О ФРАКТАЛЬНОСТИ АНАЛОГОВ МНОЖЕСТВ МАНДЕЛЬБРОТА И ЖЮЛИА НА ПЛОСКОСТИ ДВОЙНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Д. Г. Павлов[1], М. С. Панчелюга[1,2], А. В. Малыхин[1], В. А. Панчелюга[1,2]

(1) – НИИ Гиперкомплексных систем в геометрии и физике, Фрязино, МО;
(2) – Институт теоретической и экспериментальной биофизики РАН, Пущино, МО
panvic333@yahoo.com

В статье представлены результаты построения аналогов множеств Мандельброта и Жюлиа на плоскости двойной переменной. Демонстрируется фрактальный характер полученных множеств. Дается краткий обзор работ, содержащих попытки построения аналогов множеств Мандельброта и Жюлиа на плоскости двойной переменной. Отмечается пионерский характер приведенных в статье результатов.[1]

Ключевые слова: фракталы, множество Жюлиа, множество Мандельброта, двойные числа.

Введение

Как известно, термин "фрактал" был введен в научный обиход Б. Мандельбротом в 1975 г. [1, 2] Одно из первых определений фрактала опиралось на классическое представление о хаусдорфовой размерности: Мандельброт назвал фракталами множества, для которых размерность Хаусдорфа строго больше топологической (и обычно выражается нецелым числом) [1]. Но в дальнейшем он стал придерживаться более широкого определения, в котором ключевым моментом является идея подобия части и целого: на различных масштабах существуют части фигуры, подобные фигуре в целом. [3, 4] При этом имелось в виду именно подобие, а не точное соответствие части и целого. Такое определение фрактала позволяет значительно расширить область его применимости, особенно для физических систем, которые, в отличие от математических построений, практически никогда не дают точного соответствия целого и его частей.

Определение фрактала, которое используется в настоящей работе, соответствует более позднему определению, основанному на подобии целого и его частей.

Ставшие уже классическими множества Мандельброта и Жюлиа были получены при изучении итераций квадратичного отображения $z \to z^2 + c$ на множестве комплексных чисел **C**. Впервые теория итераций рациональных отображений комплексной плоскости была развита в работах французских математиков Гастона Жюлиа [5] и Пьера Фату [6] в 1918–1919 г.г. С работами Жюлиа и Фату Мандельброт познакомился в 1945 г., а через 35 лет, заинтересовавшись фракталами, инвариантными относительно нелинейных преобразований, он вернулся к этим работам и, уже с применением компьютера, построил первое изображение множества, получившего впоследствии его имя [2, 4].

Последовавший за этим бурный рост числа работ, посвященных фракталам, относился почти исключительно к исследованию фракталов на множестве комплексных чисел.

[1] Чтобы улучшить разрешение приводимых в статье изображений аналогов множеств Жюлиа и Мандельброта некоторые рисунки сделаны цветными. Вариант статьи с цветными иллюстрациями может быть получен (в свободном доступе) на интернет сайте журнала по адресу: http:// www.polynumbers.ru/section.php?lang=ru&genre=3

Но, как известно, у множества комплексных чисел $\mathbf{C}$ есть "двойник" – гиперболические (двойные) числа $\mathbf{H}_2$. В то время, как в качестве расширения $\mathbf{C}$ обычно рассматривается некоммутативная алгебра кватернионов $\mathbf{Q}$, для $\mathbf{H}_2$ естественным расширением является коммутативная алгебра $\mathbf{H}_4$ [7]. Коммутативность алгебр $\mathbf{C}$, $\mathbf{H}_2$, $\mathbf{H}_4$ и вообще $\mathbf{H}_n$ – во многом предопределяет разнообразие множества аналитических функций соответствующих переменных, а те, в свою очередь, жестко связаны с разнообразием группы конформных отображений. При этом, коммутативно-ассоциативные гиперкомплексные числа $\mathbf{H}_n$ органично связаны с нетривиальными финслеровыми геометриями с метрикой Бервальда-Моора и видятся, возможно не менее перспективными с точки зрения физических приложений, чем обычные комплексные числа [8]. В свете сказанного можно надеяться, что на $\mathbf{H}_2$, также как и на $\mathbf{C}$, могут существовать фрактальные аналоги множеств Мандельброта и Жюлиа.

В настоящей работе представлены некоторые предварительные результаты, обосновывающие высказанное предположение.

Первые попытки построения фракталов на H_2

Число работ, посвященных двойным числам, в мировой научной литературе очень невелико. Еще меньше работ, ставящих перед собой задачу построения и исследования фракталов на плоскости двойной переменной. Возможно, наиболее показательной в этом отношении, выглядит серия статей в American Journal of Physics, последовавшая за статьей [9], в которой автор "открывает" двойные числа (в статье используется термин перплексы ("perplex")) и отмечает удобство их применения в релятивистской физике. Перплексами называются числа вида $a + jb$, где $a, b \in \mathbf{R}$, и j – мнимая единица, такая, что $j^2 = 1$. Данная работа повлекла за собой серию публикаций [10–14] в которых поднятая в [9] тема получила дальнейшее развитие. В [10–11] отмечается, что перплексы можно рассматривать в качестве частного случая, так называемых, бинарных чисел $R_{\alpha\beta} = \{a + be \mid a,\ b \in \mathbf{R},\ e \notin \mathbf{R},\ e^2 = \alpha + \beta e\}$, для которых наиболее важными случаями являются: $\alpha = -1,\ \beta = 0$ – комплексные числа, $\alpha = 1,\ \beta = 0$ – перплексы (двойные числа) и $\alpha = 0,\ \beta = 0$ – дуальные числа.

Подход развитый в [9–11] нельзя назвать новым. Задолго до появления работ [9–11] подобное рассмотрение можно было встретить, например, в книгах Кантора и Солодовникова [12], И. М. Яглома [13]. Позже в том же журнале в статье *The perplex numbers are in fact the binary numbers* [14] приводится ссылка на немецкое издание [15] книги Кантора и Солодовникова [12].

В рассмотренной серии публикаций, возможно впервые, была поставлена задача построения фракталов на $\mathbf{H}_2$. В 1989 году Senn в своей статье *The Mandelbrot set for binary numbers* [16] показал, что в случае квадратичного отображения $z \to z^2 + c$, где $z, c \in \mathbf{H}_2$, множество параметров c для которых итеративная последовательность является ограниченной, представляет собой квадрат с вершинами $(-2, 0)$ и $\left(\frac{1}{4},\ 0\right)$. Это множество он назвал перплексным множеством Мандельброта (perplex Mandelbrot set).

В [17–18] Metzler предпринял первые попытки описания формы "перплекс"-множества Мандельброта в точных координатах на плоскости двойной переменной: квадрат с длиной стороны $\frac{9}{8}\sqrt{2}$, центром $\left(-\frac{7}{8},\ 0\right)$ и диагональю $\left[-2,\ \frac{1}{4}\right]$.

Независимо, Artzy в статье *Dynamics of quadratic functions in cycle plane* [19] представил подобные результаты о форме множества Мандельброта на плоскости двойной переменной, а также показал, соответствующие множества Жюлиа имеют форму прямоугольника.

Необходимо отметить, что в упомянутых работах на $\mathbf{H}_2$ один к одному переносились методы, используемые на комплексной плоскости. Полученные при этом результаты –

изображения аналогов множеств Мандельброта и Жюлиа в виде квадрата и прямоугольника, соответственно – показаны на рис. 1.

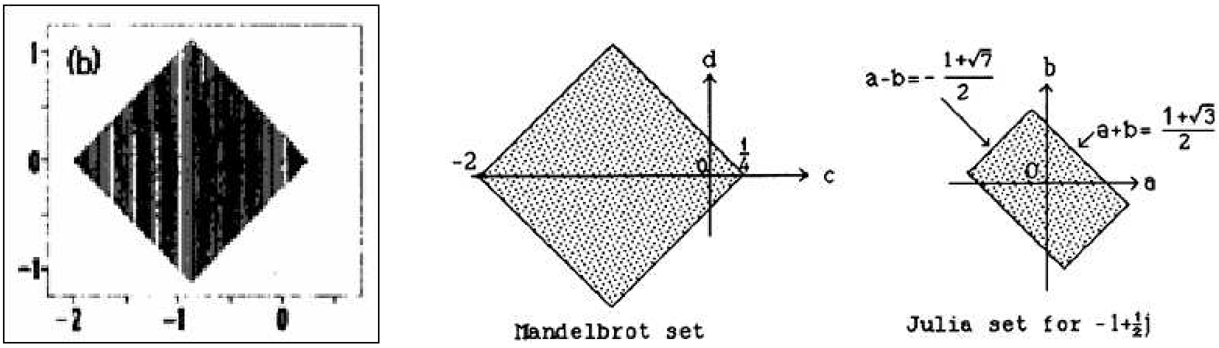

Рис. 1. Примеры аналогов множеств Мандельброта и Жюлиа: слева одно из первых изображений множества Мандельброта на $\mathbf{H}_2$ *[16]; справа множества Мандельброта и Жюлиа, полученные в работе [19]*

Рассматривая рис. 1 необходимо отметить полное отсутствие каких-либо признаков фрактальности: мы действительно, имеем множества в виде квадрата и прямоугольника с совершенно гладкими границами и полным отсутствием каких-либо признаков внутренней структуры. Говорить о масштабной инвариантности, о подобии части и целого, применительно к данным фигурам, не приходится. То, что представлено на рис. 1, можно было бы назвать областями сходимости или устойчивости итераций квадратичного отображения на плоскости двойной переменной, но никак не фракталами.

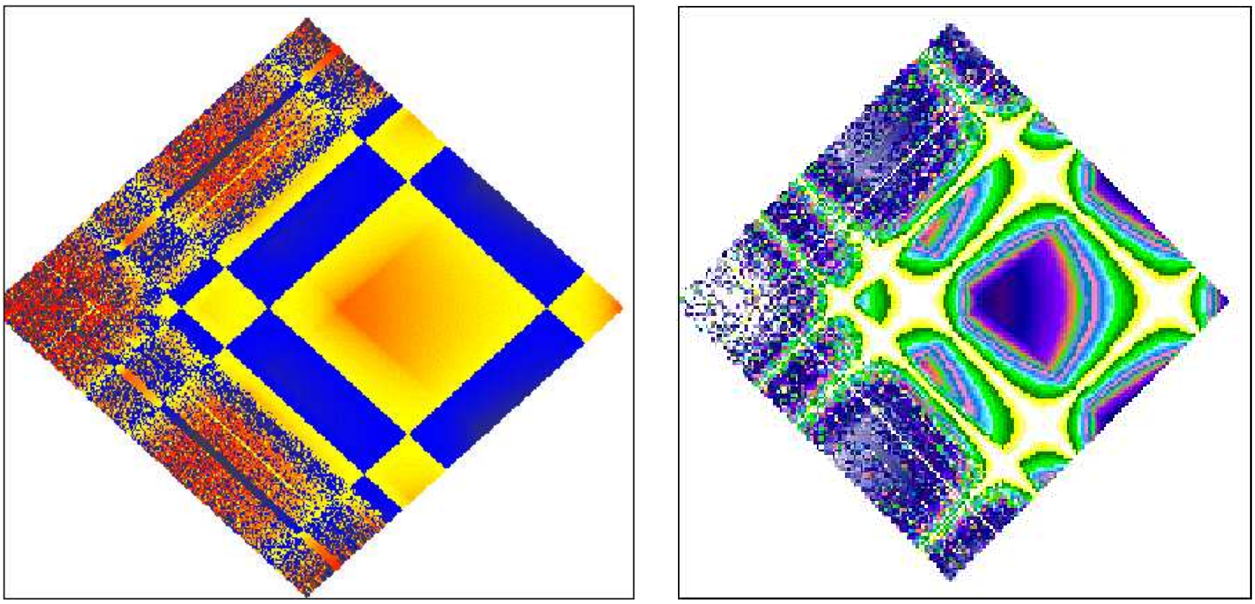

Рис. 2. Аналоги множества Мандельброта для $\mathbf{H}_2$*. Скорость ухода точки на бесконечность оценивалась по величине действительной и мнимой части, а), и по величине модуля двойного числа, б)*

Рассмотренные работы и приведенные на рис. 1 изображения очень показательны. В мировом научном сознании бытует представление о фракталах на $\mathbf{H}_2$ именно, как о квадратах и прямоугольниках.

В самом начале нашей работы по построению фракталов нами также были построены аналоги множества Мандельброта для двойных чисел [20]. Результаты этого построения представлены на рис. 2. Несмотря на то, что к приведенным фигурам применимы те же упреки в отсутствии фрактальности, что и для "черного квадрата" здесь, тем не менее, видна некоторая нетривиальная структура полученных множеств, которая и вдохновила нас на дальнейшие поиски и продолжение работы.

Фрактальный аналог множества Жюлиа на H_2

Рассмотренный в [21] пример построения гиперболической границы множества Жюлиа показывает необходимость использования алгоритмов, отличных от алгоритмов "прямой итерации". В случае двойных чисел наиболее привлекательным является алгоритм, который для получения результата требует минимального количества итераций. Идеальным представляется случай, когда мы можем непосредственно вычислять точки границы множества не используя итераций. В определенном смысле этим требованиям удовлетворяет метод обратной итерации [22]. Результат применения этого метода для построению множества Жюлиа показан на рис. 3.

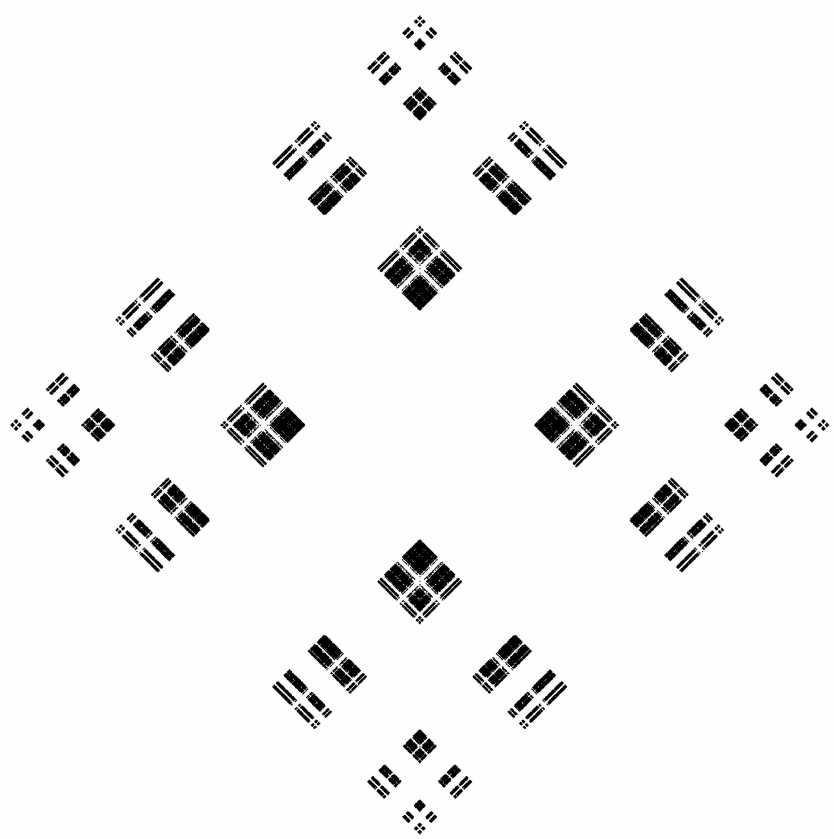

Рис. 3. Множество Жюлиа полученное с использованием метода обратных итераций

Как можно заметить из внимательного рассмотрения показанного на рис. 3 множества, каждая его часть повторяет структуру множества в целом, т. е., подобное множество можно рассматривать как фрактал. Более наглядно фрактальность этого множества демонстрирует рис. 4. Здесь квадраты показывают часть множества, которая на следующем рисунке (указан стрелкой) показана в увеличенном масштабе. Также необходимо отметить симметрию полученного множества: оно состоит из четырех идентичных копий, которые воспроизводятся в показанном на рис. 4 процессе увеличения.

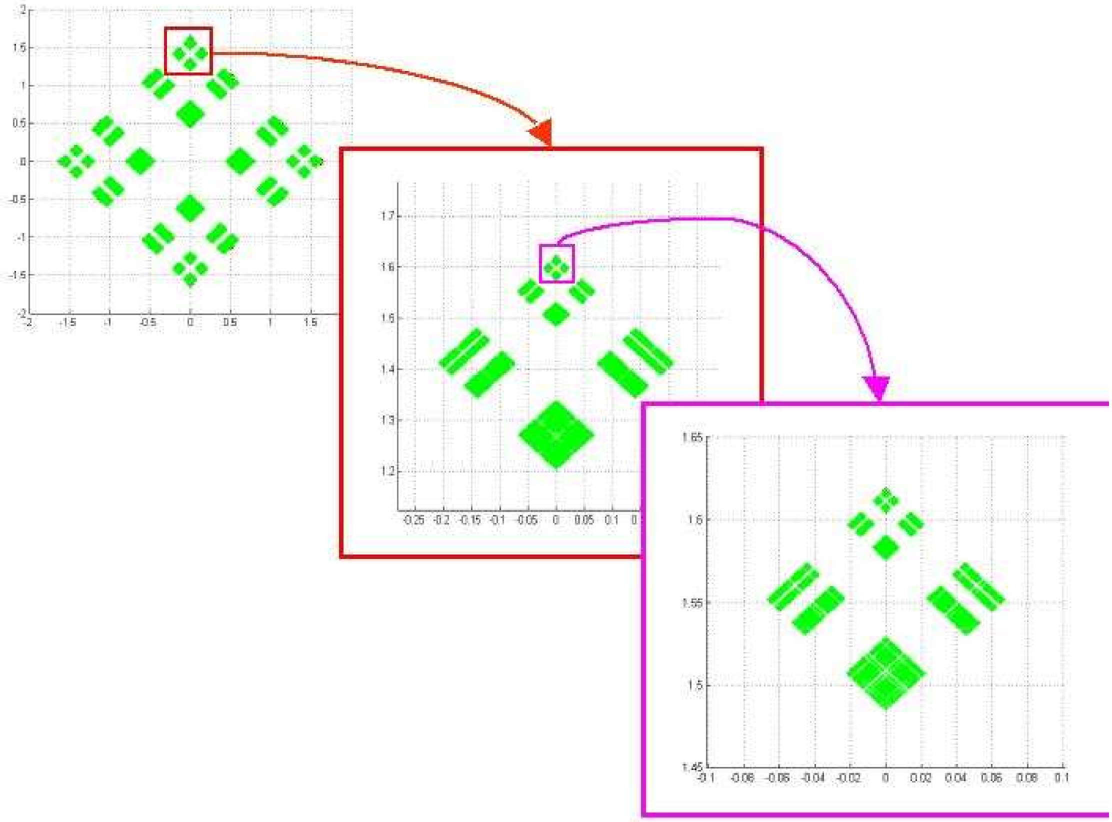

Рис. 4. Фрактальная структура множества Жюлиа, представленного на рис. 3

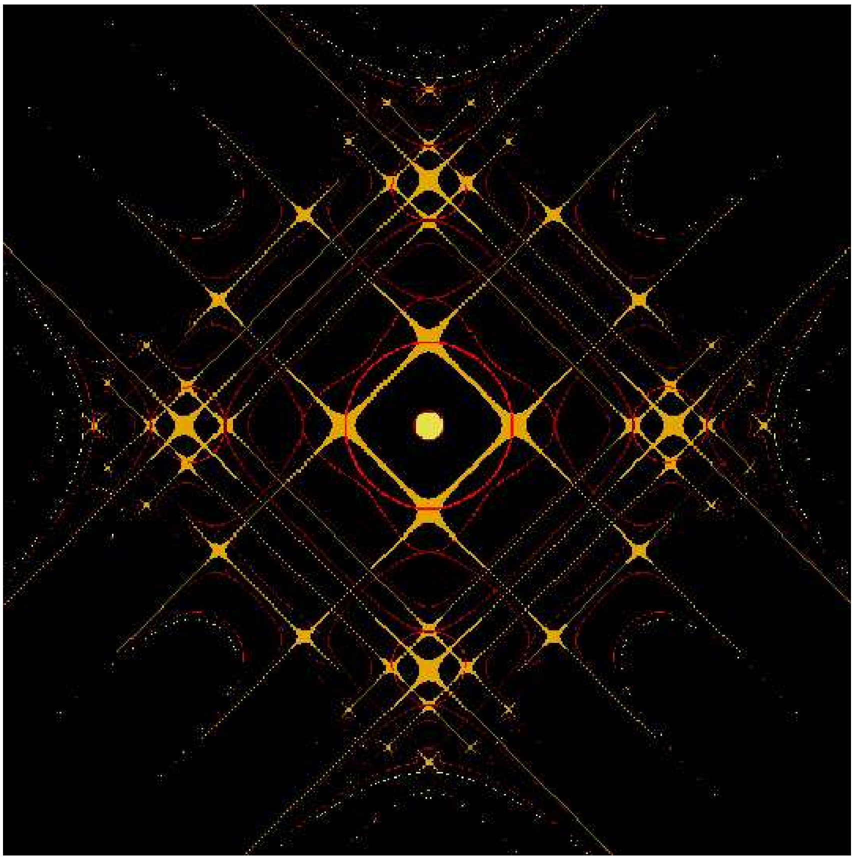

Рис. 5. Фрактальное множество Жюлиа

Главный вывод, который следует из представленных на рис. 3–4 изображений – фрактальность полученного множества Жюлиа. Другой вариант множества Жюлиа (полученного при другом значении параметра) приведен на рис. 5. При надлежащем увеличении (на рис. 5 не показано) также возможно проиллюстрировать его фрактальную природу.

Необходимо отметить, что представленные изображения необходимо рассматривать как неокончательные. Существуют еще целый ряд вопросов и нерешенных проблем, как технического так и фундаментального характера, учет которых в дальнейшем, может повлиять на форму получаемых множеств Жюлиа. Обсуждение этих проблем в настоящей работе не предполагается.

Аналог множества Мандельброта для двойных чисел

Тесная связь двойных чисел с релятивистской физикой [23] и наличие делителей нуля на плоскости двойной переменной приводят к тому, что в зависимости от значения квадрата модуля двойного числа $z = p + jq$ принято рассматривать двойные числа как пространственноподобные ($p^2 - q^2 > 0,\ p^2 > q^2$), времениподобные ($p^2 - q^2 < 0,\ p^2 < q^2$) и светоподобные ($p^2 - q^2 = 0,\ p^2 = q^2$) [24]. Графически, разделение плоскости двойной переменной на пространственно-, времени- и светоподобные числа демонстрирует рис. 6.

Следовательно мы можем строить аналог множества Мандельброта для следующих, различающихся случаев: раздельно для пространственноподобных и времениподобных чисел и для случая, когда подобного различия не производится. Впервые, насколько нам известно, идея подобного "раздельного" построения множества Мандельброта была высказана в [25].

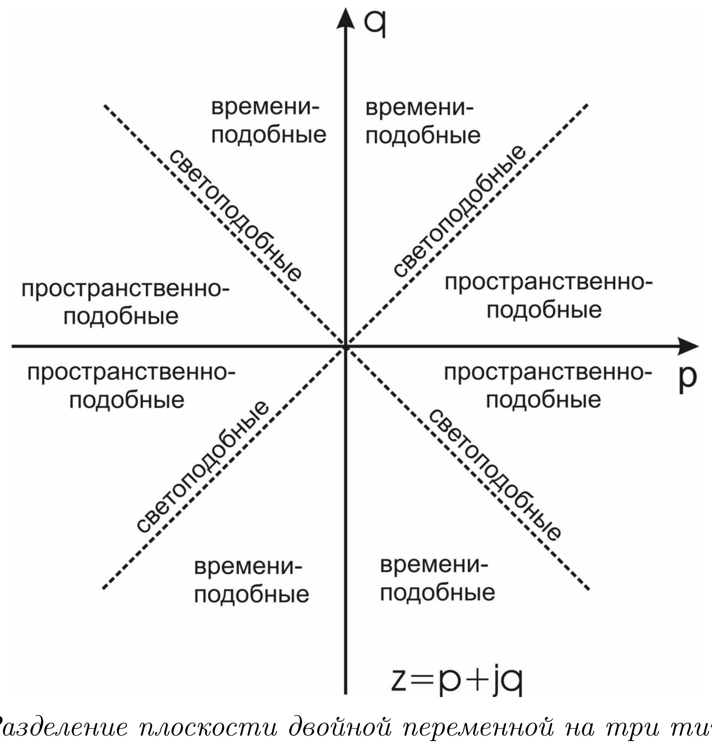

Рис. 6. Разделение плоскости двойной переменной на три типа чисел: пространственноподобные, времениподобные и светоподобные

Случай, когда различия между пространственноподобными и времениподобными числами не учитываются при построении, представлен на рис. 7 *а*). Сюда же относятся результаты построений, приведенные на рис. 1.

Рис. 7. Варианты аналогов множества Мандельброта не обладающие свойством фрактальности: а) случай, когда различия между пространственноподобными и времениподобными числами не учитываются при построении; б) времениподобный аналог множества Мандельброта

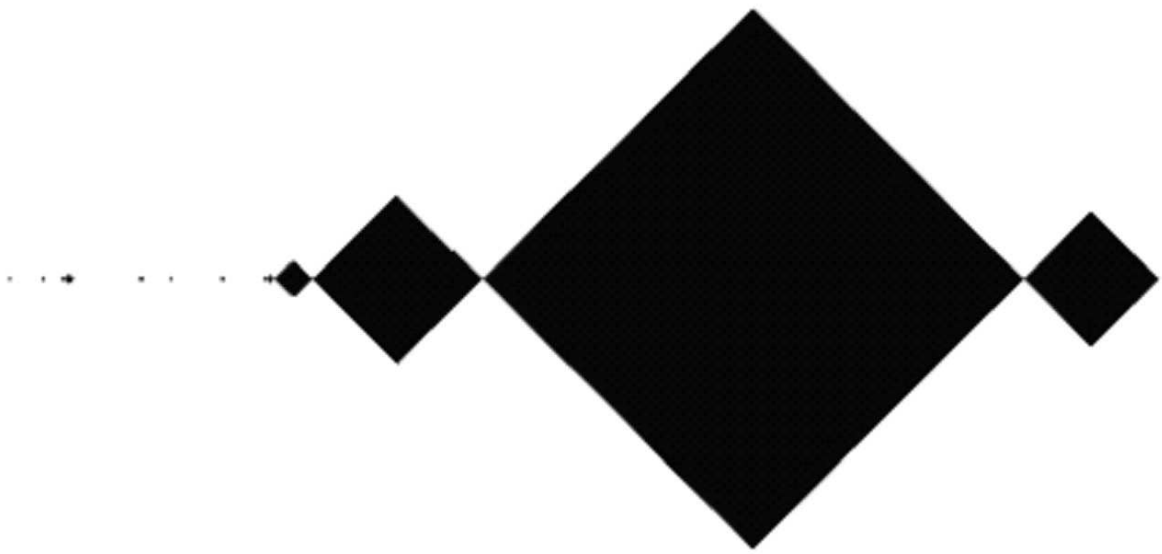

Рис. 8. Пространственноподобное множество Мандельброта

По отношению к времениподобному множеству Мандельброта, рис. 7 *б*), можно повторить все то же, что и по отношению к множеству, показанному на рис. 7 *а*): в данном случае мы не наблюдаем никаких признаков фрактальности. Но, внимательное рассмотрение пространственноподобного множества Мандельброта, рис. 8, показывает, что оно имеет нетривиальную структуру. Построим фрагменты данного множества последовательно переходя ко все более мелким масштабам. Схема такого каскада с последовательно уменьшающимся масштабом показана на рис. 9.

Характерной особенностью показанных на рис. 8–9 изображений является то, что на каждом их них присутствует уменьшенная, почти точная копия исходного множества, т. е. строение данного множества соответствует принципу подобия между частью и целым и в силу этого может рассматриваться как фрактал. Следовательно, мы можем утверждать о существовании фрактального множества Мандельброта на $\mathbf{H}_2$. Более отчетливо данное утверждение иллюстрирует рис. 10 на котором приведен каскад увеличений аналогичный показанному на рис. 9. Главное отличие от рис. 9 – введение специальной кодировки при помощи цветных прямоугольников, примыкающих к сторонам множества Мандельброта. Подобный прием позволяет визуализировать структуру множества, которая при обычном изображении (как это показано на рис. 9) остается невидимой. Точки в которых соприкасаются вершины прямоугольников, лежащих по разные стороны от оси симметрии фигуры являются "зародышами" новых копий множества Мандельброта в точности повторяющие форму исходного множества.

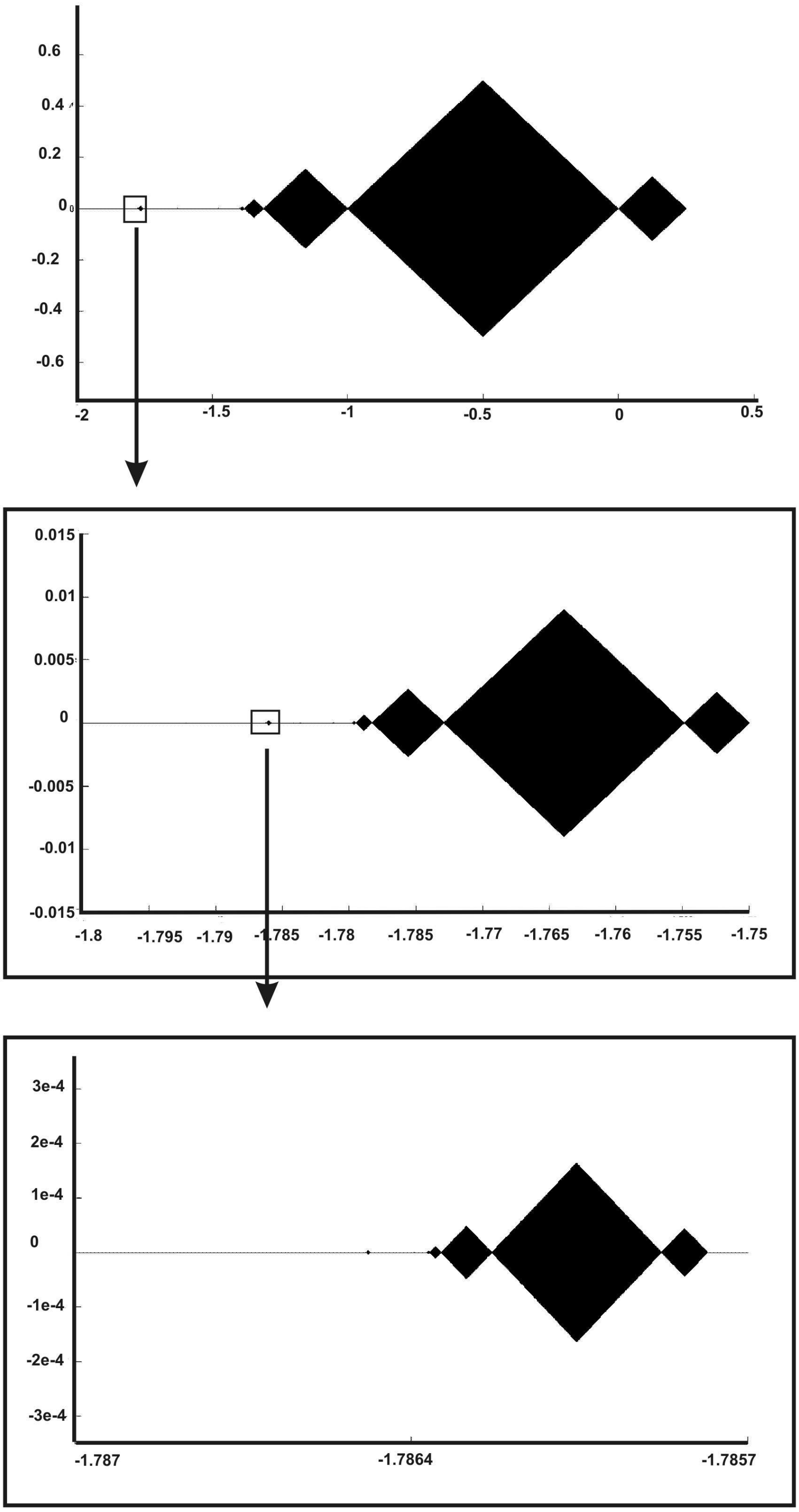

Рис. 9. Структура пространственноподобного множества Мандельброта. Нижние рисунки соответствуют части верхних рисунков, выделенных прямоугольником

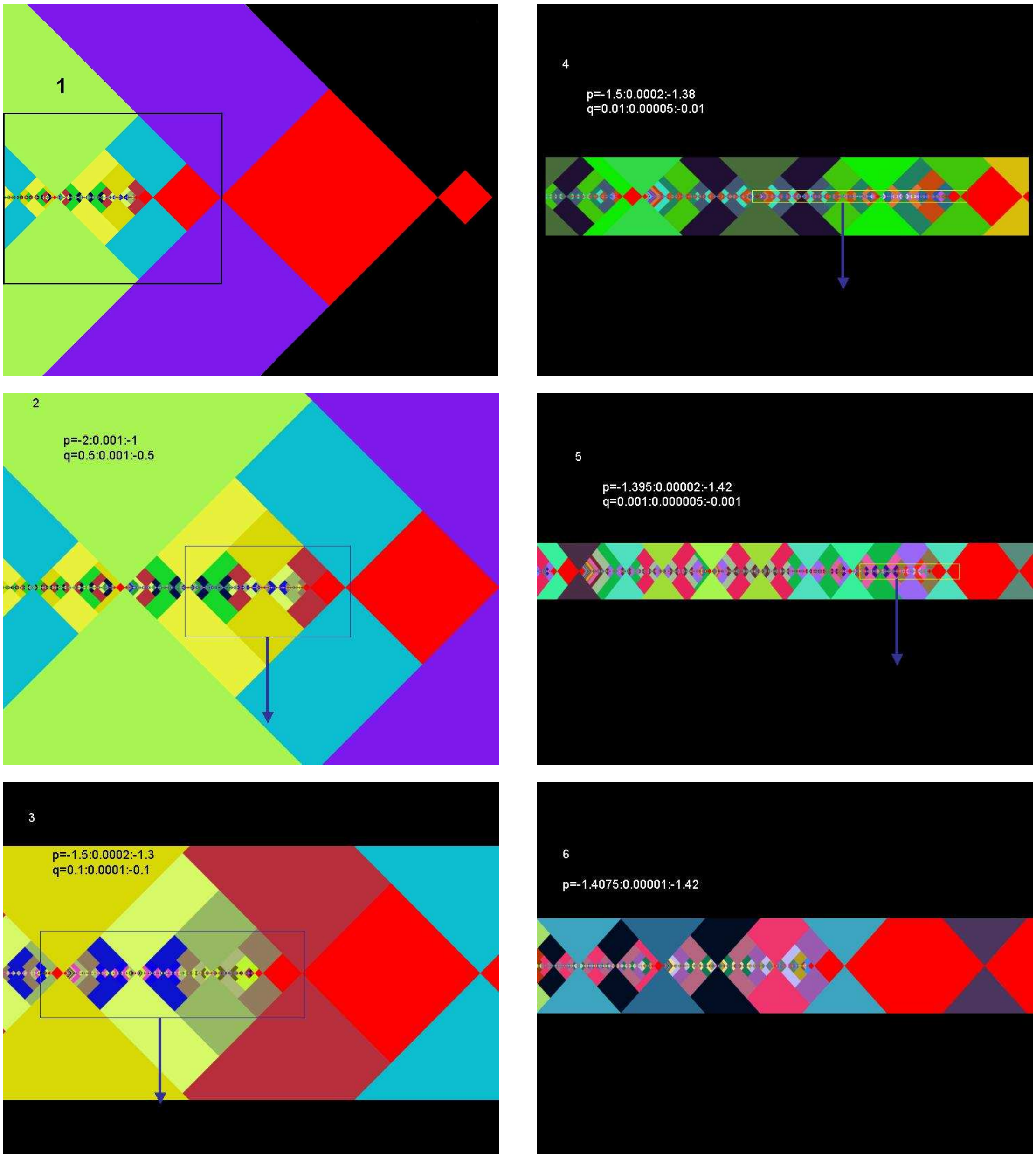

Рис. 10. Каскад увеличенных фрагментов множества Мандельброта с применением цветного кодирования, помогающего визуализировать его структуру. Стрелки и номера рисунков показывают последовательность переходов между ними. Размеры прямоугольника на каждом рисунке характеризуются действительной p и мнимой q частью двойного числа, а также шагом используемой решетки

Заключение

Главным результатом представленного исследования мы считаем демонстрацию фрактальности аналогов множеств Мандельброта и Жюлиа, получаемых в результате итераций квадратичного отображения на множестве двойных чисел, $\mathbf{H}_2$. Полученные результаты противоречат часто высказываемому мнению, что на множестве двойных чисел невозможно получение фигур отличных от квадрата или прямоугольника.

С другой стороны, как уже отмечалось, представленные изображения фрактальных множеств являются предварительными в силу ряда проблем, как технического, так и принципиального характера.

Литература

[1] Б. Мандельброт. Фрактальная геометрия природы. М., Институт компьютерных исследований, 2002 - 656 с.
[2] Бенуа Б. Мандельброт. Фракталы и возрождение теории итераций. // Х. -О. Пайтген, П. Рихтер Красота фракталов. Образы комплексных динамических систем. М., Мир, 1993, с. 131–140.
[3] Б. Мандельброт, Р. Л. Хадсон. (Не)послушные рынки: фрактальная революция в финансах. М., Издательский дом "Вильямс", 2006 - 400 с.
[4] В.А̇. Шлык. Он оставил царапину на поверхности всего: к 80-летию Бенуа Мандельброта. // Известия Челябинского научного центра, вып. 3 (29), 2005 - с. 107–124.
[5] Gaston Julia. Memoire sur l'Iteration des Fonctions Rationnelles // Journal de Mathematiques Pures et Appliquees, 4 (83), 1918 - pp. 47–245.
[6] Pierre Fatou. Sur les Equations Fonctionnelles // Bulletin Societe. Math. France, Vol. 47, 1919 - pp. 161–271.
[7] Д. Г. Павлов Обобщение аксиом скалярного произведения. // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 1 (1), 2004 - с. 5–19.
[8] Г. И. Гарасько Теория поля и финслеровы пространства. // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 3 (6), 2006 - с. 6–20.
[9] P. Fjelstad. Extending special relativity via the perplex numbers. // American Journal of Physics, 1986, Vol. 54, No. 5 - pp. 416–422.
[10] A. Ronveaux, About perplex numbers. // American Journal of Physics 1987, Vol. 55, No. 5 - p. 392.
[11] W. Band. Comments on Extending special relativity via the perplex numbers. // American Journal of Physics 1988, Vol. 56, No. 5 - p. 469.
[12] И. Л. Кантор, А. С. Солодовников Гиперкомплексные числа. М., Наука, 1973 - 144 с.
[13] И. М. Яглом. Комплексные числа и их применение в геометрии. М., Эдиториал УРСС, 2004 - 192 с.
[14] V. Majernik. The perplex numbers are in fact the binary numbers. // American Journal of Physics, 1988, Vol. 56, No.8
[15] I. L. Kantor, A. S. Solodownikow. Hyperkomplexe Zahlen. Teuberg, Leipzig, 1978.
[16] P. Senn. The Mandelbrot set for binary numbers. // The American Journal of Physics, 1989, 58, 1018.
[17] W. Metzler. The "mystery" of the quadratic Mandelbrot set. // The American Journal of Physics, 1994, 62, 813–814.
[18] W. Metzler, A. Brelle, K. D. Schmidt. Nonanalytic dynamics for generating the mandelbrot set: A tutorial. // International Journal of Bifurcation and Chaos, 1992, 2, 241–250.
[19] R. Artzy. Dynamics of quadratic functions in cycle planes. // Journal of Geometry, 1992, 44, 26–32.
[20] Д. Г. Павлов, М. С. Просандеева, В. А. Панчелюга. О построении аналога множества Мандельброта на плоскости двойных чисел. // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. №1, (7), том 4, 2007, с. 93–97.
[21] Д. Г. Павлов, М. С. Панчелюга, В. А. Панчелюга. О форме аналога множества Жюлиа при нулевом значении параметра на плоскости двойной переменной. // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. 2009, №1, (11), 2009 (этот номер).
[22] Р. Кроновер. Фракталы и хаос в динамических системах. М., Техносфера, 2006 - 488 с.
[23] Д. Г. Павлов. Философские и математические основания финслеровых расширений теории относительности. // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. 2005, 2 (4), с. 12–18.
[24] N. A. Borota, E. Flores, T. J. Osler. Spacetime numbers. The easy way. // Mathematics and Computer Education, 2000, Vol. 34, No. 2 - pp. 159–168.
[25] B. Fauser. Clifford Algebraic Remark on the Mandelbrot Set of Two-Component Number Systems. // Adv. Appl. Clifford Algebras, 1996, 6, 1–26

On fractality of Mandelbrot and Julia sets on double-numbers plane

Pavlov D. G.[1], Panchelyuga M. S.[1,2], Malykhin V. A.[1], Panchelyuga V. A.[1,2]

(1) – Research Institute of Hypercomplex Systems in Geometry and Physics, Friazino, Russia,
(2) – Institute of Theoretical and Experimental Biophysics RAS, Pushchino, Russia
panvic333@yahoo.com

The paper presents results of numerical calculation of analogues of Mandelbrot and Julia sets on double-numbers plane and for the first time demonstrates their fractal character. Also a short revue of works, which devoted to building of double-numbers Mandelbrot and Julia sets is presented.

Key words: fractals, Julia set, Mandelbrot set, double numbers.