина “финслеров спинор”, рассмотрим конструкцию, которая позволит естественным образом ассоциировать данный тип математических объектов с некоторой финслеровой геометрией подобно тому, как обычные 2-спиноры связаны с геометрией Минковского. Покажем, каким образом симплектическая геометрия в комплексном пространстве FS^N индуцирует финслерову геометрию в вещественном векторном пространстве размерности N^2.

Рассмотрим наряду с пространством FS^N дуально сопряженное ему пространство FS^{*N}. Образовав их тензорное произведение, можно рассматривать спинтензоры второго ранга $X^{a\dot{b}} \in \mathrm{FS}^N \otimes \mathrm{FS}^{*N}$. Выделим среди них пространство *эрмитовых спинтензоров*, изоморфное пространству эрмитовых $N \times N$-матриц $\mathrm{Herm}(N) = \{X : X^+ = X\}$.

По отношению к некоторому базису τ_A в этом пространстве всякая эрмитова матрица X может быть представлена набором вещественных компонент X^A $(A = 0, ..., N^2 - 1)$ и интерпретирована как вектор-столбец в некотором вещественном N^2-мерном пространстве $\mathcal{R}^{N^2}$:

$$\exists \tau_A \in \mathrm{Herm}(N) : \quad X = X^A \tau_A, \quad A = 0, ..., N^2 - 1, \quad \{X^A\} \in \mathcal{R}^{N^2} \tag{4}$$

Выбрав естественную нормировку базиса, можно легко выразить компоненты X^A:

$$X^A = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(\tau^A X\right); \quad \mathrm{Tr}\left(\tau^A \tau_B\right) = 2\delta^A_B; \tag{5}$$

Определим *длину* вектора X^A как корень N-й степени из детерминанта матрицы X. (Естественность такого определения станет очевидна далее.) При этом в силу того, что детерминант матрицы $N \times N$ есть N-форма по компонентам X^A, мы будем иметь

$$|X|^N = \det(X) = G_{A_1 A_2 ... A_N} X^{A_1} X^{A_2} ... X^{A_N}. \tag{6}$$

Объект $G_{A_1 A_2 ... A_N}$ задает в общем случае неквадратичную (финслерову) метрику в пространстве $\mathcal{R}^{N^2}$, инвариантную относительно некоторого представления группы $SL(N,C)$ на векторах этого пространства. Явный вид этого представления задается следующим образом. Каждой матрице $D \in SL(N,C)$, действующей в пространстве финслеровых N-спиноров FS^N по правилу $\xi' = D\xi$, отвечает некоторая матрица $L(D)$ порядка $N^2 \times N^2$, действующая в пространстве $\mathcal{R}^{N^2}$ на вектора X^A по правилу $X^{A'} = L(D)^A_B X^B$. Матрица $L(D)$ определяется выражением [4]

$$L(D)^A_B = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(\tau^A D \tau_B D^+\right). \tag{7}$$

Отображение $SL(N,C) \to L(D)$ является прямым обобщением известного 2-1-эпиморфизма $SL(2,C) \to O^{\uparrow}_{+}(1,3)$ группы $SL(2,C)$ в собственную ортохронную группу Лоренца. Наличие данного эпиморфизма, как известно, является связующим звеном между комплексным пространством 2-спиноров и вещественным пространством Минковского M_4 с римановой геометрией. Предложенное обобщение аналогичным образом ассоциирует с пространством финслеровых спиноров FS^N некоторое вещественное N^2-мерное пространство $\mathcal{R}^{N^2}$ с метрическим тензором N-го ранга, который при $N > 2$ задает финслерову геометрию. Группа $L(D)$ является аналогом группы Лоренца, действующей в этом пространстве и оставляющей инвариантной метрическую форму (6), поскольку детерминант от спинтензора $\det(X)$ инвариантен относительно $SL(N,C)$.

3.3 Частные случаи и физические приложения

Рассмотрим некоторые частные случаи изложенной схемы.

1. БСКО ранга (3,3).

Данный случай соответствует $N = 2$ и отвечает обычным картановским спинорам.

Элементы БСКО(3,3): $i^s, k^s = \in \mathrm{FS}^2$; $\alpha^{\dot r}, \beta^{\dot r} \in \mathrm{FS}^{*2}$.

Спинтензор: $X^{s\dot r} = i^s\alpha^{\dot r} \pm k^s\beta^{\dot r} = x^0\delta^{s\dot r} + \sum\limits_{l=1}^{3} x^l\sigma_l^{s\dot r} \equiv x^\mu\tau_\mu \in \mathrm{FS}^2 \otimes \mathrm{FS}^{*2}$

Отображение пространств: $\mathrm{FS}^2 \otimes \mathrm{FS}^{*2} \to \mathcal{R}^4$.

Базис: $\tau_\mu \equiv \sigma_\mu = (\mathrm{I}, \sigma_i)$, где σ_i – матрицы Паули.

Группа: $D \in SL(2,C) \to L(D)^\mu_\nu = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\,(\sigma^\mu D \sigma_\nu D^+) \in O(1,3)$

Метрика в пространстве $\mathcal{R}^4$: $g_{\mu\nu}x^\mu x^\nu = inv[O(1,3)]$, $g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$.

Таким образом, пространство $\mathcal{R}^4$ есть пространство Минковского. В реляционной теории пространства-времени возможность описать геометрию Минковского на основе БСКО(3,3) имеет ключевое значение, поскольку позволяет сформулировать единообразный подход к описанию как пространственно-временных характеристик взаимодействующих частиц, так и пространства их внутренних состояний (которое можно ассоциировать с БСКО высших рангов).

2. БСКО ранга (4,4).

Данный случай соответствует $N = 3$ и отвечает финслеровым 3-спинорам.

Элементы БСКО(4,4): $i^s, k^s, j^s = \in \mathrm{FS}^3$; $\alpha^{\dot r}, \beta^{\dot r}, \gamma^{\dot r} \in \mathrm{FS}^{*3}$.

Спинтензор: $X^{s\dot r} = i^s\alpha^{\dot r} \pm k^s\beta^{\dot r} \pm j^s\gamma^{\dot r} \equiv X^A(\tau^{s\dot r})_A \in \mathrm{FS}^3 \otimes \mathrm{FS}^{*3}$

Отображение пространств: $\mathrm{FS}^3 \otimes \mathrm{FS}^{*3} \to \mathcal{R}^9$.

Группа: $D \in SL(3,C) \to L(D)^A_B = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(\tau^A D \tau_B D^+\right)$

Финслерова (кубичная) метрика в пространстве $\mathcal{R}^9$:

$$\begin{gathered}G_{ABC}X^AX^BX^C = X^8[(X^0)^2 - (X^1)^2 - (X^2)^2 - (X^3)^2]+\\ +2X^1(X^4X^6 + X^5X^7) - X^0[(X^4)^2 + (X^5)^2 + (X^6)^2 + (X^7)^2]+\\ +2X^2(X^5X^6 - X^4X^7) + X^3[(X^4)^2 + (X^5)^2 - (X^6)^2 - (X^7)^2]\end{gathered} \tag{8}$$

БСКО ранга (4,4) в реляционной модели используется при описании пространства внутренних степеней свободы частицы и ее свойств по отношению к взаимодействиям, отвечающим калибровочным группам $SU(2)\times U(1)$ и $SU(3)$ [3,6,7].

3. БСКО ранга (5,5).

Данному случаю отвечают финслеровы 4-спиноры и 16-мерное вещественное финслерово пространство $\mathcal{R}^{16}$, конструируемое отображением $\mathrm{FS}^4\otimes\mathrm{FS}^{*4} \ \to\ \mathcal{R}^{16}$ по правилам, аналогичным вышеизложенным. Оно оснащено финслеровой метрикой 4-го порядка $G_{ABCD}X^AX^BX^CX^D=inv[L(D)]$, инвариантной относительно соответствующего представления группы $SL(4,C)$, задаваемого матрицей $L(D)$ по правилу (7). Метрика имеет достаточно громоздкий вид и будет выписана ниже в специальных обозначениях.

На примере финслеровых 4-спиноров мы укажем два весьма простых, но примечательных свойства рассматриваемого формализма, которые могут сделать его полезным в теории твисторов и суперсимметрии.

4-мерная редукция.

Расмотрим сужение группы $SL(4,C)$ до ее подгруппы $SL(2,C)$, что фактически отвечает переходу к группе преобразований 4-мерного пространства-времени. При этом группа изометрий $L(D)$ формы $G_{ABCD}X^AX^BX^CX^D$ сузится до некоторой подгруппы $L(D_2)$, где матрица $D_2\in SL(2,C)\subset SL(4,C)$. Матрицы $L(D_2)^A_B$ фактически реализуют некоторое представление 6-параметрической группы Лоренца $O(1,3)$ в пространстве $\mathcal{R}^{16}$; эта группа действует по очевидному правилу

$$X^{A'}=L(D_2)^A_BX^B,\qquad A,B=0,...,15. \tag{9}$$

Анализ данного преобразования показывает, что по отношению к усеченной группе преобразований $L(D_2)$ компоненты вектора X^A ведут себя по-разному, и их можно сгруппировать в несколько блоков, имеющих различный физический смысл [5].

Именно, 16 компонент вектора X^A разбиваются на лоренцев 4-вектор $x^\mu=(X^0...X^3)$, пару 4-мерных майорановских спиноров $\Theta_1=(X^4...X^7)$, $\Theta_2=(X^9...X^{12})$ и четверку скаляров X^8,X^{13},X^{14},X^{15}:

$$X^A=(\underbrace{X^0,...,X^3}_{x^\mu};\ \underbrace{X^4,...,X^7}_{\Theta_1},\ \underbrace{X^9,...,X^{12}}_{\Theta_2};\ \underbrace{X^8,X^{13},X^{14},X^{15}}_{\text{scalars}}) \tag{10}$$

Расписывая преобразование (9) в соответствии с разбиением (10), можно найти, что каждый отдельный блок в (10) преобразуется по характерному для него представлению группы Лоренца. Все эти представления содержатся в матрице $L(D_2)^A_B$, которая, таким образом, также допускает разбиение на характерные отличные от нуля матричные блоки:

$$L(D_2)^A_B\Rightarrow\left(L(D_2)^\alpha_\beta,\quad L(D_2)^{3+i}_{3+j}=L(D_2)^{8+i}_{8+j},\quad 1^a_b\right). \tag{11}$$

Матрица $L(D_2)^\alpha_\beta$ реализует представление группы Лоренца для 4-вектора: $x^{\alpha'}=L(D_2)^\alpha_\beta x^\beta$.

Матрица $\Lambda^i_j=L(D_2)^{3+i}_{3+j}$ реализует представление группы Лоренца для майорановского спинора: $\Theta'=\Lambda\Theta$.

Матрица 1^a_b обозначает тривиальное представление группы Лоренца для скаляров.

Форминвариантная метрика финслерова пространства в данном случае может быть записана в следующем виде:

$$G_{ABCD}X^AX^BX^CX^D=x_{15}\left[x_8\eta^{\mu\nu}x_\mu x_\nu-\eta^{\mu\nu}x_\mu\left(\bar\Theta_1\gamma_\nu\Theta_1\right)\right]-$$

$$-(x_{13}^2 + x_{14}^2)\eta^{\mu\nu} x_\mu x_\nu - x_8 \eta^{\mu\nu} x_\mu \left(\bar{\Theta}_2 \gamma_\nu \Theta_2\right) + 2x_{13}\eta^{\mu\nu} x_\mu \left(\bar{\Theta}_1 \gamma_\nu \Theta_2\right) +$$

$$+2x_{14}\eta^{\mu\nu} x_\mu \left(\bar{\Theta}_1 \gamma_5 \gamma_\nu \Theta_2\right) + \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu} \left(\bar{\Theta}_1 \gamma_\mu \Theta_1\right) \left(\bar{\Theta}_2 \gamma_\nu \Theta_2\right), \tag{12}$$

где введены стандартные обозначения для матриц Дирака и 4-мерной метрики Минковского.

Если проводить параллели с теоретико-полевым подходом, то рассмотренное поведение векторов X_A по отношению к 4-мерной группе Лоренца позволяет интерпретировать их как своеобразные мультиплеты, единообразно вмещающие в себя объекты с целыми и полуцелыми спинами. Если не ограничиваться усеченной группой $L(D_2)^A_B$, а вновь вернуться к более общим преобразованиям из группы $L(D)$, то при данных преобразованиях, очевидно, будет наблюдаться перемешивание объектов с разными спинами, что может интерпретироваться как модельный аналог суперсимметрии. Можно показать, что в подходящих обозначениях указанные "перемешивающие" преобразования формально соответствуют известным суперсимметричным преобразованиям в суперпространстве [5] за исключением того факта, что в данном случае все переменные являются классическими; однако обобщение на грассманов случай, на наш взгляд, не выглядит принципиально невозможным.

Отметим также, что данное характерное свойство 4-мерной редукции наблюдается и в случае финслеровых спиноров других размерностей, являясь характерной чертой формализма.

Финслеровы 4-спиноры и твисторы.

Укажем на связь теории финслеровых N-спиноров с твисторной программой Пенроуза [5]. Эта связь наиболее четко просматривается в случае 4-спиноров.

В соответствии с общим формализмом, группа $SL(4,C)$, действующая в пространстве FS^4, сохраняет симплектическое скалярное 4-произведение:

$$\xi' = D\xi; \quad D \in SL(4,C); \quad [\bullet,\bullet,\bullet,\bullet] = inv[SL(4,C)].$$

Наделим пространство FS^4 дополнительной структурой – *псевдоунитарным скалярными 2-произведением* $\langle\bullet,\bullet\rangle$ следующего вида:

$$\langle\xi,\eta\rangle = \xi^1\bar{\eta}^1 + \xi^2\bar{\eta}^2 - \xi^3\bar{\eta}^3 - \xi^4\bar{\eta}^4; \quad \xi,\eta \in \mathrm{FS}^4 \tag{13}$$

При требовании инвариантности данной формы (в дополнение к инвариантности симплектического 4-произведения) группа допустимых преобразований редуцируется с $SL(4,C)$ до ее подгруппы $SU(2,2)$:

$$\xi' = \tilde{D}\xi; \quad \tilde{D} \in SU(2,2); \quad [\bullet,\bullet,\bullet,\bullet], \langle\bullet,\bullet\rangle = inv[SU(2,2)].$$

Но пространство $\left(\mathbf{FS}^4\langle\bullet,\bullet\rangle\right)$, оснащенное инвариантым псевдоунитарным 2-произведением, является пространством *твисторов*, а группа $SU(2,2)$ – твисторной группой, допускающей по общим правилам отображение $SU(2,2) \to O(2,4)$ в группу, изоморфную конформной группе плоского пространства Минковского. Отсюда можно заключить, что твисторы являются частным случаем финслеровых 4-спиноров, отвечающим определенному подклассу групповых преобразований в пространстве FS^4.

4. БСКО ранга (6,6).

Кратко остановимся на данном случае, отвечающем финслеровым 5-спинорам. БСКО ранга (6,6) представляет важность при модельном описании сильных и электрослабых взаимодействий в рамках реляционного подхода [6,7]. Анализ показывает, что для получения феноменологического соответствия с закономерностями стандартной модели достаточно постулировать, что кванты материальных (фермионных) полей описываются в общем случае тройкой элементов БСКО(6,6), т. е. фактически мультиплетом трех финслеровых 5-спиноров. Прообразом амплитуды вероятности перехода между начальным и конечным состояниями многочастичной системы является так называемое базовое 6×6-отношение – специальная антисимметричная форма на парных отношениях между различными элементами, описывающими комплекс взаимодействующих частиц [6, 7].

В теории имеет место процедура редукции, которая сводится к расщеплению БСКО(6,6) на две подсистемы: БСКО(4,4) и БСКО(3,3). На математическом языке это означает разложение пространства $\mathbf{FS}^5$ в сумму подпространств $\mathbf{FS}^2 \oplus \mathbf{FS}^3$ и переход от общей группы преобразований $SL(5, C)$, действующей на пространстве 5-спиноров, к произведению ее подгрупп $SL(2, C) \times SL(3, C)$, действующих в соответствующих пространствах 2- и 3-спиноров. Первое из этих пространств позволяет строить 4-мерные токи и импульсы частиц, второе – описывать геометрию внутренних состояний частиц по отношению к калибровочным группам взаимодействий [6, 7]. Тем самым делается попытка единообразного описания пространственно-временных и внутренних степеней свободы частиц в рамках реляционного подхода. Поскольку в своих исходных предпосылках он не является калибровочным, на него не распространяется ряд особенностей, присущих теоретико-групповым попыткам достичь упомянутого единообразного описания (в качестве одной из таких особенностей упомянем теорему Колемана-Мандулы).

Заключение

В данной статье был рассмотрен формализм финслеровых N-спиноров в их связи с реляционной теорией пространства-времени, а также указан ряд физических интерпретаций и возможных приложений данного формализма. Следует отметить, что объекты, похожие по своей структуре на финслеровы спиноры, рассматривались независимо и другими авторами (в частности, Финкельштейном под названием “гиперспиноры”). Однако, пожалуй, именно в рамках реляционного подхода финслеровы спиноры наряду с чисто математическим характером приобретают определенное физическое звучание, позволяя по-новому взглянуть на возможную природу пространства-времени, расширить рамки наших геометрических представлений на область специальных классов финслеровых пространств, вскрыть ряд любопытных параллелей с известными теоретическими конструкциями (в частности, суперсимметрией и твисторами) и, возможно, дать ключ к осмыслению природы процессов, происходящих в микромире, с концептуально новых позиций.

Ввиду обзорного характера статьи за ее рамками остались многие детали и ряд достаточно специфических приложений, с которыми читатель может ознакомиться по ссылкам.

Благодарности

Автор хотел бы выразить глубокую признательность проф. Ю. С. Владимирову и А. В. Соловьеву за ценные замечания и многолетнее плодотворное обсуждение затронутых вопросов.

Литература

[1] *Vladimirov Yu. S.* Binary geometrophysics: Space-time, gravitation // *Grav. and Cosmol.* – 1995. – V. 1, N. 3. – p. 184–190.

[2] *Владимиров Ю. С.* Реляционная теория пространства-времени и взаимодействий. Часть 1. Теория систем отношений. – М.: Изд-во Моск. ун-та., 1996.

[3] *Владимиров Ю. С.* Реляционная теория пространства-времени и взаимодействий. Часть 2. Теория физических взаимодействий. – М.: Изд-во Моск. ун-та., 1998.

[4] *A. V. Solov'yov, Yu.S. Vladimirov.* Finslerian N-Spinors: Algebra // *Int. J. Theor. Phys.* – 2001. – V. 40 (8). – p. 1511–1523.

[5] *A. V. Solov'yov.* Finslerian 4-spinors as a generalization of twistors // "Space-Time Structure". Collected papers, ed. D. G. Pavlov. – Moscow, TETRU, 2006. – p. 249-256.

[6] *Bolokhov S. V., Vladimirov Yu. S.* An algebraic approach to the description of electroweak and strong interactions // *Grav. and Cosmol.* – 2003. – V. 9, N1–2 (33–34). – p. 113–118.

[7] *Владимиров Ю.С.* Основания физики. – М.: БИНОМ, 2008.

[8] *Кулаков Ю.И.* Элементы теории физических структур. – Новосибирск, Изд-во Новосиб. гос. ун-та, 1968.

[9] *Михайличенко Г. Г.* Математический аппарат теории физических структур. – Изд-во Горно-алтайского гос. ун-та, 1997.

Finslerian N-Spinors in the Relational Approach

S. V. Bolokhov

Peoples' Friendship University, Moscow, Russia
bol-rgs@yandex.ru

A close connection is established between the special class of mathematical objects called Finslerian N-spinors and the apparatus of the relational model of space-time. Some physical applications of the Finslerian spinors formalism are shown in the context of the relational approach in physics.

Key-words: Finslerian geometry, spinors, relational approach.

MSC2000: 53B40 Finsler spaces and generalizations (areal metrics), 53B50 Applications to physics.

PACS: 02.20.-a Group theory, 03.30.+p Special relativity, 12.10.-g Unified field theories and models.