СПЕЦИАЛЬНЫЙ КЛАСС ФИНСЛЕРОВЫХ ГЕОМЕТРИЙ И ПРОСТРАНСТВА ДЕ СИТТЕРА

Д. Г. Павлов[1,2], Г. И. Гарасько[1,3], М. Л. Фильченков[4]

[1] НИИ гиперкомплексных систем в геометрии и физике, Фрязино,
[2] Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана,
[3] ГУП Всероссийский электротехнический институт, Москва,
[4] Институт гравитации и космологии, РУДН, Москва
geom2004@mail.ru, gri9z@mail.ru, fmichael@ mail.ru

Рассмотрены расширения общей теории относительности (ОТО). Указаны причины для обобщения ОТО, связанные как с трудностями самой теории, так и с необходимость интерпетации новых астрономических наблюдений. Перечислены многочисленные попытки обобщения ОТО, выходящие за рамки римановой геометрии. Отмечена роль финслеровой геометрии в описании анизотропии пространства и решении проблемы темной материи во Вселенной.

Показано, что среди всех финслеровых пространств выделяется класс пространств, конформно связанных с плоскими финслеровыми пространствами, причем коэффициент растяжения-сжатия и Мировая функция, через которую он выражается, зависят только от интервала исходного плоского пространства. Тогда из принципа самодостаточности финслеровой геометрии следует, что коэффициент растяжения-сжатия – это постоянная, деленная на интервал, а Мировая функция – это произведение постоянной на логарифм от коэффициента растяжения-сжатия. Каждый элемент такого класса обладает группой изометрической симметрии, которая включает в себя группу изометрической симметрии исходного плоского финслерова пространства в качестве собственной подгруппы, и обладает конформной группой симметрии, совпадающей с конформной группой симметрии исходного плоского пространства. Если взять в качестве исходного пространства пространство Минковского, то пространство указанного выше класса есть псевдориманово пространство, в четырехмерной области, где интервал в некотором приближении можно заменить временной координатой, совпадающее в том же приближении с пространством де Ситтера.

Ключевые слова: обобщения ОТО, изотропные космологические модели, метрика де Ситтера, финслерова геометрия, метрика Бервальда-Моора.

Введение

В настоящей работе мы будем рассматривать финслеровы расширения общей теории относительности (ОТО). Возникает вопрос зачем вообще нужно расширять ОТО. Существует несколько причин для этого. Во-первых, это связано с аппаратом теории и его применении к решению различных задач. Во многом классическая теория себя исчерпала. Она превратилась в область математической физики, в рамках которой найдены точные решения многих задач [1], имеющих физический смысл и, более того, дана исчерпывающая классификация римановых пространств ОТО по Петрову и по Бьянки. С другой стороны, в ОТО существуют неустранимые трудности [2], связанные с псевдотензором гравитационного поля и сингулярностями. Правда некоторые из этих трудностей пытаются представить как ее достоинства. Достаточно привести пример теорем Хокинга–Пенроуза о неизбежности сингулярностей [4].

Другой причиной для расширения ОТО являются наблюдательные данные, полученные астрономами в XX веке и в начале XXI века [4]. Они относятся к масштабам, намного превышающим размеры Солнечной системы, где ОТО хорошо согласуется с наблюдениями. Они касаются периферии спиральных галактик, где нарушается теорема вириала для видимой материи (звезд и межзвездного газа) и межгалактических расстояний, где играет роль т. н. темная материя и темная энергия. Многим кажется невозможным, что на видимую материю приходится не более 5% от средней плотности вещества во Вселенной. Эта ситуация напоминает неприятие системы Коперника [3], а ранее взглядов Аристарха Самосского, согласно которым Земля и планеты вращаются вокруг Солнца, в то время как наблюдается движение Солнца, Луны и планет относительно неподвижной Земли в соответствии со системой Птолемея.

Давно предпринимались попытки обобщить ОТО: достаточно назвать теории Вейля, Калуцы–Клейна и Эйнштейна–Картана [6], использующие неметричность, пятимерье и кручение соответственно. Наконец, существуют финслеровы расширения ОТО [5]. В чем состоит их мотивация? Во-первых, финслерова геометрия описывает анизотропию пространства – возможно лучше, чем риманова геометрия ОТО. Во-вторых, в одном из наиболее распространенных вариантов финслеровой геометрии метрика зависит от скорости [6], что позволяет по-новому посмотреть на проблему темной материи [9]. В то же время не стоит и переоценивать роль этого варианта финслеровой геометрии в астрономии. Действительно, риманова геометрия также рассматривает анизотропные модели. Если речь идет о космологии, то все модели, кроме фридмановской и деситтеровской, описываемые в рамках ОТО, являются анизотропными [1]. Что касается учета скоростей, то тензор энергии-импульса, стоящий в правой части уравнений Эйнштейна–Гильберта, зависит не только от масс, но и от их движений.

С другой стороны, мы не можем ограничиваться ОТО в квантовой области. Проблему квантования гравитации многие считают нерешенной. На самом деле, для слабых гравитационных полей используются пертурбативные методы, аналогичные квантовой электродинамике [6]. Возможно введение квантов гравитационного поля – частиц со спином 2, т. н. гравитонов. Для сильных полей используются непертурбативные методы, такие как квантовая геометродинамика, в которой квантуется геометрия в целом [10], и петлевая квантовая гравитация [11], в которой квантуется т. н. пространственно-временная пена, когда флуктуации метрики велики. Наконец, существует теория суперструн и М-теория [12], позволяющие, но не без трудностей, проквантовать гравитацию на уровне физики элементарных частиц.

Поскольку мы будем рассматривать пространства де Ситтера, ниже остановимся подробно на изотропных космологических моделях, одной из которых является модель де Ситтера [13]. Эта модель в последнее время связывается с ускоренным расширением Вселенной, обнаруженным с помощью наблюдения сверхновых типа Ia в далеких галактиках. Другим аргументом в пользу этой модели является т. н. парадокс Сэндиджа, состоящий в том, что расширение происходит как для однородной изотропной модели на масштабах, на два порядка меньших масштаба неоднородности Вселенной. Разрешение этого парадокса состоит в том, что расширение обусловлено не неоднородной материей галактик, а неизвестной однородной средой, т. н. темной энергией, которая описывается космологическим членой, добавляемым в правую часть уравнений Эйнштейна-Гильберта [4]. Ниже будет показано, что метрика де Ситтера может быть представлена в виде, к которому приводится специальный класс финслеровых метрик.

1 Изотропная космология

Хотя современная теоретическая космология основана на ОТО, некоторые результаты изотропных моделей могут быть получены в рамках ньютоновской гравитации [14]. Запишем энергию элемента единичной массы на поверхности шара в виде:

$$\frac{\dot{a}^2}{2} - \frac{4\pi G\varepsilon a^2}{3c^2} = -\frac{kc^2}{2}, \tag{1}$$

где $a(t)$ – зависящий от времени радиус шара, моделирующий масштабный фактор Вселенной, $\varepsilon = \rho c^2$ – плотность энергии, $k = 0, \pm 1$ – параметр модели. При адиабатическом процессе имеем $dE = -pdV$, где $E = \varepsilon V$ и $V = \frac{4\pi}{3} a^3$. Отсюда получаем закон сохранения энергии

$$a\dot{\varepsilon} + 3(p + \varepsilon)\dot{a} = 0. \tag{2}$$

Из уравнения (2) и баротропного уравнения состояния $p = w\varepsilon$, где $w = const$, мы получим следующую зависимость плотности энергии от масштабного фактора

$$\varepsilon \sim a^{-3(1+w)}. \tag{3}$$

Для плоской модели де Ситтера с $p = -\varepsilon$ и $k = 0$ из формул (1) и (3) легко получить экспоненциальный рост масштабного фактора

$$a(t) = a_0 e^{\frac{ct}{r_0}}, \tag{4}$$

где $a_0 = const$, r_0 – горизонт де Ситтера, описывающий инфляционные модели. Метрика однородного изотропного пространства-времени имеет вид

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t)[d\chi^2 + f^2(\chi)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)], \tag{5}$$

где $f(\chi) = \chi$ при $k = 0$, χ – гиперсферический угол.

Метрика де Ситтера, даваемая формулами (4) и (5), записана в системе отсчета, сопутствующей пробным телам (галактикам). Заменим t и χ в формулах (4) и (5) на t' и $r' = a_0\chi$ соответственно. Тогда метрика де Ситтера (5) с помощью следующего преобразования координат [12]

$$r' = \frac{re^{-\frac{ct}{r_0}}}{\sqrt{1 - \frac{r^2}{r_0^2}}}, \quad t' = t + \frac{r_0}{2c}\ln\left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right), \tag{6}$$

может быть приведена к статическому виду:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right)c^2dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r^2}{r_0^2}} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \tag{7}$$

Этот факт есть следствие того, что тензор энергии-импульса

$$T^{ik} = (p + \varepsilon)u^i u^k - pg^{ik}, \tag{8}$$

где u^i – 4-скорость, для уравнения состояния $p = -\varepsilon$ сводится при умножении на $\frac{8\pi G}{c^4}$ к т. н. космологическому члену Λg^{ik} в уравнениях Эйнштейна–Гильберта, где космологическая постоянная Λ связана с горизонтом де Ситтера r_0 соотношением

$$\frac{1}{r_0^2} = \frac{8\pi G\varepsilon_0}{3c^4} = \frac{\Lambda}{3} = K. \tag{9}$$

Отсюда следует, что пространство де Ситтера является пространством постоянной кривизны. Поскольку тензор энергии-импульса для среды с уравнением состояния $p = -\varepsilon$ не зависит от 4-скорости, то такая среда называется деситтеровским вакуумом.

2 Специальный класс финслеровых пространств

Если $L(dx^1, dx^2, ..., dx^n)$ – метрическая функция некоторого плоского финслерова пространства $x^1, x^2, ..., x^n$, то элемент длины ds в этом пространстве определяется формулой

$$ds = L(dx^1, dx^2, ..., dx^n)\,, \tag{10}$$

а величина

$$s = L(x^1, x^2, ..., x^n) \tag{11}$$

называется интервалом между точками $(0, 0, ..., 0)$ и $(x^1, x^2, ..., x^n)$. Геометрия, конформно связанная с плоской геометрией с элементом длины (10), имеет элемент длины

$$d\tilde{s} = \kappa(x)\, L(dx^1, dx^2, ..., dx^n)\,, \tag{12}$$

где $\kappa(x) > 0$ – коэффициент растяжения-сжатия, зависящий от точки пространства. Принцип самодостаточности финслеровой геометрии [1] требует, чтобы Мировая функция, через которую выражается поле $\kappa(x)$ удовлетворяла фундаментальному уравнению, присущему данной финслеровой геометрии. В работе [1] был рассмотрен ряд решений фундаментальных уравнений, когда Мировая функция является функцией только интервала (11). Оказалось, что все такие решения имеют формально одинаковый вид:

$$S_W = C_0 \ln \frac{s}{s_0}\,, \qquad \kappa(x) = \frac{A_0}{s}\,, \tag{13}$$

где S_W – Мировая функция, а s_0, C_0, A_0 – числовые константы.

Естественно выдвинуть гипотезу: *для любых пространств, конформно связанных с плоскими финслеровыми пространствами, решение фундаментальных уравнений приводит к (13), если потребовать, чтобы Мировая функция зависела только от интервала.*

В данной работе показано, что эта гипотеза верна в самом общем виде. При этом мы воспользуемся работой [2], где впервые были изложены основные идеи и формулы теории *конформного потенциала.*

Для исходного плоского финслерова пространства (10) компоненты обобщенного импульса определяются формулами:

$$p_i = \frac{\partial L(dx)}{\partial (dx^i)}\,. \tag{14}$$

Они связаны тангенциальным уравнением индикатрисы

$$\Phi(p) = 0\,. \tag{15}$$

Функция Финслера, как известно, определяется неоднозначно: с точностью до перехода от тангенциального уравнения (15) к эквивалентному уравнению в той же форме записи при единственном требовании, чтобы компоненты обобщенного импульса не обращались в нуль одновременно. Тангенциальному уравнению индикатрисы всегда можно придать некоторую специальную форму

$$\Phi_m(p) - 1 = 0\,, \tag{16}$$

где $\Phi_m(p)$ – однородная функция m-го порядка ($m > 0$) по первым n аргументам. Если функция $S(x)$ определяет в рассматриваемом финслеровом пространстве нормальную конгруэнцию экстремалей, то она должна удовлетворять дифференциальному уравнению

$$\Phi\left(\frac{\partial S}{\partial x^1}, ..., \frac{\partial S}{\partial x^n}\right) = 0\,. \tag{17}$$

Функцию $S(x)$ в классической механике называют действием как функцией координат, а уравнение, соответствующее уравнению (17), – уравнением Гамильтона-Якоби. Если функция $S(x)$ известна, то поле обобщенных импульсов находится как

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial x^i}\,, \tag{18}$$

а экстремали из нормальной конгруэнции находятся из системы уравнений

$$\dot{x}^i = \left.\frac{\partial \Phi(p)}{\partial p_i}\right|_{p_k=\frac{\partial S}{\partial x^k}} \cdot \lambda(x)\,, \tag{19}$$

где $\lambda(x) \neq 0$ – некоторая функция, $\dot{x}^i \equiv \dfrac{dx^i}{d\tau}$, а τ – параметр вдоль экстремали, параметр эволюции.

Финслерово пространство, конформно связанное с исходным, имеет метрическую функцию вида

$$\tilde{L}(\xi; x) = \kappa(x) L(\xi)\,. \tag{20}$$

Элемент длины в таком пространстве определяется формулой (12). Обобщенные импульсы

$$\tilde{p}_i = \kappa(x)\, p_i \tag{21}$$

связаны соотношением

$$equati \Phi_m(\tilde{p}) - \kappa^m(x) = 0\,, \tag{22}$$

то есть функция Финслера конформно связанного с исходным пространства определяется следующим образом:

$$\tilde{\Phi}(\tilde{p}; x) = \Phi_m(\tilde{p}) - \kappa^m(x)\,. \tag{23}$$

Пусть $S_W(x)$ – произвольная скалярная функция, тогда в области, где выполняется неравенство

$$\Phi_m\left(\frac{\partial S_W}{\partial x^1}, \ldots \frac{\partial S_W}{\partial x^n}\right) > 0\,, \tag{24}$$

определена финслерова геометрия, конформно связанная с исходной, и полем коэффициента растяжения-сжатия

$$\kappa(x) = \sqrt[m]{\Phi_m\left(\frac{\partial S_W}{\partial x^1}, \ldots \frac{\partial S_W}{\partial x^n}\right)}\,, \tag{25}$$

причем в этой же области функция $S_W(x)$ определяет нормальную конгруэнцию экстремалей

$$\dot{x}^i = \left.\frac{\partial \Phi_m(\tilde{p}; x)}{\partial \tilde{p}_i}\right|_{\tilde{p}_k=\frac{\partial S_W}{\partial x^k}} \cdot \tilde{\lambda}(x)\,, \tag{26}$$

где $\tilde{\lambda}(x) \neq 0$ – некоторая функция, $\dot{x}^i \equiv \dfrac{dx^i}{d\tau}$, а τ – параметр эволюции. Таким образом, функция $S_W(x)$ является действием как функцией координат в конформно связанном пространстве.

Из принципа самодостаточности финслеровой геометрии [1] следует, что функция $S_W(x)$ должна удовлетворять некоторому фундаментальному для данной геометрии уравнению поля, которое получается из вариационного принципа для действия с лагранжианом вида:

$$\mathfrak{L} = const \cdot \kappa^n(x)\,, \tag{27}$$

то есть

$$\mathfrak{L} = const \cdot \left[\Phi_m \left(\frac{\partial S_W}{\partial x^1}, ... \frac{\partial S_W}{\partial x^n} \right) \right]^{\frac{n}{m}} . \tag{28}$$

Уравнение Эйлера-Лагранжа-Остроградского для такого лагранжиана запишется следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \left[(\Phi_m)^{\frac{n-m}{m}} \frac{\partial \Phi_m}{\partial \left(\frac{\partial S_W}{\partial x^i} \right)} \right] = 0 \,. \tag{29}$$

Функция $S_W(x)$, удовлетворяющая такому уравнению поля, называется Мировой функцией, а само уравнение поля – фундаментальным уравнением, соответствующим рассматриваемой финслеровой геометрии.

Будем искать решение фундаментального уравнения, зависящее только от от интервала (11). В этом случае

$$\frac{\partial S_W(s)}{\partial x^i} = \frac{dS_W(s)}{ds} \cdot \frac{\partial L(x)}{\partial x^i} \,, \tag{30}$$

поэтому

$$\Phi_m \left(\frac{\partial S_W}{\partial x^1}, ... \frac{\partial S_W}{\partial x^n} \right) = \left(\frac{dS_W(s)}{ds} \right)^m , \tag{31}$$

а значит

$$\mathfrak{L} = const \cdot \left(\frac{dS_W(s)}{ds} \right)^n . \tag{32}$$

Перейдем в элементе объема финслерова пространства, конформно связанного с плоским, от координат $x^1, x^2, ..., x^n$ к координатам $s, \vartheta_1, \vartheta_2, ..., \vartheta_{n-1}$, где $\vartheta_1, \vartheta_2, ..., \vartheta_{n-1}$ – угловые переменные. Тогда

$$dV \equiv const \cdot \mathfrak{L} \, dx^1 ... dx^n = const' \cdot \left(\frac{dS_W(s)}{ds} \right)^n s^{n-1} \varrho(\vartheta) ds d\vartheta_1 ... d\vartheta_{n-1}, \tag{33}$$

где $\varrho(\vartheta)$ – некоторая функция только угловых переменных. Поэтому уравнение поля принимает вид:

$$\frac{d}{ds} \left[s^{n-1} \left(\frac{dS_W(s)}{ds} \right)^{n-1} \right] = 0 \,. \tag{34}$$

Интегрируя это уравнение, получим

$$S_W(s) = S_0 \ln \frac{s}{s_0} \,, \qquad \Rightarrow \qquad \kappa(s) = \frac{S_0}{s} \,. \tag{35}$$

Итак, мы доказали, что выдвинутая выше гипотеза верна. Сформулируем результат в виде теоремы.

Теорема.

Принцип самодостаточности финслеровой геометрии выбирает из всех пространств, конформно связанных с плоской финслеровой геометрией с метрической функцией $L(dx^1, dx^2, ..., dx^n)$, геометрии с метрическими функциями вида:

$$\tilde{L}(dx^1, dx^2, ..., dx^n) = const \cdot \frac{L(dx^1, dx^2, ..., dx^n)}{L(x^1, x^2, ..., x^n)} \,. \tag{36}$$

Группа изометрической симметрии геометрии с метрической функцией $\tilde{L}(dx)$ (36) включает группу линейных однородных преобразований, сохраняющих элемент длины исходного плоского пространства, в качестве собственной подгруппы; а конформные группы симметрии у этих двух финслеровых пространств совпадают.

3 Сведение пространства де Ситтера к специальному классу финслеровых пространств

Элемент длины в статическом пространстве де Ситтера определяется формулой (7). Свободная частица в таком пространстве испытывает действие гравитационной силы центробежного типа, а это значит, что закон инерции не выполняется для больших пространственных областей модели де Ситтера. Только в областях, где $\frac{r^2}{r_0^2} \ll 1$ элемент длины (7) сводится к элементу длины пространства Минковского, закон инерции будет приближенно выполняться. В декартовых коодинатах элемент длины (5) запишется следующим образом:

$$ds = \sqrt{(cdt')^2 - e^{\frac{2ct'}{r_0}}\left[dx'^2 + dy'^2 + dz'^2)\right]}\ . \tag{37}$$

Перейдем от системы координат ct', x', y', z' к системе координат ct'', x'', y'', z'':

$$t' = -\frac{r_0}{c}\ln\frac{ct''}{r_0}\,, \quad x' = x''\,, \quad y' = y''\,, \quad z' = z''\,. \tag{38}$$

В этой дважды штрихованной системе координат элемент длины в пространстве де Ситтера принимает вид:

$$ds = r_0\,\frac{\sqrt{(cdt'')^2 - dx''^2 - dy''^2 - dz''^2}}{|ct''|}\ . \tag{39}$$

Таким образом, пространство де Ситтера является конформно связанным с пространством Минковского.

Рассмотрим область пространства де Ситтера, выделяемую неравенством

$$\frac{|r''|}{ct''} \ll 1\,. \tag{40}$$

Тогда в этой области имеем

$$s'' \equiv \sqrt{(ct'')^2 - x''^2 - y''^2 - z''^2} \approx |ct''|\,, \tag{41}$$

а значит с точностью, даваемой (40), элемент длины пространства де Ситтера принимает вид:

$$ds = r_0\,\frac{\sqrt{(cdt'')^2 - dx''^2 - dy''^2 - dz''^2}}{s''}\,. \tag{42}$$

То есть метрическая функция пространства де Ситтера принимает вид (36):

$$ds = r_0\,\frac{\sqrt{(cdt'')^2 - dx''^2 - dy''^2 - dz''^2}}{\sqrt{(ct'')^2 - x''^2 - y''^2 - z''^2}}\,. \tag{43}$$

4 Пространство Бервальда-Моора

Гиперкомплексные числа H_4 [4] изоморфны алгебре действительных квадратных диагональных матриц 4×4. Координаты в изотропном базисе пространства H_4 будем обозначать $\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4$, а сам базис – $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$, то есть любое число можно представить в виде разложения

$$X = \xi^1\psi_1 + \xi^2\psi_2 + \xi^3\psi_3 + \xi^4\psi_4\,, \tag{44}$$

или четверки действительных чисел $(\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4)$. Бинарная операция полечислового умножения определяется заданием правила умножения для базисных векторов:

$$\psi_i\psi_j = \begin{cases} \psi_i\,, & \text{если} \quad i = j \\ 0\,, & \text{если} \quad i \neq j\,. \end{cases} \tag{45}$$

Таблица 1:

$\times$	1	j	k	jk
1	1	j	k	jk
j	j	1	jk	k
k	k	jk	1	j
jk	jk	k	j	1

Если $\xi^1\xi^2\xi^3\xi^4 > 0$, то для числа $X \in H_4$ определена норма

$$|X| = \sqrt[4]{\xi^1\xi^2\xi^3\xi^4} > 0\,. \tag{46}$$

Пространство H_4 является метрическим финслеровым пространством с метрической функцией

$$L(d\xi) = \sqrt[4]{d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3 d\xi^4}\,, \tag{47}$$

которую никакими преобразованиями координат нельзя привести к квадратному корню из дифференциальной квадратичной формы, то есть такое финслерово пространство качественно отличается от евклидова и псевдоевклидовых пространств размерности четыре. Метрику, которая определяется метрической функцией (47), называют метрикой Бервальда-Моора [5].

В пространстве H_4 существует базис $1, j, k, jk$,

$$\left.\begin{aligned} 1 &= \psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \psi_4\,, \\ j &= \psi_1 + \psi_2 - \psi_3 - \psi_4\,, \\ k &= \psi_1 - \psi_2 + \psi_3 - \psi_4\,, \\ jk &= \psi_1 - \psi_2 - \psi_3 + \psi_4\,, \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

закон умножения базисных элементов которого определен Таб. 1.

Координаты $x^0, x^1,\ x^2, x^3$ числа X в этом базисе связаны с координатами $\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4$ того же числа в изотропном базисе формулами:

$$\left.\begin{aligned} \xi^1 &= x^0 + x^1 + x^2 + x^3\,, \\ \xi^2 &= x^0 + x^1 - x^2 - x^3\,, \\ \xi^3 &= x^0 - x^1 + x^2 - x^3\,, \\ \xi^4 &= x^0 - x^1 - x^2 + x^3\,. \end{aligned}\right\} \tag{49}$$

Базис $1, j, k, jk$ будем называть "ортонормированным", именно в нем в конусе $\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4 > 0$ определено экспоненциальное представление чисел $X \in H_4$.

Если гладкая функция $F(x)$ одной действительной переменной x представима как полином или сходящийся ряд переменной x, то функция $F(X)$ переменной $X \in H_4$ также определена и является аналитической, в изотропном базисе она запишется следующим образом:

$$F(X) = F(\xi^1)\psi_1 + F(\xi^2)\psi_2 + F(\xi^3)\psi_3 + F(\xi^4)\psi_4\,. \tag{50}$$

В "ортонормированном" базисе $1, j, k, jk$ та же функция имеет вид:

$$
\begin{aligned}
F(X) = \\
&= \frac{1}{4}[F(x^0+x^1+x^2+x^3)+F(x^0+x^1-x^2-x^3)+ \\
&\quad +F(x^0-x^1+x^2-x^3)+F(x^0-x^1-x^2+x^3)]\cdot 1+ \\
&+\frac{1}{4}[F(x^0+x^1+x^2+x^3)+F(x^0+x^1-x^2-x^3)- \\
&\quad -F(x^0-x^1+x^2-x^3)-F(x^0-x^1-x^2+x^3)]\cdot j+ \\
&+\frac{1}{4}[F(x^0+x^1+x^2+x^3)-F(x^0+x^1-x^2-x^3)+ \\
&\quad +F(x^0-x^1+x^2-x^3)-F(x^0-x^1-x^2+x^3)]\cdot k+ \\
&+\frac{1}{4}[F(x^0+x^1+x^2+x^3)-F(x^0+x^1-x^2-x^3)- \\
&\quad -F(x^0-x^1+x^2-x^3)+F(x^0-x^1-x^2+x^3)]\cdot jk\,.
\end{aligned}
\tag{51}
$$

В "ортонормированных" координатах x^0, x^1, x^2, x^3 метрическая функция (50) финслерова пространства H_4 принимает вид

$$
\begin{aligned}
L(dx) = [(dx^0+dx^1+dx^2+dx^3)(dx^0+dx^1-dx^2-dx^3)\times \\
\times(dx^0-dx^1+dx^2-dx^3)(dx^0-dx^1-dx^2+dx^3)]^{1/4}\,.
\end{aligned}
\tag{52}
$$

Разложим выражение в квадратных скобках по степеням dx^0:

$$
\begin{aligned}
L^4(dx) &= (dx^0)^4 - 2\,(dx^0)^2\left[(dx^1)^2+(dx^2)^2+(dx^3)^2\right]+ \\
&+8\,dx^0dx^1dx^2dx^3+ \\
&+\ (dx^1)^4+(dx^2)^4+(dx^3)^4- \\
&-2\left[(dx^1)^2(dx^2)^2+(dx^1)^2(dx^3)^2+(dx^2)^2(dx^3)^2\right]\,.
\end{aligned}
\tag{53}
$$

Предположим, что

$$
dx^\alpha = \delta\, dx^0\,, \quad \delta \ll 1\,, \qquad \alpha = 1,2,3,
\tag{54}
$$

тогда с точностью до членов δ^2 включительно по сравнению с 1 для элемента длины $L_{H_4}(dx)$ в пространстве H_4 получим следующую формулу:

$$
L_{H_4}(dx) \simeq \sqrt{(dx^0)^2-(dx^1)^2-(dx^2)^2-(dx^3)^2}\,.
\tag{55}
$$

Справа здесь стоит элемент длины в пространстве Минковского, поэтому справедливо следующее утверждение: координаты x^0, x^1, x^2, x^3 в "ортонормированном" базисе пространства H_4 в нерелятивистском приближении в геометрическом (метрическом) плане ведут себя также как общепринятые координаты четырехмерного пространства-времени Минковского.

Элемент длины в пространстве, конформно связанном с пространством H_4, в изотропном базисе имеет вид

$$
ds = \kappa(\xi^1,\xi^2,\xi^3,\xi^4)\,\sqrt[4]{d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3 d\xi^4}\,.
\tag{56}
$$

Обобщенные импульсы находятся по формулам

$$
p_i = \frac{1}{4}\kappa(\xi)\frac{\sqrt[4]{d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3 d\xi^4}}{d\xi^i}\,,
\tag{57}
$$

а тангенциальное уравнение индикатрисы можно записать, например, так

$$p_1p_2p_3p_4 - \frac{\kappa^4(\xi)}{4^4} = 0\,. \tag{58}$$

Выберем в качестве функции $F(x)$ в формуле (50) функцию

$$F(x) = a\ln(x/b)\,, \tag{59}$$

где a, $b > 0$ – действительные параметры. Действительная часть аналитической функции $F(X)$ (51)

$$U(\xi^1,\xi^2,\xi^3,\xi^4) = \frac{a}{4}\ln\left(\frac{\xi^1\xi^2\xi^3\xi^4}{b^4}\right) \tag{60}$$

автоматически удовлетворяет фундаментальному уравнению пространства Бервальда-Моора, является Мировой функцией $S_W \equiv U$ и приводит к коэффициенту растяжения-сжатия, определяемому формулой:

$$\kappa(\xi) = \frac{|a|}{\sqrt[4]{\xi^1\xi^2\xi^3\xi^4}} \equiv s_{H_4}\,. \tag{61}$$

Таким образом, мы получили пространство, конформно связанное с пространством Бервальда-Моора, с метрической функцией типа (36), элемент длины в таком пространстве запишется следующим образом:

$$ds = |a|\,\frac{\sqrt[4]{d\xi^1d\xi^2d\xi^3d\xi^4}}{\sqrt[4]{\xi^1\xi^2\xi^3\xi^4}}\,. \tag{62}$$

Такое пространство содержит в качестве подгруппы изометрических преобразований все линейные изометрические преобразования пространства Бервальда-Моора и общее масштабное преобразование. Любое конформное преобразование пространства Бервальда-Моора является также и конформным преобразованием пространства (62).

Итак, пространствам класса (36) в невырожденных полчисловых пространствах соответствует логарифмическая аналитическая функция.

Перейдем по формулам (49) от координат ξ^1,ξ^2,ξ^3,ξ^4 к "ортонормированным" координатам cxt',x'',y'',z'', положим $a\equiv r_0$ и выделим область, в которой

$$s''_{H_4} \approx |ct''|\,. \tag{63}$$

В результате получим аналог неизотропного пространства де Ситтера

$$ds = r_0\,\frac{\sqrt[4]{d\xi^1d\xi^2d\xi^3d\xi^4}}{ct''}\,. \tag{64}$$

Здесь подразумевается, что все координаты ξ^1,ξ^2,ξ^3,ξ^4 выражены через "ортонормированные" координаты ct'',x'',y'',z'' согласно формулам (49). Совершим далее обратные переходы (38), (6), получим элемент длины в некотором неизотропном неплоском пространстве, аналогичном пространству де Ситтера, но при $r_0 \to \infty$ переходящем не в пространство Минковского, а в пространство Бервальда-Моора.

Заключение

Рассмотрены расширения общей теории относительности, в том числе на случай финслеровой геометрии. В рамках изотропных космологических моделей проанализирована метрика де Ситтера. Описан класс финслеровых пространств с метрическими функциями специального вида, к которому приводится пространство де Ситтера, конформно связанное с пространством Минковского. Получен аналог пространства де Ситтера, переходящий на больших расстояниях в пространство Бервальда-Моора.

Литература

[1] Д. Крамер, Х. Штефани, М. Мак-Каллум, Э. Херльт. Точные решения уравнений Эйнштейна. Под ред. Э. Шмутцера: Пер. с англ.– М.: Энергоиздат, 1982.

[2] Д. Д. Иваненко, Г. А. Сарданашвили.– Киев, Наукова думка, 1985.

[3] С. Хокинг, Дж. Эллис. Крупномасштабная структура пространства-времени.: Пер. с англ.– М.: Мир, 1977.

[4] Астрономия: век XXI.: Ред.-сост. В. Г. Сурдин.– Фрязино: Век 2, 2007.

[5] Н. Коперник. О вращениях небесных сфер.: Пер. с лат. Под ред. А. Михайлова. – СПб.: Амфора, 2009.

[6] Альберт Эйнштейн и теория гравитации. Сборник статей.– М.: Мир, 1979.

[7] Г. И. Гарасько. Начала финслеровой геометрии для физиков.– М.: Тетру, 2009.

[8] Х. Рунд. Дифференциальная геометрия финслеровых пространств.: Пер. с англ. –М.: Наука, 1981.

[9] С. В. Сипаров. К вопросу об анизотропной геометродинамике. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 2 (10), т. 5, с. 65 (2008).

[10] Дж. А. Уилер. Предвидение Эйнштейна. Пер. с нем.: – М.: Мир, 1970.

[11] C. Rovelli. Quantum Gravity. – Cambridge: Cambridge University Press, 2004.

[12] М. Каку. Введение в теорию суперструн.: Пер. с англ.– М.: Мир, 1999.

[13] А. Д. Долгов, Я. Б. Зельдович, М. В. Сажин. Космология ранней Вселенной.– М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988.

[14] Я. Б. Зельдович, И. Д. Новиков. Строение и эволюция Вселенной.– М.: Наука, 1975.

[15] К. Мёллер: Теория относительности: Пер. с англ.– М.:, Атомиздат, 1975.

[16] Г. И. Гарасько. Теория поля и финслеровы пространства. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 2 (6), т. 3, с. 6 (2006).

[17] Д. Г. Павлов, Г. И. Гарасько. Об аналоге решения Фридмана в финслеровом пространстве-времени с анизотропной метрикой Бервальда-Моора. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 1 (7), т. 4, с. 52 (2007).

[18] Г. И. Гарасько, Д. Г. Павлов. Геометрия невырожденных поличисел. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 1 (7), т. 4, с. 3 (2007).

[19] Г. Ю. Богословский. 4-импульс частицы и уравнение массовой поверхности в полностью анизотропном пространстве-времени. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 2 (4), с. 27 (2005).

A Special Class of Finsler Geometries and de Sitter Spaces

D. G. Pavlov[1,2], G. I. Garas'ko[1,3], M. L. Fil'chenkov[4]

[1] *Research Institute of Hypercomplex Systems in Geometry and Physics, Friazino, Russia,*
[2] *Bauman Moscow State Technical University, Russia,*
[3] *Electrotechnical Institute of Russia, Moscow,*
[4] *Peoples' Friendship University, Moscow, Russia,*
geom2004@mail.ru, gri9z@mail.ru, fmichael@ mail.ru

Extensions of General Relativity (GR) have been considered. Reasons for generalizing GR related to difficulties of the theory itself as well as a necessity of interpreting the new astronomical observations are indicated. Numerous attempts of generalizing GR being beyond the scope of Riemannian geometry are listed. A class of spaces conformally coupled to flat Finsler spaces is shown to be singled out among all Finsler spaces. Its dilatation-contraction coefficient and the world function, in terms of which it is expressed, depend only on an interval of the initial flat space. Then from the Finsler geometry self-sufficiency principle it follows that the dilatation-contraction coefficient is a constant

divided by the interval, and the world function is a product of a constant and a logarithm of the dilatation-contraction coefficient. Each element of the class possesses an isometric symmetry group, which includes that of the initial flat Finsler space as a proper subgroup, and possesses a conformal symmetry group coinciding with that of initial flat space. If one takes Minkowski space as an initial one, then the above class space is a pseudo-Riemannian space in the four-dimensional region, where the interval in some approximation is changeable by a temporal coordinate, coinciding with de Sitter space in the same approximation.

Key words: GR generalizations, isotropic cosmological models, de Sitter metric, Finsler geometry, Berwald-Moor metric.

PACS: 02.40 Ky, 88.80-k.

Статья поступила в редакцию 27 марта 2009 г.