СТРУКТУРА ГРУПП ОБЕРТОК ГИПЕРКОМПЛЕКСНЫХ РАССЛОЕНИЙ

С. В. Людковский

Московский государственный технический университет МИРЭА
sludkowski@mail.ru

Данная статья посвящена исследованию структуры групп обёрток связных расслоений над полями вещественных **R**, комплексных **C** чисел, телом кватернионов **H** и октонионной алгеброй **O**, а также коммутативной квадра-алгеброй. Более того, изучаются итерированные группы обёрток. Построены их скрещенные (smashed, букв. "разбитые") произведения.

Ключевые слова: группы оберток, расслоения, скрещенные произведения, гиперкомплексные алгебры, кватернионы, октавы.

1 Введение

Геометрические группы петель окружности впервые были введены Лефшецем в 1930-х годах, и потом их конструкция была пересмотрена Милнором в 1950-х годах. Лефшец использовал C^0-равномерность на семействах непрерывных отображений, что приводило к необходимости комбинирования его конструкции со структурой свободной группы с помощью слов. Позже Милнор использовал соболевскую H^1-равномерность, что позволило ввести групповую структуру более естественным образом [28].

Конструкция Лефшеца очень ограничительная, потому что она оперирует с C^0 равномерностью непрерывных отображений в компактно-открытой топологии. Даже для сфер S^n размерности $n > 1$ она не работает напрямую, но использует построение итерированных групп петель окружности. Затем их конструкция была обобщена для расслоений над окружностью и сферами со структурами параллельного переноса над **C**. Гладкие когомологии Делигне также изучались на таких группах [6].

Группы обёрток кватернионных и октонионных расслоений, а также более широких классов расслоений над **R** или **C** были определены и даны их примеры вместе с основными теоремами в предыдущей работе автора [14]. В той статье построение групп обёрток было выполнено с помощью соболевских равномерностей, что позволило рассмотреть более широкие семейства многообразий и расслоений. Данная статья продолжает предыдущие работы автора на эту тему [14,15,21–23]. Группы обёрток являются обобщениями геометрическтх групп петель со сферы на более широкие классы многообразий и расслоений над ними.

Геометрические группы петель имеют важные применения в современных физических теориях (смотри [11,25] и ссылки там). Группы петель также интенсивно используются в калибровочной теории. Группы обёрток можно использовать в теории мембран, которая является обобщением теории струн (суперструн). Ввиду работ Вильсона об описании удержания кварков эти группы также полезны и в области теории кварков [5,39].

В статье [14] группы обёрток расслоений над кватернионами и октонионами были определены и исследованы и их многочисленные примеры были описаны. Данная статья посвящена исследованию их структуры и использует обозначения и результаты предыдущей работы. Кроме кватернионов и октонионов также рассматриваются вещественные и комплексные расслоения с группами обёрток для них. Более того, группы обёрток расслоений над гиперкомплексными числами такими как H_n, в частности, квадра алгебра, также изучаются. Для таких алгебр выделены частные случаи коммутативных структур с группами обёрток. Построены скрещенные произведения групп обёрток. Изучаются также итерированные группы обёрток.

Все главные результаты этой статьи получены впервые и они даются в теоремах 2, 6, 9, 10, 20, 21, 23, предложениях 3, 7, 8, 12, 13, 17 и следствии 11.

Напомним основные определения и обозначения.

1. Замечание. Обозначим через $\mathcal{A}_r$ алгебру Кэли-Диксона такую, что $\mathcal{A}_0 = \mathbf{R}$, $\mathcal{A}_1 = \mathbf{C}$, $\mathcal{A}_2 = \mathbf{H}$ – это тело кватернионов, $\mathcal{A}_3 = \mathbf{O}$ – это октонионная алгебра. Далее мы рассмотрим лишь значения $0 \le r \le 3$.

Мы рассматриваем не только ассоциативные группы G, но также слабо ассоциативные, другими словами альтернативные, (квази-) группы с аксиомой ассоциативности заменённой на $a(ab) = (aa)b$ и $(ba)a = b(aa)$, и $a^{-1}(ab) = b$, и $(ba)a^{-1} = b$ для всех $a, b \in G$. Для краткости мы пишем группа вместо ассоциативная группа или альтернативная (квази-) группа. Это ясно из содержания ниже.

2.1. Замечание. Если M есть метризуемое пространство и $K = K_M$ – это замкнутое подмножество в M коразмерности $codim_{\mathbf{R}} N \ge 2$, так что $M \backslash K = M_1$ – это многообразие с углами над $\mathcal{A}_r$, тогда мы назовём M псевдо-многообразием над $\mathcal{A}_r$, где K_M – это критическое подмножество.

Два псевдо-многообразия B и C называются диффеоморфными, если $B \setminus K_B$ диффеоморфны с $C \setminus K_C$ как многообразия с углами (смотри также [6, 26]).

Возьмём на M борелевскую σ-аддитивную меру ν такую, что ν на $M \setminus K$ совпадает с римановым элемент объёма $\nu(K) = 0$, так как вещественная тень M_1 имеет его.

Равномерное пространство $H^t_p(M_1, N)$ всех непрерывных кусочно H^t соболевских отображений из M_1 в N вводится стандартным образом [21, 22], что индуцирует $H^t_p(M, N)$ равномерное пространство всех непрерывных кусочно H^t соболевских отображений на M, так как $\nu(K) = 0$, где $\mathbf{R} \ni t \ge [m/2] + 1$, m обозначает размерность M над $\mathbf{R}$, $[k]$ обозначает целую часть числа $k \in \mathbf{R}$, $[k] \le k$. Тогда мы положим $H^\infty_p(M, N) = \bigcap_{t>m} H^t_p(M, N)$ с соответствующей равномерностью.

Для многообразий над $\mathcal{A}_r$ с $1 \le r \le 3$ возьмём $H^t_p(M, N)$ как пополнение всех непрерывных кусочно $\mathcal{A}_r$-голоморфных отображений из M в N относительно H^t_p равномерности, где $[m/2] + 1 \le t \le \infty$. Далее мы рассмотрим псевдо-многообразия со связывающими отображениями карт непрерывными в M и класса $H^{t'}_p$ в $M \setminus K_M$ при $0 \le r \le 3$, где $t' \ge t$.

2.2. Замечание. Поскольку октонионная алгебра $\mathbf{O}$ неассоциативная, то мы рассмотрим неассоциативную под (квази-) группу G семейства $Mat_q(\mathbf{O})$ всех квадратных $q \times q$ матриц с элементами из $\mathbf{O}$. Более общим образом G – это группа, которая имеет структуру H^t_p многообразия над $\mathcal{A}_r$ и групповые операции являются H^t_p отображениями. (Квази-) Группа G может быть неассоциативной при $r = 3$, но G предполагается альтернативной, то есть, $(aa)b = a(ab)$ и $a(a^{-1}b) = b$ для любых $a, b \in G$.

Как обобщение псевдо-многообразий используется следующее (над $\mathbf{R}$ и $\mathbf{C}$ смотри [6, 34]). Предположим, что M – это хаусдорфово топологическое пространство размерности в смысле покрытий $dim\ M = m$, снабжённое семейством $\{h : U \to M\}$ так называемых локализаций (plots) h, которые являются непрерывными отображениями, удовлетворяющими условиям $(D1 - D4)$:

$(D1)$ каждая локализация имеет в качестве области выпуклое подмножество U в $\mathcal{A}^n_r$, $n \in \mathbf{N}$;

$(D2)$ если $h : U \to M$ есть локализация, V – это выпуклое подмножество в $\mathcal{A}^l_r$ и $g : V \to U$ есть H^t_p отображение, тогда $h \circ g$ – это также локализация, где $t \ge [m/2] + 1$;

$(D3)$ всякое постоянное отображение из выпуклого подмножества U содержащегося в $\mathcal{A}_r^n$ в M является локализацией;

$(D4)$ если U – это $\mathcal{A}_r$– выпуклое множество в $\mathcal{A}_r^n$ и $\{U_j : j \in J\}$ есть покрытие множества U выпуклыми множествами в $\mathcal{A}_r^n$, каждое U_j открыто в U, $h : U \to M$ таково, что каждое ограничение $h|_{U_j}$ является локализацией, тогда h – это также локализация. Тогда M называется H_p^t-дифференцируемым пространством.

Отображение $f : M \to N$ между двумя H_p^t-дифференцируемыми пространствами называется дифференцируемым, если оно непрерывно и для любых локализаций $h : U \to M$ композиция $f \circ h : U \to N$ является локализацией для N. Топологическая группа G называется H_p^t-дифференцируемой группой, если её групповые операции являются H_p^t-дифференцируемыми отображениями.

Пусть E, N, F – это $H_p^{t'}$-псевдо-многообразия или $H_p^{t'}$-дифференцируемые пространства над $\mathcal{A}_r$, пусть также G есть $H_p^{t'}$ группа над $\mathcal{A}_r$, $t \le t' \le \infty$. Расслоение $E(N, F, G, \pi, \Psi)$ с пространством расслоения E, базой N, типичным слоем F и структурной группой G над $\mathcal{A}_r$, проектором $\pi : E \to N$ и атласом Ψ определяются стандартным образом [6, 26, 36] с условием, что связывающие отображения принадлежат $H_p^{t'}$ классу гладкости, так что для $r = 3$ структурная группа может быть неассоциативной, но альтернативной.

Локальные тривиализации $\phi_j \circ \pi \circ \Psi_k^{-1} : V_k(E) \to V_j(N)$ индуцируют $H_p^{t'}$-равномерность в семействе W всех главных $H_p^{t'}$-расслоений $E(N, G, \pi, \Psi)$, где $V_k(E) = \Psi_k(U_k(E)) \subset X^2(G)$, $V_j(N) = \phi_j(U_j(N)) \subset X(N)$, где $X(G)$ и $X(N)$ являются $\mathcal{A}_r$-векторными пространствами, на которых G и N моделируются, $(U_k(E), \Psi_k)$ и $(U_j(N), \phi_j)$ -0 это карты атласов E и N, $\Psi_k = \Psi_k^E$, $\phi_j = \phi_j^N$.

Если $G = F$ и G действует на самой себе левыми сдвигами, тогда расслоение называется главным расслоением и обозначается через $E(N, G, \pi, \Psi)$. Может быть частный случай $G = \mathcal{A}_r^*$, где $\mathcal{A}_r^*$ обозначает мультипликативную (квази-) группу $\mathcal{A}_r \setminus \{0\}$. Если $G = F = \{e\}$, тогда E сводится к N.

3. Определения. Пусть M – это связное H_p^t-псевдо-многообразие над $\mathcal{A}_r$, $0 \le r \le 3$, а также выполнены следующие условия:

(i) M компактно;

(ii) M является объединением двух замкнутых подмножеств над $\mathcal{A}_r$ A_1 и A_2, которые являются псевдо-многообразиями, и которые являются каноническими замкнутыми подмножествами в M с $A_1 \cap A_2 = \partial A_1 \cap \partial A_2 =: A_3$ и коразмерностью над $\mathbf{R}$ для A_3 в M равной единице, $codim_{\mathbf{R}} A_3 = 1$, также A_3 есть псевдо-многообразие;

(iii) имеется конечное множество отмеченных точек $s_{0,1}, ..., s_{0,k}$ в $\partial A_1 \cap \partial A_2$, более того, ∂A_j линейно связны $j = 1, 2$;

(iv) $A_1 \setminus \partial A_1$ и $A_2 \setminus \partial A_2$ являются H_p^t-диффеоморфными с $M \setminus [\{s_{0,1}, ..., s_{0,k}\} \cup (A_3 \setminus Int(\partial A_1 \cap \partial A_2))]$ посредством отображений $F_j(z)$, где $j = 1$ или $j = 2$, $\infty \ge t \ge [m/2] + 1$, $m = dim_{\mathbf{R}} M$, так что $H^t \subset C^0$ в силу теоремы вложения Соболева [27], где внутренность $Int(\partial A_1 \cap \partial A_2)$ берётся в $\partial A_1 \cup \partial A_2$.

Вместо (iv) мы также рассмотрим случай

(iv') M, A_1 и A_2 таковы, что $(A_j \setminus \partial A_j) \cup \{s_{0,1}, ..., s_{0,k}\}$ являются $C^0([0,1], H_p^t(A_j, A_j))$-ретрагируемыми на $X_{0,q} \cap A_j$, где $X_{0,q}$ – это замкнутое линейно связное подмножество в M, $j = 1$ или $j = 2$, $s_{0,q} \in X_{0,q}$, $X_{0,q} \subset K_M$, $q = 1, ..., k$, $codim_{\mathbf{R}}\ K_M \ge 2$.

Пусть $\hat{M}$ – это компактное связное H_p^t-псевдо-многообразие, которое канонически замкнуто в $\mathcal{A}_r^l$ с границей $\partial \hat{M}$ и отмеченными точками $\{\hat{s}_{0,q} \in \partial \hat{M} : q = 1, ..., 2k\}$ и H_p^t-отображениями $\Xi : \hat{M} \to M$ такими, что

(v) Ξ сюръективно и биективно из $\hat{M} \setminus \partial \hat{M}$ на $M \setminus \Xi(\partial \hat{M})$ открытое в M, $\Xi(\hat{s}_{0,q}) = \Xi(\hat{s}_{0,k+q}) = s_{0,q}$ для любых $q = 1, ..., k$, также $\partial M \subset \Xi(\partial \hat{M})$.

Структура параллельного переноса на $H_p^{t'}$-дифференцируемом главном G-расслоении $E(N, G, \pi, \Psi)$ с линейно связными E и G для H_p^t-псевдо-многообразий M и $\hat{M}$ как и выше над одной и той же алгеброй Кэли-Диксона $\mathcal{A}_r$ с $t' \geq t+1$ сопоставляет каждому H_p^t отображению γ из M в N и точкам $u_1, ..., u_k \in E_{y_0}$, где y_0 – это отмеченная точка в N, $y_0 = \gamma(s_{0,q})$, $q = 1, ..., k$, единственное H_p^t отображение $\mathbf{P}_{\hat{\gamma},u} : \hat{M} \to E$ удовлетворяющее условиям $(P1 - P5)$:

$(P1)$ возьмём $\hat{\gamma} : \hat{M} \to N$ такое, что $\hat{\gamma} = \gamma \circ \Xi$, тогда $\mathbf{P}_{\hat{\gamma},u}(\hat{s}_{0,q}) = u_q$ для любых $q = 1, ..., k$ и $\pi \circ \mathbf{P}_{\hat{\gamma},u} = \hat{\gamma}$

$(P2)$ $\mathbf{P}_{\hat{\gamma},u}$ есть H_p^t-отображение по γ и u;

$(P3)$ для любых $x \in \hat{M}$ и всякого $\phi \in DifH_p^t(\hat{M}, \{\hat{s}_{0,1}, ..., \hat{s}_{0,2k}\})$ выполняется равенство $\mathbf{P}_{\hat{\gamma},u}(\phi(x)) = \mathbf{P}_{\hat{\gamma}\circ\phi,u}(x)$, где $DifH_p^t(\hat{M}, \{\hat{s}_{0,1}, ..., \hat{s}_{0,2k}\})$ обозначает группу всех H_p^t гомеоморфизмов для $\hat{M}$ сохраняющих отмеченные точки $\phi(\hat{s}_{0,q}) = \hat{s}_{0,q}$ для любых $q = 1, ..., 2k$;

$(P4)$ $\mathbf{P}_{\hat{\gamma},u}$ является G-эквивариантным, что означает $\mathbf{P}_{\hat{\gamma},uz}(x) = \mathbf{P}_{\hat{\gamma},u}(x)z$ для всякого $x \in \hat{M}$ и каждого $z \in G$;

$(P5)$ если U есть открытая окрестность точки $\hat{s}_{0,q}$ в $\hat{M}$ и $\hat{\gamma}_0, \hat{\gamma}_1 : U \to N$ являются $H_p^{t'}$-отображениями такими, что $\hat{\gamma}_0(\hat{s}_{0,q}) = \hat{\gamma}_1(\hat{s}_{0,q}) = v_q$ и касательные пространства, который являются векторными многообразиями над $\mathcal{A}_r$, для γ_0 и γ_1 в точке v_q одинаковы, тогда касательные пространства для $\mathbf{P}_{\hat{\gamma}_0,u}$ и $\mathbf{P}_{\hat{\gamma}_1,u}$ в точке u_q одинаковы, где $q = 1, ..., k$, $u = (u_1, ..., u_k)$.

Два $H_p^{t'}$-дифференцируемых главных G-расслоения E_1 и E_2 со структурами параллельных переносов $(E_1, \mathbf{P}_1)$ и $(E_2, \mathbf{P}_2)$ называются изоморфными, если существует изоморфизм $h : E_1 \to E_2$ такой, что $\mathbf{P}_{2,\hat{\gamma},u}(x) = h(\mathbf{P}_{1,\hat{\gamma},h^{-1}(u)}(x))$ для любых H_p^t-отображени1 $\gamma : M \to N$ и $u_q \in (E_2)_{y_0}$, где $q = 1, ..., k$, $h^{-1}(u) = (h^{-1}(u_1), ..., h^{-1}(u_k))$.

Пусть $(S^M E)_{t,H} := (S^{M,\{s_{0,q}:q=1,...,k\}}E; N, G, \mathbf{P})_{t,H}$ – это множество H_p^t-замыканий изоморфных классов H_p^t главных G расслоений со структурами параллельных переносов.

2 Структура групп обёрток

1. Предложение. *H_p^m равномерность в $L(S^m, N)$ (смотри §2.10 in [14]) при $m > 1$ строго сильнее, чем m раз итерированная H_p^1 равномерность.*

Доказательство. Если $f \in H^m$, тогда $\partial^k f(x)/\partial x_1^{k_1} ... \partial x_m^{k_m} \in L^2$ для любых $0 \leq k \leq m$, $k = k_1 + ... + k_m$, $0 \leq k_j$, $j = 1, ..., m$. Но g m раз итерированная H^1 равномерность означает, что $\partial^k g(x)/\partial x_1^{k_1} ... \partial x_m^{k_m} \in L^2$ для любых $0 \leq k \leq m$, $k = k_1 + ... + k_m$, $0 \leq k_j \leq 1$, $j = 1, ..., m$. Последние условия слабее, чем H^m. При $m > 1$ может оказаться отображение g, для которого такие частные производные не принадлежат L^2, когда $1 < k_j \leq m$. Используя связывающие отображения карт атласов $At(M)$ и $At(N)$, и применяя это локально, мы получим утверждение.

2. Теорема. *Для группы обёрток $W = (W^M E)_{t,H}$ (смотри определение 2.7 [14]) существует косое произведение $\hat{W} = W \tilde{\otimes} W$, которое является H_p^l альтернативной (квази-) группой Ли, и существует групповое вложение из W в $\hat{W}$, где $l = t' - t$ ($l = \infty$ при $t' = \infty$), $E = E(N, G, \pi, \Psi)$ – это главное G-расслоение класса гладкости $H_p^{t'}$ с $t' \geq t \geq [dim(M)/2] + 1$. Если G ассоциативна, тогда $\hat{W}$ ассоциативна. Более того, группа петель $L(S^1, E)$ является H_p^t изоморфной с $(\hat{W}^{S^1} E)_{t,H}$ в частном случае S^1.*

Доказательство. Пусть $\tilde{W}$ – это множество всех элементов $(g_1a_1\otimes g_2a_2)\in(W\otimes B)^2$, где B есть свободная некоммутативная ассоциативная группа с двумя генераторами a,b, $ab\neq ba$, $g_1,g_2\in W$. Возмём в $\tilde{W}$ отношение эквивалентости: $g_1g_2a\otimes g_2b\tilde{=}\, g_1e_B\otimes ee_B$, для всяких $g_1,g_2\in W$, где e и e_B обозначают единичные элементы в W и в B.

Определим в $\tilde{W}$ умножение:

$(g_1a_1\otimes g_2a_2)\tilde{\otimes}(g_3a_3\otimes g_4a_4):=((g_1g_3)(a_1a_3)\otimes(g_4g_2)((a_1^{-1}a_4a_1)a_2)$

для любых $g_1,g_2,g_3,g_4\in W$ и всяких $a_1,a_2,a_3,a_4\in B$, следовательно,

$(e\otimes g_1a_1)\tilde{\otimes}(e\otimes g_2a_2)=e\otimes(g_2g_1)(a_2a_1)$,

$(g_1a_1\otimes e)\tilde{\otimes}(g_2a_2\otimes e)=(g_1g_2)(a_1a_2)\otimes e$,

$(g_1a_1\otimes e)\tilde{\otimes}(e\otimes g_4a_4)=g_1a_1\otimes g_4(a_1^{-1}a_4a_1)$,

$(e\otimes g_4a_4)\tilde{\otimes}(g_1a_1\otimes e):=g_1a_1\otimes g_4a_4$.

Таким образом, это полупрямое произведение $\tilde{W}$ групп $(W\otimes B)\otimes^s(W\otimes B)$ некоммутативное, так как $b^{-1}aba^{-1}\neq e$, где $e:=e\times e_B$, $\otimes^s$ обозначает полупрямое произведение, $\otimes$ обозначает прямое произведение.

Рассмотрим минимальную замкнутую подгруппу A в полупрямом произведении $\tilde{W}$ порождённом элементами $(g_1g_2a\otimes g_2b)\tilde{\otimes}(g_1e_B\otimes ee_B)^{-1}$, где B снабжено дискретной топологией и $\tilde{W}$ снабжено равномерностью произведения. Тогда мы положим $\hat{W}:=\tilde{W}/A=:W\tilde{\otimes}W$ и обозначим умножение в $\hat{W}$ так же как в $\tilde{W}$.

Поэтому, W имеет групповое вложение $\theta:g\mapsto(ge_B\otimes e)$ в $\hat{W}$ и умножение $m[(g_1e_B\otimes e),(g_2e_B\otimes e)]=(g_1e_B\otimes e)\tilde{\otimes}(g_2e_B\otimes e)]$.

С другой стороны, $(ga_1\otimes e)\tilde{\otimes}(e\otimes ga_1a_2a_1^{-1})=ga_1\otimes ga_2=(e\otimes e)=:\tilde{e}$, $\hat{e}=\tilde{e}A=A$ – это единичный элемент в $\hat{W}$ и $(e\otimes ga_1a_2a_1^{-1})=(ga_1\otimes e)^{-1}$ есть обратный элемент в $(ga_1\otimes e)$, где $a_2\in B$ таково, что $(a_1\otimes a_2)\tilde{\otimes}A=(e\otimes e)\tilde{\otimes}A=A$ в $\hat{W}$, $a_1=ea_1$, то есть $a_1\otimes a_2\tilde{=}e\otimes e$ в $\tilde{W}$.

Из предыдущих формул вытекает, что $\hat{W}$ некоммутативная и альтернативная (квази-) группа. Как многообразие $\hat{W}$ является факторным H^t_p многообразием W^2 по H^t_p отношению эквивалентности, следовательно, $\hat{W}$ есть H^t_p дифференцируемое пространство, так как выполнены условия $(D1-D4)$ из §2.1.3.2 [14]. Групповая операция и инверсия в $\hat{W}$ комбинирует произведение в W и инверсию с тензорным произведением и отношением эквивалентности, следовательно, они являются H^l_p дифференцируемыми с $l=t'-t$, $l=\infty$ при $t'=\infty$, (смотри §§1.11, 1.12, 1.15 в [34] и §2.1.3.1 в [14]).

Тогда $((g_1\otimes g_2)\tilde{\otimes}(g_3\otimes g_4))\tilde{\otimes}(g_5\otimes g_6):=((g_1g_3)g_5\otimes g_6(g_4g_2))$ и

$(g_1\otimes g_2)\tilde{\otimes}((g_3\otimes g_4))\tilde{\otimes}(g_5\otimes g_6)):=(g_1(g_3g_5)\otimes(g_6g_4)g_2)$.

Поэтому, $\hat{W}$ альтернативна, так как W альтернативна (смотри Теорема 2.6.1 [14]) и B ассоциативна. Если группа G ассоциативна, тогда W ассоциативна и $\hat{W}$ ассоциативна.

Рассмотрим коммутатор

$[(g_1a_1\otimes g_2a_2)\tilde{\otimes}(g_3a_3\otimes g_4a_4)]\tilde{\otimes}[(g_1a_1\otimes g_2a_2)^{-1}\tilde{\otimes}$
$(g_3a_3\otimes g_4a_4)^{-1}]=\{((g_1g_3)(a_1a_3)\otimes(g_4g_2)((a_1^{-1}a_4a_1)a_2))\tilde{\otimes}$
$[(g_1^{-1}a_1^{-1}\otimes g_2^{-1}(a_1a_2^{-1}a_1^{-1}))\tilde{\otimes}(g_3^{-1}a_3^{-1}\otimes g_4^{-1}(a_3a_4^{-1}a_3^{-1}))]$
$=((g_1g_3)(a_1a_3)\otimes(g_4g_2)((a_1^{-1}a_4a_1)a_2)\tilde{\otimes}((g_1^{-1}g_3^{-1})(a_1^{-1}a_3^{-1})\otimes(g_4^{-1}g_2^{-1})$
$(a_1(a_3a_4^{-1}a_3^{-1})a_1^{-1})(a_1a_2^{-1}a_1^{-1})))=(((g_1g_3)(g_1^{-1}g_3^{-1}))(a_1a_3a_1^{-1}a_3^{-1})\otimes$
$((g_4^{-1}g_2^{-1})(g_4g_2))((a_1a_3)^{-1}[((a_1a_3)a_4^{-1}(a_1a_3)^{-1})(a_1a_2^{-1}a_1^{-1})](a_1a_3))((a_1^{-1}a_4a_1)a_2)$.

Минимальная замкнутая подгруппа порождённая произведениями таких элементов является (топологическим) коммутантом $\tilde{W}_c$ для $\tilde{W}$. Группа $(W^MN)_{t,H}$ коммутативна (смотри теорему 6(2) [14]). Мы имеем $B/B_c=\{e\}$, фактор-группа $G/G_c=G_{ab}$ является абелианизацией G, в частности, если G коммутативна, то $G_{ab}=G$, где G_c обозначает коммутантную подгруппу в G. Поэтому,

$(W^ME;N,G,\mathbf{P})_{t,H}/[(W^ME;N,G,\mathbf{P})_{t,H}]_c=(W^ME;N,G_{ab},\mathbf{P})_{t,H}$

и неизбежно $\tilde{W}/\tilde{W}_c=(W^ME;N,G_{ab},\mathbf{P})_{t,H}$.

Используя отношение эквивалентности в $\tilde{W}$, мы получим $\hat{W}/\hat{W}_c = (W^M E; N, G_{ab}, \mathbf{P})_{t,H}$.

В частном случае $M = S^1$ для $g \in W$ мы возьмём $f \in g$, то есть $< f >_{t,H} = g$. Класс эквивалентности для f относительно аналогичных замыканий орбит правого действия подгруппы $Diff^\infty_+(S^1, s_0)$ сохраняющей отмеченную точку и ориентацию S^1 индуцированную ориентацией отрезка $I = [0, 1]$ мы обозначим через $[f]_{t,H}$, тогда для $[f]_{t,H}$ мы сопоставим $ga \otimes e$ в $\tilde{W}$, в то время как $[f^-]_{t,H}$ мы сопоставим $e \otimes gaba^{-1}$, где $f^-(x) := f(1-x)$ для любых $x \in [0, 1]$, единичная окружность S^1 параметризована как $z = e^{2\pi i x}$, $z \in S^1 \subset \mathbf{C}$, $x \in [0, 1]$. Их классы эквивалентности $(ga \otimes e)\tilde{\otimes} A$ и $(e \otimes gaba^{-1})\tilde{\otimes} A$ в $\tilde{W}$ дают элементы в $\hat{W}$.

Поскольку $[f]^{-1}_{t,H} := [f^-]_{t,H}$ и $[f_1 \vee f_2]_{t,H} = [f_1]_{t,H}[f_2]_{t,H}$, то $\hat{W}$ изоморфна с $L(S^1, E)_{t,H}$.

2.1. Замечание. Рассмотрим группу $B^2 \otimes B^2/\mathcal{E}$, где отношение эквивалентности $\mathcal{E}$ индуцировано отношением эквивалентности из B^2 как в $\tilde{W}$: $(a \otimes b) \approx (e \otimes e)$, группа B та же, что и в §2 с двумя генераторами a, b. Тогда это даёт эквивалентности: $[(a \otimes b) \otimes (a \otimes b)]\ \mathcal{E}\ [(e \otimes e) \otimes (e \otimes e)]\ \mathcal{E}\ [(e \otimes b) \otimes (a \otimes e)] \otimes [(e \otimes b) \otimes (a \otimes e)]\ \mathcal{E}\ \{(e \otimes b) \otimes [(a \otimes e) \otimes (e \otimes b)]\} \otimes (a \otimes e)\ \mathcal{E}\ (e \otimes a^{-1}ba) \otimes (a \otimes e)\ \mathcal{E}\ [(e \otimes ab) \otimes (ba \otimes e)]$ в $B^2 \otimes B^2$, так как B^4 – это ассоциативная группа. Это предполагает коммутативность итерированного косого произведения групп обёрток, когда G коммутативна, то есть $(\hat{W}^M(\hat{W}^M E)_{t,H})_{t,H} = (W^M(W^M E)_{t,H})_{t,H}$, $G = G_{ab}$. В частности, $(\hat{W}^M(\hat{W}^M N)_{t,H})_{t,H} = (W^M(W^M N)_{t,H})_{t,H}$, где $G = \{e\}$. Поэтому, из этого замечания и теоремы 2 вытекает новое доказательство предложения 11 из [14].

3. Предложение. *Если существует $H^{t'}_p$-диффеоморфизм $\eta : N \to N$ такой, что $\eta(y_0) = y_0'$, где $t \le t'$ тогда группы обёрток $(W^M E; y_0)_{t,H}$ и $(W^M E; y_0')_{t,H}$ определённые с отмеченными точками y_0 и y_0' являются H^l_p-изоморфными как H^l_p-дифференцируемые группы, где $l = t' - t$ для конечного t', $l = \infty$ при $t' = \infty$.*

Доказательство. Пусть $f \in H^t_p(M, E)$, тогда $\eta \circ \pi \circ f(s_{0,q}) = \eta(y_0) = y_0'$ для любых отмеченных точек $s_{0,q}$ in M, где $\pi : E \to N$ – это проектор, $\pi \circ f = \gamma$, γ – это обёртка, то есть H^t_p-отображение из M в N с $\gamma(s_{0,q}) = y_0$ при $q = 1, ..., k$. Многообразие N связно вместе с E и G согласно условиям наложенным в [14]. Рассмотрим $H^{t'}_p$-диффеоморфизм $\eta \times e$ главного расслоения E. Тогда $\Theta : H^t_p(M, W) \to H^t_p(M, W)$ индуцирует изоморфизм такой, что $\pi \circ \Theta(f) := \eta \circ \pi \circ f : M \to N$ и $(\eta \times e) \circ f = \Theta(f)$ for $f \in H^t_p(M, E)$. Отображение Θ является H^l_p дифференцируемым по f, следовательно, оно даёт H^l_p изоморфизм рассматриваемых H^l_p-дифференцируемых групп обёрток (смотри теорему 6(1) [14]).

4. Замечание. Как обычно мы предположим, что главное расслоение E, его структурная группа G и базовое многообразие N являются линейно связными. Пусть $(\mathcal{P}^M E)_{t,H}$ – это пространство классов эквивалентности $< f >_{t,H}$ для $f \in H^t_p(M, W)$ относительно замыкания орбит левого действия группы диффеоморфизмов $DifH^t_p(M; \{s_{0,q} : q = 1, ..., k\})$. Это означает, что $(\mathcal{P}^M E)_{t,H}$ есть фактор-пространство для $H^t_p(M, W)$ относительно отношения эквивалентности $R_{t,H}$.

Имеется вложение $\theta : H^t_p(M, \{s_{0,q} : q = 1, ..., k\}; W) \hookrightarrow H^t_p(M; W)$ и отображение вычисления $\hat{ev} : H^t_p(M; W) \to N^k$ такое, что $\hat{ev}(f) := (\hat{f}(\hat{s}_{0,q}) : q = k+1, .., 2k)$, $\hat{ev}_{\hat{s}_{0,q}}(f) := \hat{f}(\hat{s}_{0,q})$, где $\hat{f} \in H^t_p(\hat{M}; W)$ таково, что $\hat{f} = f \circ \Xi$, $\Xi : \hat{M} \to M$ есть факторное отображение. Мы получаем диаграмму $H^t_p(M, \{s_{0,q} : q = 1, ..., k\}; W) \to H^t_p(M; W) \to N^k$ с H^t_p дифференцируемыми отображениями, которое индуцирует диаграмму $H^{t,l+1}_p(M, \{s_{0,q} : q = 1, ..., k\}; W, y_0) \to H^t_p(M, H^{t,l}_p(M, \{s_{0,q} : q = 1, ..., k\}; W, y_0) \to H^{t,l}_p(M, \{s_{0,q} : q = 1, ..., k\}; W, y_0)$ для любых $l \in \mathbf{N}$, где $H^{t,l+1}_p(M, \{s_{0,q} : q = 1, ..., k\}; W, y_0) := H^t_p(M, \{s_{0,q} : q = 1, ..., k\}; H^{t,l}_p(M, \{s_{0,q} : q = 1, ..., k\}; W, y_0))$, $H^{t,1}_p(M, \{s_{0,q} : q = 1, ..., k\}; W, y_0) := H^t_p(M, \{s_{0,q} : q = 1, ..., k\}; W, y_0)$. Поэтому, существуют итерированные (квази-) моноиды и (квази-) группы обёрток $(S^M E)_{l+1;t,H} := (S^M(S^M E)_{l;t,H})_{t,H}$ и $(W^M E)_{l+1;t,H} := (W^M(W^M E)_{l;t,H})_{t,H}$, где $(S^M E)_{1;t,H} := (S^M E)_{t,H}$ и $(W^M E)_{1;t,H} := (W^M E)_{t,H}$.

Очевидно, если имеются H^t_p и $H^{t'}_p$ диффеоморфизмы $\rho : M \to M_1$ и $\eta : N \to N_1$ отображающие отмеченные точки в соответствующие отмеченные точки, тогда $H^t_p(M, W)$ изоморфно с $H^t_p(M_1, W_1)$ и, следовательно, $(W^M E)_{b;t,H}$ является H^t_p изоморфной как H^t_p-многообразие и H^l_p-изоморфной как H^l_p (квази-) группа Ли с $(W^{M_1}E_1)_{b;t,H}$ для любых $b \in \mathbf{N}$, где $l = t' - t$, $l = \infty$ при $t' = \infty$, $t' \geq t \geq [dim(M)/2] + 1$. Если $f : N \to N_1$ есть сюръективное отображение и N является H^t_p-дифференцируемым пространством, тогда N наследует структуру H^t_p-дифференцируемого пространства с локализациями имеющими локальную форму $f \circ \rho : U \to N_1$, где $\rho : U \to N$ есть локализация для N.

5. Лемма. *Пусть E является $H^{t'}_p$ главным расслоением и пусть D есть всюду плотное подмножество в N такое, что для любых $y \in D$ существует открытая окрестность V точки y в N и дифференцируемое отображение $p : V \to H^t_p(M, \{s_{0,q} : q = 1, ..., k\}; V, y) := \{f \in H^t_p(M; V) : f(s_{0,q}) = y, q = 1, ..., k\}$ такое, что $\hat{ev}_{\hat{s}_{0,q}}(\hat{p}(y)) = y$ для любых $q = 1, ..., 2k$ и каждого $y \in N$, где $p \circ \Xi = \pi \circ \hat{p}$. Тогда $\hat{ev} : H^t_p(M; W) \to N^k$ является H^t_p дифференцируемым главным $(S^M E)_{t,H}$ расслоением.*

Доказательство. Пусть $\{(V_j, y_j) : j \in J\}$ – это семейство такое, что $y_j \in V_j \cap D$ для любых j и существует $p_j : V_j \to H^t_p(M, \{s_{0,q} : q = 1, ..., k\}; V_j, y_j)$ такое, что $\hat{p}_j(\hat{s}_{0,q})(y) = y \times e$ для любых $q = 1, ..., 2k$ и всякого j, где $\{V_j : j \in J\}$ – это открытое покрытие для N, y – это постоянное отображение из $\hat{M}$ в V_j с $y(\hat{M}) = \{y\}$, где $\hat{p}_j(\hat{s}_{0,q})$ – это ограничение на V_j проектора $\hat{p}(\hat{s}_{0,q}) : (\mathcal{P}^M E)_{t,H} \to E$, в то время как $p_j(\Xi(\hat{x}))(y) = \pi \circ \hat{p}_j(\hat{x})(y \times e)$ для любых $y \in N$ и $x = \Xi(\hat{x})$ in M, где $\hat{x} \in \hat{M}$, $\Xi : \hat{M} \to M$. Тогда $(W^M E)_{t,H}$ и $(\mathcal{P}^M E)_{t,H}$ снабжено структурой H^t_p-дифференцируемого пространства (смотри замечание 4 выше и теорему 6 [14]), где вложение $(S^M E)_{t,H} \hookrightarrow (\mathcal{P}^M E)_{t,H}$ и проектор $\hat{ev}_{\hat{s}_{0,q}} : (\mathcal{P}^M E)_{t,H} \to N$ являются H^t_p-отображениями.

Пусть $\psi_j \in DifH^t_p(N)$ таково, что $\psi_j(y) = y_j$. Возьмём тривиализацию $\phi_j : \hat{p}_j^{-1}(\hat{s}_{0,q})(V_j) \to V_j \times (S^M E)_{t,H}$ ограничения $\hat{p}_j(\hat{s}_{0,q})|_{V_j}$ проектора $\hat{p}_j(\hat{s}_{0,q}) : (\mathcal{P}^M E)_{t,H} \to E$ по формуле $\phi_j(f) = (f(\hat{s}_{0,q}), \psi_j \circ \hat{p}_j(\hat{s}_{0,q})(f))$ для каждой $f \in (\mathcal{P}^M E)_{t,H}$ с $\pi \circ f(\hat{s}_{0,q}) = y$, где $\psi_j \circ \hat{p}_j(f) = \psi_j(\hat{p}_j(f))$. Тогда $\phi_j^{-1}(y, g) = g^{-1}(\psi_j \circ \hat{p}_j(y)) =: \eta$, $\eta \in (\mathcal{P}^M E)_{t,H}$ с $\pi \circ \psi_j \circ f(\hat{s}_{0,q}) = y_j$, так как G есть группа, где $g = \psi_j \circ \hat{p}_j(f)$. В итоге комбинация семейства $\{\hat{ev}_{\hat{s}_{0,q}} : q = k + 1, ..., 2k\}$ индуцирует отображение $\hat{ev} : H^t_p(M; W) \to N^k$. По построению такого расслоения оно является (квази-) моноидом $(S^M E)_{t,H}$.

6. Теорема. *Если N – это гладкое многообразие над $\mathcal{A}_r$ (голоморфное при $1 \leq r \leq 3$ соответственно), Тогда существует H^t_p-дифференцируемое главное $(S^M E)_{t,H}$ расслоение $\hat{ev} : (\mathcal{P}^M E)_{t,H} \to N^k$.*

Доказательство. В силу леммы 5 достаточно доказать, что для любых $y \in N$ существует окрестность U точки y в N и H^t_p-отображение $p_q : U \to H^t_p(M, W)$ такое, что $ev_{s_{0,q}}(p_q(z)) = z$ для любых $q = 1, ..., k$, $z \in U$, где $ev_x(f) = f(x)$.

В $\hat{M}$ рассмотрим спрямляемую кривую $\zeta_q : [0, 1] \to \hat{M}$ соединяющую $\hat{s}_{0,q}$ с $\hat{s}_{0,q+k}$, где $1 \leq q \leq k$. Тогда рассмотрим координатную систему $(x_1, ..., x_m)$ в $\hat{M}$ такую, что x_1 соответствует естественным координатам вдоль ζ_q. Эта координатная система определена локально для любых карт в $\hat{M}$, и x_1 задаётся глобально.

Рассмотрим вещественную тень $N_{\mathbf{R}}$ для N, тогда $N_{\mathbf{R}}$ есть риманово C^∞ многообразие. Таким образом, существует риманова метрика g в N. Для любых $y \in N$ существует геодезический шар U вокруг y радиуса меньшего, чем радиус инъективности $\exp^N$ для g. Тогда существует отображение $p_q : U \to (\mathcal{P}^M U)_{t,H}$ с $\pi \circ [p_q(\hat{s}_{0,q+k})(z)] = z$ и $\pi \circ [p_q(\hat{s}_{0,q}(z)] = y$ для любых $z \in U$, где $p_q \circ \zeta_q =: \hat{\gamma}_{q,y,z}$ – это кратчайшая геодезическая в U соединяющая y с z, $\hat{\gamma}_{q,y,z} : [0,1] \to N$, $\hat{\gamma}_{q,y,z} \circ \zeta_q^{-1}(x_1) \in N$ для любых x_1. Исходную обёртку $\hat{\gamma}_{q,y,z}$ продолжим до $\hat{p}_q$ на $\hat{M}$ со значениями в E такое, что $p_q \circ \Xi = \pi \circ \hat{p}_q$.

7. Предложение. (1). *(Квази-) Группа обёрток $(W^M E; N, G, \mathbf{P})_{t,H}$ является главным G^k расслоением над $(W^M N)_{t,H}$.*

(2). *Абелианизация $[(W^M E; N, G, \mathbf{P})_{t,H}]_{ab}$ (квази-) группы обёрток $(W^M E; N, G, \mathbf{P})_{t,H}$ изоморфна с $(W^M E; N, G_{ab}, \mathbf{P})_{t,H}$.*

(3). *При $n \geq 2$ итерированная группа петель $(L^{S^n} E)_{t,H}$ изоморфна с группой обёрток $(W^{S^n} E)_{t,H}$ для сферы S^n и главного расслоения E при $dim_{\mathbf{R}} N \geq 2$ с $k = 1$.*

Доказательство. 1. Структура расслоения $\pi : E \to N$ индуцирует структуру расслоения $\hat{\pi} : (W^M E; N, G, \mathbf{P})_{t,H} \to (W^M N)_{t,H}$, так как $\pi \circ \mathbf{P}_{\hat{\gamma},u} = \hat{\gamma}$. В силу леммы 5 достаточно показать, что существует окрестность U_G единицы e в $(W^M E)_{t,H}$ и G-эквивариантное отображение $\phi : U_G \to (W^M N)_{t,H}$. Пусть $< \mathbf{P}_{\hat{\gamma},u} >_{t,H} \in (W^M E)_{t,H}$, где $\hat{\gamma} : \hat{M} \to N$, $\hat{\gamma} = \gamma \circ \Xi$, $\gamma : M \to N$, $\gamma(s_{0,q}) = y_0$ для любых $q = 1, ..., k$. Тогда $\pi \circ \mathbf{P}_{\hat{\gamma},u} = \hat{\gamma}$ и $\mathbf{P}_{\hat{\gamma},u}$ является G-эквивариантным согласно условиям определяющим структуру параллельного переноса, то есть $\mathbf{P}_{\hat{\gamma},u}(x)z = \mathbf{P}_{\hat{\gamma},uz}(x)$ для любых $x \in \hat{M}$ и $z \in G$ и всякого $u \in E_{y_0}$. Мы имеем, что $uG = \pi^{-1}(y)$ для любых $u \in E_y$ и $y \in N$.

Поэтому, мы положим $\phi = \pi_*$, где $\pi_* < \mathbf{P}_{\hat{\gamma},u} >_{t,H} = < \hat{\gamma}, u >_{t,H}$ и возьмём $U_G = \pi_*^{-1}(U)$, где U – это симметричная $U^{-1} = U$ окрестность единицы e в $(W^M N)_{t,H}$.

(Квази-) Группа G действует эффективно на E. Поскольку G линейно связна, то G^k действует эффективно на $(W^M E)_{t,H}$. В самом деле, для любых ζ_q из §6 существует $g_q \in G$ соответствующее $\hat{\gamma}(\hat{s}_{0,q+k})$ с $\mathbf{P}_{\hat{p}_q, \hat{s}_{0,q} \times e}(\hat{s}_{0,q+k}) = \{y_0 \times g_q\} \in E_{y_0}$, $g_q \in G$ для всякого $q = 1, ..., k$. Более того, $\pi_*^{-1}(\pi_*(< \mathbf{P}_{\hat{\gamma},u} >_{t,H})) = < \mathbf{P}_{\hat{\gamma},u} >_{t,H} G^k$. Тогда слой $\hat{\pi} : (W^M E; N, G, \mathbf{P})_{t,H} \to (W^M N)_{t,H}$ равен G^k. Благодаря условиям $2(P1 - P5)$ [14] оно является главным G^k дифференцируемым расслоением класса H^t_p.

2, 3. В силу предложения 1 группа петель $(L^{S^n} E)_{l,H}$ всюду плотна в n раз итерированной группе петель $(L^{S^1}(...(L^{S^1} E)_{1,H}...)_{1,H}$, в то время как группа обёрток $(W^{S^n} E)_{l,H}$ всюду плотна в n раз итерированной группе обёрток $(W^{S^1} E)_{n;1,H}$ для любых $l \geq n$. Для каждого $n > m$ существует естественный проектор $\pi^m_n : S^n \to S^m$, который индуцирует вложения $(W^{S^m} E)_{t,H} \hookrightarrow (W^{S^n} E)_{t,H}$ и $(L^{S^m} E)_{t,H} \hookrightarrow (L^{S^n} E)_{t,H}$ согласно следствию 9 [14], так как $k = 1$ и выбирая отмеченную точку $s_0 \in S^1$. Поэтому, благодаря $dim_{\mathbf{R}} N \geq 2$ рассматриваемые здесь группы обёрток и петель бесконечномерны. Поэтому, утверждения $(2, 3)$ вытекают из (1) и доказательства теоремы 2 выше и предложения 11 [14], согласно которому итерированная группа петель $(L^{S^1}(...(L^{S^1} E)_{1,H}...)_{1,H}$ коммутативна.

8. Предложение. *Если E контрактируема (в точку), то $(\mathcal{P}^M E)_{t,H}$ контрактируема (в точку e).*

Доказательство. Пусть $g : [0,1] \times E \to E$ – это контрактирование такое, что g непрерывна и $g(0,z) = z$, и $g(1,z) = y_0 \times e$ для любых $z \in E$. Тогда для любых $f \in H^t_p(M, W)$ мы получим $g(0, f(x)) = f(x)$ и $g(1, f(x)) = y_0 \times e$ для любых $x \in M$. Более того, $g(s, < f >_{t,H}) \subset < g(s,f) >_{t,H}$ для любых $s \in [0,1]$, так как $f \in g_s^{-1}(< g(s,f) >_{t,H})$ и g непрерывны, в то время как $< g(s,f) >_{t,H}$ по своему определению замкнуты в $H^t_p(M, W)$, где $g_s(z) := g(s,z)$. Поэтому, $id = g(0,*) : (\mathcal{P}^M E)_{t,H} \to (\mathcal{P}^M E)_{t,H}$ и $g(1, (\mathcal{P}^M E)_{t,H}) = < w_0 >_{t,H}$.

8.1. Обозначения. Обозначим через $Hom^t_p((W^M E)_{t,H}, G)$ или $Hom^t_p((S^M E)_{t,H}, G)$ (квази-) группу или (квази-) моноид H^t_p дифференцируемых гомоморфизмов из $(W^M E)_{t,H}$ или $(S^M E)_{t,H}$ соответственно в G. Через $\mathcal{A}^*_r$ обозначим мультипликативную (квази-) группу для $\mathcal{A}_r \setminus \{0\}$, где $0 \leq r \leq 3$.

9. Теорема. *Пусть $DifH^{t'}_p(N)$ действует транзитивно на N, $t \leq t'$. Для любых H^∞ многообразия N и H^t_p дифференцируемой группы G такой, что $\mathcal{A}^*_r \subset G$ с*

$1 \le r \le 3$ *существует гомоморфизм* H^t_p *дифференцируемого пространство всех классов эквивалентности* $(\mathcal{P}^M E)_{t,H}$ *относительно* $DifH^{t'}_p(N)$ *(смотри §§1.3.2 и 3 [14]) и* $Hom^t_p((S^M E)_{t,H}, G^k)$. *Они изоморфны, когда* G *коммутативна.*

Доказательство. Отметим, что благодаря теореме 6 H^t_p-дифференцируемое главное $(S^M E)_{t,H}$ расслоение $\hat{ev} : (\mathcal{P}^M E)_{t,H} \to N^k$ имеет структуру параллельного переноса $\hat{\mathbf{P}}_{\hat\gamma,uz}(x) = \hat{\mathbf{P}}_{\hat\gamma,u}(x)z$ для любых $x \in \hat{M}$ и всех $\gamma \in H^t_p(M,N)$, и $u \in \hat{ev}^{-1}(\gamma(s_{0,k}))$, и всякого $z \in G$, и соответствующего $\hat\gamma : \hat{M} \to N$ такие, что $\gamma \circ \Xi = \hat\gamma$. Если $x = \hat{s}_{0,q}$ с $1 \le q \le k$, тогда $\hat{\mathbf{P}}$ даёт тождественный гомоморфизм из $(S^M E)_{t,H}$ в $(S^M E)_{t,H}$. Если $\theta : (S^M E)_{t,H} \to G^k$ есть H^t_p дифференцируемый гомоморфизм, тогда голономия ассоциированная с параллельным переносом $\hat{\mathbf{P}}^\theta$ расслоения $(\mathcal{P}^M E)_{t,H} \times^\theta G \to N^k$ является гомоморфизмом $\theta : (S^M E)_{t,H} \to G^k$ (смотри §2.3 в [14]). В тоже время группа G содержит непрерывные одно-параметрические подгруппы из $\mathcal{A}^*_r$, где $1 \le r \le 3$. Если $g \in (W^M N)_{t,H}$ и $g \ne e$, тогда g имеет конечный порядок, так как w_0 не принадлежит g^n для любых $n \ne 0$ ненулевых целых чисел n, где $w_0(M) = \{y_0\}$.

Эта голономия индуцирует отображение $h : (\mathcal{P}^M E)_{t,H}/\mathcal{Q} \to Hom^t_p((S^M E)_{t,H}, G^k)$, где $\mathcal{Q}$ – это отношение эквивалентности вызванное транзитивным действием группы диффеоморфизмов $DifH^{t'}_p(N)$, так что $(S^M E)_{t,H}$ с различными отмеченными точками или $\{s_{0,q} : q = 1, ..., k\}$ в M и y_0, или $\tilde{y}_0$ в N изоморфны, так как существует $\psi \in DifH^{t'}_p(N)$ такое, что $\psi(y_0) = \tilde{y}_0$.

Если G коммутативна, тогда это отображение является гомоморфизмом, так как $(S^M E)_{t,H}$ есть коммутативный моноид для коммутативной группы G (смотри теорему 3.2 [14]) и $u\mathbf{P}_{\hat\gamma_1,v_1}(x_1)\mathbf{P}_{\hat\gamma_2,v_2}(x_2) = u\mathbf{P}_{\hat\gamma_2,v_2}(x_2)\mathbf{P}_{\hat\gamma_1,v_1}(x_1)$ для любых $x_1, x_2 \in \hat{M}$ и $u, v_1, v_2 \in E_{y_0}$. Имеется вложение $(S^M E)_{t,H} \hookrightarrow (W^M E)_{t,H}$, следовательно, гомоморфизм $\theta : (W^M E)_{t,H} \to G^k$ имеет ограничение на $(S^M E)_{t,H}$, которое является также гомоморфизмом.

Для $G \supset \mathcal{A}^*_r$ существует семейство $f \in Hom^t_p((S^M E)_{t,H}, G^k)$ различающих элементы моноида обёрток $(S^M E)_{t,H}$, следовательно, существует вложение $(S^M E)_{t,H}$ в $Hom^t_p((S^M E)_{t,H}, G^k)$. Расслоение $(\mathcal{P}^M E)_{t,H} \times^\theta G \to N^k$ индуцирует структуру параллельного переноса $\mathbf{P}^\theta$. Голономия структуры параллельного переноса на $(\mathcal{P}^M N)_{t,H} \times^\theta G \to N^k$ есть θ. Поэтому, отображение $H^t_p((S^M E)_{t,H}, G^k) \ni \theta \mapsto \mathbf{P}^\theta$ является обратным к h.

10. Теоремы. *Предположим, что* $M_2 \hookrightarrow M_1$ *и* $M = M_1 \setminus (M_2 \setminus \partial M_2)$, *и* $\hat{M}_2 \hookrightarrow \hat{M}_1$, *и* $\hat{M} = \hat{M}_1 \setminus (\hat{M}_2 \setminus \partial \hat{M}_2)$, *и* $N_2 \hookrightarrow N_1$ *– это* H^t_p*-псевдо-многообразия с одними и теми же отмеченными точками* $\{s_{0,q} : q = 1, ..., k\}$ *для* M_1 *и* M_2, *и* M, *и* $y_0 \in N_2$ *удовлетворяющими условиям §2 [14] и* G_2 *– это замкнутая подгруппа в* G_1 *с полным (как равномерное пространство) главным расслоением* E *и со структурной группой* G_1.

1. *Тогда* $(W^{M_2,\{s_{0,q}:q=1,...,k\}}E; N_2, G_2, \mathbf{P})_{t,H}$ *имеет вложение в качестве замкнутой подгруппы в* $(W^{M_1,\{s_{0,q}:q=1,...,k\}}E; N_1, G_1, \mathbf{P})_{t,H}$.

2. *Группа обёрток* $(W^{M_2,\{s_{0,q}:q=1,...,k\}}E; N, G_2, \mathbf{P})_{t,H}$ *является нормальной в* $(W^{M_1,\{s_{0,q}:q=1,...,k\}}E; N, G_1, \mathbf{P})_{t,H}$ *тогда и только тогда, когда* G_2 *является нормальной подгруппой в* G_1.

3. *В последнем случае* $(W^M E; N, G, \mathbf{P})_{t,H}$ *изоморфна с* $(W^{M_1}E; N, G_1, \mathbf{P})_{t,H}/(W^{M_2}E; N, G_2, \mathbf{P})_{t,H}$, *где* $G = G_1/G_2$.

Доказательство. 1. Если $\hat\gamma_2 \in H^t_p(\hat{M}_2, N_2)$, тогда она имеет H^t_p продолжение до $\hat\gamma_1 \in H^t_p(\hat{M}_1, N_1)$ благодаря теореме III.4.1 [27]. Поэтому, структура параллельного переноса $\mathbf{P}_{\hat\gamma_1,u}$ над $\hat{M}_1$ служит продолжением для $\mathbf{P}_{\hat\gamma_2,u}$ над $\hat{M}_2$. Равномерные пространства $H^t_p(M_j, \{s_{0,1}, ..., s_{0,k}\}; W_j, y_0)$ полны при $j = 1, 2$, так как главное расслоение E топологически полно и соответствующие главные под-расслоения E_2 со структурной группой G_2 также полно (как равномерное пространство, смотри теорему

8.3.6 [4]). Поэтому, $H^t_p(M_2, \{s_{0,1}, ..., s_{0,k}\}; W_2, y_0)$ имеет вложение в качестве замкнутого подпространства в $H^t_p(M_1, \{s_{0,1}, ..., s_{0,k}\}; W_1, y_0)$. Каждый H^t_p диффеоморфизм псевдо-многообразия M_2 имеет H^t_p продолжение до диффеоморфизма псевдо-многообразия M_1 (смотри также §III.4 в [27] и [38]). Поскольку G_2 есть замкнутая подгруппа в G_1, то $(S^{M_2,\{s_{0,q}:q=1,...,k\}}E; N_2, G_2, \mathbf{P})_{t,H}$ имеет вложение в качестве замкнутого под-моноида в $(S^{M_1,\{s_{0,q}:q=1,...,k\}}E; N_1, G_1, \mathbf{P})_{t,H}$ и неизбежно $(W^{M_2,\{s_{0,q}:q=1,...,k\}}E; N_2, G_2, \mathbf{P})_{t,H}$ имеет вложение в качестве замкнутой подгруппы в $(W^{M_1,\{s_{0,q}:q=1,...,k\}}E; N_1, G_1, \mathbf{P})_{t,H}$ благодаря теореме 6.1 [14].

2. Группы $(W^{M_j,\{s_{0,q}:q=1,...,k\}}N)_{t,H}$ for $j = 1, 2$ коммутативны и $(W^{M_j,\{s_{0,q}:q=1,...,k\}}E)_{t,H}$ являются G^k_j главными расслоениями над $(W^{M_j,\{s_{0,q}:q=1,...,k\}}N)_{t,H}$ (смотри теорему 6.2 [14] и предложение 7.1 выше). Поэтому, $(W^{M_2,\{s_{0,q}:q=1,...,k\}}E)_{t,H}$ есть нормальная (замкнутая) подгруппа в $(W^{M_1,\{s_{0,q}:q=1,...,k\}}E)_{t,H}$ тогда и только тогда, когда G_2 является нормальной (замкнутой) подгруппой в G_1.

3. Рассмотрим главное расслоение $E(N, G, \pi, \Psi)$ со структурной группой G (смотри замечание 1.3.2 [14]) и структурой параллельного переноса $\mathbf{P}$ для H^t_p псевдо-многообразия $\hat{M}$, где $G = G_1/G_2$ – это фактор-группа. Если $\hat{\gamma}_1 \in H^t_p(\hat{M}_1, N)$, тогда $\hat{\gamma}_1$ является комбинацией

(i) $\hat{\gamma}_1 = \hat{\gamma}_2 \nabla \hat{\gamma}$,

где $\hat{\gamma}_2$ и $\hat{\gamma}$ – это ограничения $\hat{\gamma}_1$ на $\hat{M}_2$ и $\hat{M}$ соответственно. С другой стороны, каждое $\hat{\gamma} \in H^t_p(\hat{M}, N)$ имеет продолжение $\hat{\gamma}_1 \in H^t_p(\hat{M}_1, N)$. Многообразие $\hat{M}_1$ метризуемо метрикой ρ. Для любого $\epsilon > 0$ существует $\psi \in DifH^t_p(\hat{M}_1; \{\hat{s}_{0,q} : q = 1, ..., 2k\})$ такое, что $(\psi(\hat{M}) \cap \hat{M}_2) \subset \bigcup_{l=1}^s B(\hat{M}_1, x_l, \epsilon)$ для некоторого $x_l \in \hat{M}_1$ с $l = 1, ..., s$ и $s \in \mathbf{N}$, и $\psi|_{\hat{M}_1 \setminus (\hat{M} \bigcup_{l=1}^s B(\hat{M}_1, x_l, \epsilon))} = id$, так как $\hat{M}_1$ и $\hat{M}_2$ являются компактными псевдо-многообразиями. Поэтому, использование леммы 2.1.3.16 [22] и карт многообразий даёт

$< \mathbf{P}_{\hat{\gamma},u}|_M >_{t,H} = < \mathbf{P}_{\hat{\gamma}_1,u}|_{M_1} >_{t,H} / < \mathbf{P}_{\hat{\gamma}_2,u}|_{M_2} >_{t,H}$

благодаря разложению (i), так как $\mathbf{P}_{\hat{\gamma},u}|_{M_j} \in G_j$ при $j = 1, 2$ и $G = G_1/G_2$ есть $H^{t'}_p$ фактор-группа с $t' \geq t$. Итак, $(W^M E; N, G, \mathbf{P})_{t,H}$ изоморфна с $(W^{M_1}E; N, G_1, \mathbf{P})_{t,H}/(W^{M_2}E; N, G_2, \mathbf{P})_{t,H}$ (смотри также §§3, 6 [14]).

11. Следствие. *Пусть выполнены предположения теоремы 10. Тогда* $(W^M N)_{t,H}$ *изоморфна с* $(W^{M_1}N)_{t,H}/(W^{M_2}N)_{t,H}$.

Доказательство. При $(W^M N)_{t,H}$ беря $G = G_1 = G_2 = \{e\}$, мы получим утверждение этого следствия из теоремы 10.3.

12. Предложение. *Предположим, что* $M = M_1 \vee M_2$, *где* M_1 *и* M_2 *являются* H^t_p-*псевдо-многообразиями удовлетворяющими условиям 2.2*$(i-v)$ *[14] с букетом взятым по отмеченным точкам* $\{s_{0,q} : q = 1, ..., k\}$, *тогда* $(W^M N)_{t,H}$ *изоморфна с внутренним прямым произведением* $(W^{M_1}N)_{t,H} \otimes (W^{M_2}N)_{t,H}$.

Доказательство. Многообразие M имеет отмеченные точки $\{s_{0,q} : q = 1, ..., k\}$ такие, что $s_{0,q}$ соответствует $s_{0,q,1}$ склеенной с $s_{0,q,2}$ в букете $M_1 \vee M_2$ для каждого $q = 1, ..., k$, где $s_{0,q,j} \in M_j$ – это отмеченные точки $j = 1, 2$. Поскольку каждое M_j удовлетворяет условиям 2.2$(i-v)$ [14], тогда M также им удовлетворяет.

В силу теоремы 10.1 $(W^{M_j,\{s_{0,q}:q=1,...,k\}}N)_{t,H}$ имеет вложение в качестве замкнутой подгруппы в $(W^{M,\{s_{0,q}:q=1,...,k\}}N)_{t,H}$ при $j = 1, 2$. Если $\gamma_j \in H^t_p(M_j, \{s_{0,q} : q = 1, ..., k\}; N, y_0)$ при $j = 1, 2$, тогда $\gamma_1 \vee \gamma_2 \in H^t_p(M, \{s_{0,q} : q = 1, ..., k\}; N, y_0)$. С другой стороны, каждая обёртка $\gamma \in H^t_p(M, \{s_{0,q} : q = 1, ..., k\}; N, y_0)$ имеет разложение $\gamma = \gamma_1 \vee \gamma_2$, где $\gamma_j = \gamma|_{M_j}$ при $j = 1, 2$. Поэтому, $< \gamma >_{t,H} = < \gamma_1 \vee w_{0,2} >_{t,H} \vee < w_{0,1} \vee \gamma_2 >_{t,H}$, где $w_0(M) = \{y_0\}$, $w_{0,j} = w_0|_{M_j}$ при $j = 1, 2$, следовательно, $(W^M N)_{t,H}$ изоморфна с $(W^{M_1}N)_{t,H} \otimes (W^{M_2}N)_{t,H}$.

13. Предложения. 1. *Пусть $\theta : N_1 \to N$ является вложением с $\theta(y_1) = y_0$, или $F : E_1 \to E$ – это вложение главных расслоений над $\mathcal{A}_r$ такое, что $\pi \circ F|_{N_1 \times e} = \theta \circ \pi_1$, тогда существуют вложения $\theta_* : (W^M N_1)_{t,H} \to (W^M N)_{t,H}$ и $F_* : (W^M E_1)_{t,H} \to (W^M E)_{t,H}$.*

2. *Если $\theta : N_1 \to N$ и $F : E_1 \to E$ – это факторные отображения и факторный гомоморфизм такой, что N_1 – это псевдо-многообразие являющееся покрытием для псевдо-многообразия N, тогда $(W^M N)_{t,H}$ – это фактор-группа некоторой замкнутой подгруппы в $(W^M N_1)_{t,H}$, и $(W^M E)_{t,H}$ есть фактор-группа некоторой замкнутой подгруппы в $(W^M E_1)_{t,H}$.*

3. *Если имеются H^t_p диффеоморфизм $f_1 : M \to M_1$ и $H^{t'}_p$-изоморфизм $f_2 : E \to E_1$, тогда группы обёрток $(W^{M_1} E_1)_{t,H}$ и $(W^M E)_{t,H}$ изоморфны.*

Доказательство. 1. Если $\gamma_1 \in H^t_p(M, \{s_{0,q} : q = 1, ..., k\}; N_1, y_1)$, тогда $\theta \circ \gamma_1 = \gamma \in H^t_p(M, \{s_{0,q} : q = 1, ..., k\}; N, y_0)$, $< \gamma >_{t,H} = \theta_* < \gamma_1 >_{t,H}$, где $\theta_* < \gamma_1 >_{t,H} := \{\theta \circ f : f R_{t,H} \gamma_1\}$. Вдобавок $F|_{E_{1,v}}$ даёт вложение $F : G_1 \to G$, где G_1 и G – это структурные группы для расслоений E_1 и E. Поэтому, для структур параллельных переносов мы получим:

(1) $F \circ \mathbf{P}^1_{\hat{\gamma}_1, v}(x) = \mathbf{P}_{\hat{\gamma}, u}(x)$

для любых $x \in \hat{M}$, где $F(v) = u$, $\pi \circ F = \theta \circ \pi_1$, где $\mathbf{P}^1$ отвечает E_1 и $\mathbf{P}$ соответствует E. Определим отображение $F_* < \mathbf{P}^1_{\hat{\gamma}_1, v} >_{t,H} := \{F \circ g : g R_{t,H} \mathbf{P}^1_{\hat{\gamma}_1, v}\}$. Поскольку θ и F являются H^t_p дифференцируемыми отображениями, то θ_* и F_* являются вложениями H^t_p многообразий и групповыми гомоморфизмами H^l_p дифференцируемых групп (смотри также теоремы 6 [14]).

2. Если $\gamma \in H^t_p(M, \{s_{0,q} : q = 1, ..., k\}; N, y_0)$, тогда существует $\gamma_1 \in H^t_p(M, \{s_{0,q} : q = 1, ..., k\}; N_1, y_1)$ такое, что $\theta \circ \gamma_1 = \gamma$, так как N_1 – это покрытие для N, то есть каждая точка $y \in N$ имеет окрестность V_y, для которой $\theta^{-1}(V_y)$ является дизъюнктным объединением открытых подмножеств в N_1 для любых $y \in N$. Такая γ_1 существует благодаря связности псевдо-многообразия M и образа $\gamma(M)$, где $\gamma(M) \subset N$. Каждому параллельному переносу в E_1 соответствует параллельный перенос в E, то есть выполнено уравнение (1) выше. Мы положим $\theta^{-1}_* < \gamma >_{t,H} = \{< \gamma_1 >_{t,H} : \theta \circ \gamma_1 = \gamma\}$ и $F^{-1}_* < \mathbf{P}_{\hat{\gamma}, u} >_{t,H} := \{< \mathbf{P}^1_{\hat{\gamma}_1, v} >_{t,H} : F \circ \mathbf{P}^1_{\hat{\gamma}_1, v} = \mathbf{P}_{\hat{\gamma}, u}\}$, где $F(v) = u$.

Это даёт факторные отображения θ_* и F_* из замкнутых подгрупп $\theta^{-1}_*(W^M N)_{t,H}$ и $F^{-1}_*(W^M E)_{t,H}$ в $(W^M N_1)_{t,H}$ и $(W^M E_1)_{t,H}$ соответственно на $(W^M N)_{t,H}$ и $(W^M E)_{t,H}$ по замкнутым подгруппам $\theta^{-1}_*(e)$ и $F^{-1}_*(e)$ соответственно.

3. Мы имеем, что $g \in H^t_p(M, \{s_{0,q} : q = 1, ..., k\}; W, y_0)$ тогда и только тогда, когда $f_2 \circ g \circ f_1^{-1} \in H^t_p(M_1, \{s_{0,q,1} : q = 1, ..., k; W_1, y_1)$, где $f_1(s_{0,q}) = s_{0,q,1}$ для любых $q = 1, ..., k$, $f_2(y_0 \times e) = y_1 \times e$. В тоже время $\psi \in Dif H^t_p(M)$ тогда и только тогда, когда $f_1 \circ \psi \circ f_1^{-1} \in Dif H^t_p(M_1)$. Таким образом, $(S^M E)_{t,H}$ (квази-) моноид изоморфен с $(S^{M_1} E_1)_{t,H}$ и неизбежно (квази-) группы обёрток $(W^M E)_{t,H}$ и $(W^{M_1} E_1)_{t,H}$ являются H^t_p диффеоморфными как многообразия и изоморфны как H^l_p (квази-) группы.

14. Замечание. Если N – это многообразие не обязательно ориентируемое, тогда оно содержит с точностью до эквивалентности атласы связных карт V открытых в N таких, что $y \in V$ и V ориентируемо. Поскольку $(W^M E|_V)_{t,H}$ есть бесконечномерная группа, то $(W^M E)_{t,H}$ также бесконечномерна даже, если N неориентируемо благодаря предложению 13.1. Если многообразие N неориентируемо, тогда существует ориентируемое покрытие многообразия N_1 и факторное отображение $\theta : N_1 \to N$ как в предложении 13(2) (смотри также о покрытиях и ориентируемых покрытиях в §§50, 51 [32], §§II.4.18,19 [2]).

Необходимо отметить, что некоторые особенности групп обёрток также связаны с их бесконечномерностью.

15. Замечание. Пусть G – это топологическая (квази-) группа не обязательно ассоциативная, но альтернативная:

$(A1)$ $g(gf) = (gg)f$ и $(fg)g = f(gg)$ и $g^{-1}(gf) = f$ и $(fg)g^{-1} = f$ для любых $f, g \in G$ и имеющая операцию сопряжения, которая является непрерывным (анти) автоморфизмом (квази-) группы G таким, что

$(C1)$ $conj(gf) = conj(f)conj(g)$ для любых $g, f \in G$,

$(C2)$ $conj(e) = e$ для единичного элемента e в G.

Если G принадлежит определённому классу гладкости, например, H^t_p дифференцируема, тогда (анти) автоморфизм $conj$ предполагается принадлежащим тому же классу. Для коммутативной группы в частности можно взять единичное отображение в качестве сопряжения. Для $G = \mathcal{A}^*_r$ можно взять $conj(z) = \tilde{z}$ как обычное сопряжение для любых $z \in \mathcal{A}^*_r$, где $1 \le r \le 3$.

Предположим, что

$(A2)$ $\hat{G} = \hat{G}_0 i_0 \oplus \hat{G}_1 i_1 \oplus ... \oplus \hat{G}_{2^r-1} i_{2^r-1}$, так что G есть мультипликативная скрученная (twisted) группа кольца $\hat{G}$ с мультипликативной групповой структурой, где $\hat{G}_0, ..., \hat{G}_{2^r-1}$ – это попарно изоморфные коммутативные ассоциативные кольца и $\{i_0, ..., i_{2^r-1}\}$ – это генераторы алгебры Кэли-Диксона $\mathcal{A}_r$, $1 \le r \le 3$ и $(y_l i_l)(y_s i_s) = (y_l y_s)(i_l i_s)$ – это естественное умножение произвольных чистых состояний в G при $y_l \in G_l$. Например, $G = (\mathcal{A}^*_r)^n$ и $\hat{G} = \mathcal{A}^n_r$. При $r = 3$ она будет квази-группой G, но мы часто для краткости и единообразия опускаем приставку "квази", так как ситуация оговорена и ясна. При $0 \le r \le 2$ она является ассоциативной группой G.

16. Лемма. *Если G и K – это две топологические дифференцируемые группы скрученные над $\{i_0, ..., i_{2^r-1}\}$ и удовлетворяющие условиям 15$(A1, A2, C1, C2)$ и K – это замкнутая нормальная подгруппа в G, где $2 \le r \le 3$, тогда фактор-группа является топологической или дифференцируемой и скрученной над $\{i_0, ..., i_{2^r-1}\}$.*

Доказательство. Поскольку $\hat{G} = \hat{G}_0 i_0 \oplus \hat{G}_1 i_1 \oplus ... \oplus \hat{G}_{2^r-1} i_{2^r-1}$, где $\hat{G}_0, ..., \hat{G}_{2^r-1}$ попарно изоморфны, тогда $\hat{G}/\hat{K} = (\hat{G}_0/\hat{K}_0)i_0 \oplus ... \oplus (\hat{G}_{2^r-1}/\hat{K}_{2^r-1})i_{2^r-1}$ также скрученная. Каждая группа $\hat{G}_j$ ассоциативна, следовательно, G/K альтернативна, так как $2 \le r \le 3$ и используя таблицу умножения генераторов алгебры Кэли-Диксона $\mathcal{A}_r$. С другой стороны, $conj(K) = K$, следовательно, $conj(gK) = Kconj(g) = conj(g)K \in G/K$ и $conj(ghK) = conj(gh)K = (conj(h)conj(g))K = (conj(h)K)(conj(g)K) = conj(hK)conj(gK) = conj(gKhK)$.

Подгруппа K замкнута в G, следовательно, по определению факторной дифференцируемой структуры G/K является дифференцируемой группой (смотри также §§1.11, 1.12, 1.15 в [34]).

17. Предложение. *Пусть $\eta : N_1 \to N_2$ является $H^{t'}_p$-ретракцией $H^{t'}_p$ многообразий, $N_2 \subset N_1$, $\eta|_{N_2} = id$, $y_0 \in N_2$, где $t' \ge t$, M – это H^t_p многообразие, $E(N_1, G, \pi, \Psi)$ и $E(N_2, G, \pi, \Psi)$ – это главные $H^{t'}_p$ расслоения со структурной группой G удовлетворяющей условиям §2 [14]. Тогда η индуцирует групповой гомоморфизм η_* из $(W^M E; N_1, G, \mathbf{P})_{t,H}$ на $(W^M E; N_2, G, \mathbf{P})_{t,H}$.*

Доказательство. В силу предложения 7(1) группа обёрток $(W^M E; N_1, G, \mathbf{P})_{t,H}$ является главным G^k расслоением над $(W^M N_1)_{t,H}$. Продолжим η до $\vartheta : E(N_1, G, \pi, \Psi) \to E(N_2, G, \pi, \Psi)$, так что $\pi_2 \circ \vartheta = \eta \circ \pi_1$ и $pr_2 \circ \vartheta = id : G \to G$, где $pr_2 : E_y \to G$ – это проектор, $y \in N_1$. Если $f \in H^t_p(M, N_1)$, то $\eta \circ f := \eta(f(*)) \in H^t_p(M, N_2)$. Если же $f(s_{0,q}) = y_0$, тогда $\eta(f(s_{0,q})) = y_0$, так как $y_0 \in N_2$. Поскольку $N_2 \subset N_1$, тогда $H^t_p(M, N_2) \subset H^t_p(M, N_1)$. Структура параллельных переносов $\mathbf{P}$ задаётся над одним и тем же многообразием M.

Мы положим $\eta_*(< \mathbf{P}_{\hat{\gamma},u} >_{t,H}) =< \mathbf{P}_{\eta\circ\hat{\gamma},u} >_{t,H}$, где $\hat{\gamma} : \hat{M} \to N_1$. В силу теорем 2.3 и 2.6 [14] $\eta_*(< \mathbf{P}_{\hat{\gamma}_1,u} \vee \mathbf{P}_{\hat{\gamma}_2,u} >_{t,H} = \eta^*(< \mathbf{P}_{\hat{\gamma}_1,u} >_{t,H})\eta_*(< \mathbf{P}_{\hat{\gamma}_2,u} >_{t,H})$, и мы можем положить

$\eta_*(q^{-1}) = [\eta_*(q)]^{-1}$, следовательно, η_* – это группа гомоморфизмов. Более того, для любых $g \in (W^M E; N_2, G, \mathbf{P})_{t,H}$ существует $q \in (W^M E; N_1, G, \mathbf{P})_{t,H}$ такое, что $\eta_*(q) = g$, так как $\gamma : M \to N_2$ и $N_2 \subset N_1$ влечёт $\gamma : M \to N_1$, в то время как структурная группа G является той же, следовательно, η_* есть эпиморфизм.

18. Определение. Пусть G – это топологическая группа удовлетворяющая условиям $15(A1, A2, C1, C2)$ такая, что G есть мультипликативная группа кольца $\hat{G}$, где $1 \le r \le 2$. Тогда мы определим скрещенное произведение G^s такое, что оно является мультипликативной группой кольца $\hat{G}^s := \hat{G} \otimes_l \hat{G}$, где $l = i_{2^r}$ обозначает генератор удвоения, умножение в $\hat{G} \otimes_l \hat{G}$ зададим формулой:

(1) $(a + bl)(c + vl) = (ac - v^* b) + (va + bc^*)l$ для любых $a, b, c, v \in \hat{G}$, где $v^* = conj(v)$.

Сокрушительное произведение $M_1 \otimes_l M_2$ многообразий M_1, M_2 над $\mathcal{A}_r$ с $dim(M_1) = dim(M_2)$ определяется как $\mathcal{A}_{r+1}$ многообразие с локальными координатами $z = (x, yl)$, где x в M_1 и y в M_2 являются локальными координатами.

Его описание и существование даны ниже.

19. Предложение. *Кольцо $\hat{G}^s$ имеет мультипликативную группу G^s содержащую все $a + bl \ne 0$ с $a, b \in \hat{G}$. Если $\hat{G}$ – это топологическое или H^t_p дифференцируемое кольцо над $\mathcal{A}_r$ при $t \ge dim(G) + 1$, тогда $\hat{G}^s$ является топологическим или H^t_p дифференцируемым кольцом над $\mathcal{A}_{r+1}$.*

Доказательство. Для любых $1 \le r \le 2$ группа G ассоциативна, так как генераторы $\{i_0, ..., i_{2^r-1}\}$ образуют ассоциативную группу, когда $r \le 2$. Элемент $a+bl \in \hat{G}^s$ ненулевой тогда и только тогда, когда $(a + bl)(a + bl)^* = aa^* + bb^* \ne 0$ благодаря $15(A1, A2, C1, C2)$ и 18(1). При $a + bl \ne 0$ мы положим $u = (a^* - lb^*)/(aa^* + bb^*)$, где $aa^* + bb^* \in G_0$, следовательно, $u(a+bl) = (a+bl)u = 1 \in G_0$, так как группа G_j коммутативна для любых $j = 0, ..., 2^r - 1$, где G_j обозначает мультипликативную группу кольца $\hat{G}_j$. При $r \le 2$ семейство генераторов $\{i_0, ..., i_{2^{r+1}-1}\}$ образует альтернативную группу, следовательно, (квази-) группа $\hat{G}^s = \hat{G}_0 i_0 \oplus ... \oplus \hat{G}_{2^{r+1}-1} i_{2^{r+1}-1}$ альтернативна, где группа $\hat{G}_j$ изоморфна с $\hat{G}_0$ для любых j.

Если сложение в кольце $\hat{G}$ непрерывно, тогда очевидно $(a + bl) + (c + ql) = (a + c) + (b + q)l$ непрерывно. Если умножение в кольце $\hat{G}$ непрерывно, тогда формула 18(1) показывает, что умножение в $\hat{G}^s$ также непрерывно.

Мы имеем разложение $\mathcal{A}_{r+1} = \mathcal{A}_r \oplus \mathcal{A}_r l$. Если $\hat{G}$ является H^t_p дифференцируемым, тогда из определения локализаций вытекает, что кольцо $\hat{G}^s$ является H^t_p дифференцируемым над $\mathcal{A}_{r+1}$ (смотри также подробнее $20(1-5)$).

20. Теорема. *Пусть M_1, M_2 и N_1, N_2 – это H^t_p многообразия над $\mathcal{A}_r$ с $1 \le r \le 2$, и пусть G - это группа удовлетворяющая условиям $15(A1, A2, C1, C2)$, пусть также $M_1 \otimes_l M_2$, $N_1 \otimes_l N_2$ – это скрещенные произведения многообразий, и G^s – скрещенное произведение групп (смотри предложение 19), где $dim(M_1) = dim(M_2)$, $dim(N_1) = dim(N_2)$, $t \ge \max(dim(M_1), dim(N_1), dim(G)) + 1$. Тогда группа обёрток $(W^{M_1 \otimes_l M_2; \{s_{0,j,1} \otimes_l s_{0,v,2} : j=1,...,k_1; v=1,...,k_2\}} E; N_1 \otimes_l N_2, G^s, \mathbf{P}^s)_{t,H}$ скручена над $\{i_0, ..., i_{2^{r+1}-1}\}$ и изоморфна с скрещенным произведением*

$W^{M_2; \{s_{0,v,2} : v=1,...,k_2\}} E; N_1, (W^{M_1; \{s_{0,j,1} : j=1,...,k_1\}} E; N_1, G, \mathbf{P}_1)_{t,H}, \mathbf{P}_2)_{t,H} \otimes_l$

$W^{M_2; \{s_{0,v,2} : v=1,...,k_2\}} E; N_2, (W^{M_1; \{s_{0,j,1} : j=1,...,k_1\}} E; N_2, G, \mathbf{P}_1)_{t,H}, \mathbf{P}_2)_{t,H}$ *дважды итерированных групп обёрток скрученных над $\{i_0, ..., i_{2^r-1}\}$.*

Доказательство. Пусть M_b и N_b – это H^t_p многообразия над $\mathcal{A}_r$ с $1 \le r \le 2$, $b = 1, 2$ и пусть G – это группа удовлетворяющая условиям $15(A1, A2, C1, C2)$ такая, что $E(N_b, G, \pi, \Psi)$ есть главное G-расслоение. Рассмотрим скрещенные произведения $M_1 \otimes_l M_2$, $N_1 \otimes_l N_2$ многообразий и скрещенное произведение групп G^s (смотри предложение 19), где $t \ge \max(dim(M_1), dim(N_1), dim(G)) + 1$, где $dim(M_b)$ – топологическая размерность в смысле покрытий для M_b (смотри [4]), $dim(M_1) = dim(M_2)$, $dim(N_1) = dim(N_2)$. При $At(M_b) = \{(U_{j,b}, \phi_{j,b}) : j\}$ атлас для многообразия M_b его связывающие отображения $\phi_{j,b} \circ \phi_{k,b}^{-1}$ являются H_p^t функциями над $\mathcal{A}_r$ при $U_{j,b} \cap U_{k,b} \neq \emptyset$, где $\phi_{j,b} : U_{j,b} \to \mathcal{A}_r$ – это гомеоморфизмы из $U_{j,b}$ на $\phi_{j,b}(U_{j,b})$. Тогда $M_1 \otimes_l M_2$ состоит из всех точек (x, yl) с $x \in M_1$ и $y \in M_2$, с атласом $At(M_1 \otimes_l M_2) = \{(U_{j,1} \otimes_l U_{q,2}, \phi_{j,1} \otimes_l \phi_{q,2}) : j, q\}$ таким, что $\phi_{j,1} \otimes_l \phi_{q,2} : U_{j,1} \otimes_l U_{q,2} \to \mathcal{A}_{r+1}^m$, где m – это размерность многообразия M_1 над $\mathcal{A}_r$. Выразим для $z = x + yl \in \mathcal{A}_r$ с $x, y \in \mathcal{A}_r$ числа x, y в z представлении, тогда обозначим через $\theta_{j,q}$ отображения соответствующие $\phi_{j,1} \otimes_l \phi_{q,2}$ в z представлении, следовательно, связывающие отображения $\theta_{j,q} \circ \theta_{k,n}^{-1}$ принадлежат классу H_p^t над $\mathcal{A}_{r+1}$, когда $(U_{j,1} \otimes_l U_{q,2}) \cap (U_{k,1} \otimes_l U_{n,2}) \neq \emptyset$. Поэтому, $M_1 \otimes_l M_2$ и $N_1 \otimes_l N_2$ есть H_p^t многообразия над $\mathcal{A}_{r+1}$.

В силу теоремы вложения Соболева каждое H^t отображение на $M_1 \otimes_l M_2$ или $N_1 \otimes_l N_2$, или G^s непрерывно при t удовлетворяющем неравенству

$t \geq \max(dim(M_1), dim(N_1), dim(G)) + 1$, где $dim(M_1) = dim(M_2)$, $dim(N_1) = dim(N_2)$.

Каждая локально аналитическая функция $f(x, y) = f_1(x, y) + f_2(x, y)l$ по $x \in U$ и $y \in V$ может быть записана в виде локально аналитических функций по $z = x + yl$ со значениями в $\mathcal{A}_{r+1}$, где U и V открыты в $\mathcal{A}_r^m$, $f_b(x, y)$ – это локально аналитическая функция со значениями в $\mathcal{A}_r^w$, $b = 1, 2$, $m, w \in \mathbf{N}$. В самом деле, запишем каждую переменную x_j и y_j через z_j с помощью генераторов $\mathcal{A}_{r+1}$, где $x_j, y_j \in \mathcal{A}_r$, $z_j \in \mathcal{A}_{r+1}$, $x = (x_1, ..., x_m) \in \mathcal{A}_r^m$, $z = (z_1, ..., z_m) \in \mathcal{A}_{r+1}^m$ (смотри формулы 2.8(2) и теорему 2.16 [20]). Если $z \in \mathcal{A}_{r+1}$, тогда

(1) $z = v_0 i_0 + ... + v_{2^{r+1}-1} i_{2^{r+1}-1}$, где $v_j \in \mathbf{R}$ для любых $j = 0, ..., 2^{r+1} - 1$,

(2) $v_0 = (z + (2^{r+1} - 2)^{-1}\{-z + \sum_{j=1}^{2^{r+1}-1} i_j(z i_j^*)\})/2$,

(3) $v_s = (i_s(2^{r+1} - 2)^{-1}\{-z + \sum_{j=1}^{2^{r+1}-1} i_j(z i_j^*)\} - z i_j)/2$ для любых $s = 1, ..., 2^{r+1} - 1$,

где $z^* = \tilde{z}$ обозначает сопряжённое число Кэли-Диксона z. В тоеж время мы имеем для $z = x + yl$ с $x, y \in \mathcal{A}_r$, что

(4) $x = v_0 i_0 + ... + v_{2^r-1} i_{2^r-1}$ и

(5) $y = (v_{2^r} i_{2^r} + ... + v_{2^{r+1}-1} i_{2^{r+1}-1}) l^*$,

где $l = i_{2^r}$ обозначает генератор удвоения.

Поэтому, $f(x, y)$ становится $\mathcal{A}_{r+1}$ голоморфной при использовании соответствующих фраз возникающих канонически из выражений x_j, y_j через z_j по формулам $(1 - 5)$. Множество голоморфных функций всюду плотно в H_p^t согласно с определением этого пространства и теоремой Стоуна-Вейерштрасса в её некоммутативном варианте [19, 20], следовательно, используя направленность Коши, мы можем рассмотреть для любых $f_1, f_2 \in H_p^t$ над $\mathcal{A}_r$ представление функции $f = f_1 + f_2 l$ принадлежащей H_p^t над $\mathcal{A}_{r+1}$ (смотри также [17, 20]).

Тогда расслоение $E(N_1 \otimes_l N_2, G^s, \pi^s, \Psi^s)$ естественно изоморфно с $E(N_1, G, \pi_1, \Psi_1) \otimes_l E(N_2, G, \pi_2, \Psi_2)$, где $\pi^s = \pi_1 \otimes \pi_2 l : E(N_1 \otimes_l N_2, G^s, \pi^s, \Psi^s) \to N_1 \otimes_l N_2$ – это естественный проектор.

Если $\gamma : M_1 \otimes_l M_2 \to N_1 \otimes_l N_2$ является H_p^t отображением, тогда $\gamma(z) = \gamma_1(x, y) \times \gamma_2(x, y)l$, где $x \in M_1$ и $y \in M_2$, $z = (x, yl) \in M_1 \otimes_l M_2$, $\gamma_b : M_1 \otimes_l M_2 \to N_b$. Мы можем записать $\gamma_b(x, y)$ как $(\gamma_{b,1}(x))(y)$ семейство функций по x и параметру y, или как $(\gamma_{b,2}(y))(x)$ семейство функций по y с параметром x. Если $\eta_{b,a} : M_a \to N_b$, тогда $\mathbf{P}_{\hat{\eta}_{b,a}, u_{b,a}}$ обозначает структуру параллельного переноса на M_a над $E(N_b, G, \pi_b, \Psi_b)$.

Поэтому, $\mathbf{P}_{\hat{\gamma},u}^s(z) = [\mathbf{P}_{\hat{\gamma}_{1,1}, u_1;1}(x)][\mathbf{P}_{\hat{\gamma}_{1,2}, u_1;2}(y)] \otimes_l [\mathbf{P}_{\hat{\gamma}_{2,1}, u_2;2}(x)][\mathbf{P}_{\hat{\gamma}_{2,2}, u_2;2}(y)] \in E_{y_0}(N_1 \otimes_l N_2, G^s, \pi^s, \Psi^s)$ – это структура параллельного переноса в $M_1 \otimes_l M_2$ индуцированная ею из M_1 и M_2, где $u \in E_{y_0}(N_1 \otimes_l N_2, G^s, \pi^s, \Psi^s)$, $u = u_1 \otimes_l u_2$, $u_b \in E_{y_{0,b}}(N_b, G, \pi_b, \Psi_b)$, $y_{0,b} \in N_b$ – это отмеченная точка, $b = 1, 2$, $y_0 = y_{0,1} \otimes_l y_{0,2}$. Тогда параллельный перенос $\mathbf{P}^s$ является G^s эквивариантным. Поэтому, $< \mathbf{P}_{\hat{\gamma},u}^s >_{t,H} =< \mathbf{P}_{\hat{\gamma}_1, u_1} >_{t,H} \otimes_l < \mathbf{P}_{\hat{\gamma}_2, u_2} >_{t,H} =<$

$[\mathbf{P}_{\hat{\gamma}_{1,1},u_1;1}(x)][\mathbf{P}_{\hat{\gamma}_{1,2},u_1;2}(y)]>_{t,H}\otimes_l<[\mathbf{P}_{\hat{\gamma}_{2,1},u_2;2}(x)][\mathbf{P}_{\hat{\gamma}_{2,2},u_2;2}(y)]>_{t,H}$, где $\mathbf{P}_{\hat{\gamma}_b,u_b}$ - это структура параллельного переноса на $M_1\otimes_l M_2$ над $E(N_b,G,\pi_b,\Psi_b)$, $b=1,2$.

Итак, $(W^{M_1\otimes_l M_2;\{s_{0,j,1}\otimes_l s_{0,v,2}:j=1,...,k_1;v=1,...,k_2\}}E;N_1\otimes_l N_2,G^s,\mathbf{P}^s)_{t,H}$ изоморфно с скрещенным произведением

$W^{M_2;\{s_{0,v,2}:v=1,...,k_2\}}E;N_1,(W^{M_1;\{s_{0,j,1}:j=1,...,k_1\}}E;N_1,G,\mathbf{P}_1)_{t,H},\mathbf{P}_2)_{t,H}\otimes_l$

$W^{M_2;\{s_{0,v,2}:v=1,...,k_2\}}E;N_2,(W^{M_1;\{s_{0,j,1}:j=1,...,k_1\}}E;N_2,G,\mathbf{P}_1)_{t,H},\mathbf{P}_2)_{t,H}$ итерированных групп обёрток.

21. Теорема. *Существует гомоморфизм итерированных группа обёрток* $\theta:(W^ME)_{a;\infty,H}\otimes(W^ME)_{b;\infty,H}\to(W^ME)_{a+b;\infty,H}$ *для любых* $a,b\in\mathbf{N}$, *где* G *– это* H_p^∞ *группа,* $E(N,G,\pi,\Psi)$ *является главным* H_p^∞ *расслоением со структурной группой* G. *Более того, если (квази-) группа* G *или ассоциативна, или альтернативна, тогда гомоморфизм* θ *или ассоциативна, или альтернативна.*

Доказательство. Рассмотрим итерированные группы обёрток $(W^ME)_{a;\infty,H}$ как в §4, $a\in\mathbf{N}$. Если $\gamma_a:M^a\to N$, $\gamma_b:M^b\to N$ являются H_p^∞ отображениями такими, что $\gamma_b(s_{0,j_1}\times...\times s_{0,j_b})=y_0$ для любых $j_l=1,...,k$ и $l=1,...,b$, тогда $\gamma:=\gamma_a\times\gamma_b:M^a\times M^b\to N\times N=N^2$, где $M^a\times M^b=M^{a+b}$, $s_{0,j}$ – это отмеченные точки в M с $j=1,...,k$, и y_0 – это отмеченная точка в N, $H_p^\infty=\bigcap_{t\in\mathbf{N}}H_p^t$. Это даёт итерированную структуру параллельного переноса $\mathbf{P}_{\hat{\gamma},u;a+b}(x):=\mathbf{P}_{\hat{\gamma}_a,u_a;a}(x_a)\otimes\mathbf{P}_{\hat{\gamma}_b,u;b}(x_b)$ на M^{a+b} над $E(N^2,G^2,\pi,\Psi)$, где $u_b\in E_{y_0}(N,G,\pi,\Psi)$, $u=u_a\times u_b\in E_{y_0\times y_0}(N^2,G^2,\pi,\Psi)$.

Букет $M^b\vee M^b$ берётся по точкам $s_{j_1,...,j_b}$ в M^b, где $s_{j_1,...,j_b}:=s_{0,j_1}\times...\times s_{0,j_b}$ с $j_1,...,j_b\in\{1,...,k\}$; $s_{0,j}$ – это отмеченные точки в M с $j=1,...,k$. Тогда $(M^a\vee M^a)\times(M^b\vee M^b)\setminus\{s_{j_1,...,j_{a+b}}:j_l=1,...,k;l=1,...,a+b\}$ является H_p^t гомеоморфным с $M^{a+b}\vee M^{a+b}\setminus\{s_{j_1,...,j_{a+b}}:j_l=1,...,k;l=1,...,a+b\}$, так как $s_{j_1,...,j_a}\times s_{j_{a+1},...,j_{a+b}}=s_{j_1,...,j_{a+b}}$ для любых $j_1,...,j_{a+b}$. Имеется вложение $DifH_p^\infty(M^a)\times DifH_p^\infty(M^b)\hookrightarrow DifH_p^\infty(M^{a+b})$ для любых $a,b\in\mathbf{N}$. Если $f_a\in DifH_p^\infty(M^a)$ имеет ограничение $f_a|_{K_a}=id$, тогда $f_a\times f_b\in DifH_p^\infty(M^{a+b})$ и $f_a\times f_b|_{K_a\times K_b}=id$ при $K_a\subset M^a$. Положим $\theta(<\mathbf{P}_{\hat{\gamma}_a,u_a;a}>_{\infty,H;a},<\mathbf{P}_{\hat{\gamma}_b,u_b;b}>_{\infty,H;b})=<<\mathbf{P}_{\hat{\gamma}_a,u_a;a}>_{\infty,H;a}\otimes<\mathbf{P}_{\hat{\gamma}_b,u_b;b}>_{\infty,H;b}>_{\infty,H;a+b}$ есть группа гомоморфизмов, где детальное обозначение $<*>_{t,H;a}$ означает класс эквивалентности над многообразием M^a вместо M, $a\in\mathbf{N}$.

Поэтому, $<\mathbf{P}_{\hat{\gamma}\vee\hat{\eta},u;a+b}>_{\infty,H;a+b}:=<<\mathbf{P}_{\hat{\gamma}_a\vee\hat{\eta}_a,u_a;a}>_{\infty,H;a}\otimes<\mathbf{P}_{\hat{\gamma}_b\vee\hat{\eta}_b,u_b;b}>_{\infty,H;b}>_{\infty,H;a+b}$
$=<(<\mathbf{P}_{\hat{\gamma}_a,u_a;a}>_{\infty,H;a}<\mathbf{P}_{\hat{\eta}_a,u_a;a}>_{\infty,H;a})\otimes(<\mathbf{P}_{\hat{\gamma}_b,u_b;b}>_{\infty,H;b}<\mathbf{P}_{\hat{\eta}_b,u_b;b}>_{\infty,H;b})>_{\infty,H;a+b}$
$=<(<\mathbf{P}_{\hat{\gamma}_a,u_a;a}>_{\infty,H;a}\otimes<\mathbf{P}_{\hat{\gamma}_b,u_b;b}>_{\infty,H;b})(<\mathbf{P}_{\hat{\eta}_a,u_a;a}>_{\infty,H;a}\otimes<\mathbf{P}_{\hat{\eta}_b,u_b;b}>_{\infty,H;b})>_{\infty,H;a+b}$
$=<<\mathbf{P}_{\hat{\gamma}_a,u_a;a}>_{\infty,H;a}\otimes<\mathbf{P}_{\hat{\gamma}_b,u_b;b}>_{\infty,H;b}>_{\infty,H;a+b}<<\mathbf{P}_{\hat{\eta}_a,u_a;a}>_{\infty,H;a}\otimes<\mathbf{P}_{\hat{\eta}_b,u_b;b}>_{\infty,H;b}>_{\infty,H;a+b}$
$=\theta(<\mathbf{P}_{\hat{\gamma}_a,u_a;a}>_{\infty,H;a},<\mathbf{P}_{\hat{\gamma}_b,u_b;b}>_{\infty,H;b})\theta(<\mathbf{P}_{\hat{\eta}_a,u_a;a}>_{\infty,H;a},<\mathbf{P}_{\hat{\eta}_b,u_b;b}>_{\infty,H;b})$.
Таким образом, θ является групповым гомоморфизмов.

Отображение $H_p^\infty(M^a,N)\times H_p^\infty(M^b,N)\ni(\gamma_a\times\gamma_b)\mapsto(\gamma_a,\gamma_b)\in H_p^\infty(M^{a+b},N^2)$ принадлежит H_p^∞ классу. Умножение в G^v является H_p^∞ для любых $v\in\mathbf{N}$, так как оно таково для G, так как умножение в G^v таково: $(a_1,...,a_v)\times(b_1,...,b_v)=(a_1b_1,...,a_vb_v)$, где G^v является v кратным прямым произведением группы G, $a_1,...,a_v,b_1,...,b_v\in G$.

Итерированная группа обёрток $(W^ME)_{l;t,H}$ для расслоения E является главным G^{kl} расслоением над итерированной коммутативной группой обёрток $(W^MN)_{l;t,H}$ для многообразия N, так как число отмеченных точек в M^l равно kl, где E – это главное G расслоение на многообразии N, $l\in\mathbf{N}$. Таким образом, итерированные группы обёрток ассоциативны или альтернативны, если такова структурная группа G. В силу предложения 7 и замечания 4 гомоморфизм θ принадлежит H_p^∞ классу. С моноида обёрток он имеет естественное H_p^∞ продолжение на группу обёрток.

Если структурная группа G ассоциативна, тогда

$<\mathbf{P}_{\hat{\gamma},u;a+b+v}>_{\infty,H;a+b+v}=<<(<\mathbf{P}_{\hat{\gamma}_a,u_a;a}>_{\infty,H;a}\otimes<\mathbf{P}_{\hat{\gamma}_b,u_b;b}>_{\infty,H;b})>_{\infty,H;a+b}\otimes<$

$\mathbf{P}_{\hat\gamma_v,u_v;v}>_{\infty,H;v}>_{\infty,H;a+b+v}$
$=<<\mathbf{P}_{\hat\gamma_a,u_a;a}>_{\infty,H;a}\otimes(<\mathbf{P}_{\hat\gamma_b,u_b;b}>_{\infty,H;b}\otimes<\mathbf{P}_{\hat\gamma_v,u_v;v}>_{\infty,H;v})>_{\infty,H;a+b+v}=\theta(\theta(<\mathbf{P}_{\hat\gamma_a,u_a;a}>_{t,H;a},<\mathbf{P}_{\hat\gamma_b,u_b;b}>_{t,H;b}),<\mathbf{P}_{\hat\gamma_v,u_v;v}>_{t,H;v})$
$\theta(<\mathbf{P}_{\hat\gamma_a,u_a;a}>_{t,H;a},\theta(<\mathbf{P}_{\hat\gamma_b,u_b;b}>_{t,H;b}),<\mathbf{P}_{\hat\gamma_v,u_v;v}>_{t,H;v})),$
следовательно, θ есть ассоциативный гомоморфизм.

Если структурная группа G альтернативна, тогда

$<\mathbf{P}_{\hat\gamma,u;a+a+b}>_{\infty,H;a+a+b}=<<(<\mathbf{P}_{\hat\gamma_a,u_a;a}>_{\infty,H;a}\otimes<\mathbf{P}_{\hat\gamma_a,u_a;a}>_{\infty,H;a})>_{\infty,H;a+a}\otimes<\mathbf{P}_{\hat\gamma_b,u_b;b}>_{\infty,H;v}>_{\infty,H;a+a+b}$
$=<<\mathbf{P}_{\hat\gamma_a,u_a;a}>_{\infty,H;a}\otimes(<\mathbf{P}_{\hat\gamma_a,u_a;a}>_{\infty,H;a}\otimes<\mathbf{P}_{\hat\gamma_b,u_b;b}>_{\infty,H;b})>_{\infty,H;a+a+b}=\theta(\theta(<\mathbf{P}_{\hat\gamma_a,u_a;a}>_{t,H;a},<\mathbf{P}_{\hat\gamma_a,u_a;a}>_{t,H;a}),<\mathbf{P}_{\hat\gamma_b,u_b;b}>_{t,H;b})$
$\theta(<\mathbf{P}_{\hat\gamma_a,u_a;a}>_{t,H;a},\theta(<\mathbf{P}_{\hat\gamma_a,u_a;a}>_{t,H;a}),<\mathbf{P}_{\hat\gamma_b,u_b;b}>_{t,H;b})),$
следовательно, гомоморфизм θ альтернативен слева, аналогично проверяется, что он также альтернативен справа.

22. Замечание. Группы обёрток были определены и изучены выше для расслоений не только над $\mathbf{C}$, $\mathbf{H}$ и $\mathbf{O}$, но также над $\mathbf{R}$ со структурной группой Ли. В частности, это охватывает случай мультипликативных групп G коммутативных алгебр таких как H_n, в частности, H_4 квадра чисел. Квадра алгебра коммутативных кватернионов изоморфна с H_4 и играет очень важную роль в физических приложениях (смотри [7, 31]).

Мы предположим теперь, что R – это кольцо имеющее две подгруппы. Одна из них G_1 коммутативна и связана со сложением, $G_1=(\mathsf{R},+)$. Другая – мультипликативна $G_2=(\mathsf{R}\setminus\{0\},\times)$. В частности, R может быть алгеброй A над полем вещественных чисел $\mathbf{R}$. Мы рассмотрим случаи коммутативного, ассоциативного и также неассоциативного колец и алгебр с ассоциативным сложением в G_1 и альтернативным умножением в G_2. Предположим, что расслоение дано со структурным кольцом R или структурной алгеброй A вместо группы, так что с G_1 и G_2 ассоциированы структуры параллельных переносов ${}_1\mathbf{P}$ и ${}_2\mathbf{P}$. Поэтому мы скажем, что существует структура параллельных переносов $\mathbf{P}$ на главном расслоении $E(N,\mathsf{R},\pi,\Psi)$ или $E(N,\mathsf{A},\pi,\Psi)$ с линейно связным E для линейно связного кольца R или алгебры A соответственно.

В частности, A может быть квадра алгеброй изоморфной с H_4 или более общим образом с алгеброй H_n всех диагональных вещественных $n\times n$ матриц.

23. Теорема. *Существуют группы обёрток $(W^{M,\{s_{0,q}:q=1,\dots,k\}}E;N,\mathsf{R},\mathbf{P})_{t,H}$ или $(W^{M,\{s_{0,q}:q=1,\dots,k\}}E;N,\mathsf{A},\mathbf{P})_{t,H}$ с двумя H^l_p групповыми операциями и они являются главными расслоениями над коммутативной группой $(W^MN)_{t,H}$ со структурным кольцом R^k или со структурной алгеброй A^k соответственно, где $l=t'-t$ при $[m/2]+1\le t\le t'<\infty$ или $l=\infty$ при $t'=\infty$ (смотри также замечание 22 выше и [14]).*

Доказательство. Ранее были построены группы обёрток $(W^{M,\{s_{0,q}:q=1,\dots,k\}}E;N,G_j,{}_j\mathbf{P})_{t,H}$ при $j=1,2$ для главных расслоений $E(N,G_j,\pi_j,\Psi_j)$ имеющих H^l_p групповые операции согласно теореме 6 [14]. В силу предложения 7 они являются главными расслоениями над $(W^MN)_{t,H}$ со структурными группами G^k_j. С другой стороны, главное расслоение $E(N,\mathsf{R},\pi,\Psi)$ или $E(N,\mathsf{A},\pi,\Psi)$ изоморфно с $E((E(N,G_2,\pi_2,\Psi_2)),G_1,\pi_1,\Psi_1)/\xi$, где отношение эквивалентности ξ индуцировано равенством $\theta_1(x)=\theta_2(y)$ в R или A соответственно соответствующих элементов $x\in G_1$ и $y\in G_2$, где $\theta_j:G_j\hookrightarrow\mathsf{R}$ или $\theta_j:G_j\hookrightarrow\mathsf{A}$ обозначают $H^{t'}_p$ групповые вложения, $j=1,2$. Тогда мы положим

$(W^{M,\{s_{0,q}:q=1,\dots,k\}}E;N,\mathsf{T},\mathbf{P})_{t,H}:=$
$(W^{M,\{s_{0,q}:q=1,\dots,k\}}E((E(N,G_2,\pi_2,\Psi_2)),G_1,\pi_1,\Psi_1);\mathbf{P})_{t,H}/\xi,$

где $\mathsf{T}=\mathsf{R}$ или $\mathsf{T}=\mathsf{A}$ соответственно, также мы положим

$(W^{M,\{s_{0,q}:q=1,\dots,k\}}E;K,G_j,{}_j\mathbf{P})_{t,H}=:(W^{M,\{s_{0,q}:q=1,\dots,k\}}E(K,G_j,\pi_j,\Psi_j));\mathbf{P})_{t,H},$

следовательно, $(W^{M,\{s_{0,q}:q=1,\dots,k\}}E;N,\mathsf{T},\mathbf{P})_{t,H}$ снабжено двумя H^l_p групповыми операциями соответствующими $(W^{M,\{s_{0,q}:q=1,\dots,k\}}E;N,G_j,{}_j\mathbf{P})_{t,H}$ при $j=1,2$, и существует главное расслоение

$(W^{M,\{s_{0,q}:q=1,\dots,k\}}E((E(N,G_2,\pi_2,\Psi_2)),G_1,\pi_1,\Psi_1);\mathbf{P})_{t,H}$
$\to (W^{M,\{s_{0,q}:q=1,\dots,k\}}E;N,G_2,{}_2\mathbf{P})_{t,H}$

со структурной группой G^k_1 и использование отношения эквивалентности ξ неизбежно влечёт, что существует главное расслоение

$(W^{M,\{s_{0,q}:q=1,\dots,k\}}E;N,\mathsf{T},\mathbf{P})_{t,H}\to (W^MN)_{t,H}$

со структурным кольцом R^k или структурной алгеброй A^k соответственно.

Литература

[1] G. E. Bredon. "Sheaf theory" (New York: McGraw-Hill, 1967).

[2] Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко. "Современная геометрия" (Москва: Наука, 1979).

[3] G. Emch. Helv. Phys. Acta. "Mèchanique quantique quaternionienne et Relativitè restreinte", **36** (1963), 739–788.

[4] Р. Энгелькинг. "Общая топология" (Москва: Мир, 1986).

[5] K. Fredenhagen, M. Marcu. Phys. Rev. Lett. "Confinement criterion for QCD with dynamical quarks", **56: 3** (1986), 223–224.

[6] P. Gajer. "Higher holonomies, geometric loop groups and smooth deligne cohomology". in: "Advances in Geometry". J.-L. Brylinski ed. Progr. Math. V. **172**, P. 195–235 (Boston: Birkhaüser, 1999).

[7] Г. И. Гарасько, Д. Г. Павлов. Гиперкомпл. числа в геометрии и физике. "Группа Лоренца как подгруппа комплексифицированных конформных преобразований пространств с метрикой Бервальда-Моора", **5: 1** (2008), 3–11.

[8] F. Gürsey, C.-H. Tze. "On the role of division, Jordan and related algebras in particle physics" (Singapore: World Scientific Publ. Co., 1996).

[9] У. Р. Гамильтон. "Избранные труды. Оптика. Динамика. Кватернионы" (Москва: Наука, 1994).

[10] F. R. Harvey. "Spinors and calibrations". Perspectives in Mathem. **9** (Boston: Academic Press, 1990).

[11] C. J. Isham. "Topological and global aspects of quantum theory". In: "Relativity, groups and topology.II" 1059–1290, (Les Hauches, 1983). Editors: R. Stora, B. S. De Witt (Amsterdam: Elsevier Sci. Publ., 1984).

[12] I. L. Kantor, A. S. Solodovnikov. "Hypercomplex numbers" (Berlin: Springer-Verlag, 1989).

[13] H. B. Lawson, M.-L. Michelson. "Spin geometry" (Princeton: Princ. Univ. Press, 1989).

[14] С. В. Людковский. Гиперкомпл. числа в геометрии и физике. "Группы обёрток кватернионых и октонионных расслоений", **1 (11) vol. 6** (2009) (предыдущий вариант: Los Alam. Nat. Lab. **math.FA 0802.0661**, 27 pages).

[15] С. В. Людковский. Докл. Акад. Наук. "Квази-инвариантные меры на группах петель римановых многообразий", **370: 3** (2000), 306–308.

[16] S. V. Ludkovsky. Southeast Asian Bulletin of Mathematics. "Poisson measures for topological groups and their representations", **25** (2002), 653–680. (кратко в Усп. Матем. Наук. **56: 1** (2001), 169–170; предыдущие версии: **IHES/M/98/88**, 38 pages, also Los Alamos Nat. Lab. **math.RT/9910110**).

[17] S. V. Ludkovsky. J. Mathem. Sci. "Functions of several Cayley-Dickson variables and manifolds over them", **141: 3** (2007), 1299–1330 (предыдущий вариант: Los Alamos Nat. Lab. **math.CV/0302011**).

[18] С. В. Людковский. Соврем. Матем. Фундам. Направл. "Нормальные семейства функций и группы псевдоконформных диффеоморфизмов кватернионных и октонионных переменных", **18** (2006), 101–164 (предыдущий вариант: Los Alam. Nat. Lab. math.DG/0603006).

[19] S. V. Ludkovsky, F. van Oystaeyen. Bull. Sci. Math. (Paris). Ser. 2. "Differentiable functions of quaternion variables", **127** (2003), 755–796.

[20] S. V. Ludkovsky. J. Mathem. Sci. "Differentiable functions of Cayley-Dickson numbers and line integration", **141: 3** (2007), 1231–1298 (предыдущая версия: Los Alam. Nat. Lab. math.NT/0406048; math.CV/0406306; math.CV/0405471).

[21] S. V. Ludkovsky. J. Mathem. Sci. "Stochastic processes on geometric loop groups, diffeomorphism groups of connected manifolds, associated unitary representations", **141: 3** (2007), 1331-1384 (предыдущая версия: Los Alam. Nat. Lab. math.AG/0407439, July 2004).

[22] S. V. Ludkovsky. "Geometric loop groups and diffeomorphism groups of manifolds, stochastic processes on them, associated unitary representations". In the book: "Focus on Groups Theory Research" (Nova Science Publishers, Inc.: New York) 2006, pages 59–136.

[23] S. V. Ludkovsky. J. Mathem. Sci. "Generalized geometric loop groups of complex manifolds, Gaussian quasi-invariant measures on them and their representations", **122: 1** (2004), 2984–3011 (предыдушая версия: Los Alam. Nat. Lab. **math.RT/9910086**, October 1999).

[24] S. V. Ludkovsky. Far East J. of Math. Sci. (FJMS). "Quasi-conformal functions of quaternion and octonion variables, their integral transformations", **28: 1** (2008), 37–88.

[25] М. Б. Менский. "Группа путей. Измерения. Поля. Частицы" (Москва: Наука, 1983).

[26] P. W. Michor. "Manifolds of differentiable mappings" (Boston: Shiva, 1980).

[27] В. П. Михайлов. "Дифференциальные уравнения в частных производных" (Москва: Наука, 1976).

[28] J. Milnor. "Morse theory" (Princeton, New Jersey: Princeton Univ. Press, 1963).

[29] H. Omori. Trans. Amer. Math. Soc. "Groups of diffeomorphisms and their subgroups", **179** (1973), 85–122.

[30] H. Omori. J. Math. Soc. Japan. "Local structures of groups of diffeomorphisms", **24: 1** (1972), 60–88.

[31] Д. Г. Павлов. Гиперкомпл. числа в геометрии и физике. "Обобщение аксиомы скалярного произведения", **1: 1** (2004), 5–18.

[32] Л. С. Понтрягин. "Непрерывные группы" (Москва: Наука, 1984).

[33] R. T. Seeley. Proceed. Amer. Math. Soc. "Extensions of C^∞ functions fefined in a half space", **15** (1964), 625–626.

[34] J. M. Souriau. "Groupes differentiels" (Berlin: Springer Verlag, 1981).

[35] N. Steenrod. "The topology of fibre budles" (Princeton, New Jersey: Princeton Univ. Press, 1951).

[36] R. Sulanke, P. Wintgen. "Differentialgeometrie und Faserbündel" (Berlin: Veb deutscher Verlag der Wissenschaften, 1972).

[37] R. M. Switzer. "Algebraic topology – homotopy and homology" (Berlin: Springer-Verlag, 1975).

[38] J. C. Tougeron. "Ideaux de fonctions differentiables" (Berlin: Springer-Verlag, 1972).

[39] K. G. Wilson. Phys. Rev. D. "Confinement of quarks", **10** (1974), 2445–2459.

Structure of wrap groups of hypercomplex fiber bundles

S. V. Ludkovsky

MIREA
sludkowski@mail.ru

This article is devoted to the investigation of structure of wrap groups of connected fiber bundles over the fields of real **R**, complex **C** numbers, the quaternion skew field **H** and the octonion algebra **O**, as well as commutative hypercomplex quadra-algebra. Iterated wrap groups are studied as well. Their smashed products are constructed.

Key words: wrap groups, fiber bundles, smashed products, hypercomplex algebra, quaternion, octonion.