ВАРИАНТЫ ГИПЕРКОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ, ОПИСЫВАЮЩИХ РАВЕНСТВА, СООТВЕТСТВУЮЩИЕ НЕРАВЕНСТВАМ ШВАРЦА–КОШИ–БУНЯКОВСКОГО

Л. Г. Соловей

lgsolovey@gmail.com

Рассмотрены различные варианты гиперкомплексных систем (квазикватернионов), с помощью которых записываются равенства, соответствующие неравенствам Шварца–Коши–Буняковского. Эти варианты различны для систем с комплексными коэффициентами, но для систем с действительными коэффициентами совпадают. Изучаются характерные свойства рассматриваемых вариантов.

Ключевые слова: гиперкомплексные системы, квазикватернионы, неравенства Шварца–Коши–Буняковского.

Введение

Как известно [1], в комплексном n-мерном евклидовом пространстве существуют неравенства Шварца–Коши–Буняковского между скалярными произведениями $(\vec{x},\vec{x})$, $(\vec{y},\vec{y})$ и $(\vec{x},\vec{y})$ векторов $\vec{x},\vec{y}$:

$$|\vec{x}|^2\cdot|\vec{y}|^2 \geqslant |(\vec{x},\vec{y})|^2, \tag{1}$$

где

$$|\vec{x}|^2=(\vec{x},\vec{x}), \qquad |\vec{y}|^2=(\vec{y},\vec{y}), \tag{2}$$

причем

$$(\vec{x},\vec{y})=\sum_{i=1}^{n} x_i y_i^*, \tag{3}$$

x_i, y_i – декартовы координаты векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$. В статье [2], в частности, установлены равенства, соответствующие указанным неравенствам, и найдены некоторые гиперкомплексные системы, с помощью которых эти равенства могут быть записаны. Эти равенства имеют вид:

$$|\vec{x}|^2\cdot|\vec{y}|^2-|(\vec{x},\vec{y})|^2=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1,\,(i\neq k)}^{n}|x_iy_k-x_ky_i|^2 \tag{4}$$

$\bigl($в правой части – сумма $C_n^2=\frac{n(n-1)}{2}$ различных слагаемых $|x_iy_k-x_ky_i|^2\bigr)$.

Сделаем некоторые замечания.

1. При $n=3$ выражения $x_iy_k-x_ky_i$ являются компонентами векторного произведения $[\vec{x},\vec{y}]$:

$$[\vec{x},\vec{y}]=(x_2y_3-x_3y_2)i_1+(x_3y_1-x_1y_3)i_2+(x_1y_2-x_2y_1)i_3. \tag{5}$$

В случае $n\neq 3$ величины $x_iy_k-x_ky_i$ также могут быть истолкованы как $\frac{n(n-1)}{2}$ компонент векторного произведения $[\vec{x},\vec{y}]$; орты i_k могут быть выбраны следующим образом: выпишем последовательность целых чисел $1,2,...n$; комбинации $1,2$ соответствует орт i_3; $2,3\to i_4$; $3,4\to i_5$; ... $\to n$ ортов; затем номера выбираются через один: $1,3\to i_{n+1}$; $2,4\to i_{n+2}$;... до исчерпания; затем через 2: $1,4$; $2,5\to$ и т. д., пока не наберется $n'=\frac{n(n-1)}{2}$ различных слагаемых. Пример: $n=5$. Имеем:

$$(x_1y_2-x_2y_1)i_3,\ (x_2y_3-x_3y_2)i_4,\ (x_3y_4-x_4y_3)i_5,\ (x_4y_5-x_5y_4)i_1,\ (x_5y_1-x_1y_5)i_2,$$

$$(x_1y_3 - x_3y_1)i_6,\ (x_2y_4 - x_4y_2)i_7,\ (x_3y_5 - x_5y_3)i_8,\ (x_4y_1 - x_1y_4)i_9,\ (x_5y_2 - x_2y_5)i_{10}.$$

Теперь равенство (4) запишется следующим образом:

$$|\vec{x}|^2|\vec{y}|^2 - |(\vec{x},\vec{y})|^2 = |[\vec{x},\vec{y}]|^2, \tag{6}$$

или

$$|\vec{x}|^2|\vec{y}|^2 = |(\vec{x},\vec{y})|^2 + |[\vec{x},\vec{y}]|^2. \tag{6$'$}$$

Подставим в (6) вектор $\vec{y} = \vec{y}^*$ и заметим, что $|\vec{y}|^2 = |\vec{y}^*|^2$. Тогда

$$|\vec{x}|^2|\vec{y}|^2 - |(\vec{x},\vec{y}^*)|^2 = |[\vec{x},\vec{y}^*]|^2, \tag{6$''$}$$

причем

$$(\vec{x},\vec{y}^*) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i. \tag{7}$$

Э. Картан [3] вводил скалярное произведение

$$(\vec{x},\vec{y})_c = (\vec{x},\vec{y}^*) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i. \tag{8}$$

Введем также векторное произведение согласно формуле

$$[\vec{x},\vec{y}]_{c,m} = (x_i y_k^* - x_k y_i^*)i_m, \tag{9}$$

и назовем это векторное произведение *картановым.* Тогда формула (6$''$) может быть записана в виде

$$|\vec{x}|^2|\vec{y}|^2 - |(\vec{x},\vec{y})_c|^2 = |[\vec{x},\vec{y}]_c|^2. \tag{10}$$

Соответствующее неравенство Шварца–Коши–Буняковского запишется:

$$|\vec{x}|^2|\vec{y}|^2 - |(\vec{x},\vec{y})_c|^2 \geqslant 0. \tag{11}$$

Ниже будет продолжено предпринятое в работе [2] изучение гиперкомплексных систем, соответствующих неравенствам (1), (11) и равенствам (4), или (6), и (10).

§I. Квазикватернионы

В рассмотренных в [2] квазикватернионах дано их определение, которое нуждается в расширении с тем, что в его рамках можно было увеличить число изучаемых вариантов.

Рассмотрим гиперкомплексную систему

$$a = x_0 + \vec{a}, \tag{12}$$

где $\vec{a}$ – вектор в $n' = \frac{n(n-1)}{2}$-мерном пространстве,

$$\vec{a} = \sum_{m=1}^{n'} x_m i_m, \tag{13}$$

$$\vec{x} = \vec{a}|\ x_{n+1} = x_{n+2} = ... = x_{n'} = 0, \tag{14}$$

i_m – орты.

Определим квазикватернионы как гиперкомплексную систему, для которой:

1.

$$i_m^2 = -1; \tag{15}$$

2. а.

$$i_k i_l = -i_l i_k, \quad k \neq l, \quad 1 \leqslant k \leqslant n, \quad 1 \leqslant l \leqslant n; \tag{16}$$

$$i_k i_l = i_m, \quad m \neq k, \quad m \neq l; \quad \text{при} \quad m \neq m', \quad (k,l) \neq (k',l'),$$
$$\text{причем при} \quad n = 3 \quad i_1 i_2 = i_3, \quad i_2 i_3 = i_1, \quad i_3 i_1 = i_2;$$
$$\text{при} \quad n > 3 \quad i_1 i_2 = i_3, ..., i_{n-1}, \quad i_n = i_1, \quad i_n i_1 = i_2; \quad i_1 i_2 = i_{n+1}, ...$$
$$\text{до повторения}; \quad i_1 i_4 = ... \qquad \text{до повторения и т. д., пока не наберется}$$
$$n' = \frac{n(n-1)}{2} \qquad \text{таких произведений.} \tag{17}$$

Пример: $n = 5$. Имеем: $i_1 i_2 = i_3$, $i_2 i_3 = i_4$, $i_3 i_4 = i_5$, $i_4 i_5 = i_1$, $i_5 i_1 = i_2$, $i_1 i_3 = i_6$, $i_2 i_4 = i_7$, $i_3 i_5 = i_8$, $i_4 i_1 = i_9$, $i_5 i_2 = i_{10}$ – всего $\frac{5*4}{2} = 10$ произведений.

б.

$$i_k i_m = 0 \qquad \text{при} \quad k > n \quad \text{или} m > n, \quad \text{причем} k \neq m. \tag{18}$$

в. Для каждого элемента a имеется сопряженный элемент a^+, т. е. такой, что

$$(a^+)^+ = a, \tag{19}$$

$$aa^+ = a^+ a = \sum_{m=0}^{n'} |x_m|^2 = (a,a), \qquad n' = \frac{n(n-1)}{2}; \tag{20}$$

$$(a+b)^+ = a^+ + b^+. \tag{20$'$}$$

При этом выполнение соотношения $(ab)^+ = b^+ a^+$ не обязательно для комплексных пространств. Легко видеть, что при $n = 3$ в действительном пространстве квазикватернион является кватернионом.

§2. Некоторые варианты квазикватернионов и их свойства

1. В статье [2] были рассмотрены квазикватернионы со следующим законом умножения, который мы запишем в векторной форме. Пусть a и b – квазикватернионы, причем

$$a \cdot b = x_0 y_0^* - (\vec{a}, \vec{b}) + \vec{a} y_0 + x_o \vec{b} + [\vec{x}, \vec{y}]. \tag{21}$$

Элементам a и b при этом соответствуют сопряженные элементы

$$a^+ = x_0 - \vec{a}, \qquad b^+ = y_0 - \vec{b}. \tag{22}$$

Действительно,

$$(a^+)^+ = a, \tag{19}$$

и при $b = a^+$ имеем, согласно (21), (22),

$$aa^+ = |x_0|^2 + (\vec{a}, \vec{a}) + \vec{a} x_0 - x_o \vec{a} + [\vec{x}, \vec{x}] = (a,a) = \sum_{m=0}^{n'} |x_m|^2, \tag{20}$$

поскольку, как легко видеть, $[\vec{x}, \vec{x}] = 0$. Легко также видеть, что

$$a^+ a = aa^+.$$

Этим квазикватернионам, которые в [2] названы правыми, соответствуют квазикватернионы названные в [2] левыми, с законом умножения

$$(ab)_l = x_0^* y_0 - (\vec{a}^*, \vec{b}^*) + x_0 \vec{b} + [\vec{x}, \vec{y}] + \vec{a} y_0. \tag{23}$$

Легко видеть, что

$$(\vec{a}^*, \vec{b}^*) = \sum_{m=1}^{n'} x_m^* y_m, \qquad n' = \frac{n(n-1)}{2}. \tag{24}$$

$(\vec{a}^*, \vec{b}^*)$ может быть названо левым скалярным произведением,

$$(\vec{a}^*, \vec{b}^*) = (\vec{a}, \vec{b})_l. \tag{25}$$

По-прежнему $\vec{a}^+, \vec{b}^+$ определяются формулой (22). В [2] показано, что

$$(ab)^+ \neq b^+ a^+ \tag{26}$$

но

$$(ab)^+ = (b^+ a^+)_l. \tag{27}$$

Покажем также, что

$$\big((ab)_l\big)^+ = b^+ a^+. \tag{28}$$

Имеем, согласно (21), (22), (23)

$$\big((ab)_l\big)^+ = x_0^* y_0 - (\vec{a}^*, \vec{b}^*) - \vec{a} y_0 - x_0 \vec{b} - [\vec{x}, \vec{y}], \tag{29}$$

$$b^+ a^+ = y_0 x_0^* - (\vec{b}^*, \vec{a}^*) - \vec{b} x_0 - y_0 \vec{a} + [\vec{y}, \vec{x}]. \tag{30}$$

Но, так как

$$(\vec{a}^*, \vec{b}^*) = (\vec{b}, \vec{a}), \tag{31}$$

$$[\vec{y}, \vec{x}] = -[\vec{x}, \vec{y}], \tag{32}$$

то

$$b^+ a^+ = y_0 x_0^* - (\vec{a}^*, \vec{b}^*) - \vec{b} x_0 - y_0 \vec{a} - [\vec{x}, \vec{y}]. \tag{33}$$

Сравнивая (29) и (33), убеждаемся в том, что

$$\big((ab)_l\big)^+ = b^+ a^+. \tag{28}$$

В статье [2] показано, что

$$|\vec{x} \cdot \vec{y}|^2 = |\vec{x}|^2 |\vec{y}|^2. \tag{34}$$

Из формулы (21) следует, в частности:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = -(\vec{x}, \vec{y}) + [\vec{x}, \vec{y}]. \tag{35}$$

Далее,

$$|\vec{x} \cdot \vec{y}|^2 = |(\vec{x}, \vec{y})|^2 + |[\vec{x}, \vec{y}]|^2. \tag{36}$$

Формула (34) получается из сравнения формул (36) и (6′). Точно так же из формулы (23) имеем:

$$(\vec{x} \cdot \vec{y})_l = -(\vec{x}^*, \vec{y}^*) + [\vec{x}, \vec{y}], \tag{37}$$

$$|(\vec{x} \cdot \vec{y})_l|^2 = |(\vec{x}^*, \vec{y}^*)|^2 + |[\vec{x}, \vec{y}]|^2. \tag{38}$$

Но так как

$$|(\vec{x}^*, \vec{y}^*)|^2 = |(\vec{x}, \vec{y})|^2, \tag{39}$$

то

$$|(\vec{x} \cdot \vec{y})_l|^2 = |(\vec{x}, \vec{y})|^2 + |[\vec{x}, \vec{y}]|^2, \tag{40}$$

т. е.

$$|(\vec{x} \cdot \vec{y})_l|^2 = |\vec{x} \cdot \vec{y}|^2, \tag{41}$$

$$|(\vec{x}\vec{y})_l|^2 = |\vec{x}|^2 |\vec{y}|^2. \tag{42}$$

Формулы (36) и (40) являются равенствами, соответствующими неравенствам Шварца–Коши–Буняковского, но с записанными с помощью квазикватернионов. Для более единообразного рассмотрения различных вариантов будем их законам умножения приписывать номера. Так, произведения $a \cdot b$ и $(a \cdot b)_l$ будем также обозначать как $(ab)_1$ и $(ab)_2$.

Перейдем к рассмотрению других вариантов квазикватернионов. Рассмотрим прежде всего квазикватернионы, в которых:

1. В формуле (21) вместо $y_0, \vec{b}, \vec{y}$ подставляются $y_0^*, \vec{b}^*, \vec{y}^*$; тогда получается квазикватернион с законом умножения

$$(a \cdot b)_3 = x_0 y_0 - (\vec{a}, \vec{b}^*) + \vec{a} y_0^* + x_0 \vec{b}^* + [\vec{x}, \vec{y}^*]. \tag{43}$$

Легко видеть, что

$$(\vec{a}, \vec{b}^*) = \sum_{i=1}^{n'} x_i y_i, \tag{8$'$}$$

а m-я компонента $[\vec{x}, \vec{y}^*]$ определяется формулой

$$[\vec{x}, \vec{y}^*]_m = (x_i y_k^* - x_k y_i^*) i_m; \tag{9}$$

Произведения (8$'$) и (2), как было указано выше, будем называть картановыми; произведение $(a \cdot b)_3$ и соответствующие квазикватернионы назовем правыми картановыми,

$$(ab)_3 = (ab)_c; \tag{44}$$

2. В формуле (23) вместо $x_0, \vec{a}, \vec{x}$ подставляются $x_0^*, \vec{a}^*, \vec{x}^*$; при этом получается квазикватернион с законом умножения

$$(a \cdot b)_4 = (a \cdot b)_{c,\ l} = x_0 y_0 - (\vec{a}, \vec{b}^*) + \vec{a}^* y_0 + x_0^* \vec{b} + [\vec{x}^*, \vec{y}], \tag{45}$$

или

$$(a \cdot b)_{c,\ l} = x_0 y_0 - (\vec{a}, \vec{b}^*) + \vec{a}^* y_0 + x_0^* \vec{b} + [\vec{x}, \vec{y}^*]^*. \tag{46}$$

В формулу (46) как и в формулу (43), входят картановы скалярное и векторное произведения $(\vec{a}, \vec{b}^*)$ и $[\vec{x}, \vec{y}^*]$.

В качестве сопряженных квазикватернионов в обоих случаях следует принять выражения

$$a^+ = x_0^* - \vec{a}^*. \tag{47}$$

При этом, как и должно быть,

$$(a \cdot a^+)_l = (a^+ a)_l = (a, a^*)_l = (a, a), \tag{48}$$

а также

$$(a \cdot a^+)_{c,\ l} = (a^+ a)_{c,\ l} = (a, a^*)_c = (a, a). \tag{49}$$

Вычисления приводят к формулам, аналогичным формулам (27), (28):

$$\big((ab)_c\big)^+ = (b^+a^+)_{c,\ l}, \tag{50}$$

$$\big((ab)_{c,\ l}\big)^+ = (b^+a^+)_c. \tag{51}$$

Полагая в формуле (43) $a = \vec{x}$, $b = \vec{y}$, получим:

$$(\vec{x}\cdot\vec{y})_c = -(\vec{x},\vec{y}^*) + [\vec{x},\vec{y}^*], \tag{52}$$

$$|(\vec{x}\cdot\vec{y})_c|^2 = |(\vec{x},\vec{y}^*)|^2 + |[\vec{x},\vec{y}^*]|^2. \tag{53}$$

Сравнение формул (53) и ($6''$) дает

$$|(\vec{x}\cdot\vec{y})_c|^2 = |\vec{x}|^2|\vec{y}|^2. \tag{54}$$

Точно так же из формулы (46) следует

$$(\vec{x}\cdot\vec{y})_{c,\ l} = -(\vec{x},\vec{y}^*) + [\vec{x},\vec{y}^*]^*, \tag{55}$$

откуда

$$|(\vec{x}\cdot\vec{y})_{c,\ l}|^2 = |(\vec{x},\vec{y}^*)|^2 + |[\vec{x},\vec{y}^*]|^2, \tag{56}$$

или

$$|(\vec{x}\cdot\vec{y})_{c,\ l}|^2 = |\vec{x}|^2|\vec{y}|^2. \tag{57}$$

Формулы (56) и (57) снова являются равенствами, соответствующими неравенствам Шварца–Коши–Буняковского, но записанными в квазикватернионном виде.

2. В статье [2] наряду с квазикватернионом с законом умножения $(ab)_1$ рассматривался четырехмерный квазикватернион ($n+1=4$) с законом умножения

$$\begin{gathered} ab = x_0y_0 - x_1y_1^* - x_2y_2^* - x_3y_3^* + (x_0y_1 + x_1y_0^* + x_2y_3 - x_3y_2)i_1 + \\ +(x_0y_2 + x_2y_0^* + x_3y_1 - x_1y_3)i_2 + (x_0y_3 + x_3y_0^* + x_1y_2 - x_2y_1)i_3, \end{gathered} \tag{58$'$}$$

причем

$$a^+ = x_0^* - x_1i_1 - x_2i_2 - x_3i_3. \tag{59$'$}$$

Подобный квазикватернион для $n \geqslant 3$ определяется законом умножения

$$(ab)_d = (ab)_5 = x_0y_0 - (\vec{a},\vec{b}) + \vec{a}y_0^* + x_0\vec{b} + [\vec{x},\vec{y}], \tag{58}$$

$$a^+ = x_0^* - \vec{a}. \tag{59}$$

Соответствующие левые квазикватернионы умножаются по правилу

$$(ab)_{d,\ l} = (ab)_6 = x_0y_0 - (\vec{a}^*,\vec{b}^*) + \vec{a}y_0^* + x_0\vec{b} + [\vec{x},\vec{y}], \tag{60}$$

причем a^+ определяется формулой (59).

Отметим (см. также [2]), что, полагая в формуле (58) коэффициенты при всех мнимых единицах, кроме одной (i_m), равными нулю, мы получаем т. н. "удвоенные" комплексные числа, изоморфные действительным кватернионам [5]. Квазикватернионы с правилами умножения (58), (60), а также рассматриваемые ниже, будем называть дуальными. Вычисления, аналогичные приведенным для квазикватернионов, рассмотренных выше, приводят к формулам

$$\big((ab)_d\big)^+ = (b^+a^+)_d, \tag{61}$$

$$\big((ab)_{d,\ l}\big)^+ = (b^+a^+)_{d,\ l}. \tag{62}$$

Формулы (61), (62) показывают, что для соответствующих квазикватернионов сопряжение является стандартным. Полагая в формулах (58) и (60) $a = \vec{x}$, $b = \vec{y}$, получим соответственно

$$(\vec{x}\cdot\vec{y})_d = -(\vec{x},\vec{y}) + [\vec{x},\vec{y}], \tag{63}$$

$$(\vec{x}\cdot\vec{y})_{d,\ l} = -(\vec{x}^*,\vec{y}^*) + [\vec{x},\vec{y}], \tag{64}$$

откуда

$$|(\vec{x}\cdot\vec{y})_d|^2 = |(\vec{x},\vec{y})|^2 + |[\vec{x},\vec{y}]|^2 = |\vec{x}|^2|\vec{y}|^2, \tag{65}$$

$$|(\vec{x}\cdot\vec{y})_{d,\ l}|^2 = |(\vec{x},\vec{y})|^2 + |[\vec{x},\vec{y}]|^2 = |\vec{x}|^2|\vec{y}|^2, \tag{66}$$

аналогично формулам, полученным для рассмотренных ранее квазикватернионов. Далее, полагая формуле (58) y_0^* вместо y_0, $\vec{b}^*$ вместо $\vec{b}$, $\vec{y}^*$ вместо $\vec{y}$, получим квазикватернионы с законом умножения

$$(ab)_7 = (ab)_{c,\ d} = x_0y_0^* - (\vec{a},\vec{b}^*) + \vec{a}y_0 + x_0\vec{b}^* + [\vec{x},\vec{y}^*]. \tag{67}$$

Далее, полагая в формуле (60) x_0^* вместо x_0, $\vec{a}^*$ вместо $\vec{a}$, $\vec{x}^*$ вместо $\vec{x}$, получим квазикватернион с законом умножения

$$(ab)_8 = (ab)_{c,\ d;\ l} = x_0^*y_0 - (\vec{a},\vec{b}^*) + \vec{a}^*y_0^* + x_0^*\vec{b} + [\vec{x}^*,\vec{y}]. \tag{68}$$

Сопряжение в обоих случаях определяется формулой

$$\vec{a}^+ = x_0 - \vec{a}^*. \tag{69}$$

Для этих квазикватернионов получаются формулы

$$\big((ab)_{c,\ d}\big)^+ = \big((b^+a^+)_{c,\ d}\big)^*, \tag{70}$$

$$\big((ab)_{c,\ d;\ l}\big)^+ = \big((b^+a^+)_{c,\ d;\ l}\big)^*. \tag{71}$$

Как и ранее, из формул (67) и (68) следует

$$(\vec{x}\cdot\vec{y})_{c,\ d} = -(\vec{x},\vec{y}^*) + [\vec{x},\vec{y}^*], \tag{72}$$

$$(\vec{x}\cdot\vec{y})_{c,\ d;\ l} = -(\vec{x},\vec{y}^*) + [\vec{x}^*,\vec{y}], \tag{73}$$

а также

$$|(\vec{x}\cdot\vec{y})_{c,\ d}|^2 = |(\vec{x},\vec{y}^*)|^2 + |[\vec{x},\vec{y}^*]|^2 = |\vec{x}|^2|\vec{y}|^2, \tag{74}$$

$$|(\vec{x}\cdot\vec{y})_{c,\ d;\ l}|^2 = |(\vec{x},\vec{y}^*)|^2 + |[\vec{x},\vec{y}^*]|^2 = |\vec{x}|^2|\vec{y}|^2. \tag{75}$$

Таким образом, для всех рассмотренных квазикватернионов имеем:

$$|(\vec{x}\cdot\vec{y})_m|^2 = |\vec{x}|^2|\vec{y}|^2 = |(\vec{x},\vec{y})|^2 + |[\vec{x},\vec{y}]|^2 = |(\vec{x},\vec{y}^*)|^2 + |[\vec{x},\vec{y}^*]|^2. \tag{76}$$

Легко видеть, что рассмотренные выше варианты квазикватернионов в действительной области совпадают. Покажем, что для всех рассмотренных квазикватернионов соблюдаются законы дистрибутивности, поскольку они соблюдаются при написании произведений $a\cdot b$. Все указанные произведения могут быть записаны в виде

$$(a\cdot b)_m = x_0^{\delta_{01}^m}y_0^{\delta_{02}^m} - (\vec{a}^{\delta_{11}^m},\vec{b}^{\delta_{12}^m}) + \vec{a}^{\delta_{21}^m}y_0^{\delta_{22}^m} + x_0^{\delta_{31}^m}\vec{b}^{\delta_{32}^m} + [\vec{x}^{\delta_{41}^m},\vec{y}^{\delta_{42}^m}]. \tag{77}$$

где δ^m_{ik} или 1, или знак комплексного сопряжения *. Запишем символы δ^m_{ik} в виде строки

$$\delta^m_{ik} = (\delta^m_{01}\ \delta^m_{02}\ \delta^m_{11}\ \delta^m_{12}\ \delta^m_{21}\ \delta^m_{22}\ \delta^m_{31}\ \delta^m_{32}\ \delta^m_{41}\ \delta^m_{42}), \tag{78}$$

причем, очевидно,

$$(a+b)^{\delta^m_{ik}} = a^{\delta^m_{ik}} + b^{\delta^m_{ik}}. \tag{79}$$

для произведений $(ab)_m$ имеем:

$$\delta^1_{ik} = (1*\ 11\ 11\ 11\ 11), \tag{80}$$

$$\delta^2_{ik} = (*1\ **\ 11\ 11\ 11), \tag{81}$$

$$\delta^3_{ik} = (11\ 1*\ 1*\ 1*\ 1*), \tag{82}$$

$$\delta^4_{ik} = (11\ 1*\ *1\ *1\ *1), \tag{83}$$

$$\delta^5_{ik} = (11\ 11\ 1*\ 11\ 11), \tag{84}$$

$$\delta^6_{ik} = (11\ **\ 1*\ 11\ 11), \tag{85}$$

$$\delta^7_{ik} = (1*\ 1*\ 11\ 1*\ 1*), \tag{86}$$

$$\delta^8_{ik} = (*1\ 1*\ **\ *1\ *1). \tag{87}$$

Произведения квазикватернионов $[(a+b)c]_m$ равны:

$$\begin{gathered}\big[(a+b)c\big]_m = (x_0+\vec a+y_0+\vec b)(z_0+\vec c)_m = [x_0+y_0+(\vec a+\vec b)](z_0+\vec c)_m = (x_0+y_0)^{\delta^m_{01}} z_0^{\delta^m_{02}} \\ -\big((\vec a+\vec b)^{\delta^m_{11}}, \vec c^{\,\delta^m_{12}}\big) + (\vec a+\vec b)^{\delta^m_{21}} z_0^{\delta^m_{22}} + (x_0+y_0)^{\delta^m_{31}} \vec c^{\,\delta^m_{32}} + \big[(\vec x+\vec y)^{\delta^m_{41}}, \vec z^{\,\delta^m_{42}}\big];\end{gathered} \tag{88}$$

$$\begin{gathered}(a\cdot c)_m + (b\cdot c)_m = x_0^{\delta^m_{01}} z_0^{\delta^m_{02}} - (\vec a^{\,\delta^m_{11}}, \vec c^{\,\delta^m_{12}}) + \vec a^{\,\delta^m_{21}} z_0^{\delta^m_{22}} + x_0^{\delta^m_{31}} \vec c^{\,\delta^m_{32}} + [\vec x^{\,\delta^m_{41}} \vec z^{\,\delta^m_{42}}] + \\ y_0^{\delta^m_{01}} z_0^{\delta^m_{02}} - (\vec b^{\,\delta^m_{11}} \vec c^{\,\delta^m_{12}}) + \vec b^{\,\delta^m_{21}} z_0^{\delta^m_{22}} + y_0^{\delta^m_{31}} \vec c^{\,\delta^m_{32}} + [\vec y^{\,\delta^m_{41}}, \vec z^{\,\delta^m_{42}}] = (x_0+y_0)^{\delta^m_{01}} z_0^{\delta^m_{02}} - ((\vec a+\vec b)^{\delta^m_{11}}, \vec c^{\,\delta^m_{12}}) + \\ (\vec a+\vec b)^{\delta^m_{21}} z_0^{\delta^m_{22}} + (x_0+y_0)^{\delta^m_{31}} \vec c^{\,\delta^m_{32}} + \big[(\vec x+\vec y)^{\delta^m_{41}}, \vec z^{\,\delta^m_{42}}\big].\end{gathered} \tag{89}$$

Сравнение (88) и (89) дает:

$$\big[(a+b)c\big]_m = (ac)_m + (bc)_m \qquad \text{– левый закон дистрибутивности.} \tag{90}$$

Точно так же имеем:

$$\begin{gathered}\big[c(a+b)_m\big] = z_0^{\delta^m_{01}} (x_0+y_0)^{\delta^m_{02}} - (\vec c^{\,\delta^m_{11}}, (\vec a+\vec b)^{\delta^m_{12}}) + \vec c^{\,\delta^m_{21}} (x_0+y_0)^{\delta^m_{22}} + \\ z_0^{\delta^m_{31}} (\vec a+\vec b)^{\delta^m_{32}} + \big[\vec z^{\,\delta^m_{41}}, (\vec x+\vec y)^{\delta^m_{42}}\big];\end{gathered} \tag{91}$$

$$\begin{gathered}\big[(ca)_m + (cb)_m\big] = z_0^{\delta^m_{01}} x_0^{\delta^m_{02}} - (\vec c^{\,\delta^m_{11}}, \vec a^{\,\delta^m_{12}}) + \vec c^{\,\delta^m_{21}} x_0^{\delta^m_{22}} + z_0^{\delta^m_{31}} \vec a^{\,\delta^m_{32}} + [\vec z^{\,\delta^m_{41}} \vec x^{\,\delta^m_{42}}] + \\ z_0^{\delta^m_{01}} y_0^{\delta^m_{02}} - (\vec c^{\,\delta^m_{11}} \vec b^{\,\delta^m_{12}}) + \vec c^{\,\delta^m_{21}} y_0^{\delta^m_{22}} + z_0^{\delta^m_{31}} \vec b^{\,\delta^m_{32}} + [\vec z^{\,\delta^m_{41}}, \vec y^{\,\delta^m_{42}}] = z_0^{\delta^m_{01}} (x_0+y_0)^{\delta^m_{02}} - \big(\vec c^{\,\delta^m_{11}}, (\vec a+\vec b)^{\delta^m_{12}}\big) + \\ \vec c^{\,\delta^m_{21}} (x_0+y_0)^{\delta^m_{22}} + z_0^{\delta^m_{31}} (\vec a+\vec b)^{\delta^m_{32}} + \big[\vec z^{\,\delta^m_{41}}, (\vec x+\vec y)^{\delta^m_{42}}\big].\end{gathered} \tag{92}$$

Сравнивая формулы (91) и (92), имеем

$$\big[c(a+b)\big]_m = (ca)_m + (cb)_m \qquad \text{– правый закон дистрибутивности.} \tag{93}$$

Мы видим, что рассмотренные квазикватернионы являются кольцами. Рассмотрим теперь подробнее связь между скалярным, а также векторным произведением, и произведением квазикватернионов (для ряда гиперкомплексных систем этот вопрос исследовался А. А. Элиовичем в статье [4]). Согласно формулам (20), (20′) для любого квазикватерниона

$$(a+b)(a+b)^{+} = |a|^2 + |b|^2 + ab^{+} + ba^{+}, \tag{94}$$

$$(a+b)(a+b)^{+} = (a+b, a+b) = |a|^2 + |b|^2 + (a,b) + (b,a) = |a|^2 + |b|^2 + 2Re(a,b). \tag{95}$$

Сравнивая формулы (94) и (95), получим для всех вариантов

$$\frac{1}{2}(ab^{+} + ba^{+}) = Re(a,b). \tag{96}$$

Далее, имеем:

$$(a+b)^{+}(a+b) = |a|^2 + |b|^2 + a^{+}b + b^{+}a, \tag{97}$$

$$(a+b)^{+}(a+b) = (a+b, a+b) = |a|^2 + |b|^2 + (a,b) + (b,a) = |a|^2 + |b|^2 + 2Re(a,b). \tag{98}$$

Сравнивая формулу (97) и (98), имеем:

$$\frac{1}{2}(a^{+}b + b^{+}a) = Re(a,b). \tag{99}$$

Из формул (96) и (99) следует ([4])

$$\frac{1}{2}(ab^{+} + ba^{+}) = \frac{1}{2}(a^{+}b + b^{+}a). \tag{100}$$

Для действительных квазикватернионов получается ([4]):

$$\frac{1}{2}(ab^{+} + ba^{+}) = \frac{1}{2}(a^{+}b + b^{+}a) = (a,b). \tag{101}$$

В статье [4] также рассматривалась связь величин $\frac{1}{2}(ab^{+} - ba^{+})$ и $\frac{1}{2}(a^{+}b - b^{+}a)$ с векторным произведением. Вычислим эти величины для квазикватернионов с произведением $(ab)_1$. Имеем:

$$(ab)_1 = x_0 y_0^{*} - (\vec{a}, \vec{b}) + (\vec{a} y_0 + x_0 \vec{b} + [\vec{x}, \vec{y}]), \tag{21}$$

$$(ab^{+})_1 = x_0 y_0^{*} + (\vec{a}, \vec{b}) + \vec{a} y_0 - x_0 \vec{b} - [\vec{x}, \vec{y}] = (a,b) + \vec{a} y_0 - x_0 \vec{b} - [\vec{x}, \vec{y}], \tag{102}$$

$$(ba^{+})_1 = y_0 x_0^{*} + (\vec{b}, \vec{a}) + \vec{b} x_0 - y_0 \vec{a} - [\vec{y}, \vec{x}] = (a,b)^{*} + \vec{b} x_0 - y_0 \vec{a} - [\vec{y}, \vec{x}], \tag{103}$$

$$\frac{1}{2}\left[(ab^{+})_1 - (ba^{+})_1\right] = iIm(a,b) + \vec{a} y_0 - x_0 \vec{b} - [\vec{x}, \vec{y}]. \tag{104}$$

В действительной области

$$\frac{1}{2}(ab^{+} - ba^{+}) = \vec{a} y_0 - x_0 \vec{b} - [\vec{x}, \vec{y}] \tag{105}$$

для всех квазикватернионов. Из формулы (105) получается для $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$\frac{1}{2}(\vec{a}\vec{b}^{+} - \vec{b}\vec{a}^{+}) = -[\vec{x}, \vec{y}], \tag{106}$$

а также, в частности

$$\frac{1}{2}(\vec{x}\vec{y}^{+} - \vec{y}\vec{x}^{+}) = -[\vec{x}, \vec{y}]. \tag{107}$$

Далее,

$$(a^+b)_1 = x_0y_0^* + (\vec{a},\vec{b}) - \vec{a}y_0 + x_0\vec{b} - [\vec{x},\vec{y}] = (a,b) - \vec{a}y_0 + x_0\vec{b} - [\vec{x},\vec{y}], \tag{108}$$

$$(b^+a)_1 = (b,a) - \vec{b}x_0 + y_0\vec{a} - [\vec{y},\vec{x}], \tag{109}$$

$$\frac{1}{2}\big[(a^+b)_1 - (b^+a)_1\big] = iIm(a,b) - \vec{a}y_0 + x_0\vec{b} - [\vec{x},\vec{y}]. \tag{110}$$

В действительной области

$$\frac{1}{2}[(a^+b) - (b^+a)] = -\vec{a}y_0 + x_0\vec{b} - [\vec{x},\vec{y}]. \tag{111}$$

При $a = \vec{a},\ b = \vec{b}$ получается [4]:

$$\frac{1}{2}(a^+b - b^+a) = -[\vec{x},\vec{y}], \tag{112$'$}$$

или, так как $\vec{a}^+ = -\vec{a},\ \vec{b}^+ = -\vec{b},$ то

$$\frac{1}{2}(\vec{a}\vec{b} - \vec{b}\vec{a}) = [\vec{x},\vec{y}]. \tag{112}$$

В частности,

$$\frac{1}{2}(\vec{x}^+\vec{y} - \vec{y}^+\vec{x}) = -[\vec{x},\vec{y}], \tag{113$'$}$$

или

$$\frac{1}{2}(\vec{x}\vec{y} - \vec{y}\vec{x}) = [\vec{x},\vec{y}]. \tag{113}$$

Рассмотренные варианты квазикватернионов позволяют с их помощью записать равенства, соответствующие неравенствам Шварца–Коши–Буняковского. В эти равенства в зависимости от вариантов скалярные и векторные произведения входят либо в стандартной форме, либо в форме, названной выше картановой. Отметим также, что в квазикватернионе a естественно считать x_0 реальной частью, а $\vec{a}$ – мнимой частью.

$$x_0 = \widetilde{Re}\ a, \tag{114}$$

$$\vec{a} = \widetilde{Im}\ a. \tag{115}$$

При этом x_0 – вообще говоря комплексное число, а $\vec{a}$ – вообще говоря отнюдь не чисто мнимый вектор [4]. Из формул (21), (23), (43), (45), (58), (60), (67), (68) для произведений $(a \cdot b)_i,\ (i = 1, 2, ...8)$ получим:

$$\left.\begin{matrix} \vec{a}\cdot\vec{b} \\ (\vec{a}\cdot\vec{b})_d \end{matrix}\right\} = -(\vec{a},\vec{b}) + [\vec{x},\vec{y}], \tag{116}$$

$$\left.\begin{matrix} (\vec{a}\cdot\vec{b})_c \\ (\vec{a}\cdot\vec{b})_{c;\ d} \end{matrix}\right\} = -(\vec{a},\vec{b}^*) + [\vec{x},\vec{y}^*], \tag{117}$$

$$\left.\begin{matrix} (\vec{a}\cdot\vec{b})_l \\ (\vec{a}\cdot\vec{b})_{d;\ l} \end{matrix}\right\} = -(\vec{a}^*,\vec{b}^*) + [\vec{x},\vec{y}], \tag{118}$$

$$\left.\begin{matrix} (\vec{a}\cdot\vec{b})_{c,\ l} \\ (\vec{a}\cdot\vec{b})_{c,\ d;\ l} \end{matrix}\right\} = -(\vec{a},\vec{b}^*) + [\vec{x}^*,\vec{y}]. \tag{119}$$

Из этих формул следует, что скалярные произведения $(\vec{a},\vec{b})$, $(\vec{a},\vec{b}^*)$ и $(\vec{a},\vec{b})^*$ представляют собой реальные части произведений мнимых частей квазикватернионов, взятые с обратным знаком $(-\widetilde{Re}(\vec{a},\vec{b}))$, тогда как векторные произведения $[\vec{x},\vec{y}]$, $[\vec{x},\vec{y}^*]$ и $[\vec{x}^*,\vec{y}]$ – их мнимые части $(\widetilde{Im}(\vec{a},\vec{b})_i)$. Из полученных формул видно, что для действительных квазикватернионов формулы (116) – (119) совпадают, и что для рассмотренных в [4] (в действительной области) произведений

$$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{2}(\vec{a}\vec{b}^+ + \vec{b}\vec{a}^+)\\ \frac{1}{2}(\vec{a}^+\vec{b} + \vec{b}^+\vec{a})\end{array}\right\} = -\widetilde{Re}(\vec{a}\vec{b}), \tag{120$'$}$$

или

$$\frac{1}{2}(\vec{a}\vec{b} + \vec{b}\vec{a}) = \widetilde{Re}(\vec{a}\vec{b})), \tag{120}$$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{2}(\vec{a}\vec{b}^+ - \vec{b}\vec{a}^+)\\ \frac{1}{2}(\vec{a}^+\vec{b} - \vec{b}^+\vec{a})\end{array}\right\} = -\widetilde{Im}(\vec{a}\vec{b}), \tag{121$'$}$$

или

$$\frac{1}{2}(\vec{a}\vec{b} - \vec{b}\vec{a}) = \widetilde{Im}(\vec{a}\vec{b}). \tag{121}$$

Дополнение. Неравенства типа Шварца–Коши–Буняковского для векторных произведений

Из формул (6′), (10), очевидно, следуют неравенства

$$|\vec{x}|^2|\vec{y}|^2 \geqslant |[\vec{x},\vec{y}]|^2, \tag{$D1$}$$

$$|\vec{x}|^2|\vec{y}|^2 \geqslant |[\vec{x},\vec{y}]_c|^2, \tag{$D2$}$$

в правой части которых стоят векторные произведения.

Благодарности

Автор благодарит А. А. Элиовича за полезное обсуждение результатов, относящихся к связи ряда гиперкомплексных систем со скалярным и векторным произведением.

Литература

[1] С. Ленг. *Алгебра*. Пер. с англ. Е. С. Голода. Под ред. А. И. Кострикина. Мир, Москва, 1968.

[2] Л. Г. Соловей. *Равенства, соответствующие псевдонормам матриц n-го порядка и неравенствам Шварца–Коши–Буняковского*, Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **1 (7)**, том 4, 2007.

[3] Э. Картан. *Теория спиноров*. Пер. с франц. по ред. проф. П. А. Широкова, Государственное издательство иностранной литературы, Москва, 1947.

[4] А. А. Элиович *О норме бикватернионов и иных алгебр с центральным сопряжением*. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **2 (2)**, 2001.

[5] И. Л. Кантор, А. С. Солодовников. *Гиперкомплексные числа*. Наука, Москва, 1973.

Types of hypercomplex numbers describing equality, which corresponds to inequalities of Schwarz–Cauchy–Bounjakowsky

L. G. Solovey

lgsolovey@gmail.com

The paper considers a different variants of hypercomplex systems (quasiquaternions) for which inequalities equivalent to Schwarz–Cauchy–Bounjakowsky inequalities exists. The variants are different for systems with complex coefficients but coincide for systems with real coefficients. Paper investigates typical properties of the considered variants.

Key words: hypercomplex systems, quasiquaternions, inequalities of Schwarz–Cauchy–Bounjakowsky.