ГРУППЫ ОБЕРТОК КВАТЕРНИОННЫХ И ОКТОНИОННЫХ РАССЛОЕНИЙ

С. В. Людковский

Московский государственный технический университет МИРЭА
sludkowski@mail.ru

Данная статья посвящена исследованию групп оберток связных расслоений над полем действительных **R**, комплексных чисел **C**, телом кватернионов **H** и алгеброй октонионов **O**. Эти группы построены с мягкими условиями на расслоения. Приводятся их примеры. Показано, что такие группы существуют и для дифференцируемых расслоений имеют структуру бесконечномерной группы Ли, то есть, они являются непрерывными или дифференцируемыми многообразиями и композиция $(f, g) \mapsto f^{-1}g$ непрерывна или дифференцируема в зависимости от класса гладкости группы. Более того, показано, что в случаях действительных, комплексных, кватернионных и октонионных многообразий эти группы имеют структуры действительных, комплексных, кватернионных или октонионных многообразий соответственно. Тем не менее, доказано, что эти группы не удовлетворяют формуле Кэмпбелла-Хаусдорфа даже локально.

Ключевые слова: группы оберток, расслоения, гиперкомплексные алгебры, кватернионы, октавы.

1 Введение

Группы оберток для расслоений рассмотренные в этой статье построены с помощью семейств отображений из расслоения с отмеченной точкой в другое расслоение с отмеченной точкой над полем **R**, **C**, телом кватернионов **H** и октонионной алгеброй **O**. Условия на расслоения снабженные структурами параллельных переносов здесь довольно мягкие. Поэтому они обобщают геометрические группы петель окружности, сфер и расслоений со структурами параллельных переносов на них. Петлевая интерпретация уже теряется в их обобщениях, поэтому они называются здесь группами оберток. Данная работа продолжает предыдущие работы автора по этой теме, где были определены и исследованы обобщенные группы петель многообразий над **R**, **C** и **H**, но только ни для расслоений ни над октонионами [15, 21–23].

Группы петель окружности впервые были введены Лефшецем в 1930-х годах, а затем их конструкция была пересмотрена Милнором в 1950-х годах. Лефшец использовал C^0-равномерность в семействах непрерывных отображений, что привело к необходимости комбинирования его структуры со структурой свободной группы с помощью слов. Позже Милнор использовал соболевскую H^1-равномерность, что позволило ввести групповую структуру более естественным образом [28]. Итерации этих построений дают группы петель сфер. Затем их конструкции были обобщены для расслоений над окружностью и сферами со структурами параллельных переносов над **R** или **C**, но лишь относительно C^0-равномерности [6].

Группы оберток кватернионных и октонионных расслоений, а также для более общих классов расслоений над **R** или **C** определены и исследованы здесь впервые.

Голоморфные функции кватернионных и октонионных переменых были исследованы в [17, 19, 20]. Было рассмотрено их специфическое определение супер-дифференцируемости, потому что тело кватернион имеет алгебраически градуированную структуру. Это определение супер-дифференцируемости не накладывает условия правой или левой супер-линейности супер-дифференциала, так как это приводит к узкому классу функций. Хотя и имеются некоторые статьи о кватернионных многообразиях, но практически они подразумевают комплексные многообразия с добавочной кватернионной структурой в их касательном пространстве (смотри, например, [28, 39] и ссылки там). Поэтому кватернионные многообразия так, как они определены ниже не рассматривались ранее другими авторами (смотри также [17]). Приложения кватернионов в математике и физике можно найти в [3, 8, 9, 13].

В данной статье рассматриваются группы оберток различных классов гладкости. Далее мы рассматриваем не только ориентируемые многообразия M и N, но также неориентируемые многообразия.

В частности, геометрические группы петель имеют важные применения в современных физических теориях (смотри [11, 25] и ссылки там). Группы петель также интенсивно используются в калибровочных теориях. Оберточные группы определенные ниже с помощью семейств отображений из многообразия M в другое многообразие N размерности $dim(M) > 1$ могут быть использованы в теории мембран, которая является обобщением теории струн (суперструн).

Второй раздел посвящен изучению для групп оберток их топологических структур и также как многообразий. Доказано существование этих групп и то, что они являются бесконечномерными группами Ли, которые не удовлетворяют формуле Кэмпбелла-Хаусдорфа даже локально (смотри теоремы 3, 6, 12, следствия 5, 8, 9 и примеры 10). В случаях комплексных, кватернионных и октонионных многообразий доказано, что они имеют структуры комплексных, кватернионных и октонионных многообразий соответственно.

Все главные результаты этой статьи получены впервые.

2 Группы оберток расслоений

Во избежание недоразумений мы приводим сначала наши определения и обозначения.

1.1. Замечание. Обозначим через $\mathcal{A}_r$ алгебру Кэли-Диксона, так что $\mathcal{A}_0 = \mathbf{R}$, $\mathcal{A}_1 = \mathbf{C}$, $\mathcal{A}_2 = \mathbf{H}$ – это тело кватернионов, $\mathcal{A}_3 = \mathbf{O}$ – это алгебра октонионов. Далее мы рассмотрим только $0 \leq r \leq 3$.

1.2. Определение. А каноническое замкнутое подмножество Q евклидова пространства $X = \mathbf{R^n}$ стандартного сепарабельного гильбертова пространства $X = l_2(\mathbf{R})$ над $\mathbf{R}$ называется квадрантом, если его можно задать условием $Q := \{x \in X : q_j(x) \geq 0\}$, где $(q_j : j \in \Lambda_Q)$ линейно независимые элементы топологически сопряженного пространства X^*. Здесь $\Lambda_Q \subset \mathbf{N}$ (с $card(\Lambda_Q) = k \leq n$, когда $X = \mathbf{R^n}$) и k называется индексом Q. Если $x \in Q$ и точно j из q_i's удовлетворяют $q_i(x) = 0$, то x называется углом индекса j.

Если X – это аддитивная группа и также левый и правый модуль над $\mathbf{H}$ или $\mathbf{O}$ с ассоциативностью или альтернативностью соответственно и законом дистрибутивности, то оно называется векторным пространством над $\mathbf{H}$ или $\mathbf{O}$ соответственно. В частности $l_2(\mathcal{A}_r)$ состоящее из всех последовательностей $x = \{x_n \in \mathcal{A}_r : n \in \mathbf{N}\}$ с конечной нормой $\|x\| < \infty$ и скалярным произведением $(x, y) := \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n^*$ с $\|x\| := (x, x)^{1/2}$ называется гильбертовым пространством (сепарабельного типа) над $\mathcal{A}_r$, где z^* обозначим сопряженное число Кэли-Диксона, $zz^* =: |z|^2$, $z \in \mathcal{A}_r$. Поскольку унитарное пространство $X = \mathcal{A}_r^n$ или сепарабельное гильбертово пространство $l_2(\mathcal{A}_r)$ над $\mathcal{A}_r$ при рассмотрении над полем $\mathbf{R}$ (действительная тень) изоморфно с $X_{\mathbf{R}} := \mathbf{R^{2^r n}}$ или $l_2(\mathbf{R})$, тогда определение также описывает квадранты в $\mathcal{A}_r^n$ и $l_2(\mathcal{A}_r)$. В последнем случае мы также рассмотрим обобщенные квадранты как канонические замкнутые подмножества, которые даются условием

$Q := \{x \in X_{\mathbf{R}} : q_j(x + a_j) \geq 0, a_j \in X_{\mathbf{R}}, j \in \Lambda_Q\}$, где $\Lambda_Q \subset \mathbf{N}$ ($card(\Lambda_Q) = k \in \mathbf{N}$, когда $dim_{\mathbf{R}} X_{\mathbf{R}} < \infty$).

1.2.2. Определение. Дифференцируемое отображение $f : U \to U'$ называется диффеоморфизмом, если

(i) f биективно и существуют непрерывные отображения f' и $(f^{-1})'$, где U и U' являются внутренностями квадрантов Q и Q' в X.

В случае $\mathcal{A}_r$ с $1 \leq r \leq 3$ мы рассмотрим ограниченные обобщенные квадранты Q и Q' в $\mathcal{A}_r^n$ или $l_2(\mathcal{A}_r)$, так что such они являются областями с кусочно C^∞-границами. Мы наложим добавочные условия на диффеоморфизм f в случае $1 \leq r \leq 3$:

(ii) $\bar{\partial} f = 0$ на U,

(iii) f и все ее сильные (по Фреше) дифференциалы (как полилинейные операторы) ограничены на U, где ∂f и $\bar{\partial} f$ – это дифференциальные$(1,0)$ и $(0,1)$-формы соответственно, $d = \partial + \bar{\partial}$ – это внешнее дифференцирование, для $2 \leq r \leq 3$ ∂ соответствует супер-дифференцированию по z и $\tilde{\partial} = \bar{\partial}$ соответствует супер-дифференцированию по $\tilde{z} := z^*$, $z \in U$ (смотри [19, 20]).

Условие Коши-Римана (ii) означает, что f на U является $\mathcal{A}_r$-голоморфным отображением.

1.2.3. Определение и обозначения. $\mathcal{A}_r$-многообразие M с углами определяется обычным образом: оно является сепарабельным метрическим пространством моделируемым на $X = \mathcal{A}_r^n$ или $X = l_2(\mathcal{A}_r)$ соответственно и предполагается принадлежащим классу C^∞, $0 \leq r \leq 3$. Карты на M обозначим (U_l, u_l, Q_l), то есть, $u_l : U_l \to u_l(U_l) \subset Q_l$ является C^∞-диффеоморфизм для любого l, U_l открыто в M, $u_l \circ {u_j}^{-1}$ является биголоморфным для $1 \leq r \leq 3$ из области $u_j(U_l \cap U_j) \neq \emptyset$ на $u_l(U_l \cap U_j)$ (то есть, $u_j \circ u_l^{-1}$ и $u_l \circ u_j^{-1}$ голоморфны и биективны) и $u_l \circ u_j^{-1}$ удовлетворяют условиям $(i - iii)$ из §1.2.2, $\bigcup_j U_j = M$.

Точка $x \in M$ называется углом индекса j, если существует карта (U, u, Q) для M с $x \in U$ и $u(x)$ имеет индекс $ind_M(x) = j$ в $u(U) \subset Q$. Множество всех углов индекса $j \geq 1$ называется границей ∂M многообразия M, x называется внутренней точкой в M, если $ind_M(x) = 0$, поэтому $\partial M = \bigcup_{j \geq 1} \partial^j M$, где $\partial^j M := \{x \in M : ind_M(x) = j\}$.

Для действительного многообразия с углами на связывающие отображения $u_l \circ u_j^{-1} \in C^\infty$ действительных карт накладывается лишь условие 1.2.2(i).

1.2.4. Терминология. В $\mathcal{A}_r$-многообразии N существует эрмитова метрика, которая в каждой аналитической системе координат такова: $\sum_{j,k=1}^n h_{j,k} dz_j d\bar{z}_k$, где $(h_{j,k})$ является положительно определенной матрицей с коэффициентами класса C^∞, $h_{j,k} = h_{j,k}(z) \in \mathcal{A}_r$, z – это локальные координаты в N.

В качестве действительного многообразия мы рассмотрим риманово многообразие.

В соответствие с определением выше внутренних точек в N предполагается, что они принадлежат только внутренностям, но для граничных точек ∂N может случиться, что $x \in \partial N$ принадлежит границам нескольких карт. Удобно выбрать атлас таким, что индекс $ind(x)$ точки x одинаков для всех карт содержащих данную точку x.

1.3.1. Замечание. Если M – это метризуемое пространство и $K = K_M$ является замкнутым подмножеством в M коразмерности $codim_{\mathbf{R}}\ N \geq 2$, так что $M \setminus K = M_1$ является многообразием с углами над $\mathcal{A}_r$, то мы назовем M псевдо-многообразием над $\mathcal{A}_r$, где K_M – это критическое подмножество.

Два псевдо-многообразия B и C называются диффеоморфными, если $B \setminus K_B$ диффеоморфно с $C \setminus K_C$ как многообразие с углами (смотри также [6, 26]).

Возьмем на M борелевскую σ-аддитивную меру ν, так что ν на $M \setminus K$ совпадает с римановым элементом объема и $\nu(K) = 0$, так как действительная тень M_1 ее имеет.

Равномерное пространство $H^t_p(M_1, N)$ всех непрерывных кусочно H^t соболевских отображений из M_1 в N вводится стандартным образом [21, 22], которое индуцирует $H^t_p(M, N)$ равномерное пространство непрерывных кусочно H^t соболевских отображений на M, так как $\nu(K) = 0$, где $\mathbf{R} \ni t \geq [m/2] + 1$, m обозначает размерность M над $\mathbf{R}$, $[k]$ обозначает целую часть числа $k \in \mathbf{R}$, $[k] \leq k$. Далее положим $H^\infty_p(M, N) = \bigcap_{t>m} H^t_p(M, N)$ с соответствующей равномерностью.

Для многообразия над $\mathcal{A}_r$ с $1 \leq r \leq 3$ возьмем как $H^t_p(M, N)$ пополнение семейства всех непрерывных кусочно $\mathcal{A}_r$-голоморфных отображений из M в N относительно H^t_p равномерности, где $[m/2] + 1 \leq t \leq \infty$. Далее мы рассмотрим псевдо-многообразия со связывающими отображениями карт непрерывными в M и $H^{t'}_p$ класса гладкости в $M \setminus K_M$ для $0 \leq r \leq 3$, где $t' \geq t$.

1.3.2. Замечание. Поскольку алгебра октонионов $\mathbf{O}$ не ассоциативна, то мы рассмотрим неассоциативные подгруппы G семейства $Mat_q(\mathbf{O})$ всех квадратных $q \times q$ матриц с элементами из $\mathbf{O}$. Более общим образом G является группой, которая имеет структуру H^t_p-многообразия над $\mathcal{A}_r$ и групповые операции являются H^t_p отображениями. Группа G может быть неассоциативной для $r = 3$, но G предполагается являющейся альтернативной, то есть, $(aa)b = a(ab)$ и $a(a^{-1}b) = b$ для любого $a, b \in G$.

Как обобщение псевдо-многообразий здесь используется следующее (над $\mathbf{R}$ и $\mathbf{C}$ смотри также [6, 34]). Предположим, что M является хаусдорфовым топологическим пространством с размерностью в смысле покрытий $dim\, M = m$ снабженным семейством $\{h : U \to M\}$ так называемых локализаций (plots) h, которые являются непрерывными отображениями, удовлетворяющими условиям $(D1 - D4)$:

$(D1)$ каждая локализация имеет в качестве области определения выпуклое подмножество U в $\mathcal{A}^n_r$, $n \in \mathbf{N}$;

$(D2)$ Если $h : U \to M$ является локализацией, V – это выпуклое подмножество в $\mathcal{A}^l_r$ и $g : V \to U$ является H^t_p отображением, то $h \circ g$ также является локализацией, где $t \geq [m/2] + 1$;

$(D3)$ каждое постоянное отображение из выпуклого множества U в $\mathcal{A}^n_r$ в M является локализацией;

$(D4)$ если U – это выпуклое множество в $\mathcal{A}^n_r$ и $\{U_j : j \in J\}$ является покрытием U выпуклыми множествами в $\mathcal{A}^n_r$, каждое U_j открыто в U, $h : U \to M$ таково, что его каждое ограничение $h|_{U_j}$ является локализацией, тогда h является локализацией. Тогда M называется H^t_p-дифференцируемым пространством.

Отображение $f : M \to N$ между двумя H^t_p-дифференцируемыми пространствами называется дифференцируемым, если оно непрерывно и для любой локализации $h : U \to M$ композиция $f \circ h : U \to N$ является локализацией для N. Топологическая группа G называется H^t_p-дифференцируемой группой, если ее групповые операции являются H^t_p-дифференцируемыми отображениями.

Пусть E, N, F являются $H^{t'}_p$-псевдо-многообразиями или $H^{t'}_p$-дифференцируемыми пространствами над $\mathcal{A}_r$, пусть также G является $H^{t'}_p$ группой над $\mathcal{A}_r$, $t \leq t' \leq \infty$. Расслоение $E(N, F, G, \pi, \Psi)$ с пространством расслоения E, базой N, типичным слоем F и структурной группой G над алгеброй Кэли-Диксона $\mathcal{A}_r$, проекцией $\pi : E \to N$ и атласом Ψ определяется стандартным образом [6, 26, 36] с условием, что связывающие функции принадлежат классу $H^{t'}_p$, та что для $r = 3$ структурная группа может быть неассоциативной, но альтернативной.

Локальные тривиализации $\phi_j \circ \pi \circ \Psi^{-1}_k : V_k(E) \to V_j(N)$ индуцируют $H^{t'}_p$-равномерность в семействе W всех главных $H^{t'}_p$-расслоений $E(N, G, \pi, \Psi)$, где $V_k(E) = \Psi_k(U_k(E)) \subset X^2(G)$, $V_j(N) = \phi_j(U_j(N)) \subset X(N)$, где $X(G)$ и $X(N)$ являются $\mathcal{A}_r$-векторными пространствами, на которых моделируются G и N, $(U_k(E), \Psi_k)$ и

$(U_j(N), \phi_j)$ – это карты атласов E и N, $\Psi_k = \Psi_k^E$, $\phi_j = \phi_j^N$.

Если $G = F$ и G действует на себе левыми сдвигами, то расслоение называется главным расслоением и обозначается $E(N, G, \pi, \Psi)$. В частности, может быть $G = \mathcal{A}_r^*$, где $\mathcal{A}_r^*$ обозначает мультипликативную группу $\mathcal{A}_r \setminus \{0\}$. Если $G = F = \{e\}$, то E сводится к N.

2. Определения. Пусть M – это связное H_p^t-псевдо-многообразие над $\mathcal{A}_r$, $0 \leq r \leq 3$ удовлетворяющее следующим условиям:

(i) оно компактно;

(ii) M является объединением двух замкнутых подмножеств над $\mathcal{A}_r$ A_1 и A_2, которые являются псевдо-многообразиями и канонически замкнутыми подмножествами в M с $A_1 \cap A_2 = \partial A_1 \cap \partial A_2 =: A_3$, и коразмерность над $\mathbf{R}$ для A_3 в M единична $codim_{\mathbf{R}} A_3 = 1$, а также A_3 является псевдо-многообразием;

(iii) конечное множество отмеченных точек $s_{0,1}, ..., s_{0,k}$ принадлежит $\partial A_1 \cap \partial A_2$, более того, ∂A_j линейно связны $j = 1, 2$;

(iv) $A_1 \setminus \partial A_1$ и $A_2 \setminus \partial A_2$ являются H_p^t-диффеоморфна с $M \setminus [\{s_{0,1}, ..., s_{0,k}\} \cup (A_3 \setminus Int(\partial A_1 \cap \partial A_2))]$ посредством отображений $F_j(z)$, где $j = 1$ или $j = 2$, $\infty \geq t \geq [m/2] + 1$, $m = dim_{\mathbf{R}} M$, так что $H^t \subset C^0$ благодаря теореме вложения Соболева [27], где внутренность $Int(\partial A_1 \cap \partial A_2)$ берется в $\partial A_1 \cup \partial A_2$.

Вместо (iv) мы рассмотрим также случай

(iv') M, A_1 и A_2 таковы, что $(A_j \setminus \partial A_j) \cup \{s_{0,1}, ..., s_{0,k}\}$ являются $C^0([0,1], H_p^t(A_j, A_j))$-ретрагируемыми на $X_{0,q} \cap A_j$, где $X_{0,q}$ – это замкнутое линейно связное подмножество в M, $j = 1$ or $j = 2$, $s_{0,q} \in X_{0,q}$, $X_{0,q} \subset K_M$, $q = 1, ..., k$, $codim_{\mathbf{R}}\, K_M \geq 2$.

Пусть $\hat{M}$ это компактное связное H_p^t-псевдо-многообразие, которое является канонически замкнутым подмножеством в $\mathcal{A}_r^l$ с границей $\partial \hat{M}$ и отмеченными точками $\{\hat{s}_{0,q} \in \partial \hat{M} : q = 1, ..., 2k\}$ и H_p^t-отображением $\Xi : \hat{M} \to M$ таким, что

(v) Ξ сюръективно и биективно из $\hat{M} \setminus \partial \hat{M}$ на $M \setminus \Xi(\partial \hat{M})$ открытое в M, $\Xi(\hat{s}_{0,q}) = \Xi(\hat{s}_{0,k+q}) = s_{0,q}$ для любого $q = 1, ..., k$, также $\partial M \subset \Xi(\partial \hat{M})$.

Структура параллельного переноса на $H_p^{t'}$-дифференцируемом главном G-расслоении $E(N, G, \pi, \Psi)$ с линейно связными E и G для H_p^t-псевдо-многообразий M и $\hat{M}$ как выше над одной и той же алгеброй Кэли-Диксона $\mathcal{A}_r$ с $t' \geq t + 1$ приписывает каждому H_p^t отображению γ из M в N и точкам $u_1, ..., u_k \in E_{y_0}$, где y_0 отмеченная точка в N, $y_0 = \gamma(s_{0,q})$, $q = 1, ..., k$, единственное H_p^t отображение $\mathbf{P}_{\hat{\gamma},u} : \hat{M} \to E$ удовлетворяющее условиям $(P1 - P5)$:

$(P1)$ take $\hat{\gamma} : \hat{M} \to N$, так что $\hat{\gamma} = \gamma \circ \Xi$, тогда $\mathbf{P}_{\hat{\gamma},u}(\hat{s}_{0,q}) = u_q$ для любых $q = 1, ..., k$ и $\pi \circ \mathbf{P}_{\hat{\gamma},u} = \hat{\gamma}$

$(P2)$ $\mathbf{P}_{\hat{\gamma},u}$ является H_p^t-отображением по γ и u;

$(P3)$ для любых $x \in \hat{M}$ и каждого $\phi \in DifH_p^t(\hat{M}, \{\hat{s}_{0,1}, ..., \hat{s}_{0,2k}\})$ выполняется равенство $\mathbf{P}_{\hat{\gamma},u}(\phi(x)) = \mathbf{P}_{\hat{\gamma}\circ\phi,u}(x)$, где $DifH_p^t(\hat{M}, \{\hat{s}_{0,1}, ..., \hat{s}_{0,2k}\})$ обозначает группу всех H_p^t гомеоморфизмов $\hat{M}$ сохраняющих отмеченные точки $\phi(\hat{s}_{0,q}) = \hat{s}_{0,q}$ для любых $q = 1, ..., 2k$;

$(P4)$ отображение $\mathbf{P}_{\hat{\gamma},u}$ является G-эквивариантнымж это означает, что $\mathbf{P}_{\hat{\gamma},uz}(x) = \mathbf{P}_{\hat{\gamma},u}(x)z$ для любой $x \in \hat{M}$ и любой $z \in G$;

$(P5)$ Если U – это открытая окрестность точки $\hat{s}_{0,q}$ в $\hat{M}$ и $\hat{\gamma}_0, \hat{\gamma}_1 : U \to N$ являются $H_p^{t'}$-отображениями такими, что $\hat{\gamma}_0(\hat{s}_{0,q}) = \hat{\gamma}_1(\hat{s}_{0,q}) = v_q$, и касательные пространства, который являются векторными многообразиями над $\mathcal{A}_r$, для γ_0 и γ_1 в v_q одинаковы (изоморфны), то касательное пространства для $\mathbf{P}_{\hat{\gamma}_0,u}$ и $\mathbf{P}_{\hat{\gamma}_1,u}$ в u_q одинаковы, где $q = 1, ..., k$, $u = (u_1, ..., u_k)$.

Два $H_p^{t'}$-дифференцируемых главных G-расслоения E_1 и E_2 со структурами параллельных переносов $(E_1, \mathbf{P}_1)$ и $(E_2, \mathbf{P}_2)$ называются изоморфными, если существует изоморфизм $h : E_1 \to E_2$ такой, что $\mathbf{P}_{2,\hat{\gamma},u}(x) = h(\mathbf{P}_{1,\hat{\gamma},h^{-1}(u)}(x))$ для любых H^t_p-отображений $\gamma : M \to N$ и $u_q \in (E_2)_{y_0}$, где $q = 1, ..., k$, $h^{-1}(u) = (h^{-1}(u_1), ..., h^{-1}(u_k))$.

Пусть $(S^M E)_{t,H} := (S^{M,\{s_{0,q}:q=1,...,k\}}E; N, G, \mathbf{P})_{t,H}$ – это множество H^t_p-замыканий классов изоморфных H^t_p главных G-расслоений со структурами параллельных переносов.

3. Теоремы. 1. *Равномерное пространство $(S^M E)_{t,H}$ из §2 имеет структуру топологического альтернативного моноида с единицей и со свойством сокращения и операцией умножения H^l_p класса с $l = t' - t$ ($l = \infty$ для $t' = \infty$). Если N и G сепарабельны, то $(S^M E)_{t,H}$ тоже сепарабелен. Если N и G полны, то $(S^M E)_{t,H}$ полно.*

2. *Если G ассоциативна, то моноид $(S^M E)_{t,H}$ является ассоциативным. Если G коммутативна, то $(S^M E)_{t,H}$ коммутативен. Если G является группой Ли, то $(S^M E)_{t,H}$ является моноидом Ли.*

3. *Моноид $(S^M E)_{t,H}$ недискретен, локально связен и бесконечно мерен при $dim_{\mathbf{R}}(N \times G) > 1$.*

Доказательство. Если существует гомоморфизм $\theta : G \to F$ для $H^{t'}_p$-дифференцируемых групп, то существует индуцированное главное F расслоение $(E \times^\theta F)(N, F, \pi^\theta, \Psi^\theta)$ с тотальным пространство $(E \times^\theta F) = (E \times F)/\mathcal{Y}$, где $\mathcal{Y}$ – это отношение эквивалентности такое, что $(vg, f)\mathcal{Y}(v, \theta(g)f)$ для любых $v \in E$, $g \in G$, $f \in F$. Тогда проекция $\pi^\theta : (E \times^\theta F) \to N$ определяется формулой $\pi^\theta([v, f]) = \pi(v)$, где $[v, f] := \{(w, b) : (w, b)\mathcal{Y}(v, f), w \in E, b \in F\}$ обозначает класс эквивалентности для (v, f).

Поэтому, если структура параллельного переноса $\mathbf{P}$ на главном G-расслоении $E(N, G, \pi, \Psi)$ индуцирует структуру параллельного переноса $\mathbf{P}^\theta$ на индуцированном расслоении по формуле $\mathbf{P}^\theta_{\hat{\gamma},[u,f]}(x) = [\mathbf{P}_{\hat{\gamma},u}(x), f]$.

Определим умножение с помощью определенных вложений и изоморфизмов пространств функций. Отметим, что для любых двух компактных канонических замкнутых подмножеств A и B в $\mathcal{A}^l_r$ гильбертовы пространства $H^t(A, \mathbf{R}^m)$ и $H^t(B, \mathbf{R}^m)$ являются линейно топологически изоморфными, где $l, m \in \mathbf{N}$, следовательно, $H^t_p(A, N)$ и $H^t_p(B, N)$ изоморфны как равномерные пространства. Пусть $H^t_p(M, \{s_{0,1}, ..., s_{0,k}\}; W, y_0) := \{(E, f) : E = E(N, G, \pi, \Psi) \in W, f = \mathbf{P}_{\hat{\gamma},y_0} \in H^t_p : \pi \circ f(s_{0,q}) = y_0 \forall q = 1, ..., k; \pi \circ f = \hat{\gamma}, \gamma \in H^t_p(M, N)\}$ – это пространства всех $H^{t'}_p$ главных G-расслоений E с их H^t_p-отображениями параллельных переносов $f = \mathbf{P}_{\hat{\gamma},y_0}$, где W такое же, как и в §1.3.2. Положим $\omega_0 = (E_0, \mathbf{P}_0)$ являющимся элементом таким, что $\gamma_0(M) = \{y_0\}$, где $e \in G$ обозначает единичный элемент, $E_0 = N \times G$, $\pi_0(y, g) = y$ для любых $y \in N$, $g \in G$, $\mathbf{P}_{\hat{\gamma}_0,u} = \mathbf{P}_0$.

Отображение $\Xi : \hat{M} \to M$ из §2 индуцирует вложение

$\Xi^* : H^t_p(M, \{s_{0,1}, ..., s_{0,k}\}; W, y_0) \hookrightarrow H^t_p(\hat{M}, \{\hat{s}_{0,1}, ..., \hat{s}_{0,2k}\}; W, y_0)$,

где $\hat{M}$ и $\hat{A}_1$ и $\hat{A}_2$ – это ретрагируемы в точки.

Пусть как обычно $A \vee B := \rho(\mathcal{Z})$ обозначает букет пунктированных пространств (то есть, с отмеченными точками) $(A, \{a_{0,q} : q = 1, ..., k\})$ и $(B, \{b_{0,q} : q = 1, ..., k\})$, где $\mathcal{Z} := [A \times \{b_{0,q} : q = 1, ..., k\} \cup \{a_{0,q} : q = 1, ..., k\} \times B] \subset A \times B$, ρ – это непрерывное факторное отображение такое, что $\rho(x) = x$ для любых $x \in \mathcal{Z} \setminus \{a_{0,q} \times b_{0,j}; q, j = 1, ..., k\}$ и $\rho(a_{0,q}) = \rho(b_{0,q})$ для любых $q = 1, ..., k$, где A и B являются топологическими пространствами с отмеченными точками $a_{0,q} \in A$ и $b_{0,q} \in B$, $q = 1, ..., k$. Тогда букет $g \vee f$ двух элементов $f, g \in H^t_p(M, \{s_{0,1}, ..., s_{0,k}\}; N, y_0)$ определен в области $M \vee M$ такой, что $(f \vee g)(x \times b_{0,q}) = f(x)$ и $(f \vee g)(a_{0,q} \times x) = g(x)$ для любых $x \in M$, где f, g соответствуют $f_1, g_1 \in H^t_p(\hat{M}, \{\hat{s}_{0,1}, ..., \hat{s}_{0,2k}\}; N, y_0)$ такие, что $f_1 = f \circ \Xi$ и $g_1 = g \circ \Xi$.

Пусть $(E_j, \mathbf{P}_{\hat{\gamma}_j,u^j}) \in H^t_p(M, \{s_{0,1}, ..., s_{0,k}\}; W, y_0)$, $j = 1, 2$, тогда возьмем их произведение букета $\mathbf{P}_{\hat{\gamma},u^1} := \mathbf{P}_{\hat{\gamma}_1,u^1} \vee \mathbf{P}_{\hat{\gamma}_2,v}$ на $M \vee M$ с $v_q = u_q g^{-1}_{2,q} g_{1,q+k} = y_0 \times g_{1,q+k}$ для любых

$q = 1, ..., k$ в силу альтернативности группы G, $\gamma = \gamma_1 \vee \gamma_2$, где $\mathbf{P}_{\hat{\gamma}_j, u^j}(\hat{s}_{j,0,q}) = y_0 \times g_{j,q} \in E_{y_0}$ для любых j и q. Для любых $\gamma_j : M \to N$ существует $\tilde{\gamma}_j : M \to E_j$ такое, что $\pi \circ \tilde{\gamma}_j = \gamma_j$. Обозначим через $\mathbf{m} : G \times G \to G$ операцию умножения. Произведение букета $(E_1, \mathbf{P}_{\hat{\gamma}_1, u^1}) \vee (E_2, \mathbf{P}_{\hat{\gamma}_2, u^2})$ является главным G-расслоением $(E_1 \times E_2) \times^{\mathbf{m}} G$ со структурой параллельного переноса $\mathbf{P}_{\hat{\gamma}_1, u^1} \vee \mathbf{P}_{\hat{\gamma}_2, v}$.

Равномерное пространство $H^t_p(J, A_3; W, y_0) := \{(E, f) \in H^t_p(J, W) : \pi \circ f(A_3) = \{y_0\}\}$ имеет структуру H^t_p-многообразия и имеет вложение в $H^t_p(M, \{s_{0,1}, ..., s_{0,k}\}; W, y_0)$ благодаря условиям $2(i - iii)$, где или $J = A_1$, или $J = A_2$. Это индуцирует следующее вложение $\chi^* : H^t_p(M \vee M, \{s_{0,q} \times s_{0,q} : q = 1, ..., k\}; W, y_0) \hookrightarrow H^t_p(M, \{s_{0,q} : q = 1, ..., k\}; W, y_0)$.

Аналогично рассматривая $H^t_p(M, \{X_{0,q} : q = 1, ..., k\}; W, y_0) = \{f \in H^t(M, W) : f(X_{0,q}) = \{y_0\}, q = 1, ..., k\}$ и $H^t_p(J, A_3 \cup \{X_{0,q} : q = 1, ..., k\}; W, y_0)$ в случае (iv') вместо (iv), мы получим вложение $\chi^* : H^t_p(M \vee M, \{X_{0,q} \times X_{0,q} : q = 1, ..., k\}; W, y_0) \hookrightarrow H^t_p(M, \{X_{0,q} : q = 1, ..., k\}; W, y_0)$. Поэтому, $g \circ f := \chi^*(f \vee g)$ является композицией в $H^t_p(M, \{s_{0,q} : q = 1, ..., k\}; W, y_0)$.

Существует следующее отношение эквивалентности $R_{t,H}$ в $H^t_p(M, \{X_{0,q} : q = 1, ..., k\}; W, y_0)$: $f R_{t,H} h$ тогда и только тогда, когда существуют направленности $\eta_n \in Dif H^t_p(M, \{X_{0,q} : q = 1, ..., k\})$, а также f_n и $h_n \in H^t_p(M, \{X_{0,q} : q = 1, ..., k\}; W, y_0)$ с $\lim_n f_n = f$ и $\lim_n h_n = h$, так что $f_n(x) = h_n(\eta_n(x))$ для любых $x \in M$ и $n \in \omega$, где ω – это направленное множество и сходимость рассматривается в $H^t_p(M, \{X_{0,q} : q = 1, ..., k\}; W, y_0)$. Далее в случае $2(iv)$ мы получим $s_{0,q}$ вместо $X_{0,q}$ в случае $2(iv')$.

Таким образом, существует факторное равномерное пространство $H^t_p(M, \{X_{0,q} : q = 1, ..., k\}; W, y_0)/R_{t,H} =: (S^M E)_{t,H}$. Известно, что $Dif H^t_p(M)$ является группой диффеоморфизмов при $t \geq [m/2] + 1$ (смотри [29,30]). Мера Лебега λ в действительной тени многообразия $\hat{M}$ при отображении Ξ индуцирует меру λ^{Ξ} на многообразии M, которая эквивалентна ν, так как Ξ является H^t_p-отображением из компактного пространства на компактное пространство, $\lambda(\partial \hat{M}) = 0$ и $\Xi : \hat{M} \setminus \partial \hat{M} \to M$ биективно.

В силу условий $(P1 - P5)$ каждый элемент $f = \mathbf{P}_{\hat{\gamma}, u}$ с точностью до множества Q_M меры нуль, $\nu(Q_M) = 0$, дается как $f \circ \Xi^{-1}$ на $M \setminus Q_M$, где $\pi \circ f = \hat{\gamma}$, $\hat{\gamma} = \gamma \circ \Xi$. Обозначим $f \circ \Xi^{-1}$ также через f. Таким образом, для любых $(E, f) \in H^t_p(M, \{s_{0,q} : q = 1, ..., k\}; W, y_0)$ образ $f(M)$ компактен и связен в E.

Поэтому для любого разбиения Z существует $\delta > 0$ такое, что для каждого разбиения Z^* с $\sup_i \inf_j dist(M_i, M^*{}_j) < \delta$ и $(E, f) \in H^t(M, W; Z)$, $f(s_{0,q}) = u_q$, существует $(E, f_1) \in H^t(M, W; Z^*)$ с $f_1(s_{0,q}) = u_q$ для любых $q = 1, ..., k$, так что $f R_{t,H} f_1$, где M_i и M^*_j являются каноническими замкнутыми псевдо-подмногообразиями в M соответствующими разбиениям Z и Z^*, $H^t(M, W; Z)$ обозначает пространство всех непрерывных кусочно H^t-отображений из M в W подчиненных разбиению Z, так что Z и Z^* отвечают H^t_p структуре многообразия M.

Поэтому существует счетное под-семейство $\{Z_j : j \in \mathbf{N}\}$ семейства всех разбиений Υ такое, что $Z_j \subset Z_{j+1}$ для любых j и $\lim_j \tilde{diam} Z_j = 0$. Тогда

(i) $str - ind\{H^t(M, \{s_{0,q} : q = 1, ..., k\}; W, y_0; Z_j); h^{Z_i}_{Z_j}; \mathbf{N}\}/R_{t,H} = (S^M E)_{t,H}$ сепарабельно, если N и G сепарабельны, так как каждое пространство $H^t_p(M, \{s_{0,q} : q = 1, ..., k\}; W, y_0; Z_j)$ сепарабельно.

Пространство $str - ind\{H^t(M, \{s_{0,q} : q = 1, ..., k\}; W, y_0; Z_j); h^{Z_i}_{Z_j}; \mathbf{N}\}$ полно в силу Теоремы 12.1.4 [29], когда N и G полны. Каждый класс $R_{t,H}$-эквивалентных элементов замкнуто в нем. тогда каждой направленности Коши в $(S^M E)_{t,H}$ соответствует направленность Коши в $str - ind\{H^t(M \times [0, 1], \{s_{0,q} \times e \times 0; W, y_0; Z_j \times Y_j); h^{Z_i \times Y_i}_{Z_j \times Y_j}; \mathbf{N}\}$ благодаря Теоремам о существовании продолжений таких функций [27, 33, 38], где Y_j разбиения

$[0,1]$ с $\lim_j \tilde{d}iam(Y_j) = 0$, $Z_j \times Y_j$ являются соответствующими разбиениями $M \times [0,1]$. Следовательно, $(S^M E)_{t,H}$ полно, если N и G полны.

Если $f, g \in H^t(M, X)$ и $f(M) \ne g(M)$, то

(ii) $\inf_{\psi \in DifH^t_p(M,\{s_{0,q}:q=1,...,k\})} \|f \circ \psi - g\|_{H^t(M,X)} > 0$. Таким образом, классы эквивалентности $< f >_{t,H}$ и $< g >_{t,H}$ различны. Псевдо-многообразие $\hat{M}$ является линейно связным. Возьмем $\eta : [0,1] \to \hat{M}$ являющимся H^t_p-отображением с $\eta(0) = \hat{s}_{0,q}$ и $\eta(1) = \hat{s}_{0,k+q}$, где $1 \le q \le k$. Выберем в $\hat{M}$ H^t_p-координаты одна из которых является параметром вдоль η. Поэтому, для любых $g_q, g_{k+q} \in G$ существует $\mathbf{P}_{\hat{\gamma},u}$ с $\mathbf{P}_{\hat{\gamma},u}(s_{0,q}) = y_0 \times g_q$ и $\mathbf{P}_{\hat{\gamma},u}(s_{0,k+q}) = y_0 \times g_{k+q}$ для любых $q = 1, ..., k$. Поскольку E и G линейно связны, то N тоже линейно связно и $(S^M E)_{t,H}$ локально связно при $dim_{\mathbf{R}} N > 1$. Таким образом, равномерное пространство $(S^M E)_{t,H}$ не дискретно.

Касательное расслоение $TH^t_p(M, E)$ изоморфно $H^t_p(M, TE)$, где TE является $H^{t'-1}_p$-расслоением, $t' \ge t + 1$. Существует бесконечное семейство $f_\alpha \in H^t_p(M, TE)$ с попарно различными образами в TE для различных α, так что $f_\alpha(M)$ не содержится в $\bigcup_{\beta<\alpha} f_\beta(M)$, $\alpha \in \Lambda$, где Λ – это бесконечный ординал. Поэтому, $T(S^M E)_{t,H}$ является бесконечномерным расслоением благодаря (ii) и неизбежно $(S^M E)_{t,H}$ тоже бесконечномерно.

Очевидно, если $f \vee g = h \vee g$ или $g \vee f = g \vee h$ для $\{f, g, h\} \subset H^t_p(M, \{s_{0,q} : q = 1, ..., k\}; W, y_0)$, то $f = h$. Таким образом, $\chi^*(f \vee g) = \chi^*(h \vee g)$ или $\chi^*(g \vee f) = \chi^*(g \vee h)$ эквивалентно $f = h$ в силу определения букета отображений $f \vee g$ и определению равенства функций, так как χ^* является вложением. Использование отношения эквивалентности $R_{t,H}$ дает $< f >_{t,H} \circ < g >_{t,H} = < h >_{t,H} \circ < g >_{t,H}$ или $< g >_{t,H} \circ < f >_{t,H} = < g >_{t,H} \circ < h >_{t,H}$ эквивалентно $< h >_{t,H} = < f >_{t,H}$. Поэтому, $(S^M E)_{t,H}$ обладает свойством сокращения.

Поскольку группа G альтернативна, то $a_{2,q}[a^{-1}_{2,q}(a_{2,q+k}(a^{-1}_{2,q}a_{1,q+k}))] = a_{2,q+k}(a^{-1}_{2,q}a_{1,q+k})$, следовательно, $\mathbf{P}_1 \vee (\mathbf{P}_2 \vee \mathbf{P}_2) = (\mathbf{P}_1 \vee \mathbf{P}_2) \vee \mathbf{P}_2$; а также $a_{2,q}[a^{-1}_{2,q}(a_{1,q+k}(a^{-1}_{1,q}a_{1,q+k}))] = a_{1,q+k}(a^{-1}_{1,q}a_{1,q+k})$, следовательно,, $\mathbf{P}_1 \vee (\mathbf{P}_1 \vee \mathbf{P}_2) = (\mathbf{P}_1 \vee \mathbf{P}_1) \vee \mathbf{P}_2$ и неизбежно для классов эквивалентности $(aa)b = a(ab)$ и $b(aa) = (ba)a$ для любых $a, b \in (S^M E)_{t,H}$. Таким образом $(S^M E)_{t,H}$ альтернативна.

Если G ассоциативна, то структура параллельного переноса дает $(f \vee g) \vee h = f \vee (g \vee h)$ на $M \vee M \vee M$ для любых $\{f, g, h\} \subset H^t_p(M, \{s_{0,q} : q = 1, ..., k; W, y_0)$. Применяя вложение χ^* и отношение эквивалентности $R_{t,H}$, мы получим, что $(S^M E)_{t,H}$ ассоциативна $< f >_\xi \circ (< g >_\xi \circ < h >_\xi) = (< f >_\xi \circ < g >_\xi) \circ < h >_\xi$.

В силу условий $2(i - iv)$ существует H^t_p-диффеоморфизм $(A_1 \setminus A_3) \vee (A_2 \setminus A_3)$ с $(A_2 \setminus A_3) \vee (A_1 \setminus A_3)$ как псевдо-многообразий (смотри §1.3.1). Для меры ν на M естественно выполнено равенство $\nu(A_3) = 0$. Если M' – это под-многообразие может быть с углами или псевдо-многообразие, то выполняя разбиение $Z = Z_f$ многообразия M, мы получим, что коразмерность M' в M равна единице и $\nu(M') = 0$. Для точки $s_{0,q}$ в $(M \setminus A_3) \cup \{s_{0,q}\}$ существует открытая окрестность U имеющая H^t_p-ретракцию $F : [0,1] \times U \to \{s_{0,q}\}$. Следовательно, можно выбрать последовательность диффеоморфизмов $\psi_n \in DifH^t_p(M, \{s_{0,q} : q = 1, ..., k\})$ такую, что $\lim_{n\to\infty} diam(\psi_n(U)) = 0$.

Пусть w_0 – это отображение $w_0 : M \to W$ такое, что $w_0(M) = \{y_0 \times e\}$. Рассмотрим $w_0 \vee (E, f)$ для некоторого $(E, f) \in H^t_p(M, \{s_{0,q} : q = 1, ..., k\}; W, y_0)$. Если $(E, f) \in H^t_p(M, \{s_{0,q} : q = 1, .., k\}; W, y_0)$ с натуральным положительным $t \in \mathbf{N}$, тогда f ограничена относительно равномерности равномерного пространства $H^t_p(M; E)$. Если U_n – это последовательность ограниченных открытых канонических замкнутых подмножеств в M таких, что $\lim_n diam(U_n) = 0$, то $\lim_{n\to\infty} \nu(V_n) = 0$ для последовательности ν-измеримых под-множеств V_n таких, что $V_n \subset U_n$. Поэтому для любой ограниченной последовательности $\{g_n : g_n \in H^t_p(M; E); n \in \mathbf{N}\}$ существует предел $\lim_{n\to\infty} g_n|_{U_n} = 0$ относительно H^t_p-равномерности, где U_n подчинено разбиению M на H^t под-многообразия. Тогда если $\{g_n : g_n \in H^t_p(M, \{s_{0,q} : q = 1, ..., k\}; E, y_0); n \in \mathbf{N}\}$ – это ограниченная последовательность такая, что g_n сходится к $g \in H^t_p(M, \{s_{0,q} : q = 1, ..., k\}; N, y_0)$ на $M \setminus W_k$ для любых k относительно H^t_p-равномерности, для данных открытых подмножеств W_k в M, где $k, n \in \mathbf{N}$ и $\lim_{n\to\infty} \nu(W_n \triangle U_n) = 0$, то g_n сходится к g в равномерном пространстве $H^t_p(M, \{s_{0,q} : q = 1, ..., k\}; E, y_0)$.

Заметим, что для любых отмеченной точки $s_{0,q}$ в M существует окрестность U точки $s_{0,q}$ в M такая, что для любых $\gamma_1 \in H^t_p(M, \{s_{0,q} : q = 1, ..., k\}; N, y_0)$ существует $\gamma_2 \in H^t_p$, так что они $R_{t,H}$ эквивалентны и $\gamma_2|_U = y_0$. Поэтому, если C является линейно связным компактным подмножеством в M коразмерности $codim_{\mathbf{R}} C \geq 1$, так что $s_{0,q} \in C$, то стандартная процедура показывает, что для любых $\gamma_1 \in H^t_p$ существует $\gamma_2 \in H^t_p$ такое, что $\gamma_1 R_{t,H} \gamma_2$ и $\gamma_2|_C = y_0$. В самом деле, множество C компактно, поэтому каждое его открытое покрытие имеет конечное под-покрытие и, следовательно,

(Y_0) существует открытая окрестность U для C в M такая, что для любых γ_1 существует γ_2 такая, что $\gamma_1 R_{t,H} \gamma_2$ и $\gamma_2|_U = y_0$.

Существует последовательность $\eta_n \in DifH^t_p(M, \{s_{0,q} : q = 1, ..., k\})$ такая, что $\lim_{n\to\infty} diam(\eta_n(A_2 \setminus \partial A_2)) = 0$ и $w_n, f_n \in H^t_p(M, \{s_{0,q} : q = 1, ..., k\}; E, y_0)$ с

(iii) $\lim_{n\to\infty} f_n = f$, $\lim_{n\to\infty} w_n = w_0$ и $\lim_{n\to\infty} \chi^*(f_n \vee w_n)(\eta_n^{-1}) = f$ в силу равенства $\pi \circ f(s_{0,q}) = s_{0,q}$ и формулы дифференцирования композиции функций (над $\mathbf{H}$ и $\mathbf{O}$ смотри о ней в [17, 19, 20]).

Более подробно, последовательность η_n как предел из $\eta_n(A_2)$ дает псевдо-подмногообразие B в M коразмерности не менее единицы, так что B можно представить с помощью букета сфер и компактных квадрантов с точностью до H^t_p-диффеоморфизма с отмеченными точками $\{s_{0,q} : q = 1, ..., k\}$, но также B может быть конечным дискретным множеством. Тогда по индукции можно продолжить понижение размерности для B. В частности, могут быть окружности и кривые в случае единичной размерности. Два квадранта с точностью до H^t_p факторного отображения склеивающего границы дает сферу. Таким образом, рассмотрение сводится к случаю букета сфер. Случай сфер сводится к итерированной конструкции с окружностями, так как приведенное произведение $S^1 \wedge S^n$ является H^t_p гомеоморфным с S^{n+1} (смотри лемму 2.27 [37] и [6]). В частном случае n-мерной сферы $M_n = S^n$ возьмем $\hat{M}_n = D^n$, где D^n – это единичный шар (диск) в $\mathbf{R^n}$ или в n мерном над $\mathbf{R}$ под-пространстве в $\mathcal{A}^l_r$, $D_1 = [0, 1]$ для $n = 1$. Но $S^n \setminus s_0$ имеет ретракцию в точку в S^n, где $s_0 \in S^n$, $n \in \mathbf{N}$.

Поэтому $w_0 \vee (E, f)$ и (E, f) принадлежат классу эквивалентности $< (E, f) >_{t,H} := \{g \in H^t_p(M, \{s_{0,q} : q = 1, ..., k\}; W, y_0) : (E, f) R_{t,H} g\}$ в силу (iii) и (Y_0). Таким образом, $< w_0 >_{t,H} \circ < g >_{t,H} = < g >_{t,H}$.

Псевдо-многообразие $M \vee M \setminus \{s_{0,q} \times s_{0,j} : q, j = 1, ..., k\}$ имеет H^t_p-диффеоморфизм ψ (смотри определение в §1.3.1), так что $\psi(x, y) = (y, x)$ для любых $(x, y) \in (M \times M \setminus \{s_{0,q} \times s_{0,j} : q, j = 1, ..., k\})$. Предположим теперь, что G коммутативна. Тогда $(f \vee g) \circ \psi|_{(M\times M\setminus\{s_{0,q}\times s_{0,j}:q,j=1,...,k\})} = g \vee f|_{(M\times M\setminus\{s_{0,q}\times s_{0,j}:q,j=1,...,k\})}$. С другой стороны, $< f \vee w_0 >_{t,H} = < f >_{t,H} = < f >_{t,H} \circ < w_0 >_{t,H} = < w_0 >_{t,H} \circ < f >_{t,H}$, следовательно, $< f \vee g >_{t,H} = < f >_{t,H} \circ < g >_{t,H} = < f \vee w_0 >_{t,H} \circ < w_0 \vee g >_{t,H} = < (f \vee w_0) \vee (w_0 \vee g) >_{t,H} = < (w_0 \vee g) \vee (f \vee w_0) >_{t,H}$ благодаря существованию единичного элемента $< w_0 >_{t,H}$ и благодаря свойствам ψ. В самом деле, возьмем последовательность ψ_n как выше. Поэтому структура параллельного переноса дает $(g \vee f)(\psi(x, y)) = (g \circ f)(y, x)$ для любых $x, y \in M$, следовательно,, $(f \circ g) R_{t,H} (g \circ f)$ для любых $f, g \in H^t_p(M, \{s_{0,q} : q = 1, ..., k\}; W, y_0)$. Использование вложения χ^* дает, что $(S^M E)_{t,H}$ коммутативен, когда G коммутативна.

Отображение $(f, g) \mapsto f \vee g$ из $H^t_p(M, \{s_{0,q} : q = 1, ..., k\}; W, y_0)^2$ в $H^t_p(M \vee M \setminus$

$\{s_{0,q} \times s_{0,j} : q, j = 1, ..., k\}; W, y_0)$ принадлежит классу H^t_p. Поскольку отображение χ^* принадлежит классу H^t_p, то $(f,g) \mapsto \chi^*(f \vee g)$ является H^t_p-отображением. Фактроное отображение из $H^t_p(M, \{s_{0,q} : q = 1, ..., k\}; W, y_0)$ в $(S^M E)_{t,H}$ непрерывно и индуцирует факторную равномерность, а $T^b(S^M E)_{t,H}$ имеет вложение в $(S^M T^b E)_{t,H}$ для любых $1 \le b \le t' - t$, когда $t' > t$ конечно, и для любого $1 \le b < \infty$, если $t' = \infty$, так как E является $H^{t'}_p$ расслоением, а $T^b E$ – это расслоение с базой N. Следовательно, умножение $(< f >_{t,H}, < g >_{t,H}>) \mapsto < f >_{t,H} \circ < g >_{t,H} = < f \vee g >_{t,H}$ непрерывно в $(S^M E)_{t,H}$ и принадлежит классу H^l_p с $l = t' - t$ для конечного t' и $l = \infty$ при $t' = \infty$.

4. Определение. Моноид $(S^M E)_{t,H}$ из теоремы 3.1 мы назовем моноидом оберток.

5. Следствие. *Пусть $\phi : M_1 \to M_2$ является сюрьективным H^t_p-отображением H^t_p-псевдо-многообразий над одной и той же алгеброй Кэли-Диксона $\mathcal{A}_r$, так что $\phi(s_{1,0,q}) = s_{2,0,a(q)}$ для любых $q = 1, ..., k_1$, где $\{s_{j,0,q} : q = 1, ..., k_j\}$ – это отмеченные точки в M_j, $j = 1, 2$, $1 \le a \le k_2$, $l_1 \le k_2$, $l_1 := card\ \phi(\{s_{1,0,q} : q = 1, ..., k_1\})$. Тогда существует индуцированный гомоморфизм моноидов $\phi^* : (S^{M_2} E)_{t,H} \to (S^{M_1} E)_{t,H}$. Если $l_1 = k_2$, то ϕ^* является вложением.*

Доказательство. Возьмем $\Xi_1 : \hat{M}_1 \to M_1$ с отмеченными точками $\{\hat{s}_{1,0,q} : q = 1, ..., 2k_1\}$ как в §2, тогда возьмем $\hat{M}_2$Ю, а также $\hat{M}_1$ с дополнительными $2(k_2 - l_1)$ отмеченными точками $\{\hat{s}_{2,0,q} : q = 1, ..., 2k_3\}$, так что $\hat{s}_{1,0,q} = \hat{s}_{2,0,q}$ для любых $q = 1, .., k_1$, $k_3 = k_1 + k_2 - l_1$, тогда $\phi \circ \Xi_1 := \Xi_2 : \hat{M}_2 \to M_2$ является требуемым отображением индуцирующим структуру параллельного переноса из нее для M_1. Поэтому каждое $\hat{\gamma}_2 : \hat{M}_2 \to N$ индуцирует $\hat{\gamma}_1 : \hat{M}_1 \to N$ и $\mathbf{P}_{\hat{\gamma}_2, u^2}$ соответствует $\mathbf{P}_{\hat{\gamma}_1, u^1}$ с дополнительными условиями в добавочных отмеченных точках, где $u^1 \subset u^2$. Класс эквивалентности $< (E_2, \mathbf{P}_{\hat{\gamma}_2, u^2}) >_{t,H} \in (S^{M_2} E)_{t,H}$ дает соответствующие элементы $< (E_1, \mathbf{P}_{\hat{\gamma}_1, u^1}) >_{t,H} \in (S^{M_1} E)_{t,H}$, так как $Dif H^t_p(\hat{M}_1, \{\hat{s}_{0,q} : q = 1, ..., 2k_2\}) \subset Dif H^t_p(\hat{M}_1, \{\hat{s}_{0,q} : q = 1, ..., 2k_3\})$. Тогда $\phi^*(< (E_2, \mathbf{P}_{\hat{\gamma}_2, u^2}) \vee (E_1, \mathbf{P}_{\hat{\eta}_2, v^2}) >_{t,H}) = \phi^*(< (E_2, \mathbf{P}_{\hat{\gamma}_2, u^2}) >_{t,H}) \phi^*(< (E_1, \mathbf{P}_{\hat{\eta}_2, v^2}) >_{t,H})$, так как $f_2 \circ \phi(x)$ для всякого $x \in \Xi_1(\hat{M}_1 \setminus \partial \hat{M}_1)$ совпадает с $f_1(x)$, где f_j соответствует $\mathbf{P}_{\gamma_j, y_0 \times e}$ (смотри также начало §3).

Если $l_1 = k_2$, тогда $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$ и группа диффеоморфизмов $Dif H^t_p(\hat{M}_1, \{\hat{s}_{0,q} : q = 1, ..., 2k_1\})$ одна и та же в двух случаях, следовательно, ϕ^* биективно и неизбежно ϕ^* является вложением.

6. Теоремы. 1. *Существует альтернативная топологический группа $(W^M E)_{t,H}$ содержащая моноид $(S^M E)_{t,H}$ и с групповыми операциями класса H^l_p при $l = t' - t$ ($l = \infty$ при $t' = \infty$). Если N и G сепарабельны, то $(W^M E)_{t,H}$ сепарабельна. Если N и G полны, то $(W^M E)_{t,H}$ полна.*

2. *Если G ассоциативна, то $(W^M E)_{t,H}$ ассоциативна. Если G коммутативна, то $(W^M E)_{t,H}$ коммуь=тативна. Если G – это группа Ли, то $(W^M E)_{t,H}$ – тоже группа Ли.*

3. *Группа $(W^M E)_{t,H}$ не дискретна, локально связна и бесконечно мерна при $dim_{\mathbf{R}}(N \times G) > 1$. Более того, если имеются два различных множества отмеченных точек $s_{0,q,j}$ в A_3, $q = 1, ..., k$, $j = 1, 2$, то две группы $(W^M E)_{t,H,j}$, определенные для $\{s_{0,q,j} : q = 1, ..., k\}$ как отмеченных точек, изоморфны.*

4. *Группа $(W^M E)_{t,H}$ также имеет структуру H^t_p-дифференцируемого многообразия над $\mathcal{A}_r$.*

Доказательство. Если $\gamma \in H^t_p(M, \{s_{0,q} : q = 1, ..., k\}; N, y_0)$, то для $u \in E_{y_0}$ существует и единственное $h_q \in G$ такое, что $\mathbf{P}_{\hat{\gamma}, u}(\hat{s}_{0,q+k}) = u_q h_q$, где $h_q = g_q^{-1} g_{q+k}$, $y_0 \times g_q = \mathbf{P}_{\hat{\gamma}, u}(\hat{s}_{0,q})$, $g_q \in G$. В силу эквивариантности структуры параллельного переноса h зависит только от γ и мы обозначим его $h^{(E,\mathbf{P})}(\gamma) = h(\gamma) = h$, $h = (h_1, ..., h_k)$. Элемент

$h(\gamma)$ называется голономией $\mathbf{P}$ вдоль γ и $h^{(E,\mathbf{P})}(\gamma)$ зависит лишь от классов изоморфных $(E,\mathbf{P})$ в силу использования $DifH^t_p(\hat{M};\{\hat{s}_{0,q}:q=1,...,2k\})$ и граничных условий на $\hat{\gamma}$ в $\hat{s}_{0,q}$ для $q=1,...,2k$.

Поэтому, $h^{(E_1,\mathbf{P}_1)(E_2,\mathbf{P}_2)}(\gamma) = h^{(E_1,\mathbf{P}_1)}(\gamma)h^{(E_2,\mathbf{P}_2)}(\gamma) \in G^k$, где G^k обозначает прямое произведение k копий группы G. Следовательно, для любой такой γ существует гомоморфизм $h(\gamma) : (S^M E)_{t,H} \to G^k$, который индуцирует гомоморфизм $h : (S^M E)_{t,H} \to C^0(H^t_p(M,\{s_{0,q}:q=1,...,k\};N,y_0),G^k)$, где $C^0(A,G^k)$ – это пространство непрерывных отображений из топологического пространства A в G^k и с групповой структурой $(hb)(\gamma)=h(\gamma)b(\gamma)$ (смотри также [6] для S^n).

Таким образом, достаточно построить $(W^M N)_{t,H}$ из $(S^M N)_{t,H}$. Для коммутативного моноида $(S^M N)_{t,H}$ с единичным элементом и свойством сокращения существует коммутативная группа $(W^M N)_{t,H}$. Алгебраически она является фактор-группой F/B, где F – это свободная коммутативная группа порожденная $(S^M N)_{t,H}$, в то время как B – это минимальная замкнутая подгруппа в F порожденная всеми элементами вида $[f+g]-[f]-[g]$, f и $g \in (S^M N)_{t,H}$, $[f]$ обозначает элемент в F соответствующий f (смотри также об абстрактной конструкции Гротендика в [13, 36]).

По построению каждая точка в $(S^M N)_{t,H}$ является замкнутым подмножеством, следовательно, $(S^M N)_{t,H}$ является топологическим T_1-пространством. В силу теоремы 2.3.11 [4] произведение T_1-пространств является T_1-пространством. С другой стороны, для топологической группы G из аксиомы отделимости T_1 следует, что G – это тихоновское пространство [4, 32]. Естественное отображение $\eta : (S^M N)_{t,H} \to (W^M N)_{t,H}$ инъективно. Снабдим F топологией наследуемой из топологии тихоновского произведения $(S^M N)^{\mathbf{Z}}_{t,H}$, где каждый элемент z в F имеет вид $z=\sum_f n_{f,z}[f]$, $n_{f,z}\in\mathbf{Z}$ для любого $f\in(S^M N)_{t,H}$, $\sum_f |n_{f,z}|<\infty$. По построению F и F/B являются T_1-пространствами, следовательно,, F/B является тихоновским пространством. В частности, $[nf]-n[f]\in\mathsf{B}$, следовательно, $(W^M N)_{t,H}$ является полной топологической группой, если N и G полны. В то же время η является топологическим вложением, так как $\eta(f+g)=\eta(f)+\eta(g)$ для любых $f,g\in(S^M N)_{t,H}$, $\eta(e)=e$, так как $(z+B)\in\eta(S^M N)_{t,H}$, когда $n_{f,z}\geq 0$ для любых f, и неизбежно в общем случае $z=z^+-z^-$, где (z^++B) и $(z^-+B)\in\eta(S^M N)_{t,H}$.

Используя локализации и $H^{t'}_p$ связывающие отображения карт для N и $E(N,G,\pi,\Psi)$ и классы эквивалентности относительно $DifH^t_p(M,\{s_{0,q}:q=1,...,k\})$, мы получим, что $(W^M E)_{t,H}$ имеет структуру H^t_p-дифференцируемого многообразия, так как $t'\geq t$.

Последняя часть доказательства и утверждения теорем 6(1-4) следуют из теорем 3(1-3) и [21, 22]. Так как $(S^M E)_{t,H}$ является бесконечномерной благодаря теореме 3.3, тогда $(W^M E)_{t,H}$ бесконечномерна.

7. Определение. Группа $(W^M E)_{t,H}=(W^{M,\{s_{0,q}:q=1,...,k\}}E;N,G,\mathbf{P})_{t,H}$ из теоремы 6.1 мы назовем группой оберток.

8. Следствие. *Существует групповой гомоморфизм* $h : (W^M E)_{t,H} \to C^0(H^t_p(M,\{s_{0,q}:q=1,...,k\};N,y_0),G^k)$.

Доказательство вытекает из §6, и полагая $h^{f^{-1}}(\gamma)=(h^f(\gamma))^{-1}$.

9. Следствие. *Если M_1 и M_2 и ϕ удовлетворяют условиям следствия 5, тогда существует гомоморфизм $\phi^* : (W^{M_2}E)_{t,H}\to(W^{M_1}E)_{t,H}$. Если $l_1=k_2$, то ϕ^* является вложением.*

10. Замечания и примеры. Рассмотрим примеры M, для которых выполнены достаточные условия для существования групп оберток $(W^M E)_{t,H}$. Возьмем M, например, D^n_R, $S^n_R\setminus V$ с $s_0\in\partial V$, $D^n_R\setminus Int(D^n_b)$ с $s_0\in\partial D^n_b$ и $0<b<R<\infty$, где S^n_R обозначает сферу размерности $n>1$ над $\mathbf{R}$ и радиуса R, V является H^t_p-диффеоморфной с внутренностью $Int(D^n_R)$ n-мерного шара $D^n_R := \{x\in\mathbf{R^n} : \sum_{k=1}^n x_k^2 \leq R\}$ или в

n мерном над $\mathbf{R}$ под-пространстве в $\mathcal{A}_r^l$ и является собственным подмножеством в $S_R^n := \{x \in \mathbf{R^{n+1}} : \sum_{k=1}^{n+1} x_k^2 = R\}$. Вместо сферы можно взять H_p^t псевдо-многообразие Q^n гомеоморфное сфере или диску, в частности, сферу Милнора. В самом деле, разделим M по экватору $\{x_1 = 0\}$ на две части A_1 и A_2 и возьмем $A_3 = \{x \in M : x_1 = 0\} \cup P$, где $s_0 \in \partial A_1 \cap \partial A_2$, в то время как $P = \emptyset$, $P = \partial V$, $P = \partial D_b^n$ соответственно. Тогда возьмем также V и D_b^n, так чтобы их экватор был порожден экватором $\{x_1 = 0\}$ в S_R^n или D_R^n соответственно или более общим образом Q^n.

Возьмем тогда $M = Q^n \setminus \bigcup_{k=1}^l V_k$, где V_k являются H_p^t-диффеоморфными внутренностям ограниченных квадрантов в$\mathbf{R^n}$ или в n мерном подпространстве в $\mathcal{A}_r^a$, где $l > 1$, $l \in \mathbf{N}$, $\partial V_k \cap \partial V_j = \{s_0\}$ и $V_k \cap V_j = \emptyset$ для любых $k \ne j$, $diam(V_k) \le b < R/3$. Более подробно можно взять специальные случаи: если l четно, то $[l/2]-1$ среди V_k расположены над экватором и то же количество ниже него, два из V_k имеют экваторы, порожденные экваторами $\{x_1 = 0\}$ в Q^n. Если же l нечетно, то $[(l-1)/2]$ среди V_k расположены над и то же количество под ним, одно из V_k имеет экватор порожденный экватором $\{x_1 = 0\}$ в Q^n, $s_0 \in \bigcap_k \partial V_k \cap \{x \in M : x_1 = 0\}$.

Поделим M экватором $\{x_1 = 0\}$ на две части A_1 и A_2, и пусть $A_3 = \{x \in M : x_1 = 0\} \cup P$, где $P = \bigcup_{k=1}^l \partial V_k$. Тогда или $A_1 \setminus A_3$ и $A_2 \setminus A_3$ являются H_p^t диффеоморфными как псевдо-многообразия или многообразия с углами и H_p^t диффеоморфна с $M \setminus [\{s_0\} \cup (A_3 \setminus Int(\partial A_1 \cap \partial A_2))] =: D$ или $2(iv')$ выполнено, так как последнее топологическое пространство D получается из Q^n вырезанием непустого связного замкнутого подмножества, $n > 1$, следовательно,, D ретрагируемо в точку.

В случае обычного многообразия M точка $s_0 \in \partial M$ (для $\partial M \ne \emptyset$) может быть критической точкой, но в случае многообразия с углами эта s_0 является угловой точкой из ∂M, так как при $x \in \partial M$ имеется не менее одной карты (U, u, Q) такой, что $u(x) \in \partial Q$, $M \setminus \partial M = \bigcup_k u_k^{-1}(Int(Q_k))$, $\partial M \subset \bigcup_k u_k^{-1}(\partial Q_k)$. Далее, если M удовлетворяет условиям $2(i-v)$ или $(i-iii, iv', v)$, то $M \times D_R^m = P$ также им удовлетворяет при $m \ge 1$, так как D_R^m ретрагируемо в точку, беря две части $A_j(K) = A_j(M) \times D_R^m$ в P, где $j = 1, 2$, $A_j(M)$ являются псевдо-под-многообразиями в M. Тогда $A_1(P) \cap A_2(P) = (A_1(M) \cap A_2(M)) \times D_R^m$ и можно взять $A_3(P) = A_3(M) \times D_R^m$, $s_0(P) \in s_0(M) \times \{x \in D_R^m : x_1 = 0\}$. В частности, для $M = S^1$ и $m = 1$ это дает заполненный тор.

Эта конструкция может быть естественно обобщена для неориентируемых многообразий, например, ленты Мёбиуса L, также для $M := L \setminus (\bigcup_{j=1}^{\beta} V_j)$ с диаметром b_j множества V_j меньшим ширины ленты L, где каждое V_j является H_p^t диффеоморфным внутренности ограниченного квадранта в $\mathbf{R^2}$, $s_{0,q} \in \partial L \cap (\bigcap_{j=a_1+\ldots+a_{q-1}+1}^{a_1+\ldots+a_q} \partial V_j)$, $a_0 := 0$, $a_1 + \ldots + a_k = \beta$, $q = 1, \ldots, k$, так как граница ∂L диффеоморфна окружности S^1, также $S^1 \setminus \{s_{0,q}\}$ ретрагируема в точку, следовательно,, A_1 и A_2 ретрагируемы в точку. Для L возьмем $\hat{M} = I^2$, тогда также возьмем связную кривую $\hat{\eta}$ состоящую из левой части $\{0\} \times [0, 1]$, отрезка прямой линии соединяющим точки $\{0, 1\}$ и $\{1, 0\}$, и с правой частью $\{1\} \times [0, 1]$. Это дает подходящее разрезание многообразия $\hat{M}$, которое индуцирует подходящее разрезание ленты L и многообразия M с $A_3 \supset \eta \cup \partial L$ с точностью до H_p^t диффеоморфизм, где $\eta := \Xi(\hat{\eta})$, следовательно, лента Мёбиуса L и многообразие M удовлетворяют условиям $2(i-iii, iv', v)$.

Теперь возьмем факторное отображение $\phi : I^2 \to S^1$, так что $\phi(\{s_{0,1}, s_{0,2}\}) = s_0 \in S^1$, $s_{0,1} = (0, 0)$, $s_{0,2} = (0, 1) \in I^2$, где $I = [0, 1]$, следовательно, существует вложение $\phi^* : (W^{S^1, s_0} E)_{t,H} \hookrightarrow (W^{I^2, \{s_{0,1}, s_{0,2}\}} E)_{t,H}$.

Бутылка Клейна K имеет $\hat{M} = I^2$ со скрученным (косым) отношением эквивалентности на ∂I^2, так что оно удовлетворяет достаточным условиям. Более того, K является факторпространством $\phi : Z \to K$ цилиндра Z со скрученным отношением эквивалентности своих концов S^1 используя отражение относительно горизонтального диаметра. Таким образом, $A_3 \supset \phi(S^1)$. Поэтому существует вложение $\phi^* : (W^{K,\{s_0\}}E)_{t,H} \to (W^{Z,\{s_{0,1},s_{0,2}\}}E)_{t,H}$, где $s_{0,1}, s_{0,2} \in \partial Z$, $\phi(\{s_{0,1}, s_{0,2}\}) = s_0$.

Возьмем псевдо-многообразие Q^n H_p^t-диффеоморфное с S^n для $n \geq 2$, вырежем из него β непересекающихся открытых областей $V_1, ..., V_\beta$ H_p^t-диффеоморфных внутренностям ограниченных квадрантов в $\mathbf{R^n}$, $s_{0,q} \in \bigcap_{j=a_1+...+a_{q-1}+1}^{a_1+...+a_q} \partial V_j$, $a_0 := 0$, $a_1 + ... + a_k = \beta$, $q = 1, ..., k$. Тогда склеим для $V_1, ..., V_l$, $1 \leq l \leq \beta$, по границам разрезов H_p^t-диффеоморфных с S^{m-1} приведенное произведение $L \vee S^{n-2}$, так как $\partial L = S^1$, $S^1 \wedge S^{n-2}$ является H_p^t-диффеоморфным с S^{n-1} [37]. Мы получим неориентируемое H_p^t-псевдо-многообразие M, удовлетворяющее достаточным условиям.

Проективное пространство $\mathbf{R}P^n$ получается из сферы идентификацией диаметрально противоположных точек. Тогда возьмем M H_p^t-диффеоморфным с $\mathbf{R}P^n$ для $n > 1$, а также другие M с вырезанными подмножествами $V_1, ..., V_\beta$ H_p^t-диффеоморфными открытым подмножествам в $\mathbf{R}P^n$, $s_{0,q} \in (\bigcap_{j=a_1+...+a_{q-1}+1}^{a_1+...+a_q} \partial V_j) \cap \{x \in M : x_1 = 0\}$, $V_j \cap V_l = \emptyset$ для любых $j \neq l$, $a_0 := 0$, $a_1 + ... + a_k = \beta$, $q = 1, ..., k$. Тогда условия $2(i - v)$ или $(i - iii, iv', v)$ также выполнены для $\mathbf{R}P^n$ и M.

В силу предложения 2.14 [37] об H-группах $[X, x_0; K, k_0]$ не следует ожидать или иметь нужду в сильных условиях на класс допустимых многообразий M для построений групп оберток $(W^M E)_{t,H}$.

Если M_1 является аналитическим действительным многообразием, то взятие градуированного произведения с генераторами $\{i_0, ..., i_{2^r-1}\}$ алгебры Кэли-Диксона дает $\mathcal{A}_r$ многообразие (смотри [17–19]). В частности, это дает $l2^r$ мерный тор в $\mathcal{A}_r^l$ для l мерного действительного тора $\mathbf{T}_2 = (S^1)^l$ как M_1.

Рассмотрим $\mathbf{T}_2$. Его можно разрезать вдоль замкнутое кривой (петли) C H_p^∞-диффеоморфной с S^1 и отмеченными точками $s_{0,q} \in C \subset \mathbf{T}_2$ так что C вращается на поверхности тора $\mathbf{T}_2 = S_R^1 \times S_b^1$ на угол π вокруг S_b^1 в то время как C вращается на 2π вокруг S_R^1, так что C вращается на 4π вокруг S_R^1, чтобы вернуться к начальной точке на C, где $0 < b < R < \infty$, $q = 1, ..., k$, $k \in \mathbf{N}$. Поэтому разрез вдоль C тора $\mathbf{T}_2$ является неориентируемой лентой, которая неизбежно является лентой Мёбиуса с дважды большим числом отмеченных точек $\{s_{0,j}^L : j = 1, ..., 2k\} \subset \partial L$.

Поэтому для $M = \mathbf{T}_2$ в качестве $\hat{M}$ возьмем квадрант в $\mathbf{R^2}$ с $2k$ попарно противоположными отмеченными точками $\hat{s}_{0,q}$ и $\hat{s}_{0,q+k}$ на границе $\hat{M}$, $q = 1, ..., k$, $k \in \mathbf{N}$. Подходящее склеивание граничных точек в $\partial\hat{M}$ дает отображение $\Xi : \hat{M} \to \mathbf{T}_2$, $\Xi(\hat{s}_{0,q}) = \Xi(\hat{s}_{0,q+k}) = s_{0,q}$, $q = 1, ..., k$. Собственное разрезание $\hat{M}$ на $\hat{A}_j$, $j = 1, 2$, или ленты Мёбиуса L индуцирует разрезание для $\mathbf{T}_2$. Таким образом, мы получаем псевдо-подмногообразие $A_3(\mathbf{T}_2) =: A_3 \supset C$, в то время как A_1 и A_2 ретрагируемы в отмеченную точку $s_{0,q} \in C$ для любых q, следовательно, $\mathbf{T}_2$ удовлетворяет условиям $2(i-iii, iv', v)$. В силу следствия 9 существует вложение $\phi^* : (W^{\mathbf{T}_2,\{s_{0,q}:q=1,...,k\}}E)_{t,H} \to (W^{L,\{s_{0,q}^L:q=1,...,2k\}}E)_{t,H}$, где $\phi : L \to \mathbf{T}_2$ является факторным отображением с $\phi(\{s_{0,q}^L, s_{0,q+k}^L\}) = \{s_{0,q}\}$, $q = 1, ..., k$.

Для n-мерного тора $\mathbf{T}_n$ в $\mathcal{A}_r^a$ с $n > 2$ возьмем $n-1$-мерную поверхность B такую, что каждая её проекция в $\mathbf{T}_2$ является H_p^t-диффеоморфной с C для петли C как выше. Поэтому разрез вдоль B с точностью до H_p^t-диффеоморфизма дает $M_0 := L \times I^{n-2}$ для четного n или $M_0 := S^1 \times I^{n-1}$ для нечетного n, где $I = [0, 1]$. Так как I^m ретрагируема в точку, где $m \geq 1$. Таким образом мы легко получаем, что для $\mathbf{T}_n$ псевдо-под-многообразие $A_3 \supset B$ и два подмногообразия A_1 и A_2 ретрагируемы в точки и удовлетворяют достаточным условиям $2(i - iii, iv', v)$, где $\hat{M} = I^n$ с точностью до H_p^t-диффеоморфизма, $s_{0,q} \in B \subset A_3 := A_3(\mathbf{T}_n)$, $\{s_{0,q}^{M_0}, s_{0,q+k}^{M_0}\} \subset \partial M_0$, $q = 1, ..., k$, $k \in \mathbf{N}$. Подходящее разрезание многообразия $\hat{M}$ на $\hat{A}_j$, $j = 1, 2$, индуцирует разрезание для $\mathbf{T}_n$. Таким образом, существует H_p^t факторное отображение $\phi : M_0 \to \mathbf{T}_n$ с $\phi(\{s_{0,q}^{M_0}, s_{0,q+k}^{M_0}\}) = \{s_{0,q}\}$ и вложение

$\phi^*: (W^{\mathbf{T}_n,\{s_{0,q}:q=1,...,k\}}E)_{t,H} \hookrightarrow (W^{M_0,\{s_{0,q}^{M_0}:q=1,...,2k\}}E)_{t,H}$ благодаря следствию 9.

Более общим образом вырежем из $\mathbf{T}_n$ открытые подмножества V_j, которые являются H_p^t-диффеоморфными внутренностям ограниченных квадрантов в $\mathbf{R^n}$ вложенного в $\mathcal{A}_r^l$, $j = 1,...,\beta$, так что $s_{0,q} \in B \cap (\bigcap_{j=a_1+...+a_{q-1}+1}^{a_1+...+a_q} \partial V_j)$, $V_j \cap V_i = \emptyset$ для любых $j \ne i$, $V_j \cap B = \emptyset$ для любых j, где B определено с точностью до H_p^t диффеоморфизма, $a_0 := 0$, $a_1 + ... + a_k = \beta$, $q = 1,...,k$, что дает многообразие M_2. Тогда из M_0 аналогично вырежем соответствующие $V_{j,b}$, так что $s_{0,q} \in B \cap (\bigcap_{j=a_1+...+a_{q-1}+1}^{a_1+...+a_q} \partial V_{j,1})$, $s_{0,q+k} \in B \cap (\bigcap_{j=a_1+...+a_{q-1}+1}^{a_1+...+a_q} \partial V_{j,2})$, $V_{j,b_1} \cap V_{i,b_2} = \emptyset$ для любых $j \ne i$ или $b_1 \ne b_2$, $a_0 := 0$, $a_1+...+a_k = \beta$, $q = 1,...,k$, $j = 1,...,\beta$, $b = 1,2$, что дает многообразие M_1. Мы выберем $V_{j,b}$, так что для ограничения $\phi : M_1 \to M_2$ отображения ϕ выполняется равенство $\phi(V_{j,1} \cup V_{j,2}) = V_j$ для любых j, $\phi(\{s_{0,q}^{M_1}, s_{0,q+k}^{M_1}\}) = \{s_{0,q}\}$. Это дает вложение $\phi^* : (W^{M_2,\{s_{0,q}:q=1,...,k\}}E)_{t,H} \hookrightarrow (W^{M_1,\{s_{0,q}^{M_1}:q=1,...,2k\}}E)_{t,H}$.

Другим примером является многообразие M_3 полученное из предыдущего M_2 с $2k$ отмеченными точками и 2β вырезанными областями V_j, когда $s_{0,q}$ отождествляется с $s_{0,q+k}$ и каждая граница ∂V_j склеивается с $\partial V_{j+\beta}$ для любых $j \in \lambda_q \subset \{d : a_1 + ... + a_{q-1} + 1 \le d \le a_1 + ... + a_q\}$, $q = 1,...,k$, $k \in \mathbf{N}$, посредством отношения эквивалентности υ. Такое M_3 получается из тора $\mathbf{T}_{n,m}$ с m дырками вместо одной дырки в стандартном торе $\mathbf{T}_{n,1} = \mathbf{T}_n$ вырезанием из него V_j с $j \in \{1,...,2\beta\} \setminus (\bigcup_{q=1,...,k} \lambda_q)$, где $m = m_1 + ... + m_k$, $m_q := card(\lambda_q)$. Для $\mathbf{T}_n$ и M_2 поверхность B является H_p^t-диффеоморфной с $(\partial L) \times I^{n-2}$ для четного n или $S^1 \times I^{n-1}$ для нечетного n. Возьмем $A_3 \supset B \cup (\bigcup_{j\in\lambda_q} \upsilon(\partial V_j))$, оно линейно связно и содержит все отмеченные точки. Поэтому, M_3 удовлетворяет условиям §2 и существует вложение $\upsilon^* : (W^{M_3,\{s_{0,q}^{M_3}:q=1,...,k\}}E)_{t,H} \hookrightarrow (W^{M_2,\{s_{0,q}^{M_2}:q=1,...,2k\}}E)_{t,H}$. Это также индуцирует вложение $(W^{\mathbf{T}_{n,m},\{s_{0,q}^{\mathbf{T}_{n,m}}:q=1,...,k\}}E)_{t,H} \hookrightarrow (W^{\mathbf{T}_n,\{s_{0,q}^{\mathbf{T}_n}:q=1,...,2k-1\}}E)_{t,H}$, так что каждый элемент $g \in (W^{\mathbf{T}_{n,m},\{s_{0,q}^{\mathbf{T}_{n,m}}:q=1,...,k\}}E)_{t,H}$ можно представить в виде произведения $g = (..(g_1g_2)...g_m)$ из m элементов $g_j \in (W^{\mathbf{T}_n,\{s_{0,q}^{\mathbf{T}_n}:q=1,...,2k-1\}}E)_{t,H}$, $g_j =< f_j >_{t,H}$, $supp(\pi \circ f_j) \subset B_j$, $B_1 \cup ... \cup B_m = \mathbf{T}_n$, $B_i \cap B_j = \partial B_i \cap \partial B_j$ для всякого $i \ne j$, каждое B_j является каноническим замкнутым подмножеством в $\mathbf{T}_n$, $s_{0,1} \in B_1$, $s_{0,2q}, s_{2q+1} \in B_d$ для $m_1 + ... + m_0 + 1 \le d \le m_1 + ... + m_q$, $q = 1,...,k-1$, где $m_0 := 0$.

Очевидно, что в общем случае для различных многообразий M и N группы оберток могут быть неизоморфными. Например, в качестве M_1 возьмем сферу S^n размерности $n > 1$, а как M_2 возьмем $M_1 \setminus K$, где K является с точностью до H_p^t-диффеоморфизма объединением непересекающихся внутренностей B_j квадрантов диаметров $d_1,...,d_s$ значительно меньше, чем 1, $K = B_1 \cup ... \cup B_l$, $l \in \mathbf{N}$. Пусть N будет δ-раздутием для M_2 в $\mathbf{R^{n+1}}$ относительно метрики последнего евклидова пространства, где $0 < \delta < \min(d_1,...,d_l)/2$. Тогда группы $(W^{M_1}N)_{t,H}$ и $(W^{M_2}N)_{t,H}$ не изоморфны. Это легко следует из рассмотрения элемента $b :=< f >_{t,H} \in (W^{M_2}N)_{t,H}$, где $f : M_2 \to N$ является тождественным вложением индуцированным структурой δ-раздутием.

Напомним, что для ориентируемого замкнутого многообразия A и B той же размерности m степень непрерывного отображения $f : A \to B$ определяется как целое число $deg(f) \in \mathbf{Z}$ такое, что $f_*[A] = deg(f)[B]$, где $[A] \in H_m(A)$ или $[B] \in H_m(B)$ обозначает генератор, определяемый ориентацией A или B соответственно [5]. Рассмотрим отображения $f_j : S^n \to N$ такие, что $V_j \supset \partial B_j \cap N$, где V_j является областью в $\mathbf{R^{n+1}}$ ограниченной гипера=поверхностью $f_j(B_j)$, f_j возьмем равным w_0 на каждом B_i с $i \ne j$, в то время как степень отображения f_j из S^n в $f_j(S^n)$ равна единице. Если бы существовал изоморфизм $\theta : (W^{M_2}N)_{t,H} \to (W^{M_1}N)_{t,H}$, то $\theta(b)$ имело бы нетривиальное разложение в сумму несокращающихся ненулевых слагаемых, которое индуцировано отображениями $f_j : S^n \to N$. Однако элемент b в $(W^{M_2}N)_{t,H}$ не имеет такого разложения.

Если две группы G_1 и G_2 не изоморфны, то, конечно, $(W^M E; N, G_1, \mathbf{P})_{t,H}$ и $(W^M E; N, G_2, \mathbf{P})_{t,H}$ не изоморфны.

Конструкцию группы оберток можно распространить на локально компактное некомпактное M удовлетворяющее условиям $2(ii - iv)$ или (ii, iii, iv') меняя (v), так что $\hat{M}$ является локально компактной некомпактной H_p^t-областью в $\mathcal{A}_r^l$, его граница $\partial\hat{M}$ может оказаться пустой. Для этого достаточно ограничить семейство функций, наложив условие, что функции имеют компактные носители $f : M \to W$ относительно $w_0 : M \to W$, то есть, носитель $supp_{w_0}(f) := cl_M\{x \in M : f(x) \neq y_0 \times e\}$ компактен, $cl_M A$ обозначает замыкание подмножества A в M. Тогда классы эквивалентных элементов даются с помощью замыканий орбит группы всех H_p^t диффеоморфизмов g с компактными носителями сохраняющими отмеченные точки $DifH_{p,c}^t(M, \{s_{0,q} : q = 1, ..., k\})$, то есть, $supp_{id}(g) := cl_M\{x \in M : g(x) \neq x\}$ компактны, где $id(x) = x$ для любых $x \in M$. Тогда группы оберток $(W^M E)_{t,H}$ для многообразий M таких как однополостный гиперболоид, двуполостный гиперболоид, эллиптический гиперболоид, гиперболический параболоид и так далее или для бóльших размерностей многообразий над $\mathcal{A}_r$. Для некомпактного локально компактного многообразия можно рассмотреть бесконечное счетное дискретное множество отмеченных точек или изолированных сингулярностей. Эти примеры можно естественным образом обобщить для определенных заузленных многообразий возникающих из рассмотренных выше.

Милнор и Лефшец использовали окружность $M = S^1$ и тривиальную группу $G = \{e\}$, а также подгруппу диффеоморфизмов сохраняющих ориентацию и отмеченную точку в S^1. Поэтому их группа петель $L(S^1, N)$ может быть некоммутативной. Итерированная группа петель $L(S^1, L(S^{n-1}, N))$ изоморфна с $L(S^n, N)$, где последняя группа снабжена равномерностью из итерированной группы петель, поэтому n раз итерированная группа петель окружности S^1 дает группу петель S^n [6]. При $dim_{\mathbf{R}} M > 1$ сохранение ориентации теряет свое значение. Здесь выше была использована группа диффеоморфизмов без требования на сохранение ориентации многообразия M, так что две копии M в букете уже не различаются в классах эквивалентности функций и для коммутативной группы G это дает коммутативную группу оберток.

Отметим для сравнения группы гомотопий, которые как известно являются фактор-группами классических групп петель. Группа $\pi_q(X)$ для топологического пространства X с отмеченной точкой x_0 в силу предложения 17.1 (b) [2] коммутативна при $q > 1$. Для $q = 1$ фундаментальная группа $\pi_1(X)$ может быть некоммутативной, но она всегда коммутативна в частном случае, когда $X = G$ является линейно связной топологической группой (смотри §49(G) в [32]).

11. Предложение. *Пусть $L(S^1, N)$ является H_p^1 группой петель в классическом смысле. Тогда итерированная группа петель $L(S^1, L(S^1, N))$ коммутативна.*

Доказательство. Рассмотрим два элемента $a, b \in L(S^1, L(S^1, N))$ и два отображения $f \in a$, $g \in b$, $(f(x))(y) = f(x, y) \in N$, где $x, y \in I = [0, 1] \subset \mathbf{R}$, $e^{2\pi x} \in S^1$. Обратный элемент d^{-1} для $d \in L(S^1, N)$ определяется как класс эквивалентности $d^{-1} =< h^- >$, где $h \in d$, $h^-(x) := h(1 - x)$. Тогда

(1) $f(x, 1-y) = (f(x))(1-y) \in a^{-1}$ и $g(x, 1-y) = (g(x))(1-y) \in b^{-1}$ для $L(S^1, L(S^1, N))$ и симметрично

(2) $(f(y))(1 - x) = f(1 - x, y) \in a^{-1}$ и $(g(y))(1 - x) = g(1 - x, y) \in b^{-1}$. С другой стороны, $f \vee g$ соответствует ab, и $g \vee f$ соответствует ba, где приведенное произведение $S^1 \wedge S^1$ является H_p^t-диффеоморфным с S^2 в смысле псевдо-многообразий с точностью до критических подмножеств коразмерности не менее двух.

Рассмотрим $(S^1 \vee S^1) \wedge (S^1 \vee S^1)$ и $(f \vee w_0) \vee (w_0 \vee g)$ и $(g \vee w_0) \vee (w_0 \vee f)$ и итерированное отношение эквивалентности $R_{1,H}$. Эта ситуация соответствует $\hat{M} = I^2$ разделенному на четыре квадрата отрезками прямых линий $\{1/2\} \times [0,1]$ и $[0,1] \times \{1/2\}$ с соответствующими областями определений для f, g и w_0 в рассматриваемом букете, где $< f \vee w_0 >=< w_0 \vee f >=< f >$ – это тот же класс эквивалентных элементов.

Поскольку $G = \{e\}$, $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$, то $g(1-x,y) \vee f(1-x,y)$ принадлежит тому же классу эквивалентных элементов как и $g(x,1-y) \vee f(x,1-y)$. Но в силу включений $(1,2)$ $< g(1-x,y) \vee f(1-x,y) >=< f(x,y) \vee g(x,y) >^{-1}$ и $< f(x,y) \vee g(x,y) >=< g(x,1-y) \vee f(x,1-y) >^{-1}$ и $< h(x,y) >^{-1}=< h(x,1-y) >=< h(1-x,y) >$ для $h \in ab$, следовательно, $< h(x,y) >=< h(1-x,1-y) >$ и $< (f \vee g)(x,1-y) >=< f(x,1-y) \vee g(x,1-y) >\in (ab)^{-1}$, так как имеется отображение $(x,y) \mapsto (1-x,1-y)$ при перестановке двух сфер в букете $S^2 \vee S^2$. Следовательно, $a^{-1}b^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ и неизбежно $ab = ba$.

12. Теорема. *Пусть M и N – это два связных одновременно или C^∞ римановых или $\mathcal{A}_r$ голоморфных многообразий с углами, где M компактно и $dimM \geq 1$, и $dimN > 1$. Тогда $(W^M N)_{t,H}$ не имеет никакой нетривиальной непрерывной локальной одно-параметрической под-группы g^b для $b \in (-\epsilon,\epsilon)$ с $\epsilon > 0$.*

Доказательство. Предположим противное, что $\{g^b : b \in (-\epsilon,\epsilon)\}$ с $\epsilon > 0$ является локальной нетривиальной одно-параметрической под-группой, то есть, $g^b \neq e$ для $b \neq 0$. Тогда элементу g^δ для отмеченного $0 < \delta < \epsilon$ соответствует $f = f_\delta \in H^\infty_p$, так что $< f >_{t,H}= g^\delta$, где $f \in H^t_p$. Если $f(U) = \{y_0 \times e\}$ для достаточно малой связной открытой окрестности U точки $s_{0,q}$ в M, то существует последовательность $f \circ \psi_n$ в классе эквивалентности $< f >_{t,H}$ с семейством диффеоморфизмов $\psi_n \in DifH^t_p(M;\{s_{0,q} : q = 1,...,k\})$, так что $\lim_{n\to\infty} diam\psi_n(U) = 0$ и $\bigcap_{n=1}^\infty \psi_n(U) = \{s_{0,q}\}$. Если $h(x) \neq y_0$, то в силу непрерывности h существует открытая окрестность P точки x в M такая, что $y_0 \notin h(P)$. Рассмотрим ковариантное дифференцирование ∇ на многообразии M (смотри [12]). Множество S_h точек, где $\nabla^k h$ является разрывным образует под-многообразие коразмерности не менее единицы, следовательно, меры нуль относительно риманова элемента объема в M. Для других точек x в M, $x \in M \setminus S_h$, все $\nabla^k h$ непрерывны.

Возьмем тогда открытое подмножество $V = V(f)$ в M такое, что $V \supset U$ и $\nabla^k_\nu f|_{\partial V} \neq 0$ для некоторого $k \in \mathbf{N}$, где $\nabla_\nu f(x) := \lim_{z\to x, z\in M\setminus V} \nabla_\nu f(z)$, ν – это нормаль (перпендикуляр) к ∂V в M в точке x границы ∂V подмножества V в M. Практически возьмем минимальное $k = k(x)$ с таким свойством. Поскольку M компактно и $\partial V := cl(V) \cap cl(M \setminus V)$ замкнуто в M, то ∂V компактно. Функция $x \mapsto k(x) \in \mathbf{N}$ непрерывна, так как f и $\nabla^l f$ для любых l непрерывны. Но $\mathbf{N}$ дискретно, следовательно, каждое $\partial_q V := \{x \in \partial V : k(x) = q\}$ открыто в V. Поэтому, ∂V является конечным объединением из $\partial_q V$, $1 \leq q \leq q_m$, где $q_m := \max_{x\in\partial V} k(x) < \infty$ для $f = f_\delta$, так как ∂V компактно. Таким образом, существует подмножество $\lambda \subset \{1,...,q_m\}$ такое, что $\partial V = \bigcup_{q\in\lambda} \partial_q V$ и $\partial_q V \neq \emptyset$ для любых $q \in \lambda$. Если $\nabla^l f(x) = 0$ для $l = 1,...,k(x)-1$ и $\nabla^{k(x)} f(x) \neq 0$, тогда $\nabla^{k(x)} f(\psi(y)) = \nabla^{k(x)}(\psi(y)).(\nabla\psi(y))^{\otimes k(x)} \neq 0$ для $y \in M$, так что $\psi(y) = x$, так как $\nabla\psi(y) \neq 0$, где $\psi \in DifH^\infty_p(M;\{s_{0,q} : q = 1,...,k\})$.

Мы можем взять $\epsilon > 0$ такое, что $\{g^b : b \in (-\epsilon,\epsilon)\} \subset U$, где $U = -U$ – это связная симметричная открытая окрестность единичного элемента e в $(W^M N)_{t,H}$. Поскольку $g^{b_1} + g^{b_2} = g^{b_1+b_2}$ для любых $b_1, b_2, b_1 + b_2 \in (-\epsilon,\epsilon)$, то $\lim_{t\to 0} g^b = e$ для локальной однопараметрической под-группы и, в частности, $\lim_{m\to\infty} g^{1/m} = e$, где $m \in \mathbf{N}$. Возьмём $\delta = \delta_m = 1/m$ и $f = f_m \in H^\infty_p$, так что $< f_m >_{t,H}= g^{1/m}$. С другой стороны, $jg^{1/m} = g^{j/m}$ для любых $j < m\epsilon$, $j \in \mathbf{N}$, следовательно, $f_{j/m}(M) = f_{1/m}(M)$ для любых $j < m\epsilon$, так как $f \vee h(M \vee M) = f(M) \vee h(M)$ и используя вложение η моноида $(S^M N)_{t,H}$ в группу $(W^M N)_{t,H}$.

Функция $|\nabla^{k(x)}_\nu f_\delta(x)|$ для $x \in \partial V$ непрерывна по δ благодаря теореме вложения Соболева [27], $0 < \delta < \epsilon$, следовательно„ $\inf_{x\in\partial V} |\nabla^{k(x)}_\nu f_\delta(x)| > 0$, так как ∂V компактно. Мы можем выбрать семейство f_δ такое, что $z^{(l)}(\delta,x) := \nabla^l f_\delta(x)$ непрерывна для любых $0 \leq l \leq k_0$ по $(\delta, x) \in (-\epsilon, \epsilon) \times M$, так как $\{g^b : b \in (-\epsilon, \epsilon)\}$ – это непрерывная по b однопараметрическая подгруппа, где $k_0 := q_m(\delta_0)$. Поэтому, для этого семейства существует окрестность $[-\epsilon + c, \epsilon - c]$ такая, что $\delta_0 \in [-\epsilon + c, \epsilon - c] \subset (-\epsilon, \epsilon)$ с $0 < c < \epsilon/3$, так что $q_m(\delta) \leq k_0$ для любых $\delta \in [-\epsilon + c, \epsilon - c]$ с подходящим выбором $V(f_\delta)$, так как $\mathbf{N}$ дискретно. С другой стороны, $\sup_{x \in \partial V(f_\delta), 0<\delta\leq\epsilon-c} |\nabla_\nu^{k(x)} f_\delta(x)| \leq \sup_{x\in M, 0<\delta\leq\epsilon-c} |\nabla_\nu^{k(x)} f_\delta(x)| =: B < \infty$, так как M и $[-\epsilon + c, \epsilon - c]$ компактны.

Тогда для этого семейства существует окрестность $[-\epsilon + c, \epsilon - c]$ такая, что $\delta_0 \in [-\epsilon + c, \epsilon - c] \subset (-\epsilon, \epsilon)$ с $0 < c < \epsilon/3$, так что $q_m(\delta) \leq k_0$ для любого $\delta \in [-\epsilon + c, \epsilon - c]$ с подходящим выбором $V(f_\delta)$, так как $\mathbf{N}$ дискретно.

Тогда $\underline{\lim}_{\delta\to 0, \delta>0} |\nabla_\nu^{k(x)} f_\delta(x)| =: b > 0$ для $x \in \partial V$ с подходящим выбором $V = V(f_\delta)$, так как M связно, $dim M \geq 1$ и $\inf_{m\in\mathbf{N}} diam f_{j/m}(M) > 0$ для отмеченного $\delta_0 = j/m_0 < \epsilon$ с $j, m > m_0 \in \mathbf{N}$ взаимно простых, $(j,m) = 1$, $(j, m_0) = 1$. Классу эквивалентности $< f_{l/m} >_{t,H}$ соответствует l-кратный букет $< f_{1/m} >_{t,H} \vee ... \vee < f_{1/m} >_{t,H} =:< f_{1/m} >^{\vee l}_{t,H}$. Таким образом, существует константа $C = const > 0$ для M такая, что $|\nabla_\nu^{k(x)} f_{l/m}(x)| \geq Cl \inf_{y\in\partial V(f_{1/m})} |\nabla_\nu^{k(y)} f_{1/m}(y)| \geq Clb$, где $C > 0$ фиксировано для выбранного атласа $At(M)$ с данными связывающими отображениями $\phi_i \circ \phi_j^{-1}$ карт.

Рассмотрим $\delta_0 \leq l/m < \epsilon - c$ и m и l стремящееся к бесконечности. Тогда это дает $B \geq Clb$ для любых $l \in \mathbf{N}$, что является противоречивым неравенством, следовательно, $(W^M N)_{t,H}$ не содержит никакой нетривиальной локальной однопараметрической подгруппы.

Литература

[1] E. J. Beggs. "The de Rham complex of infinite dimensional manifolds". Quart. J. Math. Oxford (2) **38** (1987), 131–154.

[2] Р. Ботт, Л. В. Ту. "Дифференциальные формы в алгебраической топологии" (Москва: Наука, 1989).

[3] Г. Бредон. "Теория пучков" (Москва: Наука, 1988).

[4] P. Gajer. "Higher holonomies, geometric loop groups and smooth Deligne cohomology". in: "Advances in geometry". J.-L. Brylinski ed. Progr. Math. V. **172**, P. 195–235 (Boston: Birkhaüser, 1999).

[5] Y. H. Ding, J. Z. Pang. "Computing degree of maps between manifolds", Acta Mathem. Sinica. English Series. **21: 6** (2005), 1277–1284.

[6] G. Emch. "Mèchanique quantique quaternionienne et Relativitè restreinte". Helv. Phys. Acta **36** (1963), 739–788.

[7] Р. Энгелькинг. "Общая топология" (Москва: Мир, 1986).

[8] P. Gajer. "Higher holonomies, geometric loop groups and smooth Deligne cohomology". In: "Advances in geometry". Progr. in Math. **172**, 195–235 (Boston: Birkhäuser, 1999).

[9] F. Gürsey, C.-H. Tze. "On the role of division, Jordan and related algebras in particle physics" (Singapore: World Scientific Publ. Co., 1996).

[10] У. Р. Гамильтон. "Избранные труды. Оптика. Динамика. Кватернионы" (Москва: Наука, 1994).

[11] C. J. Isham. "Topological and global aspects of quantum theory". In: "Relativity, groups and topology.II" 1059–1290, (Les Hauches, 1983). Editors: R. Stora, B. S. De Witt (Amsterdam: Elsevier Sci. Publ., 1984).

[12] W. Klingenberg. "Riemannian geometry" (Berlin: Walter de Gruyter, 1982).

[13] S. Lang. "Algebra" (New York: Addison-Wesley, 1965).

[14] H. B. Lawson, M.-L. Michelson. "Spin geometry" (Princeton: Princ. Univ. Press, 1989).

[15] С. В. Людковский. "Квази-инвариантные меры на группах петель римановых многообразий", Докл. Акад. Наук **370: 3** (2000), 306–308.

[16] S. V. Ludkovsky. "Poisson measures for topological groups and their representations". Southeast Asian Bulletin of Mathematics. **25** (2002), 653–680. (shortly in Russ. Math. Surv. **56: 1** (2001), 169–170; previous versions: **IHES/M/98/88**, 38 pages, also Los Alamos Nat. Lab. **math.RT/9910110**).

[17] S. V. Ludkovsky. "Functions of several Cayley-Dickson variables and manifolds over them", J. Mathem. Sci. **141: 3** (2007), 1299–1330 (previous variant: Los Alamos Nat. Lab. **math.CV/0302011**).

[18] С. В. Людковский. Соврем. Матем. Фундам. Направл. "Нормальные семейства функций и группы псевдоконформных диффеоморфизмов кватернионных и октонионных переменных", **18** (2006), 101–164 (предыдущий вариант: Los Alam. Nat. Lab. math.DG/0603006).

[19] S. V. Ludkovsky, F. van Oystaeyen. Bull. Sci. Math. (Paris). Ser. 2. "Differentiable functions of quaternion variables", **127** (2003), 755–796.

[20] С. В. Людковский. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. "Дифференцируемые функции чисел Кэли-Диксона", **1: (3)** (2005), 93–140 (предыдущий вариант: Los Alam. Nat. Lab. math.NT/0406048; math.CV/0406306; math.CV/0405471).

[21] S. V. Ludkovsky. J. Mathem. Sci. "Stochastic processes on geometric loop groups, diffeomorphism groups of connected manifolds, associated unitary representations", **141: 3** (2007), 1331–1384 (previous version: Los Alam. Nat. Lab. math.AG/0407439, July 2004).

[22] S. V. Ludkovsky. "Geometric loop groups and diffeomorphism groups of manifolds, stochastic processes on them, associated unitary representations". In the book: "Focus on Groups Theory Research" (Nova Science Publishers, Inc.: New York) 2006, pages 59–136.

[23] S.V. Ludkovsky. J. Mathem. Sci. "Generalized geometric loop groups of complex manifolds, Gaussian quasi-invariant measures on them and their representations", **122: 1** (2004), 2984–3011 (earlier version: Los Alam. Nat. Lab. **math.RT/9910086**, October 1999).

[24] М. Б. Менский. "Группа путей. Измерение. Поля. Частицы" (Москва: Наука, 1983).

[25] В. П. Михайлов. "Дифференциальные уравнения в частных производных" (Москва: Наука, 1976).

[26] P. W. Michor. "Manifolds of differentiable mappings" (Shiva, Boston, 1980).

[27] J. Milnor. "Morse theory" (Princeton, New Jersey: Princeton Univ. Press, 1963).

[28] N. Murakoshi, K. Sekigawa, A. Yamada. "Integrability of almost quaternionic manifolds". Indian J. Mathem. **42: 3**, 313–329 (2000).

[29] L. Narici, E. Beckenstein. "Topological vector spaces". New York: Marcel-Dekker Inc., 1985.

[30] H. Omori. "Groups of diffeomorphisms and their subgroups". Trans. Amer. Math. Soc. **179** (1973), 85–122.

[31] H. Omori. "Local structures of groups of diffeomorphisms". J. Math. Soc. Japan **24: 1** (1972), 60–88.

[32] Л. С. Понтрягин. "Непрерывные группы" (Москва: Наука, 1984).

[33] R. T. Seeley. "Extensions of C^∞ functions defined in a half space", Proceed. Amer. Math. Soc. **15** (1964), 625–626.

[34] J. M. Souriau. "Groupes differentiels" (Berlin: Springer Verlag, 1981).

[35] Р. Зуланке, П. Виттен. "Дифференциальная геометрия и расслоения" (Москва: Мир, 1975).

[36] R. C. Swan. "The Grothendieck ring of a finite group", Topology **2** (1963), 85–110.

[37] Р. М. Свитцер. "Алгебраическая топология – гомотопии и гомологии" (Москва: Наука, 1985).

[38] J. C. Tougeron. "Ideaux de fonctions differentiables" (Berlin: Springer-Verlag, 1972).

[39] K. Yano, M. Ako. "An affine connection in almost quaternion manifolds". J. Differ. Geom. **3** (1973), 341–347.

Wrap groups of quaternion and octonion fiber bundles

S. V. Ludkovsky

MIREA
sludkowski@mail.ru

This article is devoted to the investigation of wrap groups of connected fiber bundles over the fields of real **R**, complex **C** numbers, the quaternion skew field **H** and the octonion algebra **O**. These groups are constructed with mild conditions on fibers. Their examples are given. It is shown, that these groups exist and for differentiable fibers have the infinite dimensional Lie groups structure, that is, they are continuous or differentiable manifolds and the composition $(f, g) \mapsto f^{-1}g$ is continuous or differentiable depending on a class of smoothness of groups. Moreover, it is demonstrated that in the cases of real, complex, quaternion and octonion manifolds these groups have structures of real, complex, quaternion or octonion manifolds respectively. Nevertheless, it is proved that these groups does not necessarily satisfy the Campbell-Hausdorff formula even locally.

Key words: wrap groups, fiber bundles, hypercomplex algebra, quaternion, octonion.