О ВОЗМОЖНОСТИ РЕАЛИЗАЦИИ *ТРИНГЛА* В ТРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ СО СКАЛЯРНЫМ ПОЛИПРОИЗВЕДЕНИЕМ

Д. Г. Павлов

Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана
НИИ гиперкомплексных систем в геометрии и физике, Фрязино, МО
geom2004@mail.ru

Г. И. Гарасько

ГУП ВЭИ, Москва, Россия
НИИ гиперкомплексных систем в геометрии и физике, Фрязино, МО
gri9z@mail.ru

Группы изометрической симметрии и конформной симметрии играют в математике и физике исключительно важную роль, которую трудно переоценить. Первый класс симметрий связан с инвариантностью элемента длины метрического пространства, а второй класс симметрий – с инвариантностью углов. Если существует продолжение этой цепочки групп симметрий: изометрические, конформные,... – то должны существовать и объекты, которые тесно связаны с таким более общим классом групп симметрий и которые для трехмерных пространств принято называть *тринглами*, или без относительно к размерности – *инглами*, а для указания размерности m больше 3-х – m*-инглами*. В евклидовых и псевдоевклидовых пространствах реализовать объекты, которые можно было бы назвать *инглами*, невозможно в отличие от пространств размерности больше двух со скалярным полипроизведением, имеющих число векторных аргументов также более двух, где такая реализация возможна. В данной работе построен конкретный тригл с точностью до функции от одной действительной переменной и получены его связи с координатами векторов в пространстве со скалярным трипроизведением, которое (пространство) тесно связано с трехмерным пространством Бервальда-Моора и имеет все основания называться *трехмерным временем*. Тем самым строго доказано существование ранее предполагаемых объектов – *тринглов*, а значит и реальная возможность существования m*-инглов* с $m > 3$.

Ключевые слова: Финслерова геометрия, пространство Бервальда-Моора, симметрии, поличисла, тринглы.

1 Введение

Здание метрической геометрии покоится на двух базовых понятиях: длине и угле, а те, в свою очередь, органически связаны с другим фундаментальным объектом – скалярным произведением. Действительно, если над линейным пространством задана билинейная симметрическая форма от двух векторов, то в качестве длины обычно выступает величина равная корню квадратному из скалярного произведения вектора самого на себя, а в качестве угла – значение функции арккосинус из билинейной формы от двух единичных векторов. Почти очевидно, что других базовых величин в геометрии строящейся на основе билинейной симметрической формы возникнуть не может. Однако, если формализм связанный со скалярным произведением заменить на практически аналогичный, но связанный уже с полилинейной симметрической формой от нескольких векторов [1], то, по крайней мере на концептуальном уровне, появляется возможность для построения, помимо прямых обобщений длины и угла, целого ряда новых базисных величин, первую из которых для определенности договоримся называть тринглом.

Изучение геометрических объектов типа тринглов в существенной степени осложняется тем обстоятельством, что в отличие от длин и углов, ни в нашем сознании, ни в быту, ни в научных исследованиях подобные конструкции до сих пор не были востребованы. Они естественны как самостоятельные понятия лишь в пространствах, метрические формы которых уже не квадратичны, а, минимум, кубичны. Однако в науке, казалось бы, по своему замыслу призванной заниматься такими формами, то есть в финслеровой геометрии, до сих пор не расставлены точки над i даже в связи с обобщением угла [6]. Повинно же в этом понятие т. н. финслерова метрического тензора, зависящего как от точки, так и от направления в ней. С переходом же к формализму скалярного полипроизведения [1] финслеров метрический тензор из двухиндексного становится многоиндексным объектом, но, что самое главное, теряет зависимость от направлений. Именно на этом пути, как нам представляется, следует ожидать дальнейший прогресс во взглядах как на геометрию, так и на тесно связанную с последней физику.

Рассмотрение длин и углов в качестве инвариантов приводит к естественному выделению среди произвольных геометрических преобразований пространства изометрических и конформных, а те, в свою очередь, составляют основу очень многих следствий. Почти очевидно, что требование инвариантности тринглов и более сложных их обобщений также должно с необходимостью приводить к появлению неких новых выделенных классов преобразований, которые ранее в качестве объективно выделенных не рассматривались. Иными словами, речь идет о правилах выделения в некоторых пространствах дополнительных групп симметрий. Ну а факт, что непрерывные симметрии составляют один из главных фундаментов не только геометрии, но и физики уже давно не вызывает сомнений.

Рассмотрим вначале евклидово n-мерное пространство, и пусть $A_{(1)}, A_{(2)}, \ldots, A_{(n)}, B, C, \ldots$ – некоторые векторы в этом пространстве.

Если

$$(B,B)=1, \qquad (C,C)=1\,, \tag{1}$$

то

$$(A,B)=(B,A)=\cos\varphi\,, \tag{2}$$

при этом φ – именно та величина, которая сохраняется при конформных преобразованиях. Отметим, что величина φ выражается через скалярное произведение единичных векторов хотя и через элементарную, но все же не линейную или алгебраическую функцию, а через функцию арккосинус.

Останется ли в евклидовом пространстве хотя бы один непрерывный произвольный параметр при фиксации не только длин векторов, но и углов между ними? Выберем, например, такие требования:

$$\begin{gathered}(A_{(1)},A_{(1)})=1,\ (A_{(2)},A_{(2)})=1,\ \ldots,\ (A_{(n)},A_{(n)})=1,\\ (A_{(i)},A_{(j)})=0, \qquad i<j\,.\end{gathered} \tag{3}$$

То есть рассмотрим систему n ортонормированных векторов. Число произвольных параметров у n векторов в n-мерном пространстве равно n^2. Из этого числа надо вычесть число параметров группы изометрической симметрии, которая поворачивает эти векторы как целое и число параметров в которой равно $\frac{n(n-1)}{2}$, и число условий в формуле (3), которое равно $\left[n + \frac{n(n-1)}{2}\right]$. Таким образом, число оставшихся свободных параметров k равно

$$k = n^2 - \frac{n(n-1)}{2} - \left[n + \frac{n(n-1)}{2}\right] \equiv 0\,, \tag{4}$$

что означает невозможность построения непрерывной действительной величины в дополнении в n длинам векторов и $\frac{n(n-1)}{2}$ углам между n векторами.

Число параметров в группах изометрической симметрии в пространствах размерности $n > 2$ со скалярным полипроизведением [1] с числом аргументов $m > 2$ обычно меньше, чем $\frac{n(n-1)}{2}$, поэтому в таких пространствах остается возможность выделить непрерывную величину после исключения числа параметров группы изометрической симметрии и числа условий, аналогичных условиям, записанных в формуле (3). Так в пространствах со скалярным полипроизведением, связанных с невырожденными поличислами [2] размерности n, группа изометрической симметрии имеет $(n-1)$ параметр [2], поэтому для таких пространств формула (3) приобретает вид:

$$k = n^2 - (n-1) - \left[\frac{n(n-1)}{2} + n\right] = \frac{(n-1)(n-2)}{2}\,. \tag{5}$$

При $n > 2$ число k является натуральным, так если $n = 3$ (поличисла H_3), то число $k = 1$; если $n = 4$ (поличисла H_4), то число $k = 3$. Таким образом, в пространстве со скалярным трипроизведением, связанным с гиперкомплексными числами H_3, есть все основания надеяться на существование одного тринглa [3], а в пространстве со скалярным четырепроизведением, связанным с гиперкомплексными числами H_4, есть все основания надеяться на существование трех инглов.

Подчеркнем, что пространства H_3 и H_4 являются метрическими пространствами с метрикой Бервальда-Моора и имеют все основания называться *трехмерным временем* и *четырехмерным временем* соответственно [4].

Задачей настоящей работы является показать возможность существования инглов на конкретном примере, найти такой объект, выписав конкретные математические формулы, то есть неоспоримо доказать существование, хотя бы одного ингла. Для этого мы выберем простейший случай: пространство со скалярным трипроизведением, связанное с гиперкомплексными числами H_3, – где есть все основания надеяться на существование одного тринглa, и найдем этот математический объект, то есть опишем его с помощью конкретных математических формул, оставив неопределенной лишь одну функцию одной действительной переменной.

2 Пространство со скалярным трипроизведением, связанное с поличислами H_3

Пространство со скалярным трипроизведением [1], связанное с поличислами H_3, определяется как пара: трехмерное линейное пространство с элементами $A, B, C, \ldots$ и трилинейная форма (A, B, C). Форма (A, B, C) определена на любой тройке векторов линейного пространства и обладает следующими свойствами:

1. при любой подстановке аргументов форма (A, B, C) не изменяет своего значения;

2. если α и β произвольные действительные числа, то
$$(\alpha A+\beta B, C, D)=\alpha(A, C, D)+\beta(A, C, D)\,; \qquad (6)$$
3. оба первых свойства (как и ряд других свойств) вытекают из правила вычисления скалярного трипроизведения (A, B, C) [2] в специальном изотропном базисе e_1, e_2, e_3, $e_1 e_1=e_1$, $e_2 e_2=e_2$, $e_3 e_3=e_3$, $e_i e_j=0$, если $i \neq j$:
$$(A, B, C)=\frac{1}{3!}\, perm \begin{pmatrix} a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \\ c^1 & c^2 & c^3 \end{pmatrix} \equiv \frac{1}{3!} \begin{vmatrix} a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \\ c^1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}_+ . \qquad (7)$$

Требования (3) для трехмерного пространства со скалярным произведением с тремя аргументами можно записать по-разному, мы выберем наиболее симметричный способ:
$$\begin{gathered} (A, A, A)=1\,, \quad (B, B, B)=1\,, \quad (C, C, C)=1\,; \\ (A, A, B)=0\,, \quad (B, B, C)=0\,, \quad (C, C, A)=0\,. \end{gathered} \qquad (8)$$
При выполнении этих 6-ти требований и исключении преобразований системы трех векторов как целого с помощью группы изометрической симметрии, которая (группа) в данном случае является двухпараметрической, остается единственная (см. формулу (5)) непрерывная действительная величина, обозначим ее символом ψ, которую естественно связать с формой (A, B, C):
$$(A, B, C)=F(\psi), \qquad (9)$$
где F – неизвестная пока функция одного действительного аргумента ψ, тринглa. Нет оснований надеяться, что функция F окажется линейной или алгебраической, так как даже при введении понятия угла между векторами в евклидовом пространстве аналогичная функция является косинусом (2). Для того, чтобы получить конкретный вид функции $F(\psi)$, необходимо воспользоваться некими общими соображениями, например, потребовать, чтобы существовала операция (или операции) построения из нескольких трек векторов с тринглами ψ_1, ψ_2, ... , ψ_p опять тройки векторов с тринглом ψ с аддитивным законом сложения тринглов:
$$\psi=\psi_1+\psi_2+\ldots+\psi_p\,. \qquad (10)$$
В качестве такой операции в евклидовом пространстве можно взять деление угла с помощью луча, лежащего в той же плоскости, что и угол. Аналогично в рассматриваемом пространстве – добавление к тройке векторов A, B, C вектора D и составление тройки векторов A, B, C из трех троек, например: A, B, D, B, C, D, C, A, D.

Из первых трех условий (8) следует, что компоненты векторов A, B, C должны иметь вид:
$$\left.\begin{array}{lll} a^1=\varepsilon_a^1\, e^{\alpha_1}\,, & b^1=\varepsilon_b^1\, e^{\beta_1}\,, & c^1=\varepsilon_c^1\, e^{\gamma_1}\,, \\ a^2=\varepsilon_a^2\, e^{\alpha_2}\,, & b^2=\varepsilon_b^2\, e^{\beta_2}\,, & c^2=\varepsilon_c^2\, e^{\gamma_2}\,, \\ a^3=\varepsilon_a^3\, e^{-\alpha_1-\alpha_2}\,, & b^3=\varepsilon_b^3\, e^{-\beta_1-\beta_2}\,, & c^3=\varepsilon_c^3\, e^{-\gamma_1-\gamma_2}\,, \end{array}\right\} \qquad (11)$$
где $\varepsilon_a^i, \varepsilon_b^i, \varepsilon_c^i$ – знаковые множители, подчиняющиеся трем условиям:
$$\varepsilon_a^1\, \varepsilon_a^2\, \varepsilon_a^3=1\,, \qquad \varepsilon_b^1\, \varepsilon_b^2\, \varepsilon_b^3=1\,, \qquad \varepsilon_c^1\, \varepsilon_c^2\, \varepsilon_c^3=1 \qquad (12)$$

– а в остальном пока независимые. Из последних трех условий (8) имеем:

$$(A, A, B) = \frac{1}{3}\left[a^1a^2b^3 + a^1a^3b^2 + a^2a^3b^1\right] = 0\,, \tag{13}$$

или

$$\varepsilon_a^1\varepsilon_a^2\varepsilon_b^1\varepsilon_b^2 e^{\alpha_1+\alpha_2-\beta_1-\beta_2} + \varepsilon_a^2\varepsilon_b^2 e^{-\alpha_2+\beta_2} + \varepsilon_a^1\varepsilon_b^1 e^{-\alpha_1+\beta_1} = 0\,; \tag{14}$$

$$(B, B, C) = \frac{1}{3}\left[b^1b^2c^3 + b^1b^3c^2 + b^2b^3c^1\right] = 0\,, \tag{15}$$

или

$$\varepsilon_b^1\varepsilon_b^2\varepsilon_c^1\varepsilon_c^2 e^{\beta_1+\beta_2-\gamma_1-\gamma_2} + \varepsilon_b^2\varepsilon_c^2 e^{-\beta_2+\gamma_2} + \varepsilon_b^1\varepsilon_c^1 e^{-\beta_1+\gamma_1} = 0\,; \tag{16}$$

$$(C, C, A) = \frac{1}{3}\left[c^1c^2a^3 + c^1c^3a^2 + c^2c^3a^1\right] = 0\,, \tag{17}$$

или

$$\varepsilon_c^1\varepsilon_c^2\varepsilon_a^1\varepsilon_a^2 e^{\gamma_1+\gamma_2-\alpha_1-\alpha_2} + \varepsilon_c^2\varepsilon_a^2 e^{-\gamma_2+\alpha_2} + \varepsilon_c^1\varepsilon_a^1 e^{-\gamma_1+\alpha_1} = 0\,. \tag{18}$$

Из вида уравнений (14), (16), (18) следует, что при преобразованиях:

$$\alpha_i,\, \beta_i,\, \gamma_i \quad \to \quad \alpha_i + \varphi_i,\, \beta_i + \varphi_i,\, \gamma_i + \varphi_i \tag{19}$$

– которые содержат два независимых параметра φ_1, φ_2 и реализуют изометрическую группу симметрии, условия (8) не изменяются.

Введем обозначения:

$$U_1 = \varepsilon_a^1\varepsilon_b^1 e^{\alpha_1-\beta_1},\, U_2 = \varepsilon_a^2\varepsilon_b^2 e^{\alpha_2-\beta_2},\, V_1 = \varepsilon_b^1\varepsilon_c^1 e^{\beta_1-\gamma_1},\, V_2 = \varepsilon_b^2\varepsilon_c^2 e^{\beta_2-\gamma_2}, \tag{20}$$

тогда уравнения (14), (16), (18) перепишутся следующим образом:

$$U_1 + U_2 + U_1^2U_2^2 = 0,\;\; V_1 + V_2 + V_1^2V_2^2 = 0,\;\; U_1^2U_2V_1^2V_2 + U_1U_2^2V_1V_2^2 + 1 = 0. \tag{21}$$

При решении этой системы уравнений будем считать, что $U_i,\, V_i \neq 0$. С помощью первых двух уравнений (21) понизим степень третьего уравнения (21), сделав его однородным, в результате третье уравнение (21) перепишется следующим образом:

$$(U_1 + U_2)\,(V_1 + V_2)\,(U_1V_1 + U_2V_2) + U_1U_2V_1V_2 = 0\,. \tag{22}$$

Это уравнение превращается в тождество, если

$$1)\quad U_1 = -\frac{U_2(V_1 + V_2)}{V_1} \qquad \text{или} \qquad 2)\quad U_2 = -\frac{U_1(V_1 + V_2)}{V_2}\,. \tag{23}$$

В настоящей работе нас не будет интересовать вопрос о числе качественно различных решений, наша задача получить хотя бы одно решение, поэтому выберем первое соотношение (23), подставим его в первое уравнение (21) и после преобразований получим

$$U_2 = \left[\frac{V_1V_2}{(V_1 + V_2)^2}\right]^{1/3}\,. \tag{24}$$

Второе уравнение (21) является квадратным уравнением относительно V_2, если V_1 – независимый параметр, поэтому

$$V_2 = -\frac{1}{2V_1} \pm \sqrt{\frac{1}{4V_1^4} - \frac{1}{V_1}}\,. \tag{25}$$

По тем же соображениям, изложенным выше, выберем верхний знак.

Итак, одно из решений системы уравнений (21) можно записать следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} V_2 &= -\frac{1}{2V_1} + \sqrt{\frac{1}{4V_1^4} - \frac{1}{V_1}}\,, \\ U_2 &= \left[\frac{V_1 V_2}{(V_1+V_2)^2}\right]^{1/3}, \\ U_1 &= -\frac{U_2(V_1+V_2)}{V_1}\,. \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

Из первого соотношения следует, что независимый параметр V_1 при этом может изменяться лишь в пределах

$$-\infty < V_1 < 0\,, \quad 0 < V_1 \leq \frac{1}{4^{1/3}}\,, \tag{27}$$

причем особенность в точке $V_1 = 0$ для функции $V_2(V_1)$ является устранимой, так как пределы слева и справа имеют конечное значение и совпадают. Используя второе уравнение (21), решение (26) можно упростить:

$$\left.\begin{aligned} V_2 &= -\frac{1}{2V_1} + \sqrt{\frac{1}{4V_1^4} - \frac{1}{V_1}}\,, \\ U_2 &= \frac{1}{V_1 V_2}\,, \\ U_1 &= V_2\,. \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Запишем в тех же обозначениях форму (A, B, C):

$$F(\psi) \equiv (A,B,C) = \frac{1}{6}\left(a^1b^2c^3 + a^1b^3c^2 + a^2b^1c^3 + a^2b^3c^1 + a^3b^1c^2 + a^3b^2c^1\right)\,, \tag{29}$$

или с учетом полученных выше формул имеем

$$6F(\psi) = \frac{3V_1^2V_2 + V_1^3 + V_1^3V_2^3 + 1}{V_1^2V^2}\,. \tag{30}$$

Исследуем область (27) определения формул (28) более подробно.

$\mathbf{V_1} \to -\infty$:

$$\left.\begin{aligned} V_2 &\approx \frac{1}{|V_1|^{1/2}}\,, \\ U_2 &\approx -\frac{1}{|V_1|^{1/2}}\,, \\ 6F(\psi) &\approx -|V_1|^{3/2}\,. \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

$\mathbf{V_1 = -1}$:

$$\left.\begin{aligned} V_2 &= \frac{\sqrt{5}-1}{2}\,, \\ U_2 &= -\frac{2}{\sqrt{5}-1}\,, \\ 6F(\psi) &= \frac{3+\sqrt{5}}{2}\;. \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

$\mathbf{|V_1| \ll 1}$:

$$\left.\begin{aligned} V_2 &\approx -V_1\,, \\ U_2 &\approx -\frac{1}{V_1^2}\,, \\ 6F(\psi) &\approx -\frac{1}{V_1^3}\,. \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

$\mathbf{V_1 = \dfrac{1}{2^{2/3}}}$:

$$\left.\begin{aligned} V_2 &= -2^{1/3}\,, \\ U_2 &= -2^{1/3}\,, \\ 6F(\psi) &= \frac{3}{2}\,. \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

Вновь возникает вопрос о качественно различных тринглах, связанный уже с выбором области определения независимой переменной V_1 и изменением знаковых коэффициентов ε^i_d. Будем считать, что переменная V_1 изменяется в пределах:

$$V_1 \in (-\infty; 0)\,. \tag{35}$$

Тогда величины U_1 и V_2 всегда положительны, обращаются в нуль при $V_1 \to -0, -\infty$ и имеют максимум при $V_1 = -1,260$; величины U_2 всегда отрицательна и монотонно убывает от 0 до $-\infty$ при изменении переменной V_1 от $-\infty$ до 0; Величина $F(\psi)$ при изменении переменной V_1 от $-\infty$ до 0 монотонно возрастает от $-\infty$ до $+\infty$, обращаясь в нуль при $V_1 = -1,756$.

Нам не удалось получить обратную аналитическую формулу $V_1(F)$, но можно получить приближенную аналитическую зависимость $V_1(F)$, предварительно получив приближенную зависимость $F(V_1)$. Из выше приведенных формул следует, что в области (35) имеет место следующая приближенная формула:

$$6F(\psi) \simeq \frac{1}{|V_1|^3} - |V_1|^{3/2} + C_0\,, \qquad C_0 \simeq 2,142\,. \tag{36}$$

Введем обозначение

$$x = \frac{1}{|V_1|^{3/2}} \tag{37}$$

и получим для определения x кубическое уравнение

$$x^3 - (6F - C_0)x - 1 = 0\,. \tag{38}$$

Итак, если использовать корень кубического уравнения (38), можно получить приближенную аналитическую зависимость $V_1(F)$. Проблема состоит в том, что функция $F(\psi)$ не известна, поэтому не известна и функция $V_1(\psi)$.

Предположим, что численное значение трингла ψ известно и известна функциональная зависимость $V_1(\psi)$, тогда известна и величина V_1. По формулам (28) однозначно получаются значения величин U_1, U_2, V_2, но получить при этом однозначно компоненты векторов A, B, C невозможно, так как формулы (20) инвариантны относительно группы изометрических преобразований. Чтобы исключить этот произвол. будем считать, что

$$A = (1, 1, 1)\,, \tag{39}$$

тогда

$$B = \left(\frac{1}{U_1}, \frac{1}{U_2}, U_1U_2\right)\,, \qquad C = \left(\frac{1}{U_1V_1}, \frac{1}{U_2V_2}, U_1U_2V_1V_2\right)\,. \tag{40}$$

Заключение

В данной работе доказано. что в трехмерном пространстве с полиформой, соответствующей поличислам H_3, существует геометрический объект *трингл*, и найдено его численное выражение с точностью до функции одной действительной переменной.

Кроме задач построения инглов для пространств размерности четыре и более, для трехмерного рассматриваемого пространства остались нерешенными три задачи:

1. из общих соображений необходимо построить конкретную функцию $F(\psi)$;
2. провести классификацию всех качественно различных тринглов и выяснить, каким алгебраическим объектом является множество переходов между ними;
3. найти группу преобразований, которые сохраняют тринглы, но не сохраняют норму векторов и углы между векторами.

Литература

[1] Д. Г. Павлов: Обобщение аксиом скалярного произведения, Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **1 (1)** (2004), 5–19.

[2] Д. Г. Павлов, Г. И. Гарасько: Геометрия невырожденных поличисел, Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **1 (7)**, том 4 (2005), 3–25.

[3] Д. Г. Павлов: Симметрии и геометрические инварианты. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **2 (6)**, том 3, 2006, 21–32

[4] Д. Г. Павлов: Хронометрия трёхмерного времени, Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **1 (1)** (2004), 20–32.

[5] Д. Г. Павлов: Четырёхмерное время, Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **1 (1)** (2004), 33–42.

[6] Х. Рунд, Дифференциальная геометрия финслеровых пространств. М., Наука, 1981.

On the possibility of the realization of a tringle in a 3D space with a scalar product

D. G. Pavlov[1,2], G. I. Garas'ko[1,3]

(1) – Research Institute of Hypercomplex Systems in Geometry and Physics, Friazino, Russia
(2) – Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia
(3) – Electrotechnical Institute of Russia, Moscow, Russia
geom2004@mail.ru, gri9z@mail.ru

The isometric and conform symmetry groups are of exceptional importance in mathematics and physics that can scarcely be overestimated. The former class of symmetry relates to the invariant of the element of length of the metric space, but the latter class of symmetry relates to the angle invariant. If there exists a continuation of this chain of the symmetry groups, isometric, conform... etc, then there should exist objects tightly connected with this more generic class of symmetry group, which are common to call as tringles or, without any relation to the dimension, as ingles, and, to show the dimension m exceeding 3 – as m-ingles. It is not possible to have ingles in the Euclidian or pseudo- Euclidian spaces, but, in contrast, it is possible to have ingles in the space with the dimension exceeding 2 and having scalar polyproducts, with the number of the vector arguments also above 2. In the present work, we build a real tringle accurate within a function of one real variable, and we derived its relation to the coordinates of the vectors in the space with a scalar triproduct, where the space is tightly connected with the Bervald-Moor 3D space, which is justified to be called as 3D-time. So, the existence of the tringles, which have been supposed to exist, is rigorously proven that implies a real possibility for m-ingles, with $m > 3$, to exist.

Key words: Finsler geometry, Berwald-Moor space, symmetry, tringles, polynumbers.