ОБОБЩЕННЫЕ ГРУППЫ ВАГНЕРА И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ В ГЕОМЕТРИИ И ФИЗИКЕ

В. Г. Жотиков

Московский физико-технический институт,
Томский государственный педагогический университет
Zhotikov@yandex.ru

Рассматриваются свойства важного для приложений в геометрии и физике класса полугрупп: так называемых обобщенных групп Вагнера. Последние известны в зарубежной литературе еще как инверсные полугруппы. Обсуждаются вопросы приложений теории обобщенных групп и обобщенных груд в физике. Введение этих алгебраических структур приводит к новым законам сохранения и, соответственно, к предсказаниям новых физических явлений.

Ключевые слова: обобщенные группы и обобщенные груды, инверсные полугруппы, кристаллографические группы, бинарные и тернарные операции, частичные отображения.

1 Введение

Общеизвестна роль, которую играет теория групп преобразований в геометрии и в физике. Вместе с тем, уже давно было замечено, что для современной дифференциальной геометрии, как и современной физике, применение аппарата теории классической групп оказывается явно недостаточным. Одним из первых, кто обратил внимание на это обстоятельство, был выдающийся математик XX столетия В. Вагнер (1908 – 1981). Этому вопросу Виктор Владимирович Вагнер специально посвятил пленарный доклад на IV Математическом съезде СССР (г. Ленинград, июль 1961).

Свой доклад, «Основания дифференциальной геометрии и современная алгебра», В. Вагнер начал следующим словами [1]: «После того, как Ф. Клейн в своей Эрлангенской программе дал классификацию различных геометрий по характеризующим их группам преобразований, казалось, можно было думать, что теория групп будет той частью алгебры, на которой будет основано все дальнейшее развитие геометрии. Однако это оказалось не так. Для современной дифференциальной геометрии понятие группы является совершенно недостаточным при рассмотрении, с алгебраической точки зрения, основных понятий соответствующих геометрических теорий. Мало того, алгебраические проблемы, возникающие в исследованиях по основаниям современной дифференциальной геометрии, приводят к необходимости изучения специальных алгебраических систем, которые до последнего времени по существу не изучались. Эти алгебраические системы возникают в результате аксиоматизации теории частичных отображений множеств».

Сказанное может быть в полном объеме перенесено на ситуацию, сложившуюся в современной физике в связи применением в ней абстрактной теории групп. Ниже мы постараемся обосновать справедливость этого утверждения.

В начале 50-х годов прошлого столетия исследования по основаниям дифференциальной геометрии привели В. Вагнера к необходимости создания нового алгебраического аппарата. К тому времени теория групп как абстрактное учение о суперпозиции обратимых преобразований (отображений множества на себя), была практически единственной частью алгебры, на которой основывалось развитие геометрии. Однако в современной дифференциальной геометрии (как и в других разделах математики и соответственно в физике) часто приходится иметь дело с взаимно однозначными частичными преобразованиями множества в себя или в другое множество, т. е. с взаимно однозначными отображениями подмножеств этих множеств.

Уже давно было замечено, что часто называют группами преобразований множества частичных преобразований, не являющиеся, на самом деле, группами с точки зрения всех известных определений операции умножения частичных преобразований. Так, группы преобразований Ли арифметического пространства в большинстве случаев состоят из частичных преобразований, определенных на различных открытых подмножествах арифметического пространства и поэтому заведомо не могут быть группами. Простейшим примером может служить множество всех проективных преобразований арифметического пространства. Так называемые, бесконечные группы преобразований Ли арифметического пространства все, без исключения, являются множествами частичных преобразований, не являющимися группами.

В связи с этим были введены различные определения псевдогруппы преобразований. Однако оказалось, что механическое перенесение на частичные преобразования операции умножения (суперпозиции) преобразований привело к тому, что с алгебраической точки зрения псевдогруппа являлась системой с не всюду определенной операцией. Это затрудняло изучение псевдогрупп алгебраическими методами. Недостатки псевдогрупп были отмечены В. Вагнером [1–3], который предложил рассматривать для частичных преобразований естественную операцию умножения, являющуюся частным случаем операции умножения бинарных отношений.

В. Вагнер ввел понятие обобщенной группы взаимно однозначных частичных преобразований. Обобщенная группа взаимно однозначных частичных преобразований множества A — это множество взаимно однозначных частичных преобразований множества A, замкнутое относительно операции умножения и вместе с каждым частичным преобразованием содержащее обратное частичное преобразование.

Псевдогруппы вполне заменяются обобщенными группами. Последние обладают всеми важными свойствами псевдогрупп. С абстрактно-алгебраической точки зрения обобщенные группы являются полугруппами специального вида и весьма напоминают группы, Этим и объясняется название «обобщенная группа». Таким образом, теория обобщенных групп является удобным аппаратом, который с успехом может быть применен как в современной дифференциальной геометрии, так и в физике.

В связи с этим появилась необходимость в абстрактной теории обобщенных групп, систематическое изучение которой было начато В. Вагнером [1–3] и его учениками; ему же принадлежит само понятие обобщенной группы. Естественность этого понятия подчеркивается тем, что в 1954 году обобщенные группы были введены австралийским математиком Г. Престоном (G. Preston [4]), который, по-видимому, не был знаком с работами В. Вагнера, опубликованными в предыдущие годы. В частности, им была передоказана основная теорема теории обобщенных групп [2], утверждающая, что всякая абстрактная обобщенная группа изоморфна некоторой обобщенной группе взаимно однозначных частичных преобразований. Отметим, также, что Г. Престон назвал обобщенные группы инверсными полугруппами. Последний термин, и укоренился в настоящее время в зарубежной математической литературе (см., например, [5]).

Естественно, что, как и в теории групп, в теории обобщенных групп возникает вопрос о нахождении всех представлений данной обобщенной группы. Эта задача была решена Б. Шайном [6]. Заметим, что известная теория представлений групп при помощи преобразований (см., например, [7]) получается как частный случай [6], поскольку всякая группа является обобщенной группой.

Таким образом, появление абстрактной теории обобщенных групп и обобщенных груд как теории, обобщающей абстрактную теорию классических групп, вовсе не является случайным, а представляет собой необходимый этап развития общей теории симметрии Природы.

2 Обобщенные группы и обобщенные груды

Важнейшей особенностью теории обобщенных групп и обобщенных груд, построенной В. Вагнером [1–3] и его научной школой, является широкое привлечение аппарата теории бинарных отношений и символики математической логики. В данной работе мы будем также их широко использовать. При необходимости, перечень обозначений и их определения кроме указанных выше работ можно найти в монографии[8].

2.1 Необходимые определения и соображения

Бинарным отношением между элементами множеств A и B называется произвольное подмножество ρ декартова произведения этих множеств $A \times B$. Для бинарных отношений определены все теоретико-множественные операции. Если $\rho \subseteq A \times B$ — бинарное отношение, то отношение $\overset{-1}{\rho} \subseteq B \times A$, определяемое формулой

$$(b, a) \in \overset{-1}{\rho} \leftrightarrow (a, b) \in \rho, \tag{2.1}$$

называется *обратным* для отношения $\rho \subseteq A \times B$.

Обозначим через $\mathfrak{E}(X)$ множество всех подмножеств множества X. Если $\rho \in \mathfrak{E}(A \times B)$ и $\sigma \in \mathfrak{E}(B \times C)$ — два бинарных отношения, то их произведением называется следующее бинарное отношение $(\sigma \circ \rho) \in \mathfrak{E}(A \times C)$:

$$(a, c) \in (\sigma \circ \rho) \leftrightarrow \underset{b \in B}{\exists} (a, b) \in \rho \wedge (b, c) \in \sigma. \tag{2.2}$$

Заметим, что сомножители в произведении бинарных отношений записываются справа налево.

Срезом бинарного отношения $\rho \in \mathfrak{E}(A \times B)$ через элемент $a \in A$ называется подмножество $\rho\langle a\rangle$ всех элементов $b \in B$ таких, что $(a, b) \in \rho$. Обозначим теперь $\rho(X) = \bigcup_{a \in X} \rho\langle a\rangle$, $pr_1\rho = \overset{-1}{\rho}(B)$, $pr_2\rho = \rho(A)$. Каждое бинарное отношение $\rho \in A \times B$ можно трактовать как отображение (вообще говоря, многозначное) множества $pr_1\rho$ на множество $pr_2\rho$. Выражения $pr_1\rho$ и $pr_2\rho$ называются *первой* и соответственно *второй* проекциями бинарного отношения $\rho \subseteq A \times B$, причем имеет место отношение: $pr_2\rho = pr_1\overset{-1}{\rho}$. Тогда операция (2.2) определяет умножение бинарных отношений как суперпозицию отображений.

Бинарное отношение $\rho \subseteq A \times B$ удобно представлять себе как многозначную функцию, которая некоторым элементам из A ставит в соответствие элементы из B. Отсюда $\overset{-1}{\rho}$ является обратной функцией, $pr_1\rho$ — область задания, а $pr_2\rho$ — область значений функции ρ. Соответственно $\rho\langle a\rangle$ есть множество образов элемента a, а $\overset{-1}{\rho}\langle b\rangle$ — множество прообразов элемента b.

Множество $\mathfrak{E}(A \times A)$ всех бинарных отношений между элементами одного множества A является полугруппой относительно операции (2.2), а операция (2.1) обращения бинарных отношений — инволютивным автоморфизмом этой полугруппы.

Разумеется, что наибольший интерес представляют такие бинарные отношения $\rho \subseteq A \times B$, для которых срез $\rho\langle a\rangle$ содержит не более одного элемента при любом $a \in A$. Они называются *частичными отображениями* множества A в B. Обозначим через $\mathfrak{F}(A \times B)$ множество всех частичных отображений множества A в B, через $\mathfrak{R}(A \times B)$ и $\mathfrak{F}_1(A \times B)$ — множество всех таких $\rho \in \mathfrak{F}(A \times B)$ для которых $\overset{-1}{\rho} \in \mathfrak{F}(A \times B)$ и соответственно

$pr_1\rho = A$. Бинарные отношения из $\mathfrak{E}(A \times A)$ называются однородными, частичные отображения из $\mathfrak{F}(A \times B))$ и $\mathfrak{F}_1(A \times B)$ — соответственно *преобразованиями* и *частичными преобразованиями* множества A, соответственно из $\mathfrak{R}(A \times B)$ — *обратимыми* частичными отображениями. Пустое бинарное отношение содержится в $\mathfrak{R}(A \times B)$ и обозначается как $\emptyset$.

Это можно сформулировать и другими словами. Частичное взаимно однозначное преобразование f множества A — это взаимно однозначное отображение подмножества $a_1 \subset A$ на равномощное подмножество $a_2 \subset A$. Подмножества a_1 и a_2 называются соответственно первой и второй проекциями преобразования f и обозначаются соответственно через $pr_1 f$ и $pr_2 f$. Эти преобразования удобно рассматривать как бинарные отношения между элементами множества A, а именно, как взаимно однозначные бинарные отношения. При этом удобно также отождествлять бинарные отношения между элементами множества A с соответствующими подмножествами множества $A \times A$ [3]. Операции объединения, пересечения и умножения бинарных отношений [3], примененные к взаимно однозначным бинарным отношениям, приводят снова к взаимно однозначным бинарным отношениям. При этом операция умножения совпадает с обычным произведением взаимно однозначных частичных преобразований и является заданной алгебраической операцией в обобщённой группе G_A. В дальнейшем всюду элементы G_A будем называть просто *преобразованиями*. Очевидно, что пустое преобразование $\emptyset$ является нулевым элементом G_A, а тождественное отображение Δ_A множества A на себя является единичным элементом G_A.

Пусть теперь имеется множество элементов K с заданной в нем всюду однозначной и ассоциативной бинарной алгебраической операцией. Такую конструкцию называют *полугруппой* (или *ассоциативным группоидом*).

Согласно В. В. Вагнеру ([1–3]) *обобщенная группа* определяется, как полугруппа, в которой:

(I) все идемпотентные элементы коммутируют между собой,

(II) для каждого элемента g существует *обобщенно обратный* элемент g^{-1}, такой, что $gg^{-1}g = g, \ \ g^{-1}gg^{-1} = g^{-1}$.

Очевидно, что исходный элемент g является обобщенно обратным для g^{-1}.

Сформулируем теперь без доказательства *теорему Вагнера.*

Каждая обобщенная группа G может быть представлена как обобщенная группа взаимно однозначных частичных преобразований.

Доказательство этой *теоремы* можно найти, в [2] и в [3].

2.2 Вопросы аксиоматики

Прежде чем перейти к обсуждению систем аксиом определяющих класс обобщенных групп, целесообразно, по-видимому, напомнить систему аксиом теории обычных групп. Разные авторы приводят несколько отличные системы аксиом (постулатов), понятие группы. Мы приводим ниже одну из таких систем аксиом, которая наиболее часто фигурирует в физической литературе.

Множество элементов G называют *группой*, если:

(1) на этом множестве определен закон композиции (в дальнейшем называемый *групповым умножением*), по которому любой паре элементов этого множества g_i и g_k, взятых в определенном порядке, однозначно ставится в соответствие один из элементов этого множества:

$$g_i g_k = g_j;$$

(2) групповое умножение ассоциативно, т. е.

$$(g_j g_k)g_j = g_j(g_k g_j);$$

(3) среди элементов множества имеется *единичный элемент* E, обладающий свойством

$$Eg = gE = g, \qquad g \in G;$$

(4) для всякого элемента g множества G существует *обратный элемент* g^{-1}, такой, что

$$gg^{-1} = g^{-1}g = E.$$

Единичный элемент в группе — единственный, и каждый элемент группы имеет единственный ему обратный.

Если множество G содержит конечное число n_G различных элементов, то группу называют конечной, а число элементов n_G её порядком. Группу называют бесконечной, если бесконечное множество элементов G счётно, и непрерывной, если это множество несчётно.

Группа представляет собой множество замкнутое относительно закона группового умножения. Если $g_i g_k = g_k g_i$, то говорят, что элементы g_i и g_k коммутируют между собой. Группа, в которой все элементы попарно коммутируют между собой, называется коммутативной или абелевой.

Часто бывает удобным задавать группу посредством таблицы умножения, в которой строки и столбцы обозначены символами групповых элементов, а результат g_j группового умножения $g_i g_k$ находится на пересечении строки g_i со столбцом g_k.

Из определения группы следует, также, что каждый элемент группы должен встреться в каждой строке и в каждом столбце один и только один раз.

Пусть теперь K — некоторая полугруппа (ассоциативная система, т. е. выполняются (1) и (2)). Как известно, элемент g полугруппы K называется *идемпотентом*, если $g^2 = g$. Элемент g называется *обратимым*, если существует такой элемент $\bar{g}$, что $g\bar{g}g = g$ и $\bar{g}g\bar{g} = \bar{g}$ (достаточно потребовать одного лишь первого равенства).

В. В. Вагнер [1,2] определил обобщенные группы как такие полугруппы, в которых дополнительно выполняются указанные во введении аксиомы (I) и (II). Из этих аксиом вытекает, в частности, единственность обобщенно обратимого (обратного) элемента [1].

А. Либер показал [5], что обобщенная группа может быть определена и другим (эквивалентным) определением:

Обобщенной группой называется такая полугруппа, в которой для каждого элемента существует единственный обобщенно обратный элемент.

Обобщенная группа с одним идемпотентным элементом является группой. Отсюда следует, что группа может быть определена как такая *полугруппа, в которой для всякого элемента g уравнение $gxg = g$ имеет единственное решение.* Это определение эквивалентно перечисленной выше системе аксиом группы.

2.3 Обобщенные груды

В. Вагнер [1, 3] показал, что если k_1, k_2, k_3 — взаимно однозначные частичные отображения некоторого множества A в другое множество B, то $k_1 k_2^{-1} k_3$ — тоже такое отображение. Тем самым на множестве всех частичных отображение A в B определяется тернарная алгебраическая операция. В. Вагнер указал необходимые и достаточные условия, которым должна удовлетворять алгебраическая система с тернарной операцией, чтобы она допускала изоморфное представление частичными преобразованиями относительно этой операции. Такие системы были названы В. Вагнером [3] обобщенными грудами.

Всякая обобщенная группа является обобщенной грудой относительно операции $[g_1, g_2, g_3] = g_1 g_2^{-1} g_3$. Обратно, любая обобщенная груда может быть вложена в обобщенную груду, получаемую таким способом из некоторой обобщенной группы.

Между теориями обобщенных групп и обобщенных груд имеется глубокая связь. Так, если K есть обобщенная груда (не обязательно приводимая к обобщенной группе), то множества $L(K)$ и $M(K)$ всех её левых и соответственно правых сдвигов являются обобщенными группами. Со многими другими свойствами обобщенных груд и обобщенных групп можно ознакомиться в [4].

До последнего времени в математике и соответственно в теоретической физике не встречалось естественно возникающих алгебраических систем с операциями, отличными от бинарных. Ниже мы покажем, что тернарные алгебраические операции играют важную роль в современных физических теориях.

3 Некоторые свойства обобщенных групп и обобщенных груд

В дальнейшем мы будем называть обобщенные группы Вагнера просто обобщенными группами. Далее будем обозначать через I множество всех идемпотентных элементов обобщенной группы G, а через g^{-1} обобщенно обратный элемент для элемента $g \in G$. Очевидно, что элементы gg^{-1} и $g^{-1}g$ являются идемпотентными, однако в общем случае $gg^{-1} \neq g^{-1}g$. Поэтому условие

$$\text{для любого } \ g \in G \ \text{ имеет место } \ gg^{-1} = g^{-1}g \tag{3.1}$$

выделяет особый класс обобщённых групп, которые называют простейшими обобщёнными группами. Их называют еще обобщенными группами Клиффорда (см. например, [5, 10]). Заметим, также что условие (3.1) может быть заменено требованием

$$\text{для любых } \ g \in G \ \text{ и } \ i \in I \ \text{ имеет место } \ gi = ig. \tag{3.2}$$

Сформулируем без доказательства еще одну теорему для обобщенных групп Клиффорда. Теорема 3.1. *Для обобщенной группы условие* (3.1) *эквивалентно одному из условий*

$$\text{а) } g^{-1}gg = g, \quad \text{б) } ggg^{-1} = g.$$

Множество I идемпотентных элементов обобщенной группы G является полугруппой относительно операции в G и даже обобщенной группой. Пусть i_0 является нулевым элементом полугруппы I, т. е.

$$\text{для любого } \ i \in I \ \text{ имеет место } \ ii_0 = i_0 i = i_0. \tag{3.3}$$

Обозначим через G_0 множество таких элементов $g \in G$, для которых выполняется равенство $g^{-1}g = i_0$.

Перечислим без доказательства важные свойства нулевого элемента.

Теорема 3.2. *Множество G_0 образует группу, единицей которой служит i_0.*

Теорема 3.3. *Для любого элемента $g \in G$ элементы gi_0 и i_0g принадлежат группе G_0.*

Следствиями этих утверждений являются следующие:

Группа G_0 является идеалом обобщенной группы G. Нулевой элемент полугруппы I идемпотентов обобщенной группы G коммутирует со всеми элементами из G.

Заметим, что нулевой элемент полугруппы I всегда существует, если I состоит только из конечного числа элементов.

Вторым особым элементом полугруппы идемпотентов I является единица этой полугруппы, т. е. такой идемпотентный элемент e, который удовлетворяет условию

$$\text{для любого } \ i \in I \ \text{ имеет место } \ ie = ei = i. \tag{3.4}$$

Перечислим без доказательств важные свойства единицы e полугруппы I.

Теорема 3.4. *Единица множества идемпотентных элементов обобщенной группы G является единицей этой обобщенной группы.*

Рассмотрим множество G_e, состоящее из таких элементов $g \in G$, которые удовлетворяют условию $g^{-1}g = e$.

Теорема 3.5. *Множество G_e образует полугруппу.*

В общем случае полугруппа G_e не будет являться группой, так как из $g^{-1}g = e$, вообще говоря, не следует $gg^{-1} = e$, и поэтому, из $g \in G_e$ не следует также что $g^{-1} \in G_e$.

Из перечисленных выше предложений вытекают также следующие две теоремы:

Теорема 3.6. *Обобщенная группа с двумя идемпотентными элементами всегда является простейшей.*

Теорема 3.7. *Если обобщенная группа G с тремя идемпотентными элементами обладает единицей, то она является простейшей.*

Заметим, что существуют обобщенные группы с тремя идемпотентными элементами не являющиеся простейшими.

Пусть G — обобщенная группа. Подмножество $\tilde{G} \subset G$, являющееся относительно операции в G обобщённой группой, называется обобщённой подгруппой G. Подмножество $\bar{G} \subset G$, являющееся группой относительно операции в G, называется подгруппой G.

Подгруппа $\bar{G} \subset G$ называется максимальной, если она не содержится ни в какой другой подгруппе G, отличной от $\bar{G}$.

Рассмотрим множество I всех идемпотентов обобщенной группы G. Очевидно, что I является также обобщённой группой, причем обобщённо обратным для $i \in I$ будет сам i.

В I вводится отношение порядка ω:

$$(i_1, i_2) \in \omega \leftrightarrow i_1 i_2 = i_1.$$

Будем говорить, что i_2 покрывает i_1, если

$$(i_1, i_2) \in \omega \wedge \left(\neg \bigvee_{i_0 \neq i_1, i_0 \neq i_2} (i_1, i_0) \in \omega \wedge (i_1, i_2) \in \omega \right).$$

Множество идемпотентов $i_1, i_2, \ldots, i_n$ образует цепь, если каждый i_k, где $k = 2, 3, \ldots, n$ покрывает i_{k-1}.

Назовем рангом идемпотента $i \in I$ его высоту $h[i]$ в смысле высоты элемента упорядоченного множества:

1) $h[0] = 0$;

2) $h[i] = n \leftrightarrow \left((\bigvee_{i_1 \neq i} (i_1, i) \in \omega \wedge h[i_1] = n - 1) \wedge (\bigvee_{i_2 \neq i} (i_2, i) \in \omega \wedge h[i_2] > n - 1) \right)$.

Обобщённая группа имеет ранг n, если n есть наибольший из рангов её идемпотентов.

Изучим некоторые свойства обобщенных групп конечного ранга.

Пусть G — обобщенная группа. Все элементы G можно разбить на три сорта: идемпотенты; элементы максимальных подгрупп, не являющиеся идемпотентами; прочие элементы.

Рассмотрим

$$G_{(i,i_2)} = \underset{g \in G}{\subset} gg^{-1} = i_1 \wedge g^{-1}g = i_2$$

Очевидно, что $G_{(i,i)}$ будет группой с единицей i. Будем говорить, что $G_{(i,i)}$ есть группа на идемпотенте i. Оказывается [Л.1], что все максимальные подгруппы G исчерпываются подгруппами вида $G_{(i,i)}$.

Назовем два идемпотента $i_1, i_2 \in I$ сопряженными, если $G_{(i,i)} \neq \emptyset$. Легко показать, что 1) отношение сопряженности есть отношение эквивалентности; 2) сопряженные идемпотенты имеют равные ранги; 3) если i_1, i_2 сопряжены, то $G_{(i_1,i_1)}$ и $G_{(i_2,i_2)}$ изоморфны.

Далее зафиксируем $g_0 \in G_{(i_1,i_2)}$. Тогда всякий другой элемент $g \in G_{(i_1,i_2)}$ является произведением некоторого элемента $G_{(i_1,i_1)}$ на g_0. В самом деле,

$$g = (gg_0^{-1})g_0, \quad \text{где} \quad (gg_0^{-1}) \in G_{(i_1,i_1)}.$$

Пусть $G_{(i,i)} \in \omega$ группа на идемпотенте i. Назовем проекцией $G_{(i,i)}$ в $G_{(i_0,i_0)}$, $i_0 < i$, множество $\{i_0\}G_{(i,i)}$. Проекция является гомоморфизмом $G_{(i,i)}$ в $G_{(i_0,i_0)}$.

3.1 Отношение порядка в обобщенной группе Вагнера

Говорят, что элементы g_1 и g_2 обобщенной группы G находятся в отношении порядка, если имеет место отношение:

$$\omega = \{(g_1, g_2) : g_1 = g_1 g_1^{-1} g_2 = g_1\} = \{(g_1, g_2) : g_1 = g_2 g_1^{-1} g_1 = g_1\}. \tag{3.5}$$

В. В. Вагнер назвал это каноническим отношением порядка [3]. Отношение порядка есть отношение включения частичных преобразований. Это означает, что преобразование, которое соответствует элементу g_1 оказывается включенным в преобразование, которое соответствует элементу g_2 обобщённой группы и записывается так:

$$g_1 \prec g_2 \leftrightarrow \varphi(g_1) \subset \psi(g_2), \tag{3.6}$$

где $\varphi(g_1)$ — преобразования соответствующие элементу g_1, а $\psi(g_2)$ — преобразования соответствующие элементу g_2.

В обычной группе отношение порядка сводится к тождественному отношению. Т.е. в случае обычной группы все её преобразования (за исключением единичного) являются равнозначными.

Рассмотрим теперь полезный пример обобщённой группы Вагнера. Пусть имеется обобщённая группа G, которая задана следующей таблицей умножения.

$\times$	i	j	a	b	0	1	2	3	4	e
i	j	0	a	3	0	1	2	3	4	i
j	0	j	2	b	0	1	2	3	4	j
a	2	a	4	i	2	3	4	0	1	a
b	b	3	j	1	3	4	0	1	2	b
0	0	0	2	3	0	1	2	3	4	0
1	1	1	3	4	1	2	3	4	0	1
2	2	2	4	0	0	2	3	4	0	1
3	3	3	0	1	3	4	0	1	2	3
4	4	4	1	2	4	0	1	2	3	4
e	i	j	a	b	0	1	2	3	4	e

Идемпотентными элементами этой обобщенной группы являются i, j, 0, e. Здесь 0 выполняет здесь роль «нулевого элемента», а элемент e — единицы обобщенной группы. Множество этих идемпотентов является минорантной полурешеткой[1]. Кроме того, имеем $ab \neq ba$, $ai \neq ia$, $bj \neq jb$.

[1] Упорядоченное множество называется минорантной (мажорантной) полурешеткой, если любые два его элемента имеют наибольшую нижнюю (наименьшую верхнюю) грань.

Канонический порядок в G задается следующим образом:

$$\omega = \Delta_G \cup \{(2,a),(0,i),(0,e),(0,j),(i,e),(j,e),(3,b)\}, \tag{3.7}$$

где символ Δ_G обозначает тождественное отображение G на себя, или диагональ $G \times G$ [3].

3.2 О собственных представлениях обобщенных групп матрицами

В данном разделе мы опишем общий метод построения собственных матричных представлений обобщенных групп с конечным числом идемпотентов [10].

Пусть теперь мы имеем обобщённую группу G с конечным числом идемпотентов. Найдем её минимальное собственное представление матрицами над некоторым допустимым полем.

1. Пусть n_1 — число идемпотентов ранга 1, n_k — число идемпотентов ранга k таких, что или $G_{(i,i)} \not\ni \{i\}$, но $\{i_0\}G_{(i,i)}$ не изоморфна группе $G_{(i,i)}$ ни для какого i_0; или таких, что i покрывает ровно один идемпотент. Положим

$$n_0 = n_1 + n_2 + \cdots + n_s,$$

где s — ранг G.

2. Берем некоторый набор минимальных собственных матричных представлений $\Gamma_{G_{(i,i)}}$ группы $G_{(i,i)}$ над указанным полем для всех $i \in I$. Для сопряженных идемпотентов берем $\Gamma_{G_{(i_1,i_1)}} = \Gamma_{G_{(i_2,i_2)}}$. Пусть m_k — число так выбранных представлений порядка $k+1$. Определяем

$$n = n_0 + m_1 + 2m_2 + \cdots + tm_t,$$

где $t+1$ — наибольший порядок.

3. Находим представление обобщенной подгруппы ранга 1.

3.1. Идемпотенту i ставится в соответствие частично тождественная матрица порядка n ранга, равного порядку представления $\Gamma_{G_{(i,i)}}$. Произведение матриц, соответствующих различным идемпотентам должно равняться нулю.

3.2. Для элемента $g \in G_{(i,i)}$ соответствующая матрица ищется так: если $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ — ненулевые строки $\Gamma_n(i)$, то

$$M_g = \Gamma_n(g) \leftrightarrow (M_{\alpha_1}^{\alpha_m} = \Gamma_{G_{(i,i)}}(g) \wedge \bar{M}_{\alpha_1}^{\alpha_m} = 0),$$

где $\bar{M}_{\alpha_1}^{\alpha_m}$ — матрица, получающаяся из M_g заменой строк $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ нулевыми, а матрица $M_{\alpha_1}^{\alpha_m}$ — матрица, получающаяся из M_g вычеркиванием нулевых строк и столбцов.

3.3. Пусть $G_{(i,i)} \neq \emptyset$, и $M_{i_1} = \Gamma_n(i_1)$, $M_{i_2} = \Gamma_n(i_2)$. Если ненулевыми строками в M_{i_1} являются $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, а в M_{i_2} соответственно $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$, то элементам $g \in G_{(i_1,i_2)}$ ставятся в соответствие матрицы вида

$$M_g = M_{\bar{g}} M_\beta^\alpha,$$

где $\bar{g} \in G_{((i_1,i_1)}$, а M_β^α — матрица, у которой элементы (α_i, β_i) равны единице $(i = 1, \ldots, m)$, а остальные равны нулю.

3.4. Пусть i_0 — идемпотент ранга k.

Если i_0 покрывает несколько идемпотентов, а $G_{(i_0,i_0)} = \{i_0\}$ или $G_{(i_0,i_0)}$ изоморфна $\{i\}G_{(i_0,i_0)}$, где i — идемпотент, покрываемый i_0, то получаем для $g \in G_{(i_0,i_0)}$

$$M_g = \bigcup_i M_{ig},$$

где i — идемпотенты, покрываемые i_0, а объединение матриц есть матрица, элементы которой являются объединениями элементов исходных матриц, причем $\{a\} \cup \{a\} = \{a\}$, $\{a\} \cup \{0\} = \{a\}$.

Если i_0 не обладает указанным свойством, то будем полагать

$$M_{i_0} = M_0 \bigcup \cup_i M_i,$$

где M_0 — частично тождественная матрица порядка n ранга равного порядку $\Gamma_{G_{(i_0,i_0)}}$, такая, что $M_0 M_j = 0$ для всех $j \in \langle i_0 \rangle$, а M_i — матрицы, соответствующие идемпотентам, покрываемым i_0.

Далее, для элементов $g \in G_{(i_0,i_0)}$ находятся $M_g = \Gamma_n(g)$ так: если $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ — ненулевые строки M_0, то

$$M_g = \Gamma_n(g) \leftrightarrow (\underset{0}{M}{}^{\alpha_m}_{\alpha_1} = \Gamma_{G_{(i_0,i_0)}}(g) \wedge \bar{M}^{\alpha_m}_{\alpha_1} = \bigcup_i M_{ig}),$$

где i — идемпотенты, покрываемые i_0, $\underset{0}{M}{}^{\alpha_m}_{\alpha_1}$ — матрица, получающаяся из M_0 вычёркиванием нулевых строк и столбцов, а $\bar{M}^{\alpha_m}_{\alpha_1}$ — матрица, получающаяся из M_g заменой строк $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ ненулевыми.

Что касается элементов множества $G_{(i_1,i_2)}$, где i_1, i_2 — сопряженные идемпотенты ранга k, то они представляются, как и в 3.3.

Построенное соответствие, как легко проверить, является минимальным собственным представлением G, определяемым данным набором представлений максимальных подгрупп. Назовем эти представления главными.

Пусть Γ_1 и Γ_2 — два главных представления. Так как порядок главного представления определяется однозначно, то различие между главными представлениями, соответствующими данному набору представлений $\Gamma_{G_{(i,i)}}$, $i \in I$, основывается на произвольности выбора строк в матрице n — порядка, которые будут ненулевыми в M_i, где $i \in I$. Тогда, чтобы получить Γ_n из $\bar{\Gamma}_n$, нужно, очевидно, одновременно переставить одноименные строки и столбцы матриц из $\bar{\Gamma}_n$ на соответствующие представлению Γ_n места. Для этого достаточно осуществить преобразование подобия $T_{-1}\bar{\Gamma}_n T$, где T — матрица, состоящая из нулей и единиц, которая строится так: если нужно строку α_j перевести на место строки α_k, то элемент $t_{jk} = 1$.

Пусть теперь Γ — минимальное собственное представление с данным набором $\Gamma_{G_{(i,i)}}$, $i \in I$. Тогда его порядок совпадает с порядком главного представления. Как известно, коммутирующие матрицы простой структуры можно одновременным преобразованием подобия привести к диагональному виду. Очевидно, что всякая идемпотентная матрица является матрицей простой структуры, Таким образом, существует неособенная матрица T такая, что $T^{-1}\bar{\Gamma}_n T$ будет минимальным собственным представлением G, при котором идемпотентам соответствуют частично тождественные матрицы. Следовательно, представление идемпотентной обобщенной подгруппы $\Gamma(G)$ при $T^{-1}\bar{\Gamma}_n T$ совпадает с таковым при главном представлении. Отсюда следует совпадение самих представлений.

Указанный метод применим к решению различных задач о матричных представлениях обобщенных групп.

4 О приложениях обобщенных групп и обобщенных груд в физике

В современной физике понятие симметрии играет ключевую роль во всех теоретических представлениях. Если уравнения, которые описывают физические законы, можно изменить так, что это не отражается на следствиях, вытекающих из этих уравнений, то можно говорить об инвариантности (симметричности) законов природы.

Фундаментальная взаимосвязь «симметрия — законы сохранения» физической системы определяется в виде двух знаменитых теорем Э. Нетер [11], установленных ею в 1918 году. Согласно этим теоремам (называемых прямой и обратной теоремами Э. Нетер), каждый закон сохранения оказывается тесно связанным с инвариантностью интеграла действия рассматриваемой физической системы относительно некоторого преобразования координат или полевых функций.

Инвариантность действия относительно сдвига начала отсчета времени (однородность времени), можно записать в виде следующей простой схемы: $t \to t' + a \Rightarrow L = L' \Rightarrow \mathcal{S} = \mathcal{S}'$. Здесь a — величина сдвига показаний часов, L и L' — лагранжианы, а $\mathcal{S} = \mathcal{S}'$ — это значение действия рассматриваемой системы соответственно до и после преобразования. Указанная последовательность вычислений приводит к закону сохранения механической энергии.

Аналогичным образом, инвариантность действия относительно сдвига пространственных координат (однородность пространства), а именно,

$$\mathbf{r} \to \mathbf{r}' + \mathbf{b} \Rightarrow L \to L' \Rightarrow \mathcal{S} = \mathcal{S}'$$

где $\mathbf{b}$ — 3-вектор пространственных трансляций, имеет своим следствием закон сохранения импульса.

Аналогичные соображения применимы и к другому классу симметрий — к так называемым внутренним симметриям. Последние не связаны с преобразованиями пространственно-временных степеней свободы. Некоторые авторы называют их ещё геометрическими и динамическими симметриями. Такое их деление они основывают на следующих соображениях.

Имеется в виду, что геометрическая симметрия отражает свойства пространства-времени. Соответственно она имеет отношение к законам сохранения энергии, импульса и момента импульса. В свою очередь, динамическая симметрия имеет отношение к законам сохранения физических величин, связанных с внутренним пространством. Поэтому обычно считается, что эти величины имеют негеометрический характер.

Заметим, что термин «преобразование» используется в физике в значительно более широком смысле, чем преобразование какого либо множества в себя. Поэтому, теорема о том, что отображения всякого множества на себя образует группу, вообще говоря, не применима ко всем рассматриваемым в физике преобразованиям. Это говорит о необходимости каждому конкретному преобразованию в физике тщательно подбирать соответствующую ему адекватную алгебраическую структуру.

Кроме того, преобразования, используемые в физике необходимо рассматривать с двух различных точек зрения, а именно, активной и пассивной [12]. Другими словами, преобразования, применяемые в физике, могут рассматриваться как, так называемые, *активные*, или *пассивные* преобразования.

Активное преобразование какой либо физической системы, есть её *движение*, т.е. изменение её характеристик под влиянием некоторых внутренних или внешних воздействий. Соответственно к пассивным преобразованиям относятся всевозможные *изменения способов описания* физических систем.

Свойства обобщенных групп и обобщенных груд, о которых шла речь, свидетельствуют о том, что указанные алгебраические структуры играют важную роль во многих разделах современной физики. Оказывается, что первые из них (обобщенные группы) применяются к описаниям активных преобразований, тогда как вторые (обобщенные груды), применяются для описаний пассивных преобразований.

Из сказанного вытекает, что мы имеем дело с новым классом симметрий, а именно, с симметриями алгебраических структур, являющихся обобщенными группами и обобщёнными грудами.

Так описанная выше тернарная операция, действующая между элементами двух обобщенных подгрупп обобщенной группы (или её подгрупп) сводится к отношению порядка между этими элементами обобщенной группы. Отсюда следует, что преобразования, принадлежащие разным подгруппам, входящим в состав обобщенной группы, оказываются связанными друг с другом отношениями подчинения (отношением порядка). Иными словами, точные симметрии каждой из отдельно взятых подгрупп обобщенной группы "искажаются" (т. е. оказываются нарушенными). Это дает возможность придать новый смысл понятию спонтанного нарушения симметрии (СНС), с которым часто приходится иметь в физике и её приложениях. Оказывается, что СНС есть проявление отношения порядка в обобщенной группе. К обсуждению этого вопроса мы еще вернемся.

Далее мы рассмотрим некоторые приложения теории обобщенных групп и обобщенных груд в таких разделах современной физической науке как физика фундаментальных взаимодействий и физика твердого тела. Разумеется, что эти приложения вовсе не являются единственными.

Заметим что, с точки зрения теории обобщенных групп и обобщенных груд, известная в физике группа Лоренца, строго говоря, группой не является, а должна рассматривается как обобщенная группа. В частности, отношение порядка устанавливает в ней порядок следования элементарных событий. Так, если $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ обозначают элементарные события, то в данном случае запись $\mathcal{A} < \mathcal{B}$ означает, что событие $\mathcal{A}$ произошло раньше события $\mathcal{B}$. Таким образом, отношение порядка для пространственно-временных симметрий есть ничто иное, как математическое оформления принципа причинности в физике.

4.1 Проблема объединения фундаментальных взаимодействий

Современное состояние в физике высоких энергий и элементарных частиц изложено в недавнем обзоре К. Степаньянца [13], опубликованном в настоящем журнале. Более подробную информацию по этой проблеме можно получить в монографии [14]. Кратко дело сводится к следующему.

В современной Стандартной модели – теории описывающей сильные, слабые и электромагнитные взаимодействия наиболее популярной является калибровочная группа Теории Великого Объединения (ТВО), которая записывается так: $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$. Приведенная запись означает, что за сильные взаимодействия отвечает группа внутренних симметрий $SU(3)$, за слабые взаимодействия отвечает группа внутренних симметрий $SU(2)$, и соответственно, за электромагнитные взаимодействия отвечает группа внутренних симметрий $U(1)$. Разумеется, что в данной калибровочной группе нет реального объединения взаимодействий. Математически это выражается введением понятия прямого произведения групп. Преобразования, входящие в каждый из сомножителей прямого произведения групп, осуществляются независимо, они связаны с разными степенями свободы исследуемой физической структуры. Эта же ситуация имеет место в модели Вайнберга-Салама-Глэйшоу [14]. В ней электромагнитное и слабое взаимодействия не объединяются в одно, а просто «смешиваются» при сохранении двух разных констант связи α_1 и α_2, что соответствует прямому произведению групп $SU(2) \times U(1)$.

С рассматриваемой нами здесь точки зрения,калибровочные группы, соответствующие известным фундаментальным взаимодействиям, а именно, электромагнитному с группой симметрии $U(1)$, слабому с группой симметрии $SU(2)$ и сильному с группой симметрии $SU(3)$, являются подгруппами обобщённой группы. Они образуют полурешетку групп (т. е. обобщенную группу Клиффорда). Эта обобщенная группа обладает нетривиальными свойствами. Вмещение указанных групп в обобщенную группу позволяет решить проблему унификации фундаментальных взаимодействий, а применение к указанной обобщенной группе теоремы Э. Нётер позволяет получить новые, более общие законы сохранения.

Объединение электрослабых и сильных взаимодействий уже в течение многих лет привлекает внимание многих физиков. Еще более впечатляющей целью является объединение всех известных фундаментальных взаимодействий, включая гравитационное. Надежда на возможность такого объединения связывается с тем, что существует возможность рассматривать гравитационное взаимодействие как калибровочное, т. е. подобно трём другим взаимодействиям. Вместе с тем, имеется и существенная трудность. Группа преобразований, с которой связывают гравитационное взаимодействие, является (как мы уже отмечали), так называемой «геометрической», или группой внешних симметрий, тогда как симметрии всех остальных взаимодействий являются внутренними.

В начале 70-х годов прошлого столетия С. Коулменом и Дж. Мандулой [15] была доказана, так называемая, «no go» теорема о симметрии S-матрицы. В литературе по физике высоких энергий, элементарных частиц и квантовой теории поля, приводятся различные формулировки этой теоремы. Общим у всех них является утверждение о *невозможности* нетривиального объединения внешних и внутренних симметрий в рамках теории классических групп.

Другими словами, теорема Коулмена–Мандулы утверждает, что *любая группа симметрии, которая содержит группу Пуанкаре P (группа пространственно-временных симметрий) и группу внутренних симметрий G в качестве своих подгрупп должна быть прямым произведением этих своих подгрупп $G \times P$.*

Последующее вскоре за этим введение в физику идеи суперсимметрии преследовало цель преодолеть препятствия, выдвинутые указанной теоремой, путем расширения самого понятия симметрии. Однако и этот подход по существу не продвинул решение проблемы объединения фундаментальных взаимодействий. Более того, за прошедшие с того времени несколько десятилетий не было достигнуто прогресса и в решении гораздо более скромной задачи: выяснение природы разности масс частиц в мультиплете.

Вместе с тем, как это следует из предыдущих разделов данной работы, обобщенные группы представляют собой наиболее реальную альтернативу применения суперсимметрии. Более того, введение их в физику высоких энергий и элементарных частиц, делает теперь теорему Коулмена–Мандулы неактуальной в классе рассмотренных выше обобщенных групп и описываемых ими симметрий. Иными словами, силу в классе обобщенных групп, эта теорема теряет свой смысл.

Этим, преимущества от введения обобщенных групп в физику, вовсе не ограничиваются. Так, одно из наиболее важных на сегодня понятий современной физики, а именно, понятие спонтанного нарушения симметрии, приобретает в терминах обобщенных групп совершенно новый смысл.

Напомним, что термин «спонтанное нарушение симметрии» (СНС), появился в физическом лексиконе 60 лет назад (см., по этому поводу, [16] и ссылки приведенные там). Он объясняется, обычно, следующим образом.

Имеется система, описываемая некоторыми выражениями (например: лагранжиан, гамильтониан, уравнения движения), обладающими некоторой симметрией, тогда как реальное физическое состояние системы, отвечающее частному уравнению движения, этой симметрией не обладает.

С точки зрения теории обобщенных групп, «спонтанное нарушение симметрии» есть ни что иное, как одно из свойств симметрии системы, а вовсе не физический принцип. Предметом указанной теории и является изучение расширенных (иными словами, «нарушенных») групп симметрий физической системы. В этой связи вспомним, еще раз, о тернарной алгебраической операции симметрии

$$g_1, g_2, g_3 \in G \to g = g_1 g_2^{-1} g_3, \quad g \in G, \tag{4.1}$$

инвариантности исследуемой физической системы. Очевидно, что, мы имеем дело здесь с ещё одной из фундаментальных симметрий. Может иметь место, например, такая комбинация: $g_1 \in U(1)$, $g_2 \in SU(2)$, $g_3 \in SU(3)$.

Другим важным примером этой симметрии является хорошо известная в физике CPT — симметрия фундаментальных взаимодействий, где: C — операция замены частицы на античастицу: $q \to -q$; P — операция пространственной инверсии; T — операция обращения времени: $t \to -t$.

Как мы уже обращали внимание в [8], обобщенные группы и обобщенные груды с необходимостью появились в дифференциальной геометрии в середине прошлого века в результате создания теории расслоенных пространств (теории составного многообразия по ранней терминологии В. Вагнера). В настоящее время теория расслоенных пространств широко используется в современных калибровочных теориях объединения фундаментальных взаимодействий. При этом теория связностей, построенная В. Вагнером, продолжает оставаться наиболее общей теорией связностей в расслоенных пространствах.

Таким образом, подводя итоги, можно утверждать, что если теория расслоенных пространств является геометрическим фундаментом для построения теории объединения всех известных фундаментальных взаимодействий, то теория обобщенных групп и обобщённых груд является их алгебраическим основанием [17].

4.2 Обобщенные группы и обобщенные груды в физике твердого тела

Симметрии кристаллов играют важную роль в геометрической теории кристаллических структур. Отсюда, очевидной становится роль теории симметрий во всей физике твердого тела.

Полная классификация групп симметрий кристаллов на основе теории классических групп была завершена в конце 30-х годов прошлого века. Согласно представлениям «классической кристаллографии» всего должно наблюдаться 32 кристаллографических класса в 7 сингониях. Однако следует обратить особое внимание, что в эту классификацию не попадают, например, группа икосаэдра и группа пятиугольника.

Вместе с тем, еще в 1984 году, в статье опубликованной в авторитетном журнале «Phys. Rev. Lett.» [18] было предъявлено экспериментальное существование металлического сплава $Al_{0.86}Mn_{0,14}$ с исключительными свойствами. При исследованиях методами электронной дифракции, полученная дифракционная картина содержала типичные для кристаллов резкие (брэгговские) пики. Однако при этом она имела точечную симметрию икосаэдра, то есть, в частности обладала симметрией пятого порядка, невозможной в трехмерной решетки из соображений классической теории групп.

Новые металлические сплавы, обладающие некристаллографической симметрией, были названы *квазикристаллами*. Т. о. квазикристалл — есть одна из форм организации структуры твердых тел, наряду с кристаллами и аморфными телами (стеклами), характеризующаяся осью симметрии, запрещенной в классической кристаллографии и наличием дальнего порядка.

Как это часто бывает, позднее выяснилось, что с квазикристаллами физики сталкивались еще задолго до их официального открытия, а именно, в 1940 годах. Однако в то время квазикристаллы с икосаэдрической структурой были ошибочно идентифицированы как кубические кристаллы с большой постоянной решетки.

В настоящее время известны сотни видов квазикристаллов, имеющих точечную симметрию икосаэдра, а также восьми-, десяти-, и двенадцатиугольника, что, как уже обращалось внимание, в обычной кристаллографии является невозможным. Более того, многие из них оказываются термодинамически устойчивыми.

Квазикристаллы имеют необычную зависимость сопротивления от температуры: у обычных металлов с падением температуры сопротивление падает, а у квазикристаллов оно растет. Уникальные свойства квазикристаллов, в первую очередь, сочетание повышенной твердости и низкого коэффициента трения с термической стабильностью (вплоть до 800°C), делают их чрезвычайно перспективными функциональными материалами. Наиболее перспективно применение квазикристаллов в нанотехнологиях, а именно: в качестве износостойких покрытий, ультрадисперсных наполнителей при создании композиционных материалов и ультрадисперсных модификаторов, при модификации существующих материалов. Все это вскоре сможет существенно изменить мир материалов и сопутствующих технологий.

Оказалось, что структура квазикристаллов прекрасным образом описывается посредством теории обобщенных групп (инверсных полугрупп) [19]. При этом роль теории обобщенных групп и обобщенных груд в физике твердого тела этим не ограничивается. Так, важную роль в строгом математическом объяснении явлений возникновения в твердом теле дальнего порядка, или, так называемой сверхструктуры (сверхрешетки) играет тернарная операция симметрии (3.1). В этой связи, напомним, что согласно общепринятому определению, *сверхструктура* (*сверхрешетка*) – это кристаллическая структура упорядоченного твердого раствора, состоящая из двух и более кристаллических подрешёток, каждая из которых заполнена преимущественно атомами одного сорта.

Пусть мы имеем дело с кристаллическими структурами, состоящими из подрешеток, а каждое из преобразований $g_1, g_2, g_3 \in G$ описывают, например, операции трансляций каждой отдельной подрешетки. Тогда операция $g :\to g = g_1 g_2^{-1} g_3$, $g \in G$, описывает возникновение в данной кристаллической структуре сверхрешетки.

Подобные сверхрешетки возникают в кристаллах с изменением температуры и прикладываемого к ним внешнего давления. Для бинарных кристаллов и сплавов (структур, состоящих из двух, вложенных друг в друга подрешеток) тернарная операция сводится к определенной выше операции канонического порядка между элементами обобщенной группы. С точки же зрения классической теории групп многочисленные явления возникновения сверхструктур при фазовых переходах в кристаллах своего объяснения не находят.

Таким образом, имеющиеся в настоящее время экспериментальные данные и теория указывают на существование нового класса упорядоченных структур в твердом теле, не являющихся ни стеклами, ни кристаллами и обладающих уникальными свойствами.

Еще одним перспективным направлением приложения теории обобщенных группу в физике твердого тела является создание фундаментальных основ для разработки технологий создания высокотемпературных сверхпроводников нового поколения. Речь идет о получении сверхпроводников, способных функционировать при температурах близких к «комнатным», т. е. температурах вблизи 300°K.

Напомним, в этой связи, что лауреат Нобелевской премии по физике (2003) В. Л. Гинзбург поставил в своем знаменитом «Списке наиболее важных и интересных проблем физики начала XXI века» ([20]) решение проблемы высокотемпературной и комнатной сверхпроводимости (ВТСП и КТСП) под номером два. Под номером один в указанном «Списке. . . » значится проблема управляемого термоядерного синтеза.

Совершенно ясно, что обсуждение проблемы ВТСП и КТСП, с привлечением методов теории обобщенных групп и обобщенных груд, требует отдельного и серьезного рассмотрения. Поэтому мы ограничимся здесь лишь краткими комментариями.

В течение сравнительно длительного времени, в исследованиях по природе сверхпроводимости одно из господствующих положений занимала микроскопическая теория сверхпроводимости Бардина-Купера-Шриффера (теория БКШ [21]). За это достижение указанные авторы были отмечены нобелевской премией за 1972 г. Теория БКШ нацелена, в основном, на объяснение сверхпроводящих свойств материалов и основана на представлениях о сверхтекучих свойствах «бозе-конденсата», образуемого электронными парами.

В используемой в ней модели предполагается, что "спаривание" электронов, находящихся вблизи поверхности Ферми происходит в результате электрон-фононного взаимодействия (т.е. взаимодействия электронов с кристаллической решеткой). Однако теория БКШ оказалась малопродуктивной при попытках объяснить резкое увеличение температуры сверхпроводящего перехода в сплавах и соединениях переходных металлов, структур типа A12, A15, а также сверхпроводящих керамиках и ВТСП-купратов.

Более того, экспериментальные результаты, полученные в последнее время (см., например, [22], [23]), не могут быть пока объяснены в рамках теории БКШ. Для их объяснения начинают формироваться новые представления о механизмах спаривания электронов в сверхпроводниках. Таким образом, в данной области физики твердого тела сложились объективные условия по пересмотру базовых принципов микроскопической теории сверхпроводимости с использованием новых фундаментальных физических и математических принципов симметрии.

Одним из наиболее перспективных механизмов возникновения сверхпроводимости нам представляется механизм, основанный на возникновении сверхрешетки. Отсюда следует, что теория обобщенных групп, описывающая возникновения в кристаллических структурах *супер-* (*сверх-*) *решеток*, становится и в этом случае руководящим принципом конструирования новых перспективных ВТСП и КТСП структур.

Все вышесказанное приводит к необходимости пересмотра ряда положений квантовой, и классической физики твердого тела.

Заключительные замечания

В представленной работе мы постарались показать новые возможности, которые открываются во многих разделах современной физической науки при введении в неё аппарата теории обобщенных групп и обобщенных груд. Гораздо большее число примеров реализации обобщенных групп и обобщенных груд показывает нам живая Природа, однако этот вопрос требует отдельного рассмотрения.

В заключении мы выражаем признательность Д. Г. Павлову и сотрудникам НИИ ГКСГФ за интерес к работе. И. Э. Булыженкову, А. И. Морозову и З. К Силагадзе мы благодарны за полезные дискуссии, а М. Г. Иванова за неоценимую помощь. Отдельно автор благодарит А. Ю. Кирия, который ознакомил его с результатами своих исследований по теории сверхпроводимости.

Литература

[1] В. В. Вагнер. *Основания дифференциальной геометрии современная алгебра.* Труды четвертого Всесоюзного математического съезда. Том 1, Ленинград (1963). С. 17.

[2] В. В. Вагнер. *Обобщенные группы.* Доклады АН СССР. Том 84 (1952). С. 1119; УМН. Том 7. Вып. 2 (48), (1951). С. 146.

[3] В. В. Вагнер. *Теория обобщенных груд и обобщенных групп.* Матем. сборник. Том 32 (74) (1952). С. 545.

[4] G. V. Preston. *Inverse semigroups.* J. London Math. Soc. Vol. 29 (1954). P. 396–399; G. V. Preston. *The structure of normal inverse semigroups.* Proc. Glasgow Math. Assoc. Vol. 3 (1956). P. 1 – 9.

[5] А. Клиффорд, Г. Престон (Clifford A. and Preston G.). *Алгебраическая теория полугрупп.* Перевод с англ. Том I, М.: Мир (1972), 285 с; Том II, М.: Мир (1972), 422 с.

[6] Б. М. Шайн. *Представления обобщенных групп.* Известия ВУЗов, Математика № 3 (28), 1962. С. 164 – 176.

[7] Н. Бурбаки. *Алгебра. Алгебраические структуры.* Пер. с франц. Гос. изд-во физ-мат литературы. М.: 1962. 516 с.

[8] В. Г. Жотиков. *Геометрия вариационного исчисления и её приложение к теоретической физике.* Изд-во научно-технической литературы. - Томск (2002). 416 С.

[9] А. Е. Либер. *К теории обобщенных групп.* Доклады АН СССР. Том 87 (1954). С. 25;

[10] В. Н. Салий. *О собственных представлениях обобщенных групп матрицами* // Труды молодых ученых Саратовского университета. Вып. матем. Изд-во Саратовского ун-та, Саратов 1964. С. 88–92.

[11] E. Noether. *Invariante variation problemes* // «Nachrichen von der Kön. Ges. der Wissen-schaften zu Göttingen», Math-Phys. K1., V. 2, 1918. P. 235; русский перевод: Э. Нетер. *Инвариантные вариационные задачи* //Вариационные принципы механики. Пер. с немецкого. Под ред. Л. С. Полака. М.: Физматгиз, 1959. С. 611.

[12] Н. П. Клепиков. *Типы преобразований, используемых в физике, и «обмен» частицами.* УФН, Том 152, вып. 3 (1987). С. 521.

[13] К. В. Степаньянц. *Современная физика высоких энергий.* ГЧГФ. 1 (9), том 5 (2008). С. 84 – 111.

[14] В. М. Емельянов. *Стандартная модель и её расширения.* М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. 584 с.

[15] S. Coleman and J. Mandula. Phys. Rev. 159 (1967). P. 1251.

[16] Д. В. Ширков. *60 лет нарушенным симметриям в квантовой теории.* УФН. Том 179, вып. 6 (2009). С. 581.

[17] В. Г. Жотиков. *О математическом аппарате теории Великого Объединения и гравитации* // Тезисы докладов 8 Российской гравитационной конференции. М.: (1993). С. 256.

[18] D. Shechtman, I. Blech, D. Gratias, J.W. Cahn. Phys. Rev. Lett., 1984, Vol. 53. P. 1951.

[19] В. А. Артамонов. *Квазикристаллы и их симметрии.* ФПМ. Том 10, № 3 (2004). С. 3.

[20] В. Л. Гинзбург *«Физический минимум» — какие проблемы физики и астрофизики представляются особенно важными и интересными в начале XX1 века.* УФН. Том 177, вып. 4 (2007). С. 346.

[21] J. Bardeen, L. N. Cooper, J. R. Schrieffer. Phys. Rev., Vol. 106 (1957), P. 162; Vol. 108 (1957). P. 1175.

[22] Y. Takabayshi, A. Ganin *at al.* Science. Vol. 323. 20 March 2009. P. 1585 – 1590.

[23] Г. С. Бурханов, С. А. Лаченков, Е. П. Хлыбов. ДАН. Том 426. № 5 (2009). С. 613–616.

Wagner's Generalized Groups and their Applications in Geometry and Physics

V. G. Zhotikov

Moscow Institute for Physics and Technology, Russia
Tomsk State Pedagogical University, Russia
Zhotikov@yandex.ru

Properties important for applications in geometry and physics of a special class of the semigroups are described: Wagner's so-called the generalized groups. The last are known in the foreign literature still as the inverse semigroups. Questions of introduction the theory of the generalized groups and generalized grouds in the physics, resulting to the new, more general the laws of preservation and the predictions of the new physical phenomena are discussed.

Key-words: inverse semigroups, generalized groups, generalized grouds, crystallographic groups, binary and ternary operations, partial mapping.