ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ МЕТРИКИ, СООТВЕТСТВУЮЩИЕ ИМ ПРОЦЕССЫ И К-ИНГЛЫ[1]

А. В. Коганов

НИИ системных исследований РАН, Москва

koganow@niisi.msk.ru

Показано, что финслеровым метрикам полиномиального типа в линейных пространствах соответствуют процессы, заданные уравнениями в частных производных, с той же группой инвариантности преобразований пространства, что и у метрики. Вводится понятие полиномиального обобщения метрик Галилея, Евклида и Минковского на основе стандартной связи между ними. Показано, что на основе полиномиальных метрик можно вводить специальные геометрические К-арные отношения векторов (К-инглы) в пространстве любой размерности для любой арности. При этом обычные нормы и скалярные произведения векторов оказываются частными 1-арными и 2-арными случаями. Имеется естественная операция понижения арности ингла.

Ключевые слова: Финслерова метрика, процесс, инвариантность, полином, дифференциальная форма.

Введение

Финслеровы метрики полиномиального вида и связанная с ними финслеровая геометрия в настоящее время привлекает к себе внимание физиков теоретиков в связи с наблюдениями, которые можно интерпретировать как нарушение изотропии пространства в некоторых процессах [1]. Имеется аппарат, связывающий с такими метриками процессы на основе геометризации лагранжиана и сведения принципа наименьшего действия к поиску геодезических в финслеровом пространстве [2]. В данной работе предлагается иной способ сопоставления процессов полиномиальным метрикам, основанный на совпадении групп инвариантности полиномов и дифференциальных форм. Этот путь аналогичен тому, как возникла метрика Минковского из условия инвариантности волнового уравнения электромагнитной волны.

Рассматриваются также смежные вопросы появления новых геометрических инвариантов, связанных с метриками высоких степеней, получивших название «инглы» [3]. Предлагается регулярный способ построения серий таких инвариантов в пространстве любой размерности. Число инглов зависит только от степени полинома метрики.

В последнем разделе первой части предлагается обобщение метрики Минковского на случай метрик высших степеней на основе аналогии связи трех квадратичных метрик в современной физике: Галилея, Евклида, Минковского [4], [5]. Полученным метрикам соответствуют процессы по указанным выше принципам.

Вторая часть статьи посвящена математическому аппарату теории полиномиальных метрик и инглов. Рассматривается вопрос о функциональном базисе в пространстве инглов и понижение арности симметрических инглов с сохранением симметричности полинома. В частности указывается различие между понятиями симметрического полинома и симметрического ингла. Доказывается существование решения дифференциального уравнения процесса, соответствующего полиномиальной метрике по группе автоморфизмов. Дается общий анализ расчета линейной подгруппы инвариантности полиномиальной метрики.

[1] Поддержано РФФИ, проект 07-01-00101-а.

Часть 1.
Геометрический и физический аспекты полиномиальных метрик

1 Соответствие по группе инвариантности полиномиальной метрики и процесса

Назовем *полиномной формой* степени K в линейном пространстве L конечной размерности n (действительном, комплексном или над произвольным полем Φ) выражение

$$P[a](x) = \sum_{i_1,\dots,i_K=1}^{n} a_{i_1,\dots,i_K} x^{i_1} \dots x^{i_K} \ , \tag{1}$$

где $(x_1, \dots, x_n) \in L,$ т. е. $x_i \in \Phi$ для всех $i = 1, \dots, n$.

Линейной подгруппой инвариантности полиномной формы $P[a](x)$ назовем подгруппу $S[a] \subseteq\cong LG(L)$, действие которой на вектор-переменную $x \in L$ сохраняет значение формы: если $B \in S[a]$ и $y = Bx$, то

$$P[a](y) \equiv P[a](Bx) = P[a](x) \ . \tag{2}$$

В общем случае вычисление этой линейной подгруппы требует решения полиномиальных уравнений относительно коэффициентов матрицы B, которые получаются из подстановки (2). Разумеется, единичная матрица всегда в нее входит. В данном разделе будут рассмотрены не вычислительные, а теоретические вопросы, связанные с этой подгруппой.

Далее будем считать, что поле Φ — числовое: действительное или комплексное. Поскольку операторы частных производных $\delta_i = \partial/\partial x_i$ от числовой функции $f(x)$, определенной на $L = \Phi^n$, или, в более общей форме, операторы дифференцирования по направлению $\delta[v] = \sum\limits_{i=1,\dots,n} v_i \delta_i$, $v \in L$, преобразуются той же матрицей B, что и векторы пространства L, то линейная подгруппа инвариантности полиномной формы будет и подгруппой инвариантности дифференциальной формы порядка K вида

$$D[a]f(x) = \sum_{i_1,\dots,i_K=1}^{n} a_{i_1,\dots,i_K} \delta_{i_1} \dots \delta_{i_K} f(x) \ . \tag{3}$$

Этой форме соответствует однородное линейное дифференциальное уравнение

$$D[a]f(x) = \sum_{i_1,\dots,i_K=1}^{n} a_{i_1,\dots,i_K} \delta_{i_1} \dots \delta_{i_K} f(x) = 0 \ , \tag{4}$$

для которого характеристическое уравнение определяется через полиномную форма (1)

$$P[a](x) = \sum_{i_1,\dots,i_K=1}^{n} a_{i_1,\dots,i_K} x^{i_1} \dots x^{i_K} = 0 \ . \tag{5}$$

Если уравнение (4) имеет решение, то ему соответствует процесс на L , линейная подгруппа инвариантности которого совпадает с $S[a]$. Заметим, что нулевое решение имеется всегда. Однако у этого решения группа инвариантности траектории максимальна (совпадает с $LG(L)$ в линейном случае и совпадает с множеством всех биекций пространства в общем случае). Этот пример показывает, что группа инвариантности траектории может быть много шире чем группа инвариантности формы, порождающей процесс, но меньше она не может быть.

Если форма (1) симметрическая, то ей можно сопоставить финслерову метрику (норму $\|x\|_{[a]}$). Условие симметричности означает инвариантность коэффициентов формы (1) относительно произвольных перестановок индексов:

$$a_{i_1,\dots,i_K} = a_{\omega\circ(i_1,\dots,i_K)}\ , \qquad \omega \in S_K\ . \tag{6}$$

$$\|x\|_{[a]} \underset{def}{=} \sqrt[K]{P[a](x)}\ , \tag{7}$$

или

$$\Big(\|x\|_{[a]}\Big)^K = P[a](x)\ . \tag{7a}$$

В общем случае значение такой нормы комплексное. Обычно берется главное значение корня, если специально не оговорено другое.

Группа инвариантности этой нормы такая же, как у процесса (4). Таким образом, у каждой полиномиальной финслеровой метрики группа инвариантности совпадает с группой инвариантности дифференциальной формы, определяющей процесс на том же пространстве. Это обобщает известное свойство метрики Минковского, симметрия которой совпадает с симметрией волнового уравнения Максвелла.

2 Построение К-инглов на основе полиномных форм

С помощью полиномных форм можно строить в линейном пространстве L симметрические отношения на наборах из K векторов, которые функционально независимы друг от друга и от скалярного произведения. Такие отношения в теории финслеровых пространств называются К-инглами (норма вектора — сингл, угол или скалярное произведение пары векторов — бингл, и т. д.). Общий вид такого отношения

$$\begin{aligned} &x^i = (x^i_1,\dots,x^i_n) \in L\ , \quad i = 1,\dots,K; \\ &P[a,K](x^1,\dots,x^K) = \sum_{\omega\in S_K}\ \sum_{j_1,\dots,j_K=1}^{n} a_\omega^{j_1,\dots,j_K} x_{j_1}^{\omega(1)}\cdot\ \dots\ \cdot x_{j_K}^{\omega(K)}\ , \\ &a_\omega^{j_1,\dots,j_K} = a_{(1,2,\dots K)}^{\omega^{inv}(j_1,\dots,j_K)}\ , \quad \forall\omega\in S_K \end{aligned} \tag{8}$$

где S_K — симметрическая группа ранга K, ω^{inv} — подстановка, обратная к ω. Для таких отношений выполняется коммутативность и полилинейность (свойство симметрических полиномов):

$$P[a,K](x^1,\dots,x^K) = P[a,K]\omega\circ(x^1,\dots,x^K)\ , \quad \omega\in S_K\ ; \tag{9}$$

$$P[a,K](\lambda x^1,\dots,x^K) = \lambda P[a,K](x^1,\dots,x^K)\ , \quad \lambda\in\Phi\ . \tag{10}$$

Обозначим специальные векторы из L:

$$e_i = (0,\dots,0,1|_i\,,0,\dots,0), \quad i=1,\dots,n; \quad e_o = (1,\dots,1)\ . \tag{11}$$

Тогда

$$a_{1,\dots,K}^{j_1,\dots,j_K} = P[a,K](e_{j_1},\dots,e_{j_K})/K! \tag{12}$$

Таким образом, все такие отношения строятся независимо. В частности, скалярное произведение в L не ограничивает возможных полиномиальных отношений высших арностей. Однако с отношениями арности K ассоциированы порожденные отношения меньших арностей. Понижение арности на единицу производится по формуле

$$(K!)^{-1}P[a,K](e_{j_1},\dots,e_{j_{K-1}},e_o) = b_{1,\dots,K-1}^{j_1,\dots,j_{K-1}} = \sum_{j=1}^{n} a_{1,\dots,K}^{j_1,\dots,j_{K-1},j}. \tag{13}$$

Новое отношение имеет вид $P[b,K-1](x^1,\dots,x^{K-1})$. Последовательно понижая степень, можно получить порожденное скалярное произведение. Оно не обязано совпадать с исходно заданным, если такое было. По образцу получения безразмерного косинуса из скалярного произведения, имеющего физическую размерность квадрата расстояния, можно нормировать полиномиальное отношение по набору отношений предыдущей арности с циклическим отбрасыванием векторов.

$$p[a,K](x^1,\dots,x^K) = \frac{P[a,K](x^1,\dots,x^K)}{\left(\prod_{s=1,\dots,K} P[b(s),K-1](x^1,\dots(s)\dots,x^K)\right)^{1/K}}\ ; \tag{14}$$

где

$$(K!)^{-1}P[a,K](e_{j_1},\dots e_o|_s,\dots,e_{j_K},) = b^{j_1,\dots(s)\dots j_K}_{1,\dots,(s),\dots,K}(s) = \sum_{j=1}^{n} a^{j_1,\dots,j|_s,\dots,j_K}_{1,\dots,K}\ . \tag{15}$$

В этой формуле индекс в скобке (s) означает пропущенный индекс j_s в цепочке индексов, а разделитель $|_s$ показывает позицию, куда вставлен объект слева от черты: индекс j вместо j_s или e_o вместо e_{j_s}.

Наконец, полиномиальному K-инглу соответствует финслерова метрика

$$\|x\|_{[a]} \underset{def}{=} \sqrt[K]{P[a,K](x,\dots,x)}\ . \tag{16}$$

При понижении арности будут получаться в общем случае другие метрики вида (16), вплоть до квадратичной нормы при арности 2. В этом спектре финслеровых метрик заключен геометрический смысл полиномиальных отношений высших арностей (K-инглов) на векторах.

3 Финслерово обобщение ГЕМ-комплекса метрик

Сокращение ГЕМ-комплекс использовано в заголовке для обозначения набора из трех метрик Галилея, Евклида и Минковского в одном линейном пространстве. В случае квадратичных метрик эта тройка удовлетворяет уравнению, которое допускает обобщение на случай любых степеней многочленных метрик. Это позволяет ввести аналог этой тройки метрик для финслеровой метрики произвольной степени.

Метрика Галилея в $\mathbb{R}^{n+1} = \langle x_0, x_1,\dots,x_n\rangle$ соответствует при $n=3$ абсолютному времени во всех системах отсчета с координатой времени x_0. Она задается формулой

$$d_G(x,y) = |x_0 - y_0|\,. \tag{17}$$

В частности, как норма, $d_G(x,y) = \|x-y\|_G$, где

$$\|x\|_G = d_G(x,0) = \sqrt{(x_0)^2}\,. \tag{18}$$

Введем на том же пространстве норму Минковского

$$\|x\|_M = \sqrt{(x_0)^2 - \sum_{i=1,\cdots,n}(x_i)^2} \tag{19}$$

и метрику Евклида

$$\|x\|_E = \sqrt{\sum_{i=0,1,\cdots,n}(x_i)^2}\,. \tag{20}$$

Тогда выполняется ГЕМ-равенство

$$2\,\|x\|_G^2 = \|x\|_E^2 + \|x\|_M^2\,. \tag{21}$$

Если перейти к изотропным координатам $\langle y_0, \ldots, y_n \rangle = {}^1\mathbb{R}^n$ метрики Минковского, то (21) соответствует тождеству на симметрических полиномах.

$$\|y\|_G^2 = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=0}^{n} y_i\right)^2,$$

$$\|y\|_M^2 = \sum_{i\neq j;\ i,j=0,\ldots,n} y_i y_j\,,$$

$$\|y\|_E^2 = \sum_{i=0}^{n} (y_i)^2\,,$$

$$\left(\sum_{i=0}^{n} y_i\right)^2 = \sum_{i=0}^{n} (y_i)^2 + \sum_{i\neq j;\ i,j=0,\ldots,n} y_i y_j\,. \tag{22}$$

Тождество (22) позволяет перейти к обобщению ГЕМ равенства на случай полиномиальных финслеровых метрик. Определим *квазиметрики* Галилея, Евклида, Минковского степени K

$$\|y\|_{G,K} = \left(\sum_{i=0}^{n} y_i\right), \tag{23}$$

$$\|y\|_{E,K} = \left(\sum_{i=0}^{n} (y_i)^K\right)^{1/K}, \tag{24}$$

$$\|y\|_{M,K} = \left(\sum_{\exists s,r:\ i_s\neq i_r;\ i_0,\ldots,i_K=0,\ldots,n} y_{i_0}\cdot\ldots\cdot y_{i_K}\right)^{1/K}. \tag{25}$$

Тогда справедливо ГЕМ тождество степени K

$$\|y\|_{G,K}^K = \|y\|_{E,K}^K + \|y\|_{M,K}^K\,. \tag{26}$$

Квазиметрика Галилея (23) масштабирована так, чтобы тождество (26) не содержало числовых коэффициентов. В случае степени $K = 2$ коэффициент масштабирования по отношению к канонической форме (18) равен 2.

Вероятно, процесс (4), порожденный формой (3) по метрике (25) является естественным обобщением волнового процесса для этого финслерова пространства.

Часть вторая.
Математический аппарат полиномиальных метрик и инглов

4 Общий анализ базиса полиномиальных инглов

Несмотря на независимость построений инглов разных арностей между ними есть функциональная зависимость, связанная с размерностью пространства. Дело в том,что значения координат (компонент) вектора $x = (x_1, \ldots, x_n) \in L$ выражаются как значения специальных полиномиальных синглов:

$$x_i = P[e_i](x) = P[0, \ldots 0, 1|_i, 0, \ldots, 0](x)\ , \tag{27}$$

которые тривиально симметрические относительно действия группы «перестановок» одного вектора. В формуле (27) $a_1^j = \delta_i^j$ (символ Кронекера). Поэтому, если заданы коэффициенты $a = \left(a^{i_1 \ldots i_K}_{j_1 \ldots j_K}\right)$ K-ингла $P[a](x^1, \ldots, x^K)$, то его значения выражаются через значения этих координатных синглов:

$$P[a](x^1, \ldots, x^K) = P[a](P[e_1](x^1), \ldots, P[e_n](x^1), \ldots, P[e_n](x^K)). \tag{28}$$

Исследуем вопрос о числе функционально независимых инглов в заданном пространстве L. Ответ зависит от требований, которые будут наложены на функциональный базис в системе инглов. Поскольку полная система инглов должна функционально выражать через свои значения все полиномы, то это относится и к полиномам (27), а значит и к координатам векторов из L. Если требовать только непрерывность отображения значений полной системы в значения координат, то достаточно одного сингла для полной системы. Правда, этот сингл не будет полиномиальным. Это функция обратная к кривой Пеано, которая непрерывно отображает отрезок $[0; 1]$ на куб $[0; 1]^n \subset L$ (декартова степень) [6]. Простейший способ задать такой сингл определен через двоичную запись координатных чисел

$$x = (x_1 \ldots x_n) \in L; \quad x_i = 0, x_i(1)x_i(2) \ldots |_2$$

— двоичная запись координаты.

$$f(x) = 0, x_1(1)x_2(1) \ldots x_n(1)x_1(2)x_2(2) \ldots |_2 \tag{29}$$

— двоичная запись значения сингла.

Через его значение однозначно восстанавливаются значения всех координат вектора – аргумента:

$$f(x) = 0, b_1 b_2 \ldots |_2 \quad \Rightarrow \quad x_i = 0, b_i b_{i+n} b_{i+2n} \ldots |_2 \tag{30}$$

При этом отображение (30) непрерывно, но обратное отображение (29) имеет разрывы. В силу (30) любая функция от нескольких векторов выражается через значения (29) от этих векторов, т. е. эта функция является функциональным базисом на K-инглах любого типа.

Полиномы задают локально непрерывные в обе стороны функции (за исключением окрестностей некоторых особых точек). Если имеется полиномиальный функциональный базис, состоящий из M инглов, то область из $L = \mathbb{R}^n$ непрерывно в обе стороны отображается в область из $\mathbb{R}^M$. Такие отображения задают топологические отображения (гомеоморфизмы) множества значений координат вектора в множество значений базисных инглов [7]. Известно, что для линейных пространств топологические отображения существуют только при совпадении размерностей. Поэтому базис состоит из $M = n$ полиномов, независимо от их арности. В этом смысле базис (27) минимален как по числу полиномов, так и по их арностям (по числу векторных аргументов).

5 Симметрические полиномы от векторов

Понятие симметрического многочлена от векторных аргументов несколько отличается от определения симметрического многочлена числовых переменных. Например, полиномы (27) не являются симметрическими от координат вектора аргумента, но тривиально симметрические как полиномы от векторов. Дело в том, что симметричность требует инвариантности значений полинома относительно произвольной перестановки аргументов (векторов), но не относительно перестановок компонент векторов как внутри одного вектора, так и между векторами.

В разделе 2 рассмотрен случай симметрического полинома, который относится к однородным полиномам (формам) степень которых совпадает с арностью. Рассмотрим более общее определение симметрического полинома от векторов и связанные с ним возможности понижения арности. Общий вид полинома от K векторов

$$\begin{aligned}&P[a](x_1,\ldots,x_K)=\\&=\sum_{j_1,\ldots,j_K\in J}\ \sum_{i_1(1),\ldots,i_K(j_K)=1}^{n} a\left[(i_1(1),\ldots,i_1(j_1))\ldots(i_K(1),\ldots,i_K(j_K))\right]\cdot x_1^{i_1(1)}\cdot\ldots\cdot x_K^{i_K(j_K)}\end{aligned}\tag{31}$$

где $a[\ldots]$ — коэффициенты, а координаты векторов x_s^i, $s=1,\ldots,K$, в одночлене имеют те индексы i, которые указаны в круглых скобках для каждого вектора внутри квадратных скобок. Множество наборов $(j_1,\ldots,j_K)$, входящих в полином, обозначено J. Формула (31) различается в случае коммутативных и некоммутативных чисел, используемых в построении векторного пространства L. Если числа коммутативны, например при $L=\mathbb{R}^n$ или $L=\mathbb{C}^n$, то все кортежи $(i_s(1),\ldots,i_s(j_s))$ в квадратных скобках следует считать упорядоченными по возрастанию (нестрогому). Если числа некоммутативные, например, кватернионы, то кортежи, различающиеся только порядком следования индексов, различны, и им соответствуют разные коэффициенты $a[\ldots]$ и одночлены. Заметим, что в коммутативном случае также можно использовать не монотонные кортежи в определении полинома, но тогда после приведения подобных членов получится уменьшение числа одночленов. Симметричность полинома требуется только по перестановкам векторов аргументов, а не по перестановкам координат векторов.

Условие симметрии

$$\begin{aligned}&a\left[(i_1(1),\ldots,i_1(j_1))\ldots(i_K(1),\ldots,i_K(j_K))\right]=\\&=a\left[\left(i_{\omega(1)}(1),\ldots,i_{\omega(1)}(j_{\omega(1)})\right)\ldots\left(i_{\omega(K)}(1),\ldots,i_{\omega(K)}(j_{\omega(K)})\right)\right]\end{aligned}\tag{32}$$

где $\omega\in S_K:(1,\ldots,K)$ — перестановка векторов. Это условие накладывает ограничение на множество J: оно должно допускать все перестановки в каждом своем элементе.

Важные типы симметрических полиномов.

Однородный полином степени m определен условием: если $(j_1,\ldots,j_K)\in J$, то $j_1+\ldots+j_K=m$. Для таких полиномов при любом числовом коэффициенте λ справедливо равенство

$$P[a](\lambda x_1,\ldots,\lambda x_K)=\lambda^m P[a](x_1,\ldots,x_K).\tag{33}$$

Степенная сумма степени m определена условием $j_1=\ldots=j_K=m$ (единственный элемент J). Для таких полиномов при любом числовом коэффициенте λ для любого вектора аргумента справедливо равенство

$$P[a](x_1,\ldots,\lambda x_s,\ldots,x_K)=\lambda^m P[a](x_1,\ldots,x_K).\tag{34}$$

Формулы (33) и (34) соответствуют квазиметрикам Минковского и Галилея. Названия типов полиномов заимствованы из аналогичных определений для полиномов с числовыми аргументами. Однако фактически эти определения не переносятся на числовой случай, если координаты векторов рассмотреть как числовые аргументы. Совпадение определений имеется только при размерности векторов 1.

Для любого симметрического полинома возможно понижение арности с сохранением симметрии по формуле (13), которая соответствует

$$P[b](x_1,\dots,x_{K-1}) = P[a](x_1,\dots,x_{K-1},e_o). \tag{35}$$

В общем случае (31) новые коэффициенты имеют вид

$$\begin{aligned}&b\left[(i_1(1),\dots,i_1(j_1))\dots(i_{K-1}(1),\dots,i_{K-1}(j_{K-1}))\right] =\\ &= \sum_{j:(j_1,\dots,j_{K-1},j)\in J} a\left[(i_1(1),\dots,i_1(j_1))\dots(i_{K-1}(1),\dots,i_{K-1}(j_{K-1}))\,(i_K(1),\dots,i_K(j))\right].\end{aligned} \tag{36}$$

Этот способ назовем *центральной проекцией*. Он сохраняет однородность и сумму степеней с понижением степени на 1.

Но имеется еще один способ понижения арности, *циклическая свертка*, при котором сохраняется только симметрия.

$$P[c](x_1,\dots,x_{K-1}) = \sum_{s=1}^{K-1} P[a](x_1,\dots,x_{K-1},x_s) \tag{37}$$

Тогда новые коэффициенты $c[\dots]$ рассчитываются по формуле

$$\begin{aligned}&c\left[(i_1(1),\dots,i_1(j_1))\dots(i_{K-1}(1),\dots,i_{K-1}(j_{K-1}))\right] =\\ &= \sum_{\substack{s;\,j,\,j';\\ i_K(1),\dots,i_K(j);\\ i_s(1)',\dots,i_s(j')':\\ (j_1,\dots,j'|_s,\dots,j_{K-1},j)\in J\\ j+j'=j_s\\ (i_s(1)',\dots,i_s(j')',i_K(1),\dots,i_K(j))\sim\\ \sim(i_s(1),\dots,i_s(j_s))}}\\ &a[(i_1(1),\dots,i_1(j_1))\dots(i_s(1)',\dots,i_s(j')')\dots\\ &\qquad\dots(i_{K-1}(1),\dots,i_{K-1}(j_{K-1}))\,(i_K(1),\dots,i_K(j))]\end{aligned} \tag{38}$$

В этой формуле знак тильды в условии под суммой означает в коммутативном случае совпадение кортежей с точностью до порядка следования, т. е. совпадение после упорядочения по возрастанию. В некоммутативном случае тильда означает точное равенство кортежей.

Те коэффициенты $c[\dots]$, для которых условие под суммой не выполнимо, равны нулю. Тот же результат получится, если непосредственно приводить подобные члены в (37).

Оба способа понижения арности в физике используются. Циклическая свертка обобщает способ получения квадрата нормы одного вектора из скалярного произведения пары векторов. Центральная проекция соответствует получению временной координаты у вектора, заданного в изотропных координатах, методом скалярного произведения с биссектрисой главного квадранта.

6 Существование решения уравнения соответственного процесса

Для полиномиальной метрики, заданной формой (1) или (31), соответсвенный процесс задается формулой (4). Это уравнение имеет ту же группу инвариантности преобразований координат, что и метрика. Однако, процесс ему соответствует только тогда, когда у него имеется решение задачи Коши. Для анализа ситуации используем теорему Коши-Ковалевской [8].

Теорема К-К. Дифференциальное уравнение вида

$$f(t, x, u, \frac{\partial}{\partial x}u) - \frac{\partial}{\partial t}u = 0 \tag{39}$$

имеет единственное решение в окрестности точки (t_0, x_0) при заданном значении $u(t_0, x_0)$, если f в окрестности этой точки непрерывна по t и аналитическая по остальным переменным. Решение $u(t, x)$ непрерывно дифференцировано по t и аналитическое по x. □

Заметим, что в (39) $f(\ldots)$ подразумевается в общем случае вектор-функцией, а все уравнение надо трактовать как систему уравнений. Покажем, что уравнение (4) сводится к системе вида (39). Для этого достаточно преобразовать к этому виду каждый одночлен. Параметр t в (4) отсутствует. Поэтому (39) принимает вид

$$f(x, u, \frac{\partial}{\partial x}u) = 0\,. \tag{40}$$

Пусть в уравнении (4) содержится одночлен $\delta_{i_1} \cdots \delta_{i_m} u$, где $\delta_i = \dfrac{\partial}{\partial x^i}$. Введем новые переменные

$$y_{i_m} = \delta_{i_m} u; \quad y_{i_{m-1} i_m} = \delta_{i_{m-1}} y_{i_m}; \quad \ldots\ ; \quad y_{i_1 \ldots i_m} = \delta_{i_1} y_{i_2 \ldots i_m}\,;$$

Тогда верны уравнения

$$y_{i_m} - \delta_{i_m} u = 0; \quad y_{i_{m-1} i_m} - \delta_{i_{m-1}} y_{i_m} = 0; \ldots ;\ y_{i_1 \ldots i_m} - \delta_{i_1} y_{i_2 \ldots i_m} = 0; \tag{41}$$

Проделав это для всех одночленов, и отождествляя совпадающие по определению переменные, сведем уравнение (4) к алгебраическому

$$D[a]u = \sum_{i_1, \ldots, i_K = 1}^{n} a_{i_1, \ldots, i_K} y_{i_1 \ldots i_K} = 0\,. \tag{42}$$

Система (41)(42) имеет вид (40) и удовлетворяет теореме К-К. Таким образом, существует процесс, соответствующий по группе инвариантности полиномиальной метрике.

7 Вычисление группы инвариантности метрики

Общая идея вычисления линейной подгруппы инвариантности полиномиальной метрики сводится к подстановке в полином общей формулы линейного преобразования координат и приравнивания нового полученного полинома исходному полиному. После этого приравниваются коэффициенты соответственных одночленов. Получается система уравнений относительно неизвестных элементов матрицы линейного преобразования. Это в общем случае нелинейная (полиномиальная) система. Она всегда разрешима, поскольку ей удовлетворяет единичная матрица.

Рассмотрим эту задачу для случая полинома (1). Пусть линейное преобразование координат задается матрицей $B = \left(b_i^j\right)$. Замена переменных имеет вид

$$y^i = \sum_{j=1}^{n} b_j^i x^j, \tag{43}$$

$$P[a](y)=\sum_{i_1,\dots,i_K=1}^{n} a_{i_1,\dots,i_K}\left(\sum_{j=1}^{n} b_j^{i_1}x^j\right)\cdots\left(\sum_{j=1}^{n} b_j^{i_K}x^j\right). \tag{44}$$

Условие инвариантности $P[a](y)=P[a](x)$. Из (1) и (44) получаем систему уравнений относительно матрицы B (индекс уравнения $j_1\dots j_K$)

$$a_{j_1\cdots j_K}=\sum_{i_1,\dots,i_K=1}^{n} a_{i_1\cdots i_K}b_{j_1}^{i_1}\cdots b_{j_K}^{i_K}. \tag{45}$$

Для единичной матрицы эта система обращается в тождество. Возможен случай, когда других решений нет. Число неизвестных элементов матрицы равно n^2 . Оценим число уравнений $M(K,n)$ в (45) с учетом симметрии многочлена. Тогда индекс уравнения $(j_1,\dots,j_K)$ можно считать нестрого монотонно упорядоченным: $(j_1\leqslant\dots\leqslant j_K)$. Тогда

$$M(1,n)=n\ ;\quad M(2,n)=n(n+1)/2\ ;$$

$$M(K+1,n)=M(K,n)+M(K,n-1)+\dots+M(K,1). \tag{46}$$

В этой формуле слагаемое $M(K,n-s)$ возникает при $j_1=s+1$, $s=0,\dots,\,n-1$.

Если $M(K,n)<n^2$, то у системы (45) возможны нетривиальные решения. В частных случаях нетривиальная группа может возникнуть и при нарушении этого неравенства. Например, если часть уравнений тождественно обнуляется. Точное исследование вопроса о наличии решений B системы (45), не совпадающих с единичной матрицей, равносильно решению вопроса о наличии нетривиальной группы автоморфизмов у метрики (1) и процесса (4), соответствующих коэффициентам a.

Литература

[1] Г. И. Гарасько. Начала финслеровой геометрии для физиков. М., ТЕТРУ, 2009, 267 с.

[2] Г. И. Гарасько. Принцип самодостаточности финслеровой геометрии. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, №1, т. 6 (2009), с. 19–42.

[3] Д. Г. Павлов, Г. И. Гарасько. О возможности реализации трингла в трехмерном пространстве со скалярным произведением. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, №1, т. 6 (2009), с. 3–11.

[4] Д. Э. Либшер. Теория относительности с циркулем и линейкой. М., «Мир», 1980, пер. В. Е. Маркевич, ред. Н. В. Мицкевич, 150 с.

[5] Дж. Бим, П. Эрлих. Глобальная лоренцева геометрия. М., «Мир», 1985, пер. Е. В. Шикин, 400 с.

[6] «Кривая Пеано». Математический энциклопедический словарь, М. «Советская энциклопедия», 1988, с. 452.

[7] «Топологическое отображение». Математический энциклопедический словарь, М. «Советская энциклопедия», 1988, с. 582.

[8] Коши-Ковалевской теорема». Математический энциклопедический словарь, М. «Советская энциклопедия», 1988, с. 299.

Polynomial metrics, match processes and K-ingles

A. V. Koganov

Institute of system researches of RAS, Moscow, Russia
koganow@niisi.msk.ru

It showed that any Finsler metric of polynomial type in linear spaces correspond the process which defined by particle derivates and had match group of invariance. It inputted the notion of polynomial generalization for metrics of Galileo, Euclid and Minkovsky types on base of standard connection. It showed that the special geometrical K-placed relations (K-ingle) may be inputting on base of polynomial metrics in space of any dimension and any number K. The standard norms and scalar products are particle cases for 1- and 2-ingle. It had the natural operation of decreasing number of places in ingle.

Key-words: Finsler metric, process, invariant, polynomial, differential form.