О ФОРМЕ АНАЛОГА МНОЖЕСТВА ЖЮЛИА ПРИ НУЛЕВОМ ЗНАЧЕНИИ ПАРАМЕТРА НА ПЛОСКОСТИ ДВОЙНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Д. Г. Павлов[1], М. С. Панчелюга[1,2], В. А. Панчелюга[1,2]

(1) – НИИ Гиперкомплексных систем в геометрии и физике, Фрязино, МО;
(2) – Институт теоретической и экспериментальной биофизики РАН, Пущино, МО
panvic333@yahoo.com

Получено аналитическое решение для формы множества Жюлиа в случае квадратичного отображения $z_{n+1} \to z_n^2 + c$, при $c = 0$ на плоскости двойной переменной. Рассмотрены проблемы создания компьютерного алгоритма правильно воспроизводящего форму множества Жюлиа. Несмотря на простоту рассматриваемых в статье задач они позволяют проиллюстрировать ряд проблем построения фракталов на плоскости двойной переменной, отсутствующих для общеизвестной задачи построения фракталов на комплексной плоскости[1].

Ключевые слова: фракталы, множество Жюлиа, двойные числа.

Введение

Двойные числа, часто, по-другому, называют гиперболическими. И, в этой связи, естественно ожидать, что гиперболический характер этих чисел как-то проявится в процессе построения фракталов на множестве двойных чисел $\mathbf{H}_2$. Но, как следует из первых попыток компьютерного построения множеств Жюлиа и Мандельброта на плоскости двойной переменной [1, 2], этого не происходит. Причины становятся более понятными, если мы попытаемся построить аналог множества Жюлиа при нулевом значении параметра для итераций квадратичного отображения $z \to z^2 + c$ на $\mathbf{H}_2$. Данный случай, благодаря его простоте, позволяет аналитически исследовать форму множества Жюлиа, которое в дальнейшем может служить одним из тестов для разрабатываемых компьютерных методов.

Необходимо отметить, что при компьютерном построении множества Жюлиа на комплексной плоскости обычно используются два условия принадлежности точки к множеству Жюлиа: ограниченность комплексного числа или ограниченность его модуля. На множестве комплексных чисел $\mathbf{C}$ оба эти условия приводят к одним и тем же результатам. Одной из задач настоящей работы является проверка эквивалентности данных условий для плоскости двойной переменной.

Форма множества Жюлиа при c = 0. Аналитическое решение

Воспользуемся представлением двойного числа $z = x+jy,\ x,\ y \in\ \mathbf{R}$ в изотропном базисе: $z = x+jy = (x-y)e+(x+y)e^*$, где $e = (1-j)/2$ и $e^* = (1+j)/2$. Легко видеть, что $ee = e,\ e^*e^* = e^*$ и $e^*e = ee^* = 0$. Вычислим в этом базисе итерации квадратичного отображения $z \to z^2 + c$, где $c = p+jq,\ p,\ q \in \mathbf{R}$:

$$z_1 = z_0^2 + c = ((x_0 - y_0)e + (x_0 + y_0)e^*)^2 + (p - q)e + (p + q)e^* = \\ = (x_0 - y_0)^2 e + (x_0 + y_0)^2 e^* + (p - q)e + (p + q)e^*. \quad (1)$$

[1]Для того, чтобы улучшить разрешение приводимых в статье изображений аналогов множества Жюлиа, рис. 2 сделан цветным. Вариант статьи с цветными иллюстрациями может быть получен (в свободном доступе) на интернет-сайте журнала по адресу: http://www.polynumbers.ru/section.php?lang=ru&genre=3.

Так как мы рассматриваем множество Жюлиа при $c = 0$, то $p = q = 0$ и (1) принимает вид:

$$z_1 = (x_0 - y_0)^2 e + (x_0 + y_0)^2 e^*. \tag{2}$$

При вычислении множества Жюлиа начальные точки z_0 могут принимать любые значения из $\mathbf{H}_2$, поэтому, для удобства, вместо x_0 и y_0 в дальнейшем будем писать x и y и введем обозначения:

$$X = x - y, \quad Y = x + y. \tag{3}$$

Тогда:

$$z_1 = X^2 e + Y^2 e^*, \tag{4}$$

$$z_2 = z_1^2 = (X^2 e + Y^2 e^*)^2 = X^4 e + Y^4 e^*, \tag{5}$$

$$z_3 = z_2^2 = (X^4 e + Y^4 e^*)^2 = X^8 e + Y^8 e^* \tag{6}$$

$$\ldots$$

$$z_n = X^{2^n} e + Y^{2^n} e^*, \tag{7}$$

где n – номер итерации. Или, с учетом (3):

$$z_n = (x - y)^{2^n} e + (x + y)^{2^n} e^*, \tag{8}$$

Как уже говорилось, условием принадлежности точки множеству Жюлиа могут быть два условия: ограниченность итерационной последовательности z_n ($z_n \nrightarrow \infty$ при $n \to \infty$) и ограниченность ее модуля $|z_n|$ ($|z_n| \nrightarrow \infty$ при $n \to \infty$). Рассмотрим эти условия.

1. Условие $z_n \nrightarrow \infty$ при $n \to \infty$

Исходя из (7) легко видеть, что при $n \to \infty$, z_n остается ограниченным при

$$\begin{cases} |X| \le 1 \\ |Y| \le 1 \end{cases}. \tag{9}$$

Условие (9) описывает форму заполненного множества Жюлиа при нулевом значении параметра в изотропном базисе. Форма множества Жюлиа в том же базисе получается из условия:

$$\begin{cases} |X| = 1 \\ |Y| = 1 \end{cases}. \tag{10}$$

Аналогично, в обычном, "диагональном" базисе форма заполненного множества Жюлиа может быть получена из (11) и множества Жюлиа из (12):

$$\begin{cases} |x - y| \le 1 \\ |x + y| \le 1 \end{cases}, \tag{11}$$

$$\begin{cases} |x - y| = 1 \\ |x + y| = 1 \end{cases}. \tag{12}$$

На рис. 1 *а*) и рис. 1 *б*) пунктиром показаны множества Жюлиа для случаев (10) и (12) соответственно.

2. Условие $|z_n| \nrightarrow \infty$ при $n \to \infty$

Используя (7) получим квадрат модуля двойного числа z_n для n-й итерации: $|z_n|^2 = X^{2^n}Y^{2^n} = (XY)^{2^n}$. При $n \to \infty$ модуль остается ограниченным (заполненное множество Жюлиа) при условии:

$$XY \leq 1. \tag{13}$$

Следовательно, множество Жюлиа в изотропном базисе:

$$|Y| = \frac{1}{|X|}. \tag{14}$$

В диагональном базисе: $|z_n|^2 = X^{2^n}Y^{2^n} = (XY)^{2^n} = [(x-y)(x+y)]^{2^n} = [x^2-y^2]^{2^n}$ и модуль остается ограниченным (заполненное множество Жюлиа) при:

$$x^2 - y^2 \leq 1. \tag{15}$$

Множество Жюлиа в диагональном базисе:

$$x^2 - y^2 = 1. \tag{16}$$

Множество Жюлиа в изотропном (14) и диагональном (16) базисах показано сплошными линиями на рис. 1 *а*) и рис. 1 *б*) соответственно.

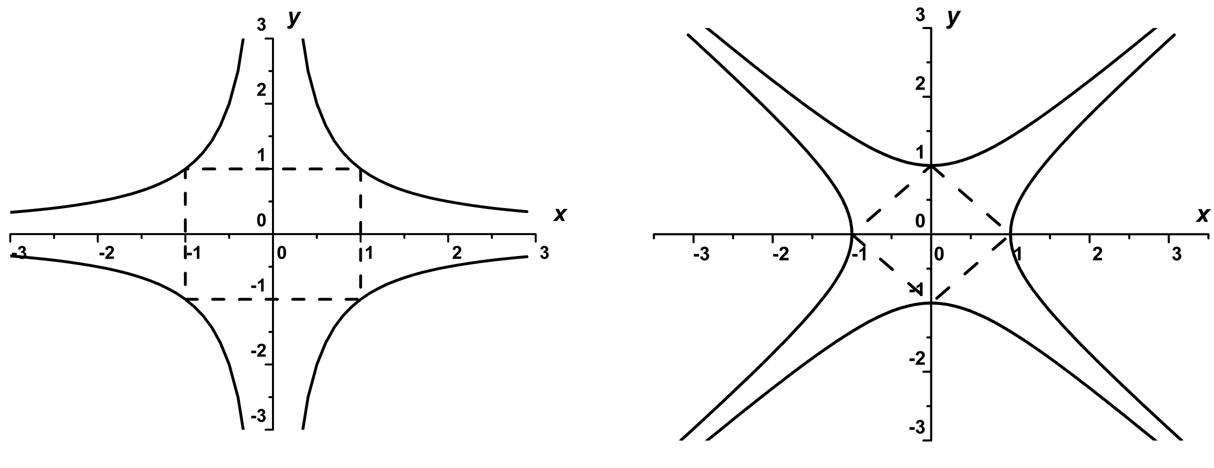

Рис. 1. Сводные графики в стандартном а) и диагональном б) базисах

Компьютерное построение множества Жюлиа при $c = 0$

Аналитическое рассмотрение множества Жюлиа при нулевом значении параметра, приводит к результатам, которые очень важны для отработки адекватных компьютерных алгоритмов, используемых для исследования квадратичного отображения на плоскости двойной переменной. Как уже отмечалось, гиперболические границы – редкость для существующих изображений множества Жюлиа. Причина этого кроется в особенностях итерационного процесса на $\mathbf{H}_2$. Рассмотрим их более детально.

Для квадратичного отображения $z \to z^2 + c$, где $z, c \in \mathbf{H}_2$ итерационная процедура в координатной форме имеет вид:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n^2 + y_n^2 + p \\ y_{n+1} = 2x_n y_n + q \end{cases}. \tag{17}$$

Одной из особенностей (17) является то, что в случае $|x| > 1$ и $|y| > 1$ их величина растет с номером итерации n, в степени 2^n. Это обстоятельство является причиной того, что величины x и y очень быстро превышают значение, которое возможно для обработки в современных вычислительных системах. Так, например, для начальных значений $x = y = 2$ уже на шестом шаге получим: $\mathrm{x} = 2.1896 \cdot 10^{269}$ и $y = \infty$, т. е. превышает машинное представление числа. Следовательно, в данном случае, возможно проанализировать только 5 итераций. В случае, если мы следим за поведением квадрата модуля двойного числа:

$$r_{n+1}^2 = x_{n+1}^2 - y_{n+1}^2 \tag{18}$$

мы, фактически, можем просмотреть только 4 итерации, т. к. необходимость на шаге $n+1$ смотреть квадраты x и y приводит к необходимости оперировать с величинами характерными для $n+2$-го шага.

На рис. 2 *а*) показан результат компьютерного построения заполненного множества Жюлиа при нулевом значении параметра с использованием традиционной итерационной процедуры (17): на n-м шаге итераций вычисляются действительная и мнимая части двойного числа, после этого вычисляется его модуль (18) по величине которого контролируется скорость убегания точки на бесконечность. Но, при этом, вместо фигуры, у которой должны быть гиперболические границы, как показано сплошной линией на рис. 1, мы получаем традиционный квадрат, уже знакомый из результатов, проиллюстрированных, например, в статье [2]. Подобное компьютерное построение, очевидно, является ошибочным, так как здесь неявно реализуется алгоритм, приводящий к изображениям, которые показаны на рис. 1 пунктиром.

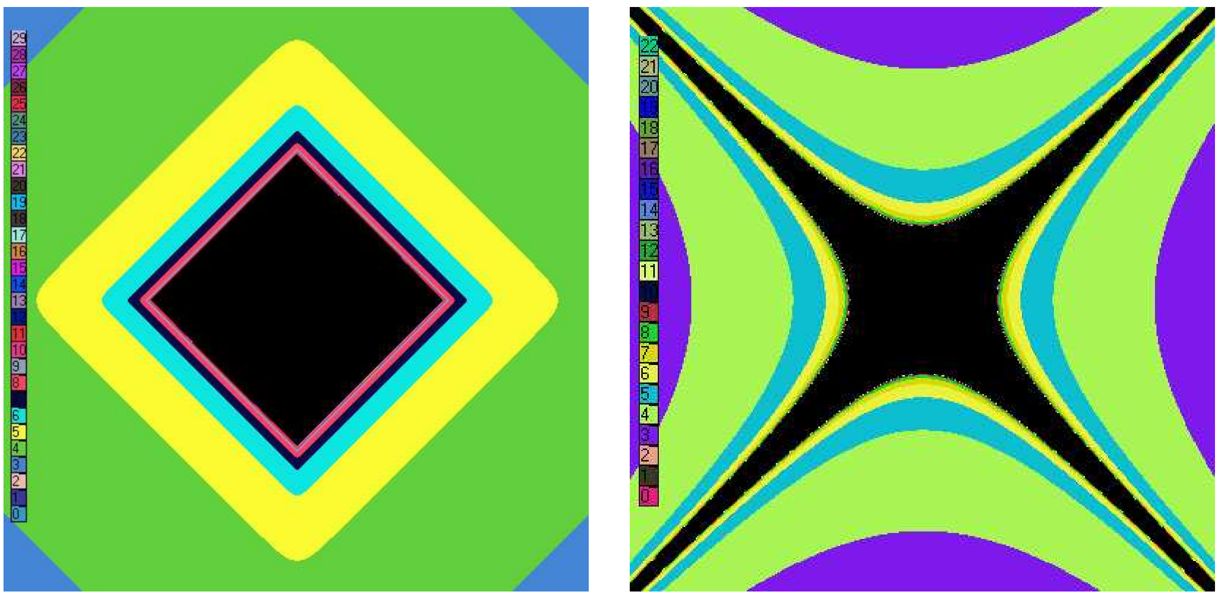

Рис. 2. Результат компьютерного построения заполненного множества Жюлиа (показано черным цветом) при нулевом значении параметра на $\mathbf{H}_2$. *а) Используется алгоритм, обычно применяемый на* $\mathbf{C}$. *Скорость убегания точки на бесконечность контролируется по модулю двойного числа. Как было показано выше, в данном случае множество Жюлиа должно иметь гиперболические границы, но этого не происходит. б) Результат работы предложенного в статье компьютерного алгоритма. В данном случае, полученная численно форма множества Жюлиа в точности совпадает с аналитическим решением, показанным на рис. 1 б) сплошной линией. Цветом показана скорость убегания точки на бесконечность. Числа на цветовой шкале слева дают число шагов в течение которых было достигнуто максимальное число итераций.*

В связи с этим встает задача разработки и тестирования компьютерных алгоритмов, правильно отображающих форму множества Жюлиа при нулевом значении параметра.

Нами был предложен алгоритм, модернизирующий обычно применяемый алгоритм построения множеств Жюлиа и Мандельброта на комплексной плоскости, и позволяющий построить компьютерную итерационную процедуру, воспроизводящую гиперболическую границу множества Жюлиа в том виде, как это было получено теоретически. Суть данного алгоритма состоит в следующем.

Запишем выражение для модуля двойного числа в виде:

$$r_{n+1}^2 = (x_{n+1} - y_{n+1})(x_{n+1} + y_{n+1}). \tag{19}$$

Используя (17) найдем, чему равны $x_{n+1} + y_{n+1}$ и $x_{n+1} - y_{n+1}$ в случае $c = 0$:

$$\begin{cases} x_{n+1} - y_{n+1} = x_n^2 + y_n^2 - 2x_n y_n = (x_n - y_n)^2 \\ x_{n+1} + y_{n+1} = x_n^2 + y_n^2 + 2x_n y_n = (x_n + y_n)^2 \end{cases} \tag{20}$$

Обозначая

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= x_{n+1} - y_{n+1} \\ Y_{n+1} &= x_{n+1} + y_{n+1} \end{aligned} \tag{21}$$

перепишем (20):

$$\begin{cases} X_{n+1} = X_n^2 \\ Y_{n+1} = Y_n^2 \end{cases} . \tag{22}$$

При этом (19) принимает вид:

$$r_{n+1}^2 = X_{n+1} Y_{n+1}. \tag{23}$$

Выражения (21) и (22) используются, как основа новой итерационной процедуры. Основанный на ней численный алгоритм построения множества Жюлиа при $= 0$ выглядит следующим образом.

1. Задаём число *MaxIter*, равное максимально возможному количеству итераций, а также число M, отождествляемое с бесконечностью.

2. Задаём множество значений x и y ($x = -2 : 2, \quad \mathrm{y} = -2 : 2$)

3. Выбираем конкретные значения x_0, y_0 из x, y.

4. Вычисляем $X_0 = x_0 - y_0$ и $Y_0 = x_0 + y_0$.

5. В цикле вычисляются

$$\begin{cases} X_{n+1} = X_n^2 \\ Y_{n+1} = Y_n^2 \end{cases} ,$$

где на первом шаге $X_n = X_0,\ Y_n = Y_0$.

6. Вычисляется значение модуля $R = X_n Y_n$.

7. Итерации проводятся пока $R < M$ и число итераций меньше *MaxIter*. При нарушении одного из этих условий цикл прерывается.

8. Если условием выхода из цикла было

• нарушение условия $R < M$, то считается, что выбранные x_0 и y_0 не принадлежат множеству Жюлиа.

• число итераций больше *MaxIter*, но R осталось меньше M, то считается, что выбранные x_0 и y_0 принадлежат множеству Жюлиа и отмечаются на графике точкой, например, чёрного цвета.

9. Возвращаемся к пункту 3 и выбираем следующие значения x_0 и y_0 из множества значений x, y заданных в пункте 2.

Результат применения приведенного алгоритма для построения множества Жюлиа при нулевом значении параметра показан на рис. 2 *б*). Он в точности совпадает с аналитическим решением на рис. 1 *б*) (сплошная линия).

Выводы

Выполненное в статье аналитическое и численное исследование методов построения множества Жюлиа при $c = 0$ на плоскости двойной переменной выявило сильную зависимость результата подобных построений от используемой методики: в отличие от комплексной плоскости, где требования $z_n \nrightarrow \infty$ и $|z_n| \nrightarrow \infty$ при $n \to \infty$ являются эквивалентными, на $\mathbf{H}_2$ они приводят к разным результатам. При этом "квадратное" и "гиперболическое" множества Жюлиа при $c = 0$ являются одинаково верными.

Аналитический характер полученных результатов, суммированных на рис. 1, позволяет использовать их в качестве тестовых при создании компьютерных алгоритмов, используемых для построения аналогов множеств Жюлиа и Мандельброта на плоскости двойной переменной.

Литература

1. Павлов Д. Г., Просандеева М. С., Панчелюга В. А. О построении аналога множества Мандельброта на плоскости двойных чисел. // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. 2007, №1 (7), том 4 - с. 93–97.

2. Павлов Д. Г., Панчелюга М. С., Малыхин А. В., Панчелюга В. А. О фрактальности аналогов множеств Мандельброта и Жюлиа на плоскости двойной переменной. // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. 2009, №1 (11), (этот номер).

About shape of Julia set at zero parameter on double numbers plane

Pavlov D. G.[1], Panchelyuga M. S.[1,2], Panchelyuga V. A.[1,2]

(1) – Research Institute of Hypercomplex Systems in Geometry and Physics, Friazino, Russia,
(2) – Institute of Theoretical and Experimental Biophysics RAS, Pushchino, Russia
panvic333@yahoo.com

Analytic solution for Julia set on double numbers plane in the case of quadratic map $z_{n+1} \to z_n^2 + c$, at $c = 0$ is presented. Paper illustrates main problems of numerical algorithm creation to calculate the Julia set having correct shape. Despite on simple mathematical character the consideration allows to illustrate main problems of double numbers fractals calculations, which don't exist for complex numbers fractals.

Key words: fractals, Julia set, double numbers.