ОБЪЕМЫ ИНДИКАТРИС НЕКОТОРЫХ ФИНСЛЕРОВЫХ ПРОСТРАНСТВ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

Г. И. Гарасько

ГУП ВЭИ, Москва, Россия,
НИИ гиперкомплексных систем в геометрии и физике, Фрязино, МО
gri9z@mail.ru

Получены объёмы индикатрис некоторых финслеровых пространств специального вида, что позволяет прояснить вопрос о существовании конечного (не нулевого) элемента объема в финслеровых пространствах, одна из координат у которых временнáя, и других финслеровых пространствах с вогнутой индикатрисой.

Ключевые слова: финслеровы пространства, индикатриса.

1 Введение

В работах [1], [2] был предложен новый (геометрический) подход в теории поля, применимый к любому финслеровому пространству, у которого в каждой точке основного пространства $x^1, x^2, ..., x^n$ может быть определен объем индикатрисы $(V_{ind}(x^1, x^2, ..., x^n))_{ev}$ в предположении, что касательное центроаффинное пространство является евклидовым, а координаты декартовыми прямоугольными. Действие I для полей, входящих в метрическую функцию финслерова пространства, определяется с точностью до постоянного множителя как объем по некоторой n-мерной области $\mathcal{V}$ этого финслерова пространства:

$$I = \mathrm{const} \cdot \int\limits_{\mathcal{V}}^{(n)} \frac{dx^1 dx^2 ... dx^n}{(V_{ind}(x^1, x^2, ..., x^n))_{ev}} \,. \tag{1}$$

Таким образом, полевой лагранжиан определяется следующим образом:

$$\mathcal{L} = \mathrm{const} \cdot \frac{1}{(V_{ind}(x^1, x^2, ..., x^n))_{ev}} \,. \tag{2}$$

Для псевдоримановых пространств, как и для любых финслеровых пространств, содержащих в качестве одной из координаты время, без специальных дополнительных условий на индикатрису

$$(V_{ind})_{ev} = \infty \qquad \Rightarrow \qquad dV = 0 \cdot dx^1 dx^2 ... dx^n \qquad \Rightarrow \qquad \mathcal{L} \equiv 0 \,. \tag{3}$$

Эту проблему можно решить следующим образом: перейти от рассматриваемого финслерова пространства к более сложному финслеровому пространству, содержащему некоторый параметр и имеющему конечный объем индикатрисы в каждой точке, если параметр не равен нулю. При стремлении параметра к нулю финслерово пространство с параметром должно переходить в исходное финслерово пространство, а значит при этом

$$(V_{ind})_{ev} \to \infty \,. \tag{4}$$

Все экспериментально получаемые физические величины должны иметь конечные значения при стремлении такого параметра к нулю.

Поясним, как можно ввести этакой параметр на примере пространства Минковского. Если вместо пространства Минковского рассмотреть финслерово пространство с метрической функцией

$$L(dx) = \sqrt{(dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2} + q_0 dx^0 \tag{5}$$

и условиями $dx^0 > 0$, $q_0 > 0$, то у такого пространства объем индикатрисы $(V_{ind})_{ev}$ конечное действительное число, зависящее от параметра q_0 и стремящееся к ∞, когда параметр q_0 стремится к 0.

Движение заряженной частицы массы m и заряда e в гравитационном и электромагнитном полях можно описать в лагранжевом формализме элементом действия [3]

$$ds = -\,mc\sqrt{g_{ij}(x)\,dx^i dx^j} - \frac{e}{c}\,A_i(x)\,dx^i\,, \tag{6}$$

поэтому, кроме финслеровых пространств с метрической функцией типа (5), следует рассмотреть и финслеровы пространства с метрической функцией типа

$$L(dx) = -\,\sqrt{(dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2} + q_0 dx^0\,. \tag{7}$$

В таких пространствах (с условиями $dx^0 > 0$ и $q_0 \equiv 1+\alpha > 1$) объем индикатрисы $(V_{ind})_{ev}$ конечное действительное число, зависящее от параметра q_0, или α и стремящееся к ∞, когда параметр q_0 стремится к 1, или параметр $\alpha \to 0$.

В связи в выше изложенным рассмотрим ниже финслеровы пространства с метрическими функциями вида:

$$L_{\pm}(dx; q_0) = \pm L'(dx) + q_0 dx^0\,, \quad dx^0 > 0\,, \;\; q_0 > 0\,. \tag{8}$$

Здесь $L'(dx)$ – метрическая функция либо гиперболической плоскости, либо пространства Минковского. Вычислив объемы индикатрис таких плоских пространств, мы сможем вычислить объемы индикатрис и соответствующих кривых пространств.

2 Двумерные пространства $\mathbf{L_{\pm}^{H_2}(q_0)}$

Наиболее подробно изучим индикатрисы двумерных пространств с элементами длины

$$ds = \pm\sqrt{dx^2 - dy^2} + q_0 dx\,, \qquad dx > 0\,. \tag{9}$$

Верхний знак, $\mathbf{q_0 > 0}$.

В касательном пространстве ξ, η уравнение индикатрисы принимает вид

$$\sqrt{\xi^2 - \eta^2} + q_0\xi = 1\,, \qquad \xi > 0\,. \tag{10}$$

Кривая (10) в зависимости от значения параметра q_0 является частью одной ветви гиперболы ($0 < q_0 < 1$), либо частью параболы ($q_0 = 1$), либо частью эллипса ($1 < q_0$); в любом из этих случаев она лишь в одной точке $\xi_1 = \frac{1}{1+q_0}$ пересекает ось ξ, касается биссектрисы первого квадранта в точке $(\frac{1}{q_0}, \frac{1}{q_0})$ и биссектрисы четвертого квадранта в точке $(\frac{1}{q_0}, -\frac{1}{q_0})$, соединяет эти точки касания и проецируется на ось ξ в виде отрезка:

$$\frac{1}{1+q_0} \;\leq\; \xi \;\leq\; \frac{1}{q_0}\,. \tag{11}$$

Разрешая уравнение (10) относительно η, получим

$$\eta = \pm\sqrt{(1-q_0^2)\xi^2 + 2q_0\xi - 1}\,, \tag{12}$$

а значит объем индикатрисы определяется формулой

$$(V_{ind})_{ev} = \frac{1}{q_0^2} - 2\int\limits_{\frac{1}{1+q_0}}^{\frac{1}{q_0}} \sqrt{(1-q_0^2)\xi^2 + 2q_0\xi - 1}\; d\xi\,. \tag{13}$$

Вычисляя табличный интеграл для различных значений параметра q_0, получим

$$\left(V_{ind}^{H_2}\right)_{ev}^{+} = \begin{cases} \dfrac{\ln\left(\frac{1+\sqrt{1-q_0^2}}{q_0}\right)}{(1-q_0^2)^{\frac{3}{2}}} - \dfrac{1}{(1-q_0^2)}, & 0 < q_0 < 1, \\ \dfrac{1}{3}\,, & q_0 = 1\,, \\ \dfrac{1}{(q_0^2-1)} - \dfrac{\arccos\left(\frac{1}{q_0}\right)}{(q_0^2-1)^{\frac{3}{2}}}\,, & 1 < q_0\,. \end{cases} \tag{14}$$

Итак, при изменении параметра q_0 от 0 до $+\infty$ объем индикатрисы $\left(V_{ind}^{H_2}\right)_{ev}^{+}$ монотонно убывает от $+\infty$ до 0.

Нижний знак, $\mathbf{1 < q_0}$.

В касательном пространстве ξ, η уравнение индикатрисы принимает вид

$$-\sqrt{\xi^2 - \eta^2} + q_0\xi = 1\,, \qquad \xi > 0\,. \tag{15}$$

Кривая (15) является частью эллипса, причем она лишь в одной точке $\xi_2 = \frac{1}{q_0-1}$ пересекает ось ξ, касается биссектрисы первого квадранта в точке $(\frac{1}{q_0}, \frac{1}{q_0})$ и биссектрисы четвертого квадранта в точке $(\frac{1}{q_0}, -\frac{1}{q_0})$, соединяет эти кочки касания и проецируется на ось ξ в виде отрезка:

$$\frac{1}{q_0} \;\le\; \xi \;\le\; \frac{1}{q_0-1}\,. \tag{16}$$

Разрешая уравнение (15) относительно η, получим

$$\eta = \pm\sqrt{-(q_0^2-1)\xi^2 + 2q_0\xi - 1}\,, \tag{17}$$

а значит объем индикатрисы определяется формулой

$$(V_{ind})_{ev} = \frac{1}{q_0^2} + 2\int\limits_{\frac{1}{q_0}}^{\frac{1}{q_0-1}} \sqrt{-(q_0^2-1)\xi^2 + 2q_0\xi - 1}\; d\xi\,. \tag{18}$$

Вычисляя табличный интеграл, получим

$$\left(V_{ind}^{H_2}\right)_{ev}^{-} = \frac{1}{(q_0^2-1)} + \frac{1}{(q_0^2-1)^{\frac{3}{2}}}\left(\pi - \arccos\frac{1}{q_0}\right)\,, \quad 1 < q_0\,. \tag{19}$$

Итак, при изменении параметра q_0 от 1 до $+\infty$ объем индикатрисы $\left(V_{ind}^{H_2}\right)_{ev}^{-}$ монотонно убывает от $+\infty$ до 0.

Из формул (14), (19) при $1 < q_0$ получим площадь двумерного эллипса, граница которого состоит из двух индикатрис,

$$\left(V_{ind}^{H_2}\right)_{ev}^{-} - \left(V_{ind}^{H_2}\right)_{ev}^{+} = \frac{\pi}{(q_0^2-1)^{\frac{3}{2}}}\,, \qquad 1 < q_0\,, \tag{20}$$

и соотношение

$$\lim_{q_0\to+\infty} \frac{\left(V_{ind}^{H_2}\right)_{ev}^{-}}{\left(V_{ind}^{H_2}\right)_{ev}^{+}} \;=\; 1\,. \tag{21}$$

3 Четырехмерные пространства $\mathbf{L_{\pm}^{Min}(q_0)}$

Рассмотрим финслеровы четырехмерные пространства с элементом длины

$$ds = \pm\sqrt{(dx^0)^2-(dx^1)^2-(dx^2)^2-(dx^3)^2} + q_0 dx^0\,, \quad dx^0>0\,,\; q_0>0\,. \tag{22}$$

Верхний знак, $\mathbf{q_0} > \mathbf{0}$.
В касательном пространстве $\xi, \eta^1, \eta^2, \eta^3$ уравнение индикатрисы принимает вид

$$\sqrt{\xi^2-\eta^2} + q_0\xi = 1\,, \qquad \xi > 0\,, \tag{23}$$

где

$$\eta \equiv \sqrt{(\eta^1)^2+(\eta^2)^2+(\eta^3)^2}\,. \tag{24}$$

Трехмерная гиперповерхность второго порядка (23) в зависимости от значения параметра q_0 является частью одной полости двуполосного гиперболоида $(0 < q_0 < 1)$, либо частью эллиптического параболоида $(q_0 = 1)$, либо частью поверхности четырехмерного эллипсоида $(1 < q_0)$, но в двумерном пространстве ξ, η индикатрисы будут теми же отрезками кривых, которые фигурировали в предыдущем разделе. Индикатриса пересекает ось ξ в единственной точке $\xi_1 = \frac{1}{1+q_0}$, касается светового конуса при $\xi = \frac{1}{q_0}$ и проецируется на ось ξ в виде отрезка:

$$\frac{1}{1+q_0} \;\le\; \xi \;\le\; \frac{1}{q_0}\,. \tag{25}$$

Так как интегрирование при вычислении объема индикатрисы надо в данном случае вести теперь по четырехмерной области, то вместо интеграла (13) получим

$$(V_{ind})_{ev} = \frac{\pi}{3}\,\frac{1}{q_0^4} - \frac{4\pi}{3}\int\limits_{\frac{1}{1+q_0}}^{\frac{1}{q_0}} \left[(1-q_0^2)\xi^2+2q_0\xi-1\right]^{\frac{3}{2}}\; d\xi\,. \tag{26}$$

Вычисляя табличный интеграл для различных значений параметра q_0, находим

$$
\left(V^{Min}_{ind}\right)^{+}_{ev} = \begin{cases} \dfrac{\pi}{6}\left[\dfrac{1+2q_0^2}{q_0^2(1-q_0^2)^2} - \dfrac{3\,\ln\left(\frac{1+\sqrt{1-q_0^2}}{q_0}\right)}{(1-q_0^2)^{\frac{5}{2}}}\right], & 0<q_0<1, \\ \dfrac{\pi}{15}, & q_0=1, \\ \dfrac{\pi}{6}\left[\dfrac{1+2q_0^2}{q_0^2(q_0^2-1)^2} - \dfrac{3\,\arccos\left(\frac{1}{q_0}\right)}{(q_0^2-1)^{\frac{5}{2}}}\right], & 1<q_0\,. \end{cases} \tag{27}
$$

Итак, при изменении параметра q_0 от 0 до $+\infty$ объем индикатрисы $\left(V^{Min}_{ind}\right)^{+}_{ev}$ монотонно убывает от $+\infty$ до 0.

Нижний знак, $\mathbf{1 < q_0}$.

В касательном пространстве $\xi, \eta^1, \eta^2, \eta^3$ уравнение индикатрисы принимает вид

$$
-\sqrt{\xi^2-\eta^2} + q_0\xi = 1\,, \qquad \xi > 0\,. \tag{28}
$$

Гиперповерхность (28) является частью поверхности четырехмерного эллипсоида, причем она лишь в одной точке $\xi_2 = \frac{1}{q_0-1}$ пересекает ось ξ, касается светового конуса при $\xi = \frac{1}{q_0}$ и проецируется на ось ξ в виде отрезка:

$$
\frac{1}{q_0} \;\le\; \xi \;\le\; \frac{1}{q_0-1}\,, \tag{29}
$$

а значит объем индикатрисы определяется формулой

$$
(V_{ind})_{ev} = \frac{\pi}{3}\,\frac{1}{q_0^4} + \frac{4\pi}{3}\int\limits_{\frac{1}{q_0}}^{\frac{1}{q_0-1}} \left[-(q_0^2-1)\xi^2 + 2q_0\xi - 1\right]^{\frac{3}{2}}\, d\xi\,. \tag{30}
$$

Вычисляя табличный интеграл, получим

$$
\left(V^{Min}_{ind}\right)^{-}_{ev} = \frac{\pi}{6}\left[\frac{1+2q_0^2}{q_0^2(q_0^2-1)^2} + \frac{3\left(\pi - \arccos\left(\frac{1}{q_0}\right)\right)}{(q_0^2-1)^{\frac{5}{2}}}\right], \quad 1<q_0\,. \tag{31}
$$

Итак, при изменении параметра q_0 от 1 до $+\infty$ объем индикатрисы $\left(V^{Min}_{ind}\right)^{-}_{ev}$ монотонно убывает от $+\infty$ до 0.

Из формул (27), (31) при $1 < q_0$ получим объем четырехмерного эллипсоида, поверхность которого составлен из двух индикатрис,

$$
\left(V^{Min}_{ind}\right)^{-}_{ev} - \left(V^{Min}_{ind}\right)^{+}_{ev} = \frac{\pi^2}{2(q_0^2-1)^{\frac{5}{2}}}\,, \qquad 1<q_0\,, \tag{32}
$$

и соотношение

$$
\lim_{q_0\to+\infty} \frac{\left(V^{Min}_{ind}\right)^{-}_{ev}}{\left(V^{Min}_{ind}\right)^{+}_{ev}} \;=\; 1\,. \tag{33}
$$

4 Кривые пространства

Рассмотрим финслерово пространство $x^0, x^1, ..., x^{n-1}$ с элементом длины

$$ds = \pm\sqrt{g_{ij}(x)\,dx^i dx^j} + a_i(x)dx^i, \qquad g^{ij}(x)a_i(x)a_j(x) > 0\,, \tag{34}$$

и сигнатурой $(+,-,-,...,-)$. Последнее означает, всегда найдется такая система координат $y^0, y^1, ..., y^{n-1}$, вообще говоря, своя для каждой точки пространства, что в этой точке

$$g_{ij}(x) = diag(1,-1,-1,...,-1)\,, \tag{35}$$

а элемент длины запишется следующим образом:

$$ds = \pm\sqrt{(dy^0)^2 - (dy^1)^2 - ... - (dy^{n-1})^2} + b_i(x)dy^i\,. \tag{36}$$

Будем предполагать, что $b_0(x) > 0$. Если это не так, всегда можно изменить знак у координаты y^0, то есть $y^0 \to -y^0$. Используя группу $SO(1, n-1)$, которая сохраняет дифференциальную форму

$$(dy^0)^2 - (dy^1)^2 - ... - (dy^{n-1})^2\,, \tag{37}$$

перейдем к системе координат $z^0, z^1, ..., z^{n-1}$, в которой элемент длины приобретет вид:

$$ds = \pm\sqrt{(dz^0)^2 - (dz^1)^2 - ... - (dz^{n-1})^2} + q dz^i\,, \tag{38}$$

где $q \equiv \sqrt{g^{ij}(x)a_i(x)a_j(x)}$.

Таким образом, вычисление объема $\left(\tilde{V}_{ind}\right)^{\pm}_{ev}$ индикатрисы финслерова пространства с элементом длины (34) сводится к вычислению объема $\left(\bar{V}_{ind}\right)^{\pm}_{ev}$ индикатрисы, определяемой уравнением

$$\pm\sqrt{(\xi^0)^2 - (\eta)^2} + q\xi^0 = 1, \qquad \xi^0 > 0, \quad q > 0, \tag{39}$$

где

$$\eta = \sqrt{(\xi^1)^2 + (\xi^2)^2 + ... + (\xi^{n-1})^2}\,, \tag{40}$$

так как

$$\left(\tilde{V}_{ind}\right)^{\pm}_{ev} = \frac{1}{\sqrt{(-1)^{n-1}det(g_{ij}(x))}} \cdot \left(\bar{V}_{ind}\right)^{\pm}_{ev}\,. \tag{41}$$

Объемы индикатрис (39) были вычислены для двумерного пространства в разделе 2 и для четырехмерного пространства в разделе 3. Сформулируем полученные результаты.

I. Объем индикатрисы в центроаффинном касательном пространстве в точке $M(x^0, x^1)$ финслерова двумерного пространства с элементом длины

$$ds = \pm\sqrt{g_{ij}(x)\,dx^i dx^j} + a_i(x)dx^i, \qquad g^{ij}(x)a_i(x)a_j(x) > 0 \tag{42}$$

и сигнатурой $(+,-)$ вычисляется по формуле

$$\left(\tilde{V}_{ind}\right)^{\pm}_{ev} = \frac{1}{\sqrt{(-1)^{n-1}det(g_{ij}(x))}} \cdot \left(V^{H_2}_{ind}\right)^{\pm}_{ev}\Bigg|_{q_0=\sqrt{g^{ij}(x)a_i(x)a_j(x)}}\,, \tag{43}$$

где $\left(V^{H_2}_{ind}\right)^{\pm}_{ev}$ вычисляется по формулам (14) (19).

II. Объем индикатрисы в центроаффинном касательном пространстве в точке $M(x^0, x^1, x^2, x^3)$ финслерова четырехмерного пространства с элементом длины

$$ds = \pm\sqrt{g_{ij}(x)\,dx^i dx^j} + a_i(x)dx^i, \qquad g^{ij}(x)a_i(x)a_j(x) > 0 \tag{44}$$

и сигнатурой $(+,-,-,-)$ вычисляется по формуле

$$\left(\tilde{V}_{ind}\right)^{\pm}_{ev} = \frac{1}{\sqrt{(-1)^{n-1}det(g_{ij}(x))}}\cdot \left(V^{Min}_{ind}\right)^{\pm}_{ev}\Bigg|_{q_0=\sqrt{g^{ij}(x)a_i(x)a_j(x)}}, \tag{45}$$

где $\left(V^{Min}_{ind}\right)^{\pm}_{ev}$ вычисляется по формулам (27) (31).

Заключение

Так как через объемы индикатрис выражаются лагранжианы, с помощью которых получаются уравнения поля [1], то отношение объемов индикатрис имеет и чисто геометрических смысл как отношение "эталонных" объемов, так и физический смысл как отношение некоторых "эталонов" действия в минус первой степени. Таким образом можно сравнивать разные точки одного и того же финслерова пространства, или даже точки разных финслеровых пространств, используя отношения объемов индикатрис.

Литература

[1] Г. И. Гарасько, Теория поля и финслеровы пространства. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **2 (6)**, Т. 3 (2006), стр. 6 – 20.

[2] Г. И. Гарасько, Слабые поля. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **2 (8)**, Т. 4 (2007), стр. 3 – 12.

[3] Л. Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, Теория поля. М., "Наука", 1967.

Indicatrix volumes of some Finsler spaces of special type

G. I. Garas'ko

Research Institute of Hypercomplex Systems in Geometry and Physics, Friazino, Russia
Electrotechnical Institute of Russia, Moscow, Russia
gri9z@mail.ru

Indicatrix volumes of some Finsler spaces of special type were obtained. This allows to clarify the question about existence of finite (non-zero) volume element in the Finsler spaces with single time coordinate and in the Finsler spaces with concave indicatrix.

Key words: Finsler spaces, indicatrix.