КОНФИГУРАТРИССА И РЕЗУЛЬТАНТ

Н. С. Перминов

Казанский государственный университет, Россия
nikolai-kazan@rambler.ru

Получено явное выражение для результанта системы нелинейных алгебраических уравнений второй степени $\{\partial_1 S = 0, \ldots, \partial_n S = 0\}$ задаваемых симметрическим полиномом S третьей степени от n переменных.

Ключевые слова: конфигуратриса, индикатриса, результант, финслеровы пространства.

1 Введение

В современной физике пользуются популярностью пространства с финслеровыми метрическими функциями [1] полиномиального типа. В частности, для пространств Бервальда-Моора и Минковского уравнения индикатрисс $L(\xi) = 1$ примут полиномиальную форму

$$L^4(\xi) = \xi^1\xi^2\xi^3\xi^4 = 1 \tag{1}$$

и

$$L^2(\xi) = \xi^1\xi^2 + \xi^1\xi^3 + \xi^1\xi^4 + \xi^2\xi^3 + \xi^2\xi^4 + \xi^3\xi^4 = 1 \tag{2}$$

соответственно. Интерес представляет также уравнение конфигуратрисы $\Phi(y) = 1$. Это запись соотношения $L(\xi) = 1$ через канонически сопряженные к координатам величины $y_i = \partial_i L$. Его можно представить как условие совместности системы уравнений

$$\begin{cases} L(\xi) = 1, \\ \dfrac{\partial}{\partial \xi^1} L(\xi) = y_1, \\ \ldots \\ \dfrac{\partial}{\partial \xi^n} L(\xi) = y_n. \end{cases} \tag{3}$$

Как известно, система полиномиальных уравнений совместна тогда и только тогда, когда некоторое выражение, называемое *результантом* [2–4], обращается в ноль. Таким образом, когда $L^k(\xi) \equiv S(\xi)$ – полином от ξ, уравнение конфигуратрисы есть условие на результант

$$R \left\{ \begin{array}{c} S(\xi) - 1 \\ \dfrac{\partial}{\partial \xi^1} S(\xi) - k y_1 \\ \ldots \\ \dfrac{\partial}{\partial \xi^n} S(\xi) - k y_n \end{array} \right\} = 0. \tag{4}$$

Возможность введения перенормируемого элемента объема в финслеровой геометрии связана с компактностью пространства, ограниченного индикатриссой $L(\xi) = 1$. Это зависит от наличия особых точек у поверхности, задаваемой уравнением $L(\xi) = 0$. Его можно определить как условие совместности системы $\{\partial_i L = 0\}$ или

$$R\{\partial_i S\} = 0, \tag{5}$$

если $L^k(\xi) = S(\xi)$ – полином. С учетом возможных приложений, важно находить простые и явные формулы для результантов в различных частных случаях. Мы рассмотрим случай, когда $S(\xi)$ – симметрический полином третьей степени от n переменных.

2 Вычисление результанта

Любой симметрический полином степени 3 можно представить в виде

$$S(x_1, ..., x_n) = A_1(s_1)^3 + A_2 s_1 s_2 + A_3 s_3, \tag{6}$$

где $\{s_1, ..., s_n\}$ – элементарные симметрические полиномы,

$$s_1 = \sum_i x_i,$$

$$s_2 = \sum_{i<j} x_i x_j \tag{7}$$

$$\dots$$

$$s_k = \sum_{i_1<...<i_k} x_{i_1} ... x_{i_k}. \tag{8}$$

В нашем случае

$$\frac{\partial}{\partial x_i} S = A_3 x_i^2 - (A_2 + A_3) x_i s_1 + (3A_1 + A_2) s_1^2 + (A_2 + A_3) s_2. \tag{9}$$

После линейного преобразования

$$F_i = \frac{1}{A_3} \partial_i S + \frac{A_2 + A_3}{A_3(2A_3 - n(A_2 + A_3))} \sum_{i=1}^{n} \partial_i S \tag{10}$$

получим другую систему уравнений, эквивалентную данной,

$$F_i = x_i^2 + 2A x_i s_1 + B s_1^2, \tag{11}$$

где

$$\begin{cases} A = -\dfrac{A_2 + A_3}{2A_3}, \\ B = \dfrac{6A_1 A_3 + 2A_2 A_3 - A_2^2}{A_3(2A_3 - n(A_2 + A_3))}. \end{cases} \tag{12}$$

Результанты старой системы и новой связаны следующим образом [3]

$$R\{\partial_i S\} = R\{F_i\} \left(\frac{A_3^{n-1}(2A_3 - n(A_2 + A_3))}{2} \right)^{2^{n-1}}. \tag{13}$$

Используя формулу Пуассона [2, 4] получим

$$R\big(x_i^2 + 2Ax_is_1 + Bs_1^2\big) =$$
$$= \prod_{k_1,\dots,k_n=0}^{1} \det{}_{n\times n}\left(\delta_{ij} + \lambda(-1)^{k_i}\delta_{ij} + AE_{ij}\right) = \tag{14}$$
$$= \prod_{k_1,\dots,k_n=0}^{1} \big(1 + nA + \lambda\sum_{j=1}^{n}(-1)^{k_j}\big),$$

где

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j \\ 0, & \text{если } i \neq j \end{cases}, \quad E_{ij} = 1, \quad \lambda^2 = A^2 - B.$$

Легко показать, что это выражение для результанта приводится к виду

$$\prod_{k=0}^{n-1}\Big[(1+nA)^2 + (A^2-B)(n-2k)^2\Big]^{C_{n-1}^k}, \tag{15}$$

где

$$C_p^q = \frac{p!}{q!(p-q)!}$$

– это биномиальные коэффициенты. После простых выкладок получим

$$R\{\partial_i S\} = \prod_{k=0}^{n-1} Y_k^{C_{n-1}^k}, \tag{16}$$

$$Y_k = \frac{1}{4}A_3^{n-3}\Big\{(2A_3 - n(A_2+A_3))^3 - (n-2k)^2\cdot$$
$$\cdot((A_2+A_3)^2(2A_3 - n(A_2+A_3)) - 4A_3(6A_1A_3 + A_2A_3 - A_2^2))\Big\} \tag{17}$$

Сделав замену переменных

$$\begin{cases} B_1 = n^2A_1 + \dfrac{n(n-1)}{2}A_2 + \dfrac{(n-1)(n-2)}{6}A_3, \\ B_2 = nA_2 + (n-2)A_3, \\ B_3 = A_3, \end{cases} \tag{18}$$

приведем ответ к форме

$$\boxed{R\big\{\partial_i S\big\} = \big(B_3\big)^{(n-3)2^{n-1}} \prod_{k=0}^{n-1}\left(\frac{6(n-2k)^2}{n^2}B_1B_3^2 - \frac{k(n-k)}{n^2}B_2^3\right)^{C_{n-1}^k}} \tag{19}$$

Данная простая и явная формула является основным результатом данной работы.

3 Заключение

Использование теории результантов [2–4] в финслеровой геометрии позволяет сделать понимание некоторых классов метрических структур более простым. Полученное выражение дает простой способ для вычисления результанта системы $\{\partial_i S = 0\}$ для S степени 3 в любой размерности. В дальнейшем планируется получить аналогичные выражения для случая симметрических полиномов S степеней больших чем 3.

Литература

[1] Х. Рунд, *Дифференциальная геометрия финслеровых пространств*, М.: Наука, 1981.

[2] M. Gelfand, M. M. Kapranov, and A. V. Zelevinsky, *Discriminants, Resultants and Multidimensional Determinants*, Birkhauser, 1994.

[3] V. Dolotin and A. Morozov, *Introduction to Non-Linear Algebra*, World Scientific, 2007, hep-th/0609022

[4] A. Morozov and Sh. Shakirov, *Analogue of the identity Log Det = Trace Log for resultants*, arXiv:0804.4632

Configuratrix and resultant

N. S. Perminov

Kasan State University, Kazan, Russia,
nikolai-kazan@rambler.ru

In this paper, we obtain an explicit expression for the resultant of n quadratic algebraic equations $\{\partial_1 S = 0, \ldots, \partial_n S = 0\}$, where S is a cubic polynomial in n variables, symmetric under permutations of its arguments. Application of this result to the study of Finslerian spaces is discussed.

Keywords: configuratrix, resultant, Finslerian spaces.