МЕТРИЧЕСКИЕ БИНГЛЫ И ТРИНГЛЫ В $\mathcal{H}_3$

Д. Г. Павлов, С. С. Кокарев

НИИ гиперкомплексных систем в геометрии и физике, Фрязино, МО,
РНОЦ "Логос" Ярославль
logos-center@mail.ru

В 3-мерном пространстве Бервальда-Моора конструируются бинглы и тринглы как аддитивные характеристики двоек и троек единичных векторов – длины и площади на единичной сфере (индикатрисе). Построены два вида бинглов (взаимные и относительные) по аналогии со сферическими углами θ и φ соответственно. Показано, что взаимные бинглы являются нормами в пространстве экспоненциальных углов (би-пространстве $\mathcal{H}_3^\flat$), которые определяют экспоненциально представление поличисел. Оказывается, что метрика в этом пространстве совпадает с метрикой Бервальда-Моора исходного пространства. Относительные бинглы связаны с элементами второго би-пространства (углы в пространстве углов) $(\mathcal{H}_3^\flat)^\flat$ и позволяют записать дважды экспоненциальное представление поличисел. Явные формулы для относительных бинглов и тринглов содержат интегралы, не выражающиеся через элементарные функции.

Ключевые слова: индикатриса, экстремаль, полиугол, бингл, трингл, метрика Бервальда-Моора, би-проекция, форма площади.

1 Введение

Определение и изучение полиуглов является одним из важных элементов программы исследований коммутативно-ассоциативных алгебр (поличисел) и тесно связанных с ними пространств $\mathcal{H}_n$ с метрикой Бервальда-Моора (БМ):

$$^{(n)}G = \hat{\mathcal{S}}(dX_1 \otimes \cdots \otimes dX_n), \tag{1}$$

где $\hat{\mathcal{S}}$ – оператор симметризации (без числового множителя). Говоря коротко и неформально, полиуглы – это финслеровы обобщения обычных евклидовых или псевдоевклидовых углов, которые характеризуют взаимное расположение пар, троек и т.д. векторов независимо от абсолютных величин этих векторов и их расположения в пространстве как целого. В программных работах [1, 2] были сформулированы общие соображения, выделяющие несколько направлений, которые потенциально могли бы привести к решению задачи о полиуглах. Одна из попыток [3], целиком основанная на соображениях аддитивности и конформной инвариантности, привела к бесконечному множеству вариантов "полиуглов" , что в целом порождает больше вопросов (первый из них – на каком варианте остановиться?), чем ответов. Между тем, опыт подобного рода обобщений показывает, что *правильно найденный руководящий принцип или система принципов для построения того или иного обобщения приводят к искомым обобщениям в определенном смысле однозначно.*

В настоящей статье мы собираемся использовать принцип аддитивности способом, отличным от принятого в работе [3]. Вместо решения функционально-дифференциальных уравнений в пространстве базисных конформных инвариантов геометрии БМ, *мы с самого начала связываем все типы полиуглов с аддитивными по своему определению величинами, типа длин, площадей или объемов, вычисляемых на единичной сфере геометрии БМ (индикатрисе).* Идея подобного рода высказывалась ранее в своих общих чертах в работе [1]. При этом выбранный нами подход реализует принцип деформации евклидовой геометрии, сформулированный в [5], суть которого заключается в переносе формулировок геометрических понятий и соотношений, сформулированных в терминах евклидовой метрики, в неевклидовы пространства.

Правильность и адекватность выбранного пути поставленной задаче на наш взгляд с избытком подтверждаются всеми теми результатами, к которым мы приходим в настоящей статье:

1. Выбранный подход позволяет получить явные выражения для полиуглов всех типов в любом $\mathcal{H}_n$.
2. Все полиуглы оказываются по определению аддитивными и конформно-инвариантными.
3. Все полиуглы выражаются через систему метрических инвариантов геометрии БМ.
4. Наши определения в принципе позволяют исследовать полную группу симметрии полиуглов, которая оказывается шире изометрий и постоянных дилатаций и, вообще говоря, выходит за рамки конформно-аналитических преобразований пространств $\mathcal{H}_n$.
5. Все полиуглы оказываются однозначно связанными с системой углов экспоненциального представления поличисел.
6. Анализ явных выражений для полиуглов обнаруживает красивый факт их *двойственности* с длинами в геометрии БМ.

В настоящей статье мы проводим все явные вычисления для первой неквадратичной геометрии БМ в семействе пространств $\mathcal{H}_n$, – геометрии $\mathcal{H}_3$, но большая часть результатов без труда обобщается на произвольные $\mathcal{H}_n$.

2 Основные свойства алгебры и геометрии P_3

Для удобства чтения в настоящем разделе мы приводим сводку сведений по алгебре и геометрии поличисел P_3. Большая часть из этих свойств тривиальным образом рапространяется на общие поличисла P_n.

Ассоциативно-коммутативная алгебра P_3 над полем R (алгебра 3-чисел) обобщает хорошо известную алгебру двойных чисел на плоскости. Ее общий элемент имеет вид:

$$A = A_1e_1 + A_2e_2 + A_3e_3, \tag{2}$$

где $\{e_i\}$ – специальный набор образующих алгебры, удовлетворяющих соотношениям:

$$e_ie_j = \delta_{ij}e_i \quad \text{(нет суммирования!)}. \tag{3}$$

Из соотношений (3) следуют простые правила умножения и деления поличисел:

$$AB = A_1B_1e_1 + A_2B_2e_2 + A_3B_3e_3; \quad A/B = (A_1/B_1)e_1 + (A_2B_2)e_2 + (A_3/B_3)e_3,$$

при этом деление определено только на т. н. невырожденные элементы, у которых все $B_i \neq 0$. Роль единицы алгебры P_3 играет элемент $I = e_1 + e_2 + e_3$.

Определим в P_3 две операции комплексного сопряжения:

$$A^\dagger = (A_1e_1+A_2e_2+A_3e_3)^\dagger \equiv A_3e_1+A_1e_2+A_2e_3;\ A^\ddagger = (A_1e_1+A_2e_2+A_3e_3)^\ddagger \equiv A_2e_1+A_3e_2+A_1e_3$$

и рассмотрим 3-число $AA^\dagger A^\ddagger$. Простое вычисление показывает, что оно вещественно и равно $A_1A_2A_3I$. Таким образом, по аналогии с модулем комплексного числа, в P_3 можно ввести (квази)норму по формуле:

$$|A| \equiv (AA^\dagger A^\ddagger)^{1/3} = (A_1A_2A_3)^{1/3}. \tag{4}$$

Для невырожденных 3-чисел эта норма имеет все свойства обычной нормы, в частности, для таких 3-чисел имеет место равенство:

$$|AB| = |A||B|. \tag{5}$$

В отличие от поля комплексных чисел и тела кватернионов, алгебра P_3 имеет делители нуля, т. е. не равные нулю элементы N, удовлетворяющие условию: $|NA| = 0$ для всякого $A \in P_3$. Такие элементы называются *вырожденными* (будем обозначать их далее P_3°) и характеризуются тем, что в их представлении (2) имеются нулевые коэффициенты. Отметим, что вырожденные элементы образуют идеалы в P_3.

С операцией умножения на невырожденные элементы в P_3 связана группа внутренних автоморфизмов $\mathrm{Aut}(P_3)$, которая изоморфна подалгебре (по умножению) невырожденных элементов:

$$\mathrm{Aut}(P_3) \sim P_3 \setminus P_3^\circ, \quad \mathrm{Aut}(P_3) \ni \sigma : \; A \to \sigma(A) \equiv \sigma A. \tag{6}$$

В этой группе выделяется подгруппа изометрий $\mathcal{I}P_3 \subset P_3$, элементы которой сохраняют норму. Ввиду определения (6) и свойства (5), элементы этой подгруппы выделяются условием: $|\sigma| = 1$ или в компонентах: $\sigma_1\sigma_2\sigma_3 = 1$. Группа $\mathcal{I}P_3$ – 2-параметрическая абелева.

В пространстве P_3 (и любом P_n) можно определять степени элементов любого порядка и аналитические функции поличисловой переменной. Например, функцию e^A можно определить стандартным рядом для экспоненты:

$$e^A \equiv I + A + \frac{A^2}{2!} + \cdots = e^{A_1}e_1 + e^{A_2}e_2 + e^{A_3}e_3. \tag{7}$$

Определим теперь экспоненциальное представление полачисла по формуле:

$$A = |A|e^B, \tag{8}$$

где B – некоторое 3-число, инвариантное относительно действия группы $\mathcal{I}P_3$, сохраняющей норму $|A|$. Компоненты этого числа в некотором специальном базисе называются *экспоненциальными углами*. Независимых экспоненциальных углов будет два, поскольку, как мы увидим ниже, пространство чисел B для числа A с фиксированной нормой $|A|$ будет 2-мерным. Для выяснения явного вида экспоненциальных углов, выполним следующую цепочку тождественных преобразований[1]:

$$A = A_1e_1 + A_2e_2 + A_3e_3 = (A_1A_2A_3)^{1/3}\left(\frac{A_1^{2/3}}{(A_2A_3)^{1/3}}e_1 + \frac{A_2^{2/3}}{(A_1A_3)^{1/3}}e_2 + \frac{A_3^{2/3}}{(A_1A_2)^{1/3}}e_3\right) =$$

$$|A|(e^{\ln(A_1^{2/3}/(A_2A_3)^{1/3})}e_1 + e^{\ln(A_2^{2/3}/(A_1A_3)^{1/3})}e_2 + e^{\ln(A_3^{2/3}/(A_1A_2)^{1/3})}e_3) =$$

$$|A|(e^{\chi_1}e_1 + e^{\chi_2}e_2 + e^{\chi_3}e_3) = |A|e^{\chi_1e_1+\chi_2e_2+\chi_3e_3}, \tag{9}$$

где величины

$$\chi_1 \equiv \ln\left[\frac{A_1^{2/3}}{(A_2A_3)^{1/3}}\right]; \; \chi_2 \equiv \ln\left[\frac{A_2^{2/3}}{(A_1A_3)^{1/3}}\right]; \; \chi_3 \equiv \ln\left[\frac{A_3^{2/3}}{(A_1A_2)^{1/3}}\right] \tag{10}$$

[1] Мы предполагаем, что все $A_i > 0$. Рассмотрение в других октантах вполне аналогично, если в определении экспоненциальных углов учитывать тип октанта и рассматривать экспоненту не от A, а от $A/I_{(j)}$, где $I_{(j)}$ $(j = 1, \ldots, 8)$ – единичный вектор в направлении пространственной биссектриссы (в евклидовом смысле) соответствующего координатного октанта. Такое рассмотрение более адекватно передает смысл углов, как величин, отсчитываемых от соответствующих направлений $I_{(j)}$. Отметим, что в наших обозначениях мы принимаем $I_1 \equiv I$.

и есть искомые экспоненциальные углы. Ввиду соотношения:

$$\chi_1+\chi_2+\chi_3=0, \tag{11}$$

которое в силу формул (10) выполняются тождественно, независимых углов будет только два и представление (9) можно переписать в следующих эквивалентных формах:

$$A=|A|e^{-\chi_2E_3+\chi_3E_2}=|A|e^{\chi_1E_3-\chi_3E_1}=|A|e^{-\chi_1E_2+\chi_2E_1},$$

где $E_1=e_2-e_3$, $E_2=e_3-e_1$, $E_3=e_1-e_2$ – комбинации базисных векторов, являющиеся генераторами группы $\mathcal{D}_2$.

Операции комплексного сопряжения действуют на экспоненциальные углы следующим образом:

$$\dagger:\quad \chi_1\to\chi_3;\ \chi_2\to\chi_1;\ \chi_3\to\chi_2;\qquad \ddagger:\ \chi_1\to\chi_2;\ \chi_2\to\chi_3;\ \chi_3\to\chi_1$$

и обеспечивают справедливость формулы (4) в экспоненциальном представлении.

С помощью операций † и ‡ можно определить вещественное число (A,B,C), называемое *скалярным 3-произведением элементов* A,B,C, которое строится на любых трех векторах в P_3 по правилу:

$$^{(3)}G(A,B,C)\equiv(A,B,C)\equiv\sum_{X,Y,Z=S(ABC)}XY^\dagger Z^\ddagger=\mathrm{perm}\begin{pmatrix}A_1&A_2&A_3\\B_1&B_2&B_3\\C_1&C_2&C_3\end{pmatrix}, \tag{12}$$

где $S(ABC)$ – множество перестановок элементов A,B,C, а $\mathrm{perm}\,(M)$ – перманент матрицы M, который повторяет структуру ее детерминанта, но все 6 слагаемых в нем берутся со знаком "плюс".

Если теперь абстрагироваться от алгебры и с самого начала рассматривать векторное пространство с 3-скалярным произведением, которое в специальном базисе имеет вид (12), мы приходим к *финслеровому 3-мерному пространству Бервальда-Моора,* которое будем обозначать $\mathcal{H}_3$. В отличие от P_3, в нем не предполагается существования какой-либо мультипликативной алгебры. Можно сказать, что отношение между P_3 и $\mathcal{H}_3$ аналогично отношению между комплексной плоскостью C и евклидовой плоскостью R^2.

Векторы $\mathcal{H}_3$, имеющие нулевую норму, называются в геометрии БМ *изотропными.* Как видно из определения (4), всякий изотропный вектор лежит в какой-либо из 3-х координатных плоскостей изотропной системы координат. В частности, векторы $e_1=\{1,0,0\}$, $e_2=\{0,1,0\}$, $e_3=\{0,0,1\}$ изотропного базиса этой системы являются изотропными. Таким образом, все координатное пространство $\mathcal{H}_3$ разбивается координатными плоскостями на 8 октантов, внутри которых нормы векторов отличны от нуля и имеют определенные знаки (рис. 1).

На координатных плоскостях метрика (12) становится геометрически вырожденной, поскольку все векторы на них имеют нулевую норму. Для правильного описания геометрических свойств координатных плоскостей (это – 2-мерные псевдоевклидовы пространства) можно использовать конструкцию соприкосновения [4]. Ее суть заключается в переходе от финслеровой метрики $^{(3)}G$ вида (1) к соприкасающейся с ней вдоль вектора e_j квадратичной метрике:

$$^{(2)}G_{(j)}\equiv{}^{(3)}G(e_j,\ ,\ ),$$

действующей в гиперплоскости направлений $x^j=\mathrm{const}$. Например, для случая $j=3$ будем иметь:

$$^{(2)}G_{(3)}\equiv{}^{(3)}G(e_3,\ ,\ )=dX_1\otimes dX_2+dX_2\otimes dX_1$$

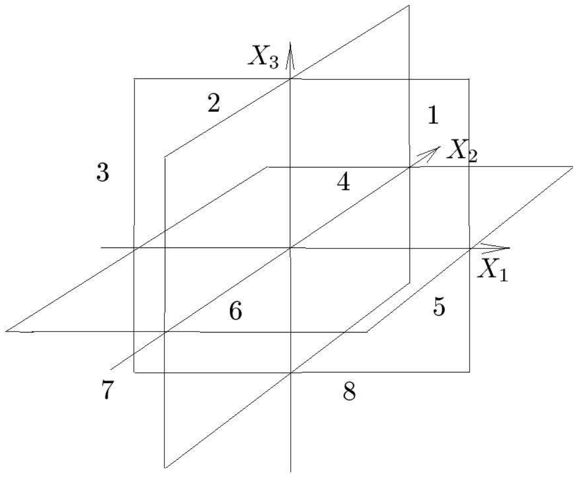


Рис. 1: *Изотропные координатные плоскости и октанты в $\mathcal{H}_3$*

– метрику Бервальда-Моора на плоскостях $X_3 = \text{const}$, которая является 2-мерной метрикой Минковского.

Метрические свойства пространства $\mathcal{H}_3$ наглядно иллюстрируются видом единичной сферы $\mathcal{S}^2_{\text{BM}}$ (индикатрисы $\mathcal{H}_3$), которая определяется уравнением:

$$\|X\| = |(X_1 X_2 X_3)^{1/3}| = 1, \tag{13}$$

где $X = \{X_1, X_2, X_3\}$ – радиус-вектор в $\mathcal{H}_3$. Поверхность $\mathcal{S}^2_{\text{BM}}$ – 8-связная и некомпактная. Ее компоненты связности расположены симметрично во всех 8 октантах и обладают дискретной симметрией относительно любых перестановок координат. Сечения этой поверхности плоскостями $X_i = \text{const}$ – это семейство гипербол (понимаемых в евклидовом смысле). Наглядно одна из компонент индикатрисы в евклидовом представлении изображена на рис. 2

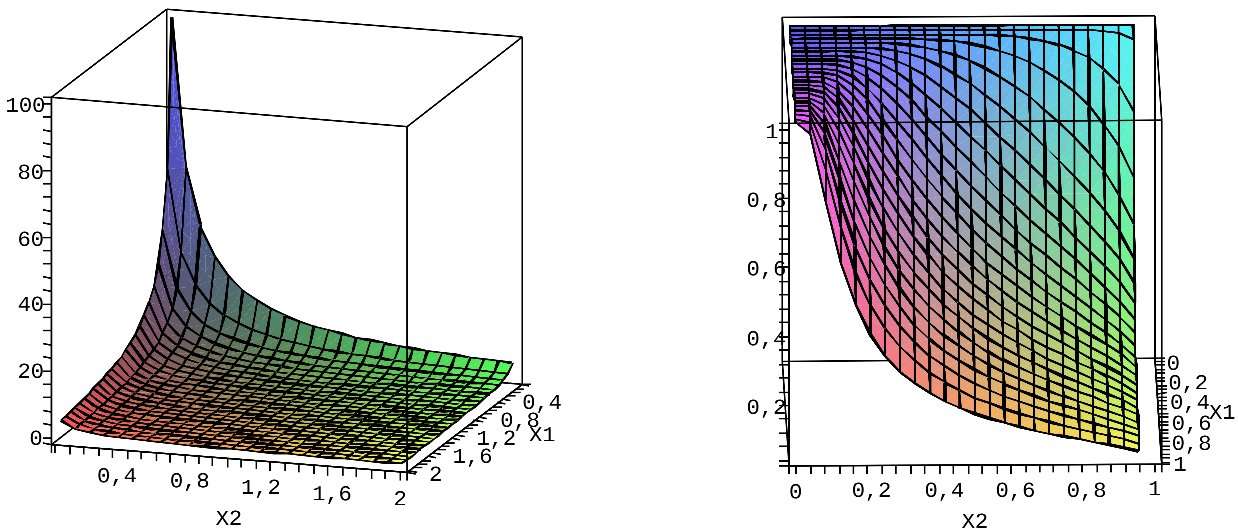


Рис. 2. Компонента индикатрисы $\mathcal{S}^2_{BM}$, лежащая в первом октанте. На правом рисунке эта компонента компактифицирована в единичный куб с помощью отображения $X_i \mapsto \tanh(X_i \ln 3/2)$. Коэффициент в аргументе гиперболического тангенса подобран так, чтобы точка $\{1, 1, 1\}$ переходила в точку $\{1/2, 1/2, 1/2\}$ единичного куба.

Группа изометрий $\mathcal{IH}_3$ метрики (12) состоит из 3-параметрической абелевой подгруппы трансляций $\mathcal{T}_3$ с элементами T_A : $X \to X + A$ и 2-параметрической абелевой подгруппы унимодулярно-согласованных дилатаций $\mathcal{D}_2$ с элементами $D_{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3}$: $\{X_1, X_2, X_3\} \to \{\sigma_1 X_1, \sigma_2 X_2, \sigma_3 X_3\}$ и соотношением:

$$\sigma_1\sigma_2\sigma_3 = 1. \tag{14}$$

С алгебраической точки зрения на $\mathcal{H}_3$ группа $\mathcal{D}_2$ есть ничто иное, как описанная выше группа $\mathcal{I}P_3$ умножений на элементы с единичной нормой. Отметим, что группа $\mathcal{IH}_3$ – неабелева и имеет структуру полупрямого произведения: $\mathcal{IH}_3 = \mathcal{T}_3 \rtimes \mathcal{D}_2$. Группа $\mathcal{D}_2$ играет роль вращений в пространстве $\mathcal{H}_3$ и обобщает гиперболические вращения псевдоевклидовой плоскости. В частности, действие группы $\mathcal{D}_2$ на индикатрисе транзитивно: $\mathcal{S}^2_{\mathrm{BM}} \overset{\mathcal{D}_2}{\to} \mathcal{S}^2_{\mathrm{BM}}$.

3 Об одном определении углов в евклидовом пространстве

Напомним, что одно из эквивалентных определений угла в евклидовом пространстве связано с длиной дуги на единичной окружности. Действительно, из метрического определения угла $\varphi[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}]$ между векторами на евклидовой плоскости со скалярным произведением (,):

$$\varphi[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}] \equiv \arccos\frac{(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})}{|\vec{a}||\vec{b}|}, \qquad |\overrightarrow{a}| = \sqrt{(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{a})} \tag{15}$$

следует, что $\varphi[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}] = \varphi[\overrightarrow{n}_a, \overrightarrow{n}_b]$, где $\overrightarrow{n}_a, \overrightarrow{n}_b$ – единичные направляющие векторы для векторов $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ соответственно. Применяя это определение для вычисления длины $L_S[\overrightarrow{n}_a, \overrightarrow{n}_b]$ дуги единичной окружности S, заключенной между концами векторов $\overrightarrow{n}_a$ и $\overrightarrow{n}_b$, получаем:

$$L_S[\overrightarrow{n}_a, \overrightarrow{n}_b] = \varphi_b - \varphi_a = \varphi[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}] \tag{16}$$

где φ_a и φ_b – угловые координаты концов векторов $\overrightarrow{n}_a$ и $\overrightarrow{n}_b$, отсчитываемые от некоторого фиксированного направления. При этом аддитивность угла автоматически обеспечивается аддитивностью длины кривой (что, в свою очередь, связано с аддитивностью интеграла), а его конформная инвариантность, по существу, обеспечивается рассмотрением на единичной окружности. Можно обратить рассуждение и положить конструкцию на единичной окружности в основу определения угла. При этом мы приходим к определению (15) как следствию определения на единичной окружности. Именно такой способ изложения принят в элементарной геометрии.

Для пары векторов в евклидовом пространстве (любого числа измерений) конструкция без труда переносится на евклидову единичную сферу. При этом плоскость векторов пересекается со этой сферой по окружности единичного радиуса и угол снова можно определять по формулам аналогичным (16). По самому построению угол обладает свойством аддитивности:

$$\varphi[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}] = \varphi[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}] + \varphi[\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}] \tag{17}$$

для всякой тройки ненулевых векторов, удовлетворяющих условию компланарности:

$$\frac{a_1b_2 - a_2b_1}{a_1c_2 - a_2c_1} = \frac{a_1b_3 - a_3b_1}{a_1c_3 - a_3c_1} = \frac{a_2b_3 - a_3b_2}{a_2c_3 - a_3c_2} \tag{18}$$

или в более компактной форме, которая не зависит от размерности:

$$\vec{a} \wedge \vec{b} \wedge \vec{c} = 0, \tag{19}$$

где $\wedge$ – стандартная операция внешнего умножения.

Принципиальным для нашего дальнейшего рассмотрения фактом является то (геометрически неслучайное!) обстоятельство, что *окружности, высекаемые на сфере плоскостями, проходящими через ее центр, являются экстремалями длины на сфере как на многообразии с метрикой, индуцированной евклидовой метрикой объемлющего пространства.* Оказывается, метрический аналог именно этого обстоятельства и можно положить в основу общего определения углов в $\mathcal{H}_n$.

4 Определение угла в $\mathcal{H}_3$

Рассмотрим пару неизотропных векторов $A, B \in \mathcal{H}_3$, между которыми мы собираемся определить угол (бингл). Пусть сначала для определенности оба вектора лежат в одном и том же (например, первом) координатном октанте. Перейдем от векторов A, B к их единичным направляющим векторам: $a = A/|A|$ и $b = B/|B|$ соответственно. Их концы отмечают некоторые точки индикатрисы $\mathcal{S}^2_{\mathrm{BM}}$, координаты которых можно представить в виде:

$$a = \{a_1, a_2, (a_1 a_2)^{-1}\}; \qquad b = (b_1, b_2, (b_1 b_2)^{-1}).$$

Используя свободу изометрий группы $\mathcal{D}_2$, систему координат можно приспособить к этой паре таким образом, чтобы один из векторов – пусть для определенности это будет вектор a – стал ориентированным вдоль пространственной биссектрисы первого координатного октанта. Координаты пары векторов a и b станут при этом равными $\{1, 1, 1\}$ и $\{b_1/a_1, b_2/a_2, a_1 a_2/(b_1 b_2)\}$ соответственно. Будем называть такой выбор системы координат среди класса всех изотропных систем *каноническим по отношению к паре векторов A и B.* Каноническая система изотропных координат в принципиальном плане ничем не выделена по сравнению с другими изотропными системами, но некоторая часть вычислений производится в ней несколько проще.

Определим бингл $\phi[A, B]$ между векторами A и B формулой:

$$\phi[A, B] \equiv L_{\mathcal{S}^2_{\mathrm{BM}}}[a, b], \tag{20}$$

где правая часть по аналогии с формулой (16) квадратичного случая определяет длину экстремали на индикатрисе $\mathcal{S}^2_{\mathrm{BM}}$, вычисленную между концами векторов a и b. В отличие от евклидова случая, в геометрии $\mathcal{H}_3$ сечения $\mathcal{S}^2_{\mathrm{BM}}$ плоскостями (аффинными) вообще говоря не будут экстремальными кривыми на этой поверхности. Прежде чем перейти к отысканию экстремалей на $\mathcal{S}^2_{\mathrm{BM}}$, произведем небольшой подсчет оставшихся степеней свободы у пары исходных векторов A и B. Из шести начальных степеней свободы (шесть координат векторов) мы должны вычесть две степени свободы, связанных с двумя условиями нормировки, и две степени свободы, устраняемые за счет выбора канонической системы координат. В результате остается две степени свободы, что, в принципе, дает *возможность определения двух типов независимых бинглов.* Таким образом, *у пары векторов в $\mathcal{H}_3$ имеется 4 собственных характеристики этой пары – две нормы и два угла.* Очевидно, что отличие от ситуации в 3-мерном евклидовом или псевдоевклидовом пространствах (две нормы и один угол) связано с 2-мерностью группы гиперболических вращений в $\mathcal{H}_3$ (в упоминаемых квадратичных 3-мерных пространствах группа вращений 3-мерна). Наши рассуждения согласуются с установленным выше фактом о независимости двух из трех экспоненциальных углов. Связь экспоненциальных углов с метрическими бинглами мы установим далее. Аналогичный подсчет для тройки векторов приводит к выводу о наличии 4 угловых характеристик: трех попарных бинглов и четвертой характеристики, которую можно связать с *тринглом* – конформно-инвариантной аддитивной характеристикой взаимного расположения тройки векторов.

5 Экстремали $\mathcal{S}^2_{\text{ВМ}}$ и их свойства

Выражая из уравнения (13) одну из координат через две других (например X_3 через X_1 и X_2: $X_3 = (X_1X_2)^{-1}$) и представляя координатную 1-форму dX_3 в виде:

$$dX_3 = d(X_1X_2)^{-1} = -\frac{dX_1}{X_1^2X_2} - \frac{dX_2}{X_1X_2^2},$$

приходим к внутренней метрике на $\mathcal{S}^2_{\text{ВМ}}$:

$$\mathcal{G} \equiv {}^{(3)}G|_{\mathcal{S}^2_{\text{ВМ}}} = -\frac{2}{X_1^2X_2}(dX_1 \otimes dX_1 \otimes dX_2 + dX_1 \otimes dX_2 \otimes dX_1 + dX_2 \otimes dX_1 \otimes dX_1) \quad (21)$$

$$-\frac{2}{X_2^2X_1}(dX_2 \otimes dX_2 \otimes dX_1 + dX_2 \otimes dX_1 \otimes dX_2 + dX_1 \otimes dX_2 \otimes dX_2).$$

Таким образом, координатная плоскость $\{X_1, X_2\}$ с выколотыми осями выступает как координатная карта многообразия $\mathcal{S}^2_{\text{ВМ}}$ в целом (четыре различных ее квадранта для восьми различных компонент поверхности $\mathcal{S}^2_{\text{ВМ}}$). Вводя параметризованные кривые Γ: $\{X_1 = X_1(\tau),\ X_2 = X_2(\tau)\}$ можно составить функционал длины для этих кривых[2]:

$$\text{length}[\Gamma] = \int\limits_\Gamma ds = \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} |\dot X|_{\mathcal{G}}\, d\tau = \frac{1}{3}\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} \mathcal{G}(\dot X, \dot X, \dot X)^{1/3}\, d\tau = \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} \left[\frac{\dot X_1^2 \dot X_2}{X_1^2X_2} + \frac{\dot X_2^2 \dot X_1}{X_2^2X_1}\right]^{1/3} d\tau. \quad (22)$$

При выборе в качестве параметра τ длины дуги s кривой (натуральная параметризация) стандартная процедура варьирования этого функционала с закрепленными начальной и конечной точками приводит к следующей системе уравнений на экстремальные кривые поверхности $\mathcal{S}^2_{\text{ВМ}}$:

$$\frac{dW_1}{ds} + \frac{d\ln X_1}{ds}W_1 = 0; \qquad \frac{dW_2}{ds} + \frac{d\ln X_2}{ds}W_2 = 0, \quad (23)$$

где

$$W_1 = \frac{2\dot X_1\dot X_2}{X_1^2X_2} + \frac{\dot X_2^2}{X_2^2X_1}; \qquad W_2 = \frac{2\dot X_1\dot X_2}{X_2^2X_1} + \frac{\dot X_1^2}{X_1^2X_2}. \quad (24)$$

Полученные уравнения (23) легко интегрируются: $W_i = C_i/X_i$ $i = 1, 2$, где C_i – константы интегрирования, откуда, с учетом (24), приходим к системе уравнений первого порядка:

$$\frac{2\dot X_1\dot X_2}{X_1X_2} + \frac{\dot X_2^2}{X_2^2} = C_1; \qquad \frac{2\dot X_1\dot X_2}{X_1X_2} + \frac{\dot X_1^2}{X_1^2} = C_2.$$

Вводя новую переменную $U_i = d\ln X_i/ds$, полученную систему можно свести к чисто алгебраической:

$$2U_1U_2 + U_2^2 = C_1; \qquad 2U_1U_2 + U_1^2 = C_2.$$

Пусть $U_1 = C_1' = \text{const}$, $U_2 = C_2' = \text{const}$ – ее решение, тогда возвращаясь к переменным X_1 и X_2 получаем общее представление для экстремалей на $\mathcal{S}^2_{\text{ВМ}}$ в виде:

$$X_1 = A_1e^{q_1s}; \qquad X_2 = A_2e^{q_2s}. \quad (25)$$

[2] Мы опускаем несущественный для дальнейшего числовой множитель перед интегралом.

Константы A_i, q_i находятся путем задания начальных и (или) конечных условий для экстремали. При этом компоненты вектора скорости $\dot{X}$ в силу натуральности параметризации должны удовлетворять условию $|\dot{X}|_{\mathcal{G}} = 1$, что с учетом вида ds в (22), приводит к дополнительному ограничению:

$$q_1 q_2 (q_1 + q_2) = 1. \tag{26}$$

Зависимость (26) представлена на рис. 3

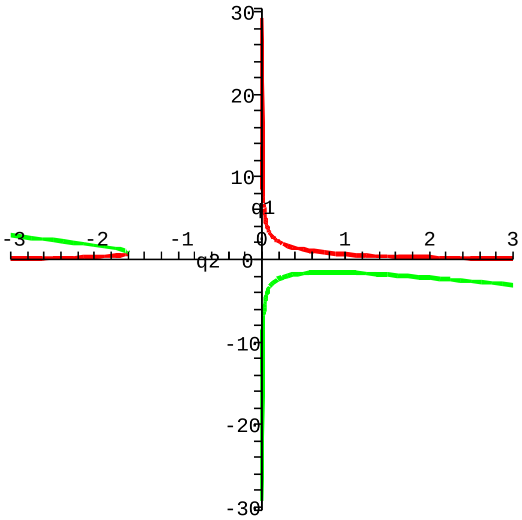


Рис. 3. Зависимость (26) на плоскости (q_1, q_2). Зависимость содержит три ветви: ветвь (1–2) при $q_1 q_2 > 0$, ветвь (1–3) при $q_1 > 0$, $q_2 < 0$ и ветвь (2–3) при $q_1 < 0$, $q_2 > 0$. Каждая из этих трех ветвей описывает пучки экстремалей, пересекающих соответствующую пару из шести компонент единичной окружности на $\mathcal{S}^2_{\text{BM}}$ (см. рис. 4 и 5).

Проекции экстремалей $\mathcal{S}^2_{\text{BM}}$ на координатную плоскость $\{X_1, X_2\}$ – степенные кривые вида: $X_2 = (A_2/A_1^{1/B_1}) X_1^{B_2/B_1}$. Как было отмечено выше, экстремали на $\mathcal{S}^2_{\text{BM}}$ в общем случае не являются плоскими в аффинном смысле. Несколько представителей из класса экстремальных кривых показано на рисунке 4.

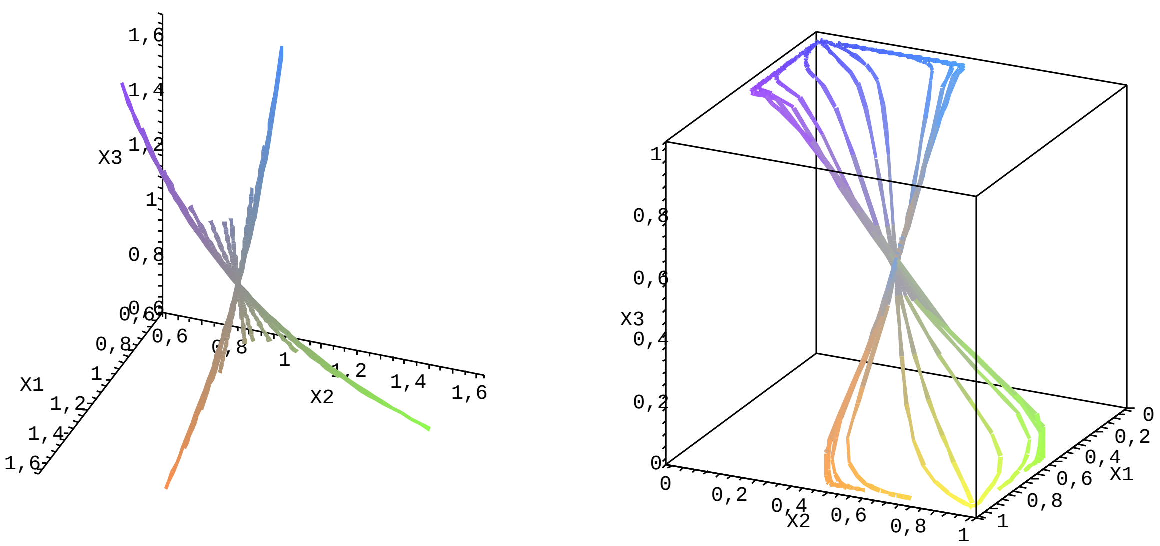


Рис. 4. Семейство экстремалей на $\mathcal{S}^2_{BM}$, пересекающихся в точке $\{1,1,1\}$ ($A_1 = A_2 = 1$) для значений параметров $q_1 = 1/25, 1/16, 1/9, 1/4, 1/2, 1/2^{1/3}, 1, 2, 3, 4, 5$, и значений q_2, взятых на ветви (1–2) зависимости (26) (см. рис. 3). На правом рисунке левый (взятый с продолженными экстремалями) компактифицирован в единичный куб с помощью отображения: $X_i \to \tanh(X_i \ln 3/2)$.

Кроме экстремалей нам в дальнейшем потребуются выражения и свойства *геодезических окружностей* на $\mathcal{S}^2_{\mathrm{BM}}$. По определению, геодезической окружностью с центром в точке $p \in \mathcal{S}^2_{\mathrm{BM}}$ называется множество точек $p' \in \mathcal{S}^2_{\mathrm{BM}}$ удаленных от p на некоторое фиксированное расстояние $|R|$ (это расстояние равно длине экстремали, соединяющей p и p'), которое называется (геодезическим) радиусом окружности. В силу равноправия точек на $\mathcal{S}^2_{\mathrm{BM}}$ достаточно рассмотреть структуру геодезической окружности с центром в точке $\{1,1,1\}$. Параметрическое уравнение такой окружности получится, если в уравнениях (25) зафиксировать параметр s: $|s| = |R|$, а менять один из параметров q_i, например q_1. Таким образом, параметрическое уравнение единичной окружности на $\mathcal{S}^2_{\mathrm{BM}}$ с центром в точке $\{1,1,1\}$ имеет вид:

$$X_1 = e^{\pm q_1}; \qquad X_2 = e^{\pm q_2}, \tag{27}$$

где параметр q_2 связан с q_1 соотношением (26). В зависимости от выбора знака $\pm$ и номера ветви в зависимости (26), получаем для геодезической окружности шесть несвязных компонент. Для случая $|R| = 1$ они показаны на рис. 5.

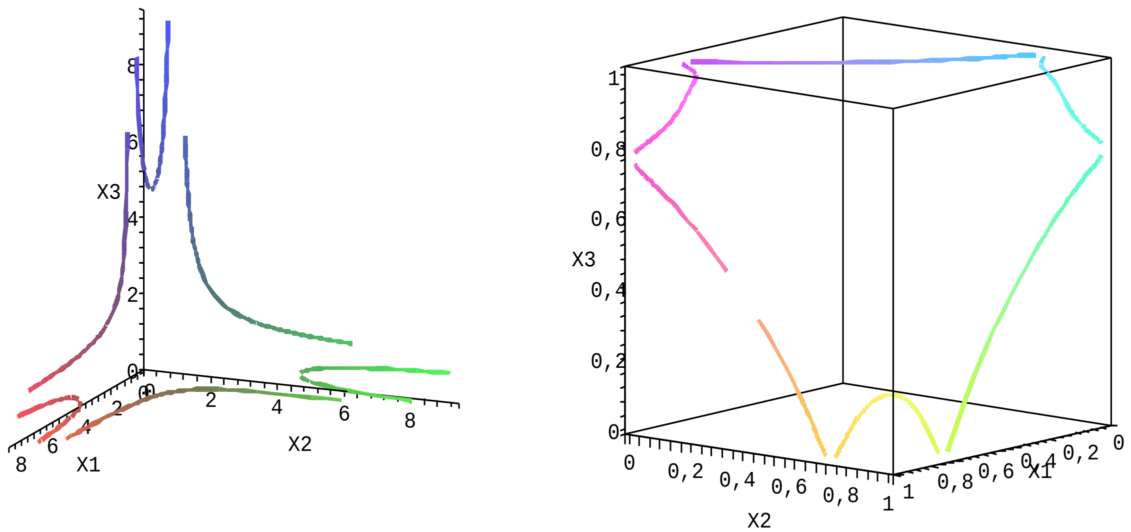


Рис. 5. Шесть компонент геодезической единичной окружности. Компоненты единичной окружности с $R = +1$ – широкие дуги, с $R = -1$ – узкие. Широкие дуги, прилегающие в виде гипербол к координатным плоскостям описываются соответствующими этим плоскостям компонентами зависимости (26). На правом рисунке левый (взятый с продолженными дугами окружностей) компактифицирован в единичный куб с помощью отображения: $X_i \to \tanh X_i$.

Рассмотрим, наконец, вопрос о пересечении геодезических на $\mathcal{S}^2_{\mathrm{BM}}$. Записывая параметрические уравнения пары геодезических:

$$X_1 = a_1 e^{q_1 s}; \qquad X_2 = a_2 e^{q_2 s}; \qquad \bar{X}_1 = \bar{a}_1 e^{\bar{q}_1 \bar{s}}; \qquad \bar{X}_2 = \bar{a}_2 e^{\bar{q}_2 \bar{s}},$$

где буквы без черты относятся к одной геодезической, а с чертой – к другой, получаем условие их пересечения в виде системы уравнений:

$$a_1 e^{q_1 s} = \bar{a}_1 e^{\bar{q}_1 \bar{s}}; \qquad a_2 e^{q_2 s} = \bar{a}_2 e^{\bar{q}_2 \bar{s}}.$$

Логарифмируя и перенося слагаемые с параметрами s и $\bar{s}$ в левые части, приходим к системе линейных неоднородных уравнений на эти параметры:

$$q_1 s - \bar{q}_1 \bar{s} = \ln(\bar{a}_1/a_1); \qquad q_2 s - \bar{q}_2 \bar{s} = \ln(\bar{a}_2/a_2), \tag{28}$$

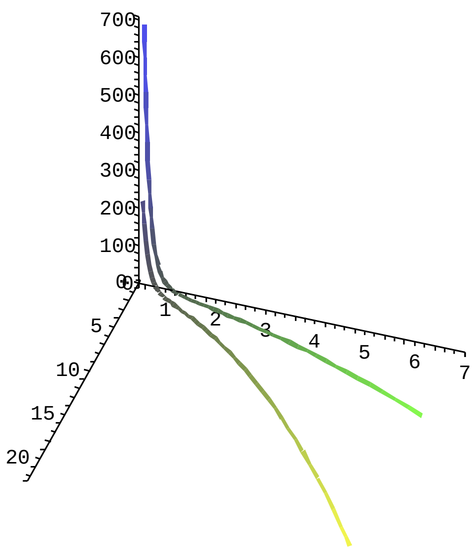
определяющей точку пересечения геодезических на $\mathcal{S}^2_{\mathrm{BM}}$. Если определитель системы (28) $\bar{q}_1 q_2 - q_1 \bar{q}_2 \neq 0$, то система имеет единственное решение, и, следовательно, геодезические пересекаются строго в одной точке. Рассмотрим ситуацию, когда определитель системы (28) равен нулю. В этом случае мы должны проанализировать систему уравнений на параметры геодезических:

$$\bar{q}_1 q_2 - q_1 \bar{q}_2 = 0; \qquad q_1 q_2 (q_1 + q_2) = 1; \qquad \bar{q}_1 \bar{q}_2 (\bar{q}_1 + \bar{q}_2) = 1. \tag{29}$$

Несложный анализ этой системы обнаруживает, что ее единственное решение: $q_1 = \bar{q}_1;\ q_2 = \bar{q}_2$. Это означает, что при невыполнении условия:

$$\ln(\bar{a}_1/a_1) = \ln(\bar{a}_2/a_2) \tag{30}$$

геодезические не будут пересекаться. Условие (30) по существу означает принадлежность точек (a_1, a_2) и $(\bar{a}_1, \bar{a}_2)$ одной и той же геодезической. Другими словами, имеет место следующая теорема: *через любую точку, не лежащую на данной геодезической можно провести единственную геодезическую, параллельную первой.* Пара параллельных геодезических показана на рис. 7.



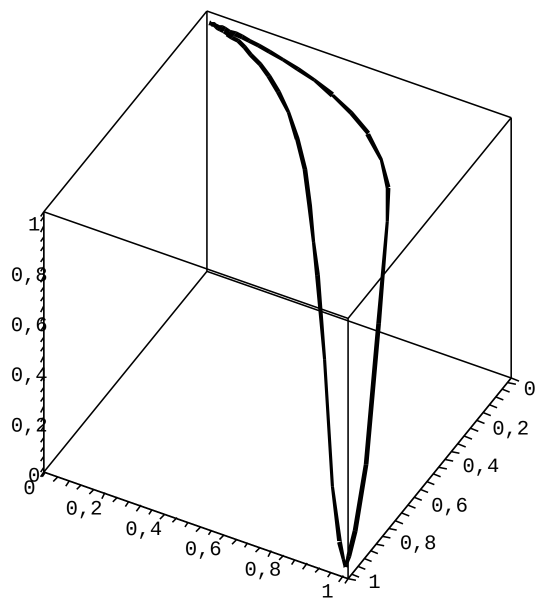


Рис. 6. Пара параллельных геодезических. На правом рисунке левый (взятый с продолженными дугами окружностей) компактифицирован в единичный куб с помощью отображения: $X_i \to \tanh X_i$.

Установленное свойство по своей форме аналогично известному свойству евклидовой плоскости, выражаемому т. н. пятым постулатом Евклида. Плоскостность индикатрисы становится очевидной, если заметить, что индуцированная метрика $\mathcal{G}_{S^2_{BM}}$ (формула (21)) преобразуется к явно плоскому виду преобразованием координат: $X_i \to u_i = \ln X_i$.

6 Явное выражение для бингла

Воспользуемся теперь результатами предыдущего раздела, для вывода явного выражения для аддитивного бингла по формуле (20). Обозначая $\phi[A,B]=s_*$ имеем согласно определению (20) и уравнениям (25):

$$b_1/a_1 = e^{q_1 s_*}; \qquad b_2/a_2 = e^{q_2 s_*}, \tag{31}$$

где мы положили $A_1 = A_2 = 1$ с учетом начального условия в канонической по отношению к паре векторов A и B системе координат. Переписывая формулы (31) в виде:

$$q_1 = \frac{1}{s_*}\ln(b_1/a_1); \qquad q_2 = \frac{1}{s_*}\ln(b_2/a_2)$$

и подставляя эти выражения в условие нормировки (26), приходим к уравнению:

$$\frac{1}{s_*^3}\ln(b_1/a_1)\ln(b_2/a_2)\ln(b_1b_2/a_1a_2) = 1,$$

откуда:

$$\phi[a,b] = s_* = \left[\ln(b_1/a_1)\ln(b_2/a_2)\ln(b_1b_2/a_1a_2)\right]^{1/3}. \tag{32}$$

Эта формула и представляет собой выражение для аддитивного бингла в терминах единичных векторов, аналогичное евклидовому выражению (16). Ее запись в терминах компонент исходных векторов A, B имеет более симметричный вид:

$$\phi[A,B] = \phi[a,b] = -\left[\ln\left(\frac{B_1/A_1}{|B|/|A|}\right)\ln\left(\frac{B_2/A_2}{|B|/|A|}\right)\ln\left(\frac{B_3/A_3}{|B|/|A|}\right)\right]^{1/3} = \tag{33}$$

$$= \left[\ln\left(\frac{A_1^{2/3}/(A_2A_3)^{1/3}}{B_1^{2/3}/(B_2B_3)^{1/3}}\right)\ln\left(\frac{A_2^{2/3}/(A_1A_3)^{1/3}}{B_2^{2/3}/(B_1B_3)^{1/3}}\right)\ln\left(\frac{A_3^{2/3}/(A_1A_2)}{B_3^{2/3}/(B_1B_2)^{1/3}}\right)\right]^{1/3}.$$

7 Финслерово условие компланарности и операция би-сопряжения

Как уже отмечалось выше, бингл, определенный по формуле (33), оказывается аддитивным по определению, т. е. для любой тройки "компланарных" векторов A, B, C выполняется условие, аналогичное (17):

$$\phi[A,C] = \phi[A,B] + \phi[B,C]. \tag{34}$$

Термин "компланарность" мы заключили в кавычки, поскольку он требует прояснения. Как это видно из предыдущих рассуждений, с геометрической точки зрения компланарными будут все векторы, концы единичных направляющих векторов которых упираются в одну из экстремалей индикатрисы $\mathcal{S}^2_{\mathrm{BM}}$. При перемещении единичного вектора вдоль такой экстремали, он заметает некоторую коническую поверхность в $\mathcal{H}_3$ (по терминологии [1] – "веерообразные фигуры"). Назовем эту коническую поверхность *плоскостью вращения.* Выше мы отметили, что экстремали, за исключением нескольких представителей семейства, не являются в аффинном смысле плоскими кривыми. Это означает, что *плоскости вращения и аффинные плоскости в геометрии $\mathcal{H}_3$ существенно различаются.* Более того, аффинная плоскость с точки зрения геометрии $\mathcal{H}_3$ перестает играть сколь-нибудь существенную роль (за исключением изотропных плоскостей, которые являются аффинными плоскостями и не имеют точек пересечения с метрическими!).

Сформулируем аналитическое условие компланарности трех векторов A, B, C. Переходя на индикатрису и полагая, что соответствующие единичные векторы a, b, c лежат на одной и той же экстремали, имеем систему соотношений:

$$b_1 = a_1 e^{q_1 s_1}; \quad b_2 = a_2 e^{q_2 s_1}; \quad c_1 = a_1 e^{q_1 s_2}; \quad c_2 = a_2 e^{q_2 s_2},$$

где мы положили, что значению $s = 0$ соответствует положение конца вектора a, значению $s = s_1$ соответствует положение конца вектора b и значению $s = s_2$ соответствует положение конца вектора c. Исключая из этой системы параметры геодезической q_1, q_2, s_1, s_2 приходим к условию метрической компланарности векторов A, B, C в виде:

$$\frac{\ln(b_1/a_1)}{\ln(c_1/a_1)} = \frac{\ln(b_2/a_2)}{\ln(c_2/a_2)}. \tag{35}$$

Переходя от единичных векторов a, b, c к исходным A, B, C, это соотношение можно записать в более явном виде:

$$\frac{\ln\left(\dfrac{B_1^{2/3}/(B_2B_3)^{1/3}}{A_1^{2/3}/(A_2A_3)^{1/3}}\right)}{\ln\left(\dfrac{C_1^{2/3}/(C_2C_3)^{1/3}}{A_1^{2/3}/(A_2A_3)^{1/3}}\right)} = \frac{\ln\left(\dfrac{B_2^{2/3}/(B_1B_3)^{1/3}}{A_2^{2/3}/(A_1A_3)^{1/3}}\right)}{\ln\left(\dfrac{C_2^{2/3}/(C_1C_3)^{1/3}}{A_2^{2/3}/(A_1A_3)^{1/3}}\right)} \tag{36}$$

Выделенность третьей координаты векторов в этом выражении, конечно же, случайна и связана с тем, что координатная карта для описания индикатрисы $\mathcal{S}^2_{\mathrm{BM}}$ и геодезических на ней была связана с плоскостью $\{X_1, X_2\}$. Описание той же метрической плоскости в других картах дополнило бы соотношение (36) еще одним равенством, которое полностью восстанавливает симметрию координат и векторов. Полное условие метрической компланарности имеет вид:

$$\frac{\ln\left(\dfrac{B_1^{2/3}/(B_2B_3)^{1/3}}{A_1^{2/3}/(A_2A_3)^{1/3}}\right)}{\ln\left(\dfrac{C_1^{2/3}/(C_2C_3)^{1/3}}{A_1^{2/3}/(A_2A_3)^{1/3}}\right)} = \frac{\ln\left(\dfrac{B_2^{2/3}/(B_1B_3)^{1/3}}{A_2^{2/3}/(A_1A_3)^{1/3}}\right)}{\ln\left(\dfrac{C_2^{2/3}/(C_1C_3)^{1/3}}{A_2^{2/3}/(A_1A_3)^{1/3}}\right)} = \frac{\ln\left(\dfrac{B_3^{2/3}/(B_1B_2)^{1/3}}{A_3^{2/3}/(A_1A_2)^{1/3}}\right)}{\ln\left(\dfrac{C_3^{2/3}/(C_1C_2)^{1/3}}{A_3^{2/3}/(A_1A_2)^{1/3}}\right)} \tag{37}$$

и в такой форме оно, очевидно, аналогично евклидову условию компланарности (18). Чтобы показать неслучайность этой аналогии, убедимся, что существует и финслеров аналог более компактного условия (19). Для этого определим отображение $\flat$: $\mathcal{H}_3 \to \mathcal{H}_3^\flat$, действующее по правилу:

$$A = \{A_1, A_2, A_3\} \mapsto A^\flat = \{\ln(A_1^{2/3}/(A_2A_3)^{1/3}), \ln(A_2^{2/3}/(A_1A_3)^{1/3}), \ln(A_3^{2/3}/(A_1A_2)^{1/3}).\tag{38}$$

Назовем это отображение *би-проекцией* $\mathcal{H}_3$, пространство $\mathcal{H}_3^\flat$ – *би-пространством* над $\mathcal{H}_3$, а элемент $A^\flat$ – *бинглом* элемента A. Отметим, что би-пространство $\mathcal{H}_3^\flat$ – 2-мерно, ввиду тождественного выполнения соотношения:

$$\mathrm{Tr}\, A^\flat \equiv A_1^\flat + A_2^\flat + A_3^\flat = 0. \tag{39}$$

Отметим также, что би-проекция нелинейна: $(A + B)^\flat \neq A^\flat + B^\flat$.

Нетрудно проверить, что первое равенство в соотношении (37) имеет вид (12)-компоненты более компактного соотношения:

$$(A^\flat - B^\flat) \wedge (A^\flat - C^\flat) = 0, \tag{40}$$

а второе равенство имеет смысл (13)-компоненты этого соотношения. Соответственно (23)-компонента этого соотношения получится, если мы рассмотрим равенство первой и третьей дроби в (37). В евклидовом и общем аффинном пространстве соотношение вида (40) означает в точности принадлежность точек с радиус-векторами $A^\flat, B^\flat, C^\flat$ одной и той же аффинной прямой (в 3-мерном случае $\wedge$ можно понимать как векторное произведение $\times$).

Таким образом, мы приходим к двум важным заключениям:

1) *евклидово условие (19) компланарности векторов, при котором выполняется условие аддитивности, имеет финслерово-гиперболический аналог в виде условия (40) коллинеарности бинглов* $A^\flat - B^\flat$ *и* $B^\flat - C^\flat$ *или коллинеарности точек* $A^\flat, B^\flat, C^\flat$ *в* $\mathcal{H}_3^\flat$;

2) *всякой плоскости вращения в* $\mathcal{H}_3$ *соответствует некоторая аффинная прямая в* $\mathcal{H}_3^\flat$ *и наоборот: всякой аффинной прямой в* $\mathcal{H}_3^\flat$ *соответствует плоскость вращения в* $\mathcal{H}_3$.

Отметим, что полученный результат подтверждает и уточняет правильность гипотезы "нелинейного условия компланарности", высказанной ранее в [3]. Рисунок 7 наглядно иллюстрирует отличие плоскости вращения от аффинной плоскости в $\mathcal{H}_3$.

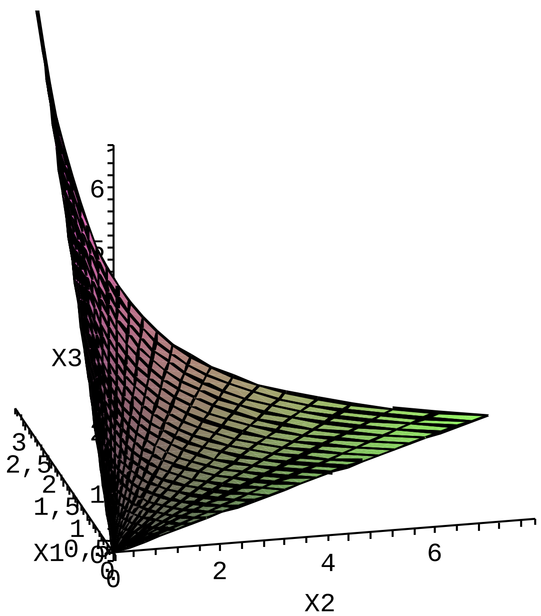


Рис. 7. Кусок метрической плоскости вращения

8 Геометрические свойства пространства $\mathcal{H}_3^\flat$

Отображение би-проекции имеет более фундаментальный характер, чем просто средство для установления формальной аналогии условий аффинной и метрической компланарности. Действительно, в терминах векторов пространства $\mathcal{H}_3^\flat$ выражение (33) для бингла можно переписать в следующем неожиданно простом виде:

$$\phi[A, B] = |A^\flat - B^\flat|, \tag{41}$$

где норма в пространстве $\mathcal{H}_3^\flat$ вычисляется по формуле (4), в предположении, что в этом пространстве определена метрика Бервальда-Моора вида (1). Эта формула и ее следствия имеют глубокий геометрический смысл.

Прежде, чем перейти к их обсуждению, остановимся более подробно на геометрических аспектах пространства $\mathcal{H}_3^\flat$ и отображения би-проекции, образом которой оно является. Как уже отмечалось выше отображение $\flat$: $\mathcal{H}_3 \to \mathcal{H}_3^\flat$ переводит 3-мерное линейное пространство $\mathcal{H}_3$ в 2-мерное многообразие $\mathcal{H}_3^\flat$, которое на самом деле является 2-мерным линейным пространством. Действительно, основное свойство его точек – свойство (39) равенства нулю следов – остается инвариантным относительно образования линейных комбинаций:

$$\mathrm{Tr}(\lambda A^\flat + \mu B^\flat) = 0, \quad \text{если} \quad \mathrm{Tr}A^\flat = \mathrm{Tr}B^\flat = 0.$$

Это и означает, что $\mathcal{H}_3^\flat$ является линейным пространством, причем $\dim\mathcal{H}_3^\flat = 2$. Это пространство можно наглядно представлять себе вложенным в 3-мерное линейное пространство $\Omega\mathcal{H}_3$, устроенное точно также, как и исходное $\mathcal{H}_3$ и имеющее согласно (41) стандартную метрику БМ. Такое вложение в $\Omega\mathcal{H}_3$ изображается плоскостью, проходящей через начало и ортогональной в (евклидовом смысле) вектору $I = \{1, 1, 1\}$ рис. 8). Уравнение этой плоскости – равенство нулю суммы координат.

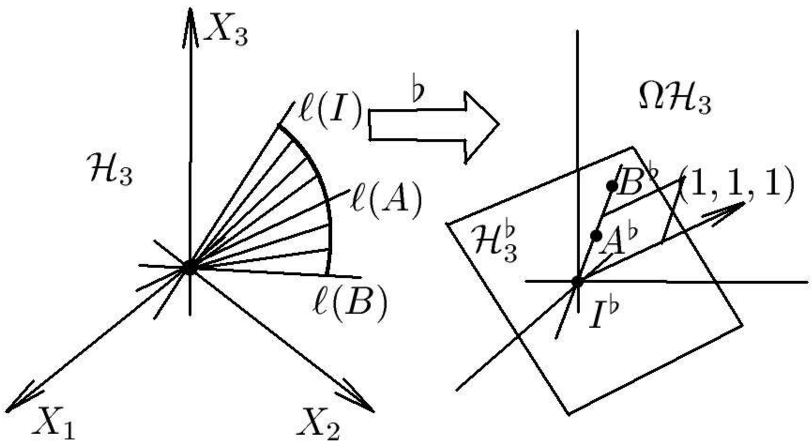


Рис. 8: *Вложение* $\mathcal{H}_3^\flat$ *в* $\Omega\mathcal{H}_3$.

Таким образом, отображение би-проекции каждый из векторов $\mathcal{H}_3$ переводит в некоторый вектор на плоскости $\mathcal{H}_3^\flat \subset \Omega\mathcal{H}_3$. Отметим, что отображение би-проекции представляет собой интересный геометрический пример нелинейного отображения линейных пространств. Ввиду нелинейности к этому отображению неприменимо большинство стандартных теорем о морфизмах линейных пространств.

Как и положено для всякой проекции, би-проекция сюръективна[3] как отображение $\mathcal{H}_3 \to \mathcal{H}_3^\flat$ (но не сюръективна как отображение $\mathcal{H}_3 \to \Omega\mathcal{H}_3$). Найдем $A^\flat$-слой би-проекции, т. е. множество элементов $X \in \mathcal{H}_3$, для которых $X^\flat = A^\flat$. Для этого отметим, что любые два вектора из $\mathcal{H}_3$, отличающиеся лишь модулями, би-проекция переводит в один и тот же элемент $\mathcal{H}_3^\flat$. Назовем подмножества $\mathcal{H}_3$ вида $\cup_{\lambda\in R}\lambda A \equiv \ell(A)$ *лучами, с направлением* A. Таким образом, любые две точки на луче би-проекция "склеивает" в одну точку на плоскости $\mathcal{H}_3^\flat$. Поскольку каждый луч в $\mathcal{H}_3$ однозначно задается единичным вектором направления: $\ell(A) = \ell(a)$, то конструкцию лучей можно перенести на единичную сферу, у которой диаметрально противоположные точки a и $-a$ – отождествлены. Такую сферу будем называть *проективной единичной сферой БМ* и будем обозначать ее $P\mathcal{S}^2_{\mathrm{BM}}$. Проективная сфера содержит 4 несвязных компоненты и

[3]Напомним, что сюръекция – это отображение, при котором у каждого элемента в множестве образов есть прообраз.

получается из сферы $\mathcal{S}^2_{\mathrm{BM}}$ отождествлением центрально-симметричных точек. Для всякого элемента на проективной сфере с координатами $\{a_1, a_2, 1/(a_1 a_2)\}$ общие формулы би-проекции (38) принимают вид:

$$a^\flat = \{\ln a_1, \ln a_2, -\ln(a_1 a_2)\},$$

из которого следует, что на каждой из компонент $P\mathcal{S}^2_{\mathrm{BM}}$ би-проекция действует биективно. Это означает, что *слоями би-проекции являются в точности лучи пространства $\mathcal{H}_3$.*

Отметим, что элементы $\Omega\mathcal{H}_3$, не лежащие в $\mathcal{H}_3^\flat$ не имеют прообразов в $\mathcal{H}_3$ и не могут быть истолкованы как бинглы. Отметим так же, что "ядром" би-проекции является луч $\ell(I)$, где $I = \{1, 1, 1\}$, поскольку $I^\flat = 0$ и если $X^\flat = 0$, то $X = I$.

Перейдем к симметриям $\mathcal{H}_3^\flat$. Поскольку $\mathcal{H}_3^\flat$ является линейным пространством, то трансляции $\mathcal{TH}_3^\flat$ и умножения на вещественные числа $\mathcal{DH}_3^\flat$ оставляют пространство бинглов инвариантным. Геометрически эти преобразования описывают скольжения плоскости $\mathcal{H}_3^\flat$ вдоль себя в $\Omega\mathcal{H}_3$ и ее однородные растяжения. Рассмотрим теперь нелинейные преобразования $\mathcal{NH}_3^\flat$, которые переводят $\mathcal{H}_3^\flat$ в себя. Эти преобразования описываются следующими формулами:

$$A^\flat \to A^\flat_\lambda = \{\lambda_1 A_1^\flat, \lambda_2 A_2^\flat, \lambda_3 A_3^\flat\}, \tag{42}$$

где вектор преобразования $\lambda \in \Omega\mathcal{H}_3$ и лежит в плоскости, которая в евклидовом смысле ортогональна $A^\flat$. Действительно, евклидова ортогональность векторов $A^\flat$ и λ эквивалентна условию: $\mathrm{Tr} A^\flat_\lambda = \lambda_1 A_1^\flat + \lambda_2 A_2^\flat + \lambda_3 A_3^\flat = 0$. Это означает, что преобразованный вектор $A^\flat_\lambda$ является бинглом. Поскольку преобразование зависит от вектора, то оно является нелинейным. Отметим, что элементы преобразования являются вообще говоря векторами из $\Omega\mathcal{H}_3$, т.е. векторы этого пространства можно рассматривать как элементы множества внешних автоморфизмов пространства бинглов. Это множество содержит единицу $I = \{1, 1, 1\}$ (этот вектор ортогонален в евклидовом смысле всем векторам из $\mathcal{H}_3^\flat$ поэтому применим ко всем векторам там и каждый вектор переводит в себя); для случая, когда все $\lambda_i \neq 0$, преобразование обратимо: $(A^\flat_\lambda)_{\lambda^{-1}} = A^\flat$, где $\lambda^{-1} = \{\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}, \lambda_3^{-1}\}$ и композиция преобразований при условии $A^\flat_\lambda \perp \sigma$ имеет вид:

$$(A^\flat_\lambda)_\sigma = A^\flat_{\lambda\sigma},$$

где $\lambda\sigma = \{\lambda_1\sigma_1, \lambda_2\sigma_2, \lambda_3\sigma_3\}$. Можно сказать, что преобразования из $\mathcal{NH}_3^\flat$ образуют частичную алгебру, являющуюся специальной частичной подалгеброй алгебры поличисел P_3.

Формула (41) означает, что в пространстве $\mathcal{H}_3^\flat$ определена метрика БМ. Кроме отмеченных выше трансляций, ее изометрии описываются гиперболическими вращениями $\mathcal{D}_2^\flat$, действующие по правилу (42), в котором вместо ограничения, связанного с евклидовой ортогональностью, наложено условие: $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 1$ – принадлежности конца вектора λ единичной сфере $\mathcal{S}^2_{\mathrm{BM}}$ в $\Omega\mathcal{H}_3^\flat$. Пересечение $\mathcal{NH}_3^\flat \cap \mathcal{D}_2^\flat \equiv \mathcal{ND}^\flat$ образует однопараметрическое семейство нелинейных изометрий $\mathcal{H}_3^\flat$. Геометрически векторы преобразований $\lambda \in \mathcal{ND}^\flat$ своими концами упираются в гиперболу, являющуюся пересечением единичной сферы $\mathcal{S}^2_{\mathrm{BM}}$ и плоскости, ортогональной вектору $A^\flat$, на который это преобразование действует.

9 Дальнейшие свойства бинглов

Опираясь на результаты предыдущего раздела продолжим обсуждение важнейших свойств бинглов. Для того, чтобы отличать бингл $\phi[A, B]$ между векторами и бинглы как элементы пространства $\mathcal{H}_3^\flat$, будем называть бинглы вида $\phi[A, B]$ *взаимными бинглами.*

1. Формула (41) означает, что пространство $\mathcal{H}_3^\flat$ представляет собой метрическое пространство, метрика которого нетривиальным образом наследуется из исходного $\mathcal{H}_3$ при операции би-проекции. При этом эта метрика по форме оказывается метрикой БМ.
2. Само пространство $\mathcal{H}_3^\flat$ состоит из объектов (точек) новой геометрической природы: согласно формуле (41) *расстояние между двумя точками этого пространства имеет смысл угла между их векторными прообразами в* $\mathcal{H}_3$. Двойственность подобного рода в рамках квадратичных геометрий обсуждалась П.К.Рашевским в [6]. Замечательным фактом, обнаружившемся в геометрии поличисел, является *совпадение метрик в пространстве векторов и углов между ними.*
3. Отметим, что би-проекция выходит за рамки конформных и даже аналитических (в поличисловом смысле) отображений.
4. Нетрудно видеть, что элементы пространства $\mathcal{H}_3^\flat$ с точки зрения алгебры поличисел представляют собой ни что иное, как экспоненциальные углы поличисла:

$$A_1^\flat = \chi_1; \quad A_2^\flat = \chi_2; \quad A_3^\flat = \chi_3,$$

где χ_i – экспоненциальные углы (10). При этом формулу (41) можно переписать в терминах экспоненциальных углов следующим образом:

$$\phi[A,B] = [(\chi_1^A - \chi_1^B)(\chi_2^A - \chi_2^B)(\chi_3^A - \chi_3^B)]^{1/3}. \tag{43}$$

5. Отображение би-проекции реализует изоморфизм общей группы дилатаций $\mathcal{D}_2$ в $\mathcal{H}_3$ в группу трансляций $\mathcal{T}_2^\flat$ в $\mathcal{H}_3^\flat$:

$$A = \{A_1, A_2, A_3\} \mapsto \mathcal{D}_{\alpha_1,\alpha_2\alpha_3} A = \{\alpha_1 A_1, \alpha_2 A_2, \alpha_3 A_3\} \overset{\flat,\flat^{-1}}{\rightleftarrows} \tag{44}$$

$$A^\flat = \{A_1^\flat, A_2^\flat, A_3^\flat\} \mapsto \mathcal{T}_{\tau_1,\tau_2,\tau_3} A^\flat = \{A_1^\flat + \tau_1, A_2^\flat + \tau_2, A_3^\flat + \tau_3\},$$

где

$$\tau_1 = \frac{2}{3}\ln\alpha_1 - \frac{1}{3}\ln\alpha_2 - \frac{1}{3}\ln\alpha_3; \quad \tau_2 = \frac{2}{3}\ln\alpha_2 - \frac{1}{3}\ln\alpha_1 - \frac{1}{3}\ln\alpha_3; \quad \tau_3 = \frac{2}{3}\ln\alpha_3 - \frac{1}{3}\ln\alpha_1 - \frac{1}{3}\ln\alpha_2.$$

Таким образом, *трансляционная инвариантность взаимных бинглов является $\flat$-образом их конформной инвариантности.*

6. Рассмотрим взаимный бингл вида $\phi[I,A]$. Согласно (41) он равен $|A^\flat| \equiv (\chi_1^A \chi_2^A \chi_3^A)^{1/3}$, где χ_i^A – экспоненциальные углы поличисла A. Такой бингл измеряет отклонение направления A от направления единицы, геометрически совпадающей с пространственной биссектриссой первого координатного октанта. Аналогичные конструкции вида $\phi[I_{(j)}A]$, где $I_{(j)}$ – пространственная биссектрисса j-ого координатного октанта, позволяют продолжить определение взаимных бинглов между векторами в других октантах. Отметим, что взаимный бингл между векторами, лежащими в различных октантах, будет с необходимостью комплексным.
7. На рисунке 9 представлены наглядные диаграммы взаимного бингла $\phi[I,A]$ в положительном октанте.

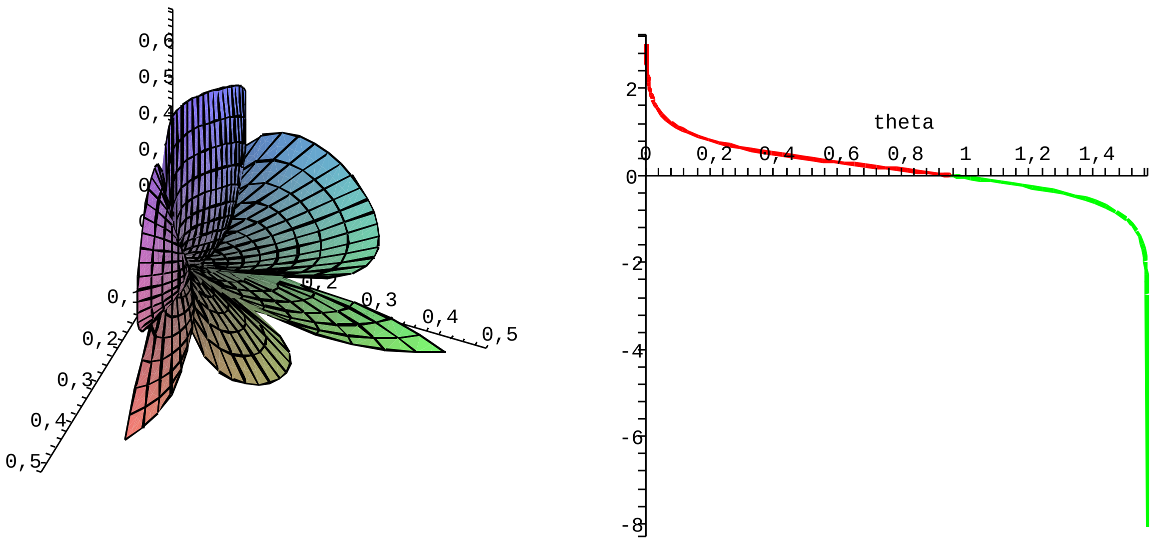


Рис. 9. На левом рисунке представлена пространственная евклидова карта взаимного бингла $\phi[I, A]$: каждому направлению A в $\mathcal{H}_3$ поверхность ставит в соответствие значение модуля бингла $\phi[I, A]$. Численно он равен евклидову расстоянию от начала до точки пересечения луча $\ell(A)$ с поверхностью. На правом рисунке построен график зависимости взаимного бингла $\phi[I, A]$, где вектор $A = (\alpha \sin\theta, \alpha\sin\theta, \alpha\cos\theta)$, а θ – стандартный сферический угол, как функция θ.

10 Второй (относительный) бингл

Определение второго независимого бингла можно сформулировать по аналогии с азимутальным углом φ стандартной угловой системы координат на евклидовой сфере. При этом первый бингл, очевидно, является гиперболическим аналогом широтного угла θ. Как и в евклидовом случае, второй бингл требует задания (произвольного!) начального направления отсчета. Чтобы отличать этот бингл от элементов $\mathcal{H}_3^\flat$ и взаимного бингла, будем называть его *относительным бинглом.*

В качестве первого шага определения второго бингла приведем пару произвольных единичных векторов a и b на единичной сфере к их каноническому положению так, что $a = \{1, 1, 1\}$, $b = \{b_1/a_1, b_2/a_2, b_3/a_3\}$ и найдем точку пересечения геодезической дуги, соединяющей a и b с геодезической единичной окружностью с центром в a. Соответствующая система параметрических уравнений для геодезической дуги:

$$X_1 = e^{q_1 s}; \qquad X_2 = e^{q_2 s},$$

где

$$q_1 = \frac{1}{s_*}\ln(b_1/a_1), \qquad s_* = \phi[a, b], \qquad q_1 q_2(q_1 + q_2) = 1,$$

а для единичной окружности:

$$Y_1 = e^{\bar{q}_1}; \qquad Y_2 = e^{\bar{q}_2}, \qquad \bar{q}_1\bar{q}_2(\bar{q}_1 + \bar{q}_2) = 1. \tag{45}$$

Исключая параметр s, приходим к уравнению: $q_1\bar{q}_2 - q_2\bar{q}_1 = 0$, которое имеет вид первого уравнения (29). Его решения мы уже знаем: $q_1 = \bar{q}_1$, $q_2 = \bar{q}_2$.

В качестве второго шага заметим, что ввиду шестисвязности единичной окружности, следует различать случаи попадания полученной выше точки пересечения геодезической дуги и единичной окружности на ее различные компоненты. Как уже отмечалось выше в разделе (5), компоненты окружности, содержащие направление $a - b$ можно различать в выбранной нами параметризации знаками параметров:

$$q_1[a,b] = \frac{1}{s_*}(B_1^\flat - A_1^\flat) = \frac{B_1^\flat - A_1^\flat}{|A^\flat - B^\flat|}; \quad q_2[a,b] = \frac{1}{s_*}(B_2^\flat - A_2^\flat) = \frac{B_2^\flat - A_2^\flat}{|A^\flat - B^\flat|} \tag{46}$$

(эти выражения являются гиперболическими аналогами направляющих косинусов векторов в евклидовом пространстве) и знаком самого бингла

$$s_* = |A^\flat - B^\flat|.$$

Для определенности договоримся, что в случае $q_1 > 0, q_2 > 0$ и $s_* \lesseqgtr 0$ мы используем параметризацию в плоскости (X_1X_2) (третья положительная и отрицательная компонента $3^\pm$); в случае $q_1 < 0, q_2 > 0$ и $s_* \lesseqgtr 0$ мы используем параметризацию в плоскости (X_1X_3) (вторая положительная и отрицательная компонента $2^\pm$); наконец, в случае $q_1 > 0, q_2 < 0$ и $s_* \lesseqgtr 0$ мы используем параметризацию в плоскости (X_2X_3) (первая положительная и отрицательная компонента $1^\pm$). Таким образом, в первом случае параметризация дуги единичной окружности будет иметь вид:

$$X_1 = e^{\pm q_1}; \quad X_2 = e^{\pm q_2}; \quad q_1q_2(q_1+q_2) = 1,$$

во втором:

$$X_1 = e^{\pm q_1}; \quad X_3 = e^{\pm q_3}; \quad q_1q_3(q_1+q_3) = 1,$$

в третьем

$$X_2 = e^{\pm q_2}; \quad X_3 = e^{\pm q_3}; \quad q_2q_3(q_2+q_3) = 1.$$

Единое для всех компонент направление обхода единичной окружности (которую наглядно можно представлять как односвязную кривую в компактифицированном $\mathcal{H}_3$ (второй график на рис. 5)), устанавливается следующими правилами изменения параметров (начинаем с третьей положительной компоненты в направлении от X_2 к X_1):

$$3^+: \ q_1 \in (0;\infty) \to 1^-: \ q_2 \in (0;\infty) \to 2^+: \ q_3 \in (0;\infty) \to$$

$$3^-: \ q_1 \in (0;\infty) \to 1^+: \ q_2 \in (0;\infty) \to 2^-: \ q_3 \in (0;\infty).$$

Теперь мы можем определить второй бингл $\psi[a,b]$ между a и b как длину дуги единичной окружности, заключенной между некоторой выделенной точкой на этой окружности и найденной выше точкой ее пересечения с геодезической дугой, соединяющей a и b. В зависимости от того, в какую из компонент попадает эта точка пересечения, мы будем иметь отдельный относительный бингл. По этой причине относительный бингл $\psi[a,b]$ можно снабдить дополнительными индексами: $\psi_j^\pm[a,b]$, указывающими к какой из компонент он относится. Например, запись $\psi_1^+[a,b]$ означает, что бингл относится к первой положительной компоненте единичной окружности и т. д. В качестве выделенной точки начала отсчета в каждой из компонент мы будем выбирать "симметричную точку": в первой компоненте ей соответствует значения $q_2 = q_3 = 2^{-1/3}$, во второй: $q_1 = q_3 = 2^{-1/3}$, в третьей $q_1 = q_2 = 2^{-1/3}$. Таким образом, формулы для binglов на различных компонентах единичной окружности принимают следующий вид:

$$\psi_1[a,b] = \int\limits_{2^{-1/3}}^{q_2[a,b]} \frac{ds}{dq_2}dq_2; \quad \psi_2[a,b] = \int\limits_{2^{-1/3}}^{q_3[a,b]} \frac{ds}{dq_3}dq_3; \quad \psi_3[a,b] = \int\limits_{2^{-1/3}}^{q_1[a,b]} \frac{ds}{dq_1}dq_1, \tag{47}$$

где интегрирования выполняется по дугам соответствующих компонент.

В силу симметрии всех компонент достаточно установить явный вид интегралов для одной из них. Рассмотрим подробно интеграл для третьей компоненты. Подставляя в формулу (22) параметрическую зависимость вида (45), получаем после элементарных преобразований:

$$\psi_3[a,b] = \int\limits_{2^{-1/3}}^{q_1[a,b]} (\dot{q}_2 + \dot{q}_2^2)^{1/3}\, dq_1,$$

где точка обозначает дифференцирование параметра q_2 по q_1 с учетом их функциональной связи посредством последнего уравнения в (45). Используя дифференциальное следствие этого уравнения (45):

$$\frac{dq_2}{dq_1} = -\frac{q_2(q_2 + 2q_1)}{q_1(q_1 + 2q_2)} \tag{48}$$

и его явное решение для основной ветви:

$$q_2 = \frac{\sqrt{q_1^4 + 4q_1} - q_1^2}{2q_1},$$

приходим после несложных преобразований к искомому выражению для длины дуги третьей компоненты единичной окружности: $\psi_3[a,b] = F(q_1[a,b])$, где функция $F(\xi)$ дается следующим интегралом:

$$F(\xi) \equiv -\frac{1}{2}\int\limits_{2^{-1/3}}^{\xi} \left(\frac{(x^2 - \sqrt{x(x^3+4)})(3x^2 + \sqrt{x(x^3+4)})\sqrt{x(x^3+4)} + x^3 - 2)}{x^4(x^3+4)}\right)^{1/3} dx. \tag{49}$$

Знак "минус" перед интегралом поставлен для того, чтобы при обходе единичной окружности в выбранном нами положительном направлении (на втором рис. 5 ему соответствует обход "замкнутой кривой" по часовой стрелке), бингл возрастал. Правильность такого выбора знака объясняется видом зависимости куба подинтегральной функции в выражении (49) – она представлена на рис. 10.

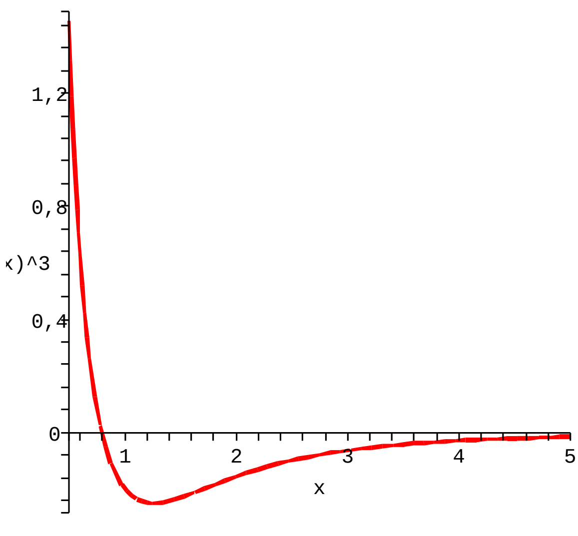


Рис. 10. Вид функции F'^3. Эта функция меняет знак в точке $x = 2^{-1/3}$.

Запишем окончательные выражения для второго бингла с учетом формул (46) и (47):

$$\psi_1[A,B] = F\left[\frac{B_1^\flat - A_1^\flat}{|A^\flat - B^\flat|}\right]; \quad \psi_2[A,B] = F\left[\frac{B_2^\flat - A_2^\flat}{|A^\flat - B^\flat|}\right]; \quad \psi_3[A,B] = F\left[\frac{B_3^\flat - A_3^\flat}{|A^\flat - B^\flat|}\right], \quad (50)$$

где функция F определяется формулой (49). Функция F, которая не выражается через элементарные функции, обеспечивает аддитивность определенного таким образом бингла (см. [7]).

11 Свойства второго бингла

Ввиду отмеченной выше аналогии аргументов функции F в формулах (50) с направляющими косинусами векторов в евклидовом пространстве, функцию F следует считать финслерово-гиперболическим аналогом функции arccos, а обратную к ней $F^{-1} \equiv \mathrm{cfh}$ – финслерово-гиперболическим аналогом косинуса. Таким образом, имеем[4]:

$$\frac{B_1^\flat - A_1^\flat}{|A^\flat - B^\flat|} \equiv -\mathrm{cfh}(\psi_1[A,B]); \quad \frac{B_2^\flat - A_2^\flat}{|A^\flat - B^\flat|} \equiv -\mathrm{cfh}(\psi_2[A,B]); \quad \frac{B_3^\flat - A_3^\flat}{|A^\flat - B^\flat|} \equiv -\mathrm{cfh}(\psi_3[A,B]). \quad (51)$$

При этом имеет место *основное тождество финслеровой тригонометрии:*

$$\mathrm{cfh}\,\psi_1 \mathrm{cfh}\,\psi_2 \mathrm{cfh}\,\psi_3 = 1. \quad (52)$$

Это соотношение имеет смысл аналогичный евклидову соотношению нормировки направляющих косинусов:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

где α, β, γ – углы между вектором и осями декартовой системы координат. Сравнивая тождество (52) и условие (14) на параметры группы $\mathcal{D}_2$, приходим к выводу, что параметрам этой группы можно придать смысл косинусов углов, параметризующих преобразования из группы $\mathcal{D}_2$. Действительно, как это видно из формулы (51) каждому вектору $A \in \mathcal{H}_3$, соответствует преобразование $D_{\mathrm{cfh}\psi_1,\,\mathrm{cfh}\psi_2,\,\mathrm{cfh}\psi_3} \in \mathcal{D}_2$, где ψ – относительный бингл между A и $I = \{1,1,1\}$. Таким образом, функции cfh_i дают естественную параметризацию гиперболических вращений, аналогичную углам Эйлера в евклидовой геометрии.

Можно ввести финслерово-гиперболические аналоги синусов, тангенсов и котангенсов по формулам:

$$\mathrm{sfh}\,\psi_1 = \mathrm{cfh}\,\psi_2 \mathrm{cfh}\,\psi_3; \quad \mathrm{sfh}\,\psi_2 = \mathrm{cfh}\,\psi_1 \mathrm{cfh}\,\psi_3; \quad \mathrm{sfh}\,\psi_3 = \mathrm{cfh}\,\psi_1 \mathrm{cfh}\,\psi_2;$$

$$\mathrm{tfh}\,\psi_i \equiv \frac{\mathrm{sfh}\,\psi_i}{\mathrm{cfh}\,\psi_i}; \quad \mathrm{ctfh}\,\psi_i = 1/\mathrm{tfh}\,\psi_i.$$

Имеют место очевидные тождества финслеровой тригонометрии, аналогичные соответствующим евклидовым:

$$\mathrm{sfh}\,\psi_i \mathrm{cfh}\,\psi_i = 1; \quad \mathrm{cfh}^2\,\psi_i \mathrm{tfh}\,\psi_i = 1; \quad \mathrm{sfh}^2\,\psi_i \mathrm{ctfh}\,\psi_i = 1$$

(по i нет суммирования) и тождества, не имеющие аналогов в евклидовой геометрии:

$$\mathrm{sfh}\,\psi_1 \mathrm{sfh}\,\psi_2 \mathrm{sfh}\,\psi_3 = 1; \quad \mathrm{tfh}\,\psi_1 \mathrm{tfh}\,\psi_2 \mathrm{tfh}\,\psi_3 = 1; \quad \mathrm{ctfh}\,\psi_1 \mathrm{ctfh}\,\psi_2 \mathrm{ctfh}\,\psi_3 = 1.$$

Отметим, что относительные бинглы, как и взаимные, конформно инвариантны, поскольку они выражаются через разности координат в $\mathcal{H}_3^\flat$.

[4] Знак минус в определение функции cfh вводится для удобства.

12 Связь относительных бинглов с экспоненциальными углами. Высшие бинглы

Для выявления связи экспоненциальных углов и относительных бинглов нужно осуществить би-проекцию формулы (9). С учетом формул (41) и (51) приходим к системе равенств:

$$\mathrm{cfh}\psi_1 = \frac{\chi_1^{2/3}}{(\chi_2\chi_3)^{1/3}} = e^{A_1^{2\flat}}; \quad \mathrm{cfh}\psi_2 = \frac{\chi_2^{2/3}}{(\chi_1\chi_3)^{1/3}} = e^{A_2^{2\flat}}; \quad \mathrm{cfh}\psi_3 = \frac{\chi_3^{2/3}}{(\chi_1\chi_2)^{1/3}} = e^{A_3^{2\flat}}, \qquad (53)$$

определяющих искомую связь относительных бинглов и экспоненциальных углов. Здесь

$$A^{2\flat} \equiv (A^\flat)^\flat$$

– элемент пространства $\mathcal{H}_3^{2\flat}$ бинглов второго порядка.

Таким образом, система относительных бинглов $\{\psi_i\}$, из которых независимых будет только два ввиду соотношений:

$$\mathrm{Tr}\, A^{2\flat} = \sum_{i=1}^{3} \ln \mathrm{cfh}\, \psi_i = 0,$$

характеризует ориентацию самих бинглов как элементов $\mathcal{H}_3^\flat$ друг относительно друга (углы в пространстве углов). Эта интерпретация подтверждается следующими эквивалентными формами представления поличисла:

$$A = |A| e^{\phi[A](\mathrm{cfh}\,\psi_1\, e_1 + \mathrm{cfh}\,\psi_2\, e_2 + \mathrm{cfh}\,\psi_3\, e_3)} \qquad (54)$$

– *экспоненциально-тригонометрической* и

$$A = |A| e^{\phi[A] e^{A_1^{2\flat} e_1 + A_2^{2\flat} e_2 + A_3^{2\flat} e_3}} \qquad (55)$$

– *дважды экспоненциальной.* Справедливость этих формул вытекает из (53) и проверяется непосредственно.

13 Связь бинглов с метрическими инвариантами

Запишем выражения для взаимных и относительных бинглов (33) и (50) в терминах отношений компонент: $\xi_i = B_i/A_i$:

$$\phi[A,B] = [\ln(\xi_1^{2/3}/(\xi_2\xi_3)^{1/3}) \ln(\xi_2^{2/3}/(\xi_1\xi_3)^{1/3}) \ln(\xi_3^{2/3}/(\xi_1\xi_2)^{1/3})]^{1/3}; \qquad (56)$$

$$\mathrm{cfh}\,\psi_1 = \left[\frac{\ln(\xi_1^{2/3}/(\xi_2\xi_3)^{1/3})}{\phi[A,B]}\right]; \quad \mathrm{cfh}\,\psi_2 = \left[\frac{\ln(\xi_2^{2/3}/(\xi_1\xi_3)^{1/3})}{\phi[A,B]}\right]; \quad \mathrm{cfh}\,\psi_3 = \left[\frac{\ln(\xi_3^{2/3}/(\xi_1\xi_2)^{1/3})}{\phi[A,B]}\right].$$

Для выражения этих бинглов через конформно-инвариантные метрические инварианты:

$$I_1 \equiv \frac{1}{2}\frac{(A,A,B)}{|A|^2|B|}; \quad I_2 \equiv \frac{1}{2}\frac{(A,B,B)}{|A||B|^2}; \quad I_3 \equiv \frac{|A|}{|B|} = \frac{(A,A,A)}{(B,B,B)}$$

запишем последние также в терминах безразмерных переменных ξ_i:

$$I_1 = \frac{\xi_1\xi_2 + \xi_2\xi_3 + \xi_1\xi_3}{(\xi_1\xi_2\xi_3)^{2/3}}; \quad I_2 = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \xi_3}{(\xi_1\xi_2\xi_3)^{1/3}}; \quad I_3 = \xi_1\xi_2\xi_3.$$

Последние соотношения можно написать в эквивалентном виде:

$$\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = I_2 I_3^{1/3}; \quad \xi_1\xi_2 + \xi_2\xi_3 + \xi_1\xi_3 = I_1 I_3^{2/3}; \quad \xi_1\xi_2\xi_3 = I_3. \tag{57}$$

Решая систему уравнений (57) относительно ξ_1, ξ_2, ξ_3 и подставляя решение в (56), можно получить искомые выражения бинглов через метрические инварианты. Система уравнений (57) имеет простую алгебраическую интерпретацию. В силу известного обобщения теоремы Виета на кубические уравнения можно утверждать, что три решения системы (57) – это три корня кубического уравнения:

$$\xi^3 - I_2 I_3^{1/3}\xi^2 + I_1 I_3^{2/3}\xi - I_3 = 0.$$

14 Тринглы

14.1 Объемы в квадратичных геометриях

Напомним соображения, на которых строятся определения объемов в квадратичных неевклидовых геометриях. В их основе лежит понятие *относительного скаляра.* Рассмотрим к примеру стандартную форму объема в евклидовом пространстве в декартовой системе координат:

$$\mathrm{vol}_0 \equiv dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n. \tag{58}$$

Почему эта форма в таком виде не годится для вычисления объема в любой (скажем косоугольной или даже криволинейной) системе координат? Дело в том, что при общем преобразовании координат $x' = f(x)$ форма (58) преобразуется по закону:

$$\mathrm{vol}_0' = \Delta_f \mathrm{vol}_0, \tag{59}$$

где Δ_f – якобиан преобразования $x' = f(x)$ (т. е. определитель матрицы J, составленной из частных производных новых координат по старым). С формальной алгебраической точки зрения закон преобразования (59) означает, что объект vol_0 является относительным скаляром с весом $+1$ (умножается на якобиан преобразования в первой степени). С геометрической точки зрения такой закон преобразования означает, что определение (58) не годится в качестве общего определения формы объема, поскольку такая форма должна быть скаляром веса нуль (допускается изменение знака, связанное с координатными преобразованиями, меняющими ориентацию исходной системы координат). Для того, чтобы прийти к общему определению формы объема, заметим, что закон преобразования метрики g при расмотренных выше преобразованиях имеет матричный вид:

$$g' = (J^{-1})^{\mathrm{T}} g J^{-1},$$

где J – якобиева матрица преобразования, откуда для детерминантов получаем:

$$\det g' = \frac{\det g}{\Delta_f^2}.$$

Последняя формула означает, что детерминант метрики является относительным скаляром веса -2, а величина $\sqrt{\det g}$ является относительным скаляром веса -1. Перемножая два относительных скаляра с противоположными весами, получаем искомый скаляр с нулевым весом:

$$\mathrm{vol} \equiv \sqrt{\det g}\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n. \tag{60}$$

Формула (60) определяет инвариантную форму объема в любой квадратичной геометрии в любой допустимой системе координат.

14.2 Формы площади и объема в $\mathcal{H}_3$

В неквадратичных пространствах вопрос о виде формы объемов требует прояснения. Из общих соображений, на которых строится понятие объема, форму объема в неквадратичных пространствах числа измерений n следует искать в виде:

$$\mathrm{vol} = \mathfrak{v}\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n, \tag{61}$$

где $\mathfrak{v}$ – относительный скаляр веса -1, построенный из финслеровой метрики. Для его явного построения необходимо привлечь общую теорию инвариантов и ковариантов полилинейных форм, которая в своей алгебраической части опирается на теорию многомерных матриц [8]. В настоящей статье у нас нет необходимости излагать общий подход. Мы ограничимся случаем симметричной кубичной формы с компонентами $(G_{\alpha\beta\gamma})$ в 2-мерном пространстве, которую можно представить парой квадратных матриц:

$$G = (H_1, H_2), \qquad H_1 \equiv G_{1\alpha\beta}; \qquad H_2 \equiv G_{2\alpha\beta}.$$

Можно показать ([8]), что величина:

$$\Delta \equiv \det \begin{pmatrix} \det(H_1, H_1) & \det(H_1, H_2) \\ \det(H_2, H_1) & \det(H_2, H_2) \end{pmatrix} \tag{62}$$

является относительным скаляром, ассоциированным с формой G, веса -6. Здесь детерминант кубической матрицы в пространстве двух измерений определяется по формуле:

$$\det G = \det(H_1, H_2) = G_{111}G_{222} - G_{112}G_{221} + G_{122}G_{211} - G_{121}G_{212}$$

В частном случае, когда $G_{111} = G_{222} = 0$, формула (62) приводит к выражению (мы отбрасываем не существенный постоянный множитель):

$$\Delta = G_{112}^2 G_{221}^2 \tag{63}$$

Искомый относительный скаляр $\mathfrak{v}$ веса -1 в этом случае равен

$$\mathfrak{v} = \Delta^{1/6} = (G_{112}G_{221})^{1/3}. \tag{64}$$

Аналогично, но несколько более громоздко можно строить относительный скаляры веса -1 и для квадратичных форм высших измерений.

14.3 Форма площади на индикатрисе и определение тригла

Для метрики (21) на индикатрисе с помощью формулы (64) легко построить инвариантную форму площади (форма 2-мерного объема):

$$\mathrm{area}_{\mathcal{S}^2_{\text{ВМ}}} = \frac{dX_1 \wedge dX_2}{X_1 X_2}. \tag{65}$$

Определим трингл $\Sigma(A, B, C)$, построенный на тройке векторов A, B, C как площадь соответствующего геодезического треугольника Δabc на индикатрисе, т.е. как интеграл:

$$\Sigma(A, B, C) = \int\limits_{\Delta abc} \frac{dX_1 \wedge dX_2}{X_1 X_2}. \tag{66}$$

Очевидно, что таким образом определенный трингл является аналогом евклидова телесного угла.

14.4 Вывод явной формулы для тригла

Поместим треугольник Δabc на индикатрисе таким образом, чтобы точка a имела координаты $\{1,1,1\}$. Координаты векторов b и c станут при этом равными:

$$b = \{b_1/a_1, b_2/a_2, a_1a_2/(b_1, b_2)\}; \quad c = \{c_1/a_1, c_2/a_2, a_1a_2/(c_1, c_2)\}.$$

Геодезические Γ_{ab} и Γ_{ac}, соединяющие a с b и a с c соответственно, параметризуются уравнениями:

$$\Gamma_{ab}: \ \{X_1 = e^{qs},\ X_2 = e^{\bar{q}s}\}; \quad \Gamma_{ac}: \ \{Y_1 = e^{q's},\ Y_2 = e^{\bar{q}'s}\}, \tag{67}$$

где по формулам (46):

$$q = \mathrm{cfh}\psi_1[A, B]; \quad \bar{q} = \mathrm{cfh}\psi_2[A, B]; \quad q' = \mathrm{cfh}\psi_1[A, C]; \quad \bar{q}' = \mathrm{cfh}\psi_2[A, C].$$

Систему параметров q и s можно рассматривать как систему координат на множестве точек треугольника Δabc. При этом, как только что установлено, координата q изменяется в интервале от $\mathrm{cfh}\psi_1[A, B]$ до $\mathrm{cfh}\psi_1[A,]$, а область изменения s лежит в интервале от нуля до $s(q)$, где функция $s(q)$ подлежит определению.

Для определения функции $s(q)$ запишем уравнение геодезической Γ_{bc} в параметризованном виде:

$$Z_1 = \frac{b_1}{a_1} e^{p\tau}; \quad Z_2 = \frac{b_2}{a_2} e^{\bar{p}\tau},$$

где

$$p = \mathrm{cfh}\psi_1[B, C]; \quad \bar{p} = \mathrm{cfh}\psi_2[B, C].$$

Далее, составим систему уравнений на точку пересечения геодезических Γ_{am} и Γ_{bc}, где m – некоторая точка на Γ_{bc}:

$$e^{qs} = \frac{b_1}{a_1} e^{p\tau}; \quad e^{\bar{q}s} = \frac{b_2}{a_2} e^{\bar{p}\tau}.$$

Простые выкладки, связанные с исключением τ, приводят к решению:

$$s(q) = \phi[A, B] \frac{\mathrm{cfh}\,\psi_2[B, C]\mathrm{cfh}\,\psi_1[A, B] - \mathrm{cfh}\,\psi_1[B, C]\mathrm{cfh}\,\psi_2[A, B]}{\mathrm{cfh}\,\psi_2[B, C]q - \mathrm{cfh}\,\psi_1[B, C]\bar{q}}. \tag{68}$$

Теперь для тригла $\Sigma(A, B, C)$ имеем цепочку равенств:

$$\Sigma(A, B, C) = \int\limits_{\Delta abc} \frac{dX_1 \wedge dX_2}{X_1X_2} = \int\limits_{\Delta abc} d\ln X_1 \wedge d\ln X_2 = \int\limits_{\Delta abc} d(qs) \wedge d(\bar{q}s) =$$

$$= \int\limits_{\Delta abc} \left(s\bar{q} - sq\frac{d\bar{q}}{dq} \right) dq \wedge ds.$$

Мы использовали представление (67) и стандартные свойства операции $\wedge$. Подставляя производную $d\bar{q}/dq$ из (48) с тривиальными заменами и производя элементарные выкладки под интегралом (с учетом соотношения $q\bar{q}(q + \bar{q}) = 1$), получаем:

$$\Sigma(A, B, C) = 3 \int\limits_{\Delta abc} \frac{s}{q(q + 2\bar{q})} dq \wedge ds = \int\limits_{\mathrm{cfh}\,\psi_1[A,B]}^{\mathrm{cfh}\,\psi_1[A,C]} \frac{dq}{q(q + 2\bar{q})} \int\limits_0^{s(q)} s\, ds.$$

Вычисляя интеграл по s с учетом формулы (68) и свойств функции cfh получаем окончательно следующую формулу для трингла:

$$\Sigma(A,B,C)=\frac{3}{2}\phi^2[A,B](\operatorname{cfh}\psi_1[B,C]\operatorname{cfh}\psi_1[A,B]-\operatorname{cfh}\psi_2[B,C]\operatorname{cfh}\psi_2[A,B])^2\times \tag{69}$$

$$\int\limits_{\operatorname{cfh}\psi_1[A,B]}^{\operatorname{cfh}\psi_1[A,C]}\frac{dx}{\sqrt{x^4+4x}\left(x/\operatorname{cfh}\psi_1[B,C]-(\sqrt{x^4+4x}-x^2)/(2x\operatorname{cfh}\psi_2[B,C])\right)^2}.$$

Отметим, что выражение (69) симметрично относительно циклических перестановок векторов A,B,C, хотя эта симметрия оказалась замаскированной благодаря выбранной нами локальной системе координат с началом в точке A.

Формула (69) определяет конформно-инвариантный трингл, обладающий по своему определению свойством аддитивности в следующем смысле. Помимо векторов A,B,C, рассмотрим четвертый вектор D, обладающий одним из следующих свойств:

$$(A^\flat-C^\flat)\wedge(C^\flat-D^\flat)=0 \quad \text{или} \quad (A^\flat-B^\flat)\wedge(B^\flat-D^\flat)=0.$$

Эти свойства означают, что точки A,C,D или A,B,D лежат в одной плоскости вращения, а приведенные к единичной сфере соответствующие точки a,c,d или a,b,d лежат на одних экстремалях $\mathcal{S}^2_{\mathrm{BM}}$. Для любой такой точки D имеет место равенство:

$$\Sigma(A,B,C)+\Sigma(B,C,D)=\Sigma(A,B,D) \quad \text{или} \quad \Sigma(A,B,C)+\Sigma(B,C,D)=\Sigma(A,C,D) \tag{70}$$

соответственно. Это равенство, по существу, выражает аддитивность площадей на единичной сфере $\mathcal{S}^2_{\mathrm{BM}}$.

Литература

[1] Д. Г. Павлов, *ГЧГФ* (2004) №1, с. 5–19

[2] Г. И. Гарасько, Д. Г. Павлов, *ГЧГФ* (2007) №1 (7), 3–25

[3] Д. Г. Павлов, С. С. Кокарев, *ГЧГФ* 2 (10) (2008) 25–43

[4] Д. Г. Павлов, С. С. Кокарев, *ГЧГФ* 2 (10) (2008) 15–24

[5] Ю. А. Рылов, *ГЧГФ* (2004) №2, с. 69–96

[6] П. К. Рашевский, *Полиметрическая геометрия*

[7] Г. И. Гарасько, Д. Г. Павлов, *ГЧГФ* (2007) №1 (7), с. 3–25

[8] Н. П. Соколов, *Пространственные матрицы и их приложения*, Москва, ГИФМЛ, 1960

Polyangles and their symmetries in $\mathcal{H}_3$

D. G. Pavlov, S. S. Kokarev

Research Institute of Hypercomplex Numbers in Geometry and Physics, Friazino, Russia, RSEC "Logos", Yaroslavl

We construct bingles and tringles in 3D Berwald-Moor space as additive characteristics of pairs and triples of unit vectors – lengths and squares on unit sphere (indicatrix). Two kind of bingles (mutual and relative) can be determined analogously to spherical angles θ and φ respectively. We show that mutual bingle is, in fact, norm in space of exponential bingles (bi-space $\mathcal{H}_3^\flat$), which define exponential representation of polynumbers. It is turned out, that metric of bi-space is the same Berwald-Moor ones. Relative angles are connected with elements of second bi-space $(\mathcal{H}_3^\flat)^\flat$ and give possibility for two-fold exponential representation of polynumbers. Apparent formulae for relative bingles and tringles contain non-elementary integrals.

Key words: indicatrix, extremal, polyangle, bingle, tringle, Berwald-Moor metric, bi-projection, area form.