МНОГОМЕСТНЫЕ ОПЕРАЦИИ НА ДЕКАРТОВЫХ СТЕПЕНЯХ

А. М. Гальмак

Могилевский государственный университет продовольствия
mti@mogilev.by

Для любых целых $k \geq 2$, $l \geq 2$, $m \geq 1$ и любой подстановки $\sigma \in S_k$ на декартовой степени B^{mk} множества B определяется l-арная операция $[\ ]_{l,\sigma,m,mk}$ и изучаются свойства этой операции. Особенно подробно рассматривается случай $m = 1$, то есть операция $[\ ]_{l,\sigma,1,k}$. Частными случаями этой операции, а значит и операции $[\ ]_{l,\sigma,m,mk}$, являются изучавшиеся ранее автором операции $[\ ]_{n,n-1}$, $[\ ]_{n,s(n-1)+1}$ и $[\ ]_{l,k}$.

УДК 512.548

1. ВВЕДЕНИЕ

Многоместным операциям на декартовых степенях посвящены работы автора [1–4]. В [1] для любых целых $l \geq 2$, $k \geq 2$, $m \geq 1$ и $n \geq 3$ были определены и изучались l-арная и n-арная операции $[\ ]_{l,k}$ и $[\ ]_{n,m,m(n-1)}$. Подробное исследование разнообразных свойств этих операций было осуществлено в [2], где приведены также многочисленные примеры, представляющие, на наш взгляд, интерес для исследователей, изучающих многомерные пространства в геометрии и физике. В [3, 4] для тех же, что и выше l и k, и произвольной подстановки $\sigma \in S_k$ была определена еще одна l-арная операция $[\ ]_{l,\sigma,k}$, которая в случае $\sigma = (1\ 2\ \ldots\ k)$ совпадает с операцией $[\ ]_{l,k}$: $[\ ]_{l,k} = [\ ]_{l,(1\,2\,\ldots\,k),k}$. В данной работе, являющейся естественным продолжением работ [1 – 4] определяется и изучается новая многоместная операция $[\ ]_{l,\sigma,m,mk}$, частными случаями которой являются все вышеуказанные операции:

$$[\ ]_{l,k} = [\ ]_{l,(1\,2\,\ldots\,k),1,k}; \quad [\ ]_{n,m,m(n-1)} = [\ ]_{n,(1\,2\,\ldots\,n-1),m,m(n-1)}; \quad (\ )_{l,\sigma,k} = [\ ]_{l,\sigma,1,k}.$$

Определения большинства используемых здесь понятий есть в [2]. Можно воспользоваться также работами [5 – 9].

2. l-АРНАЯ ОПЕРАЦИЯ $[\ ]_{l,k}$

Пусть A – группоид, $k \geq 2$, $l \geq 2$. Определим на A^k вначале бинарную операцию

$$\mathbf{x} \circ \mathbf{y} = (x_1, x_2, \ldots, x_k) \circ (y_1, y_2, \ldots, y_k) = (x_1y_2, x_2y_3, \ldots, x_{k-1}y_k, x_ky_1),$$

а затем l-арную операцию

$$[\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 \ldots \mathbf{x}_l]_{l,k} = \mathbf{x}_1 \circ (\mathbf{x}_2 \circ (\ldots (\mathbf{x}_{l-2} \circ (\mathbf{x}_{l-1} \circ \mathbf{x}_l)) \ldots)). \tag{1}$$

Понятно, что операция $[\ ]_{2,k}$ совпадает с операцией $\circ$.

2.1. Пример. Тернарная $[\ ]_{3,2}$ и 4-арная $[\ ]_{4,2}$ операции, определенные на $\mathbb{R}^2$, где $\mathbb{R}$ рассматривается как группоид с обычной операцией умножения чисел, имеют следующий вид:

$$[(x_1, x_2)(y_1, y_2)(z_1, z_2)]_{3,2} = (x_1y_2z_1, x_2y_1z_2);$$

$$[(x_1, x_2)(y_1, y_2)(z_1, z_2)(u_1, u_2)]_{4,2} = (x_1y_2z_1u_2, x_2y_1z_2u_1).$$

Тернарная операция $[\ \ ]_{3,3}$, определенная на $\mathbb{R}^3$, где $\mathbb{R}$ снова группоид с обычной операцией умножения чисел, имеет следующий вид

$$[(x_1, x_2, x_3)(y_1, y_2, y_3)(z_1, z_2, z_3)]_{3,3} = (x_1y_2z_3, x_2y_3z_1, x_3y_1z_2).$$

Проведя соответствующие вычисления, можно убедиться в ассоциативности тернарной операции $[\ \ ]_{3,2}$ и неассоциативности 4-арной операции $[\ \ ]_{4,2}$ и тернарной операции $[\ \ ]_{3,3}$.

Нам понадобится следующая

2.2. Лемма [1]. Пусть A – полугруппа, $n \geq 3$, $[\ \ ]_{n,n-1}$ – n-арная операция, определенная на A^{n-1} формулой (1) при $k = n-1$, $l = n$. Если $\mathbf{x}_i = (x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{i(n-1)}) \in A^{n-1}$, $i = 1, \ldots, n$, то

$$[\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 \ldots \mathbf{x}_n]_{n,n-1} = (y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}),$$

где

$$y_j = x_{1j}x_{2(j+1)} \ldots x_{(n-j)(n-1)}x_{(n-j+1)1} \ldots x_{(n-1)(j-1)}x_{nj},\ j = 1, \ldots, n-1.$$

Таким образом, согласно лемме 2.2,

$$[\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 \ldots \mathbf{x}_n]_{n,n-1} = (x_{11}x_{22} \ldots x_{(n-1)(n-1)}x_{n1}, x_{12}x_{23} \ldots x_{(n-2)(n-1)}x_{(n-1)1}x_{n2}, \ldots$$
$$\ldots, x_{1(n-2)}x_{2(n-1)}x_{31} \ldots x_{n(n-2)}, x_{1(n-1)}x_{21} \ldots x_{n(n-1)}). \quad (2)$$

Лемма 2.2 показывает, что, если A – полугруппа, то n-арная операция $[\ \ ]_{n,n-1}$, определенная на A^{n-1} может быть определена аналогично n-арной операции, которую Пост определил на множестве всех n-арных подстановок [6, 7, 9], и относительно которой, как он установил, множество всех n-арных подстановок является n-арной группой; в частности, эта n-арная операция ассоциативна. Можно предположить, что ассоциативной будет и n-арная операция (2).

2.3. Теорема [2, 3]. Операция $[\ \ ]_{s(n-1)+1,n-1}$, где $s \geq 1$, определенная на декартовой степени A^{n-1} полугруппы A является ассоциативной. В частности, ассоциативной является n-арная операция $[\ \ ]_{n,n-1}$.

Компоненты в правой части (2) могут быть записаны иначе.

2.4. Предложение [3]. Пусть A – полугруппа, $n \geq 3$, $[\ \ ]_{n,n-1}$ – n-арная операция, определенная на A^{n-1} формулой (1) при $k = n-1$, $l = n$, пусть также $\alpha = (1\,2 \ldots n-1)$ – циклическая подстановка из S_{n-1}, $\mathbf{x}_i = (x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{i(n-1)}) \in A^{n-1}$, $i = 1, \ldots, n$. Тогда

$$[\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 \ldots \mathbf{x}_n]_{n,n-1} = (x_{11}x_{2\alpha(1)} \ldots x_{n\alpha^{n-1}(1)}, \ldots, x_{1(n-1)}x_{2\alpha(n-1)} \ldots x_{n\alpha^{n-1}(n-1)}). \quad (3)$$

2.5 Замечание. Так как α^{n-1} – тождественная подстановка, то $\alpha^{n-1}(j) = j$ для любого $j \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$. Поэтому равенство (3) может быть переписано следующим образом:

$$[\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 \ldots \mathbf{x}_n]_{n,n-1} =$$
$$= (x_{11}x_{2\alpha(1)} \ldots x_{(n-1)\alpha^{n-2}(1)}x_{n1}, \ldots, x_{1(n-1)}x_{2\alpha(n-1)} \ldots x_{(n-1)\alpha^{n-2}(n-1)}x_{n(n-1)}). \quad (4)$$

Пусть $< A, * >$ – группоид, $k \geq 2$, $i \in \{1, \ldots, k-1\}$. Определим преобразование f_i декартовой степени A^k по правилу

$$f_i : (a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, a_k) \to (a_{i+1}, \ldots, a_k, a_1, \ldots, a_i),$$

в частности,

$$f_1 : (a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, a_k) \to (a_2, \ldots, a_{k-1}, a_k, a_1).$$

2.6. Лемма [3]. Справедливы следующие утверждения:
1) $f_i = f_1^i$ для любого $i \in \{2, \ldots, k-1\}$;
2) f_1^k – тождественное преобразование;
3) для любого $i \in \{1, \ldots, k-1\}$ преобразование f_i является автоморфизмом группоида $< A^k, \circ >$ и группоида $< A^k, * >$ с операцией $*$, определенной на A^k покомпонентно.

С помощью этой леммы доказывается следующая

2.7. Теорема [3]. Пусть A – полугруппа, $l \geq 2$, $k \geq 2$. Тогда в полугруппе A^k выполняется тождество

$$[\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 \ldots \mathbf{x}_{l-1}\mathbf{x}_l]_{l,k} = \mathbf{x}_1\mathbf{x}_2^{f_1} \ldots \mathbf{x}_{l-1}^{f_1^{l-2}}\mathbf{x}_l^{f_1^{l-1}}.$$

2.8. Теорема [4]. Пусть A – группоид с единицей, содержащий элемент, отличный от единицы, $k \geq 2$, $2 \leq l \leq k$, $s \geq 0$. Тогда $(sk+l)$-арная операция $[\ ]_{sk+l,k}$, определенная на A^k не является полуассоциативной, в частности ассоциативной.

Более подробная информация об l-арном группоиде $< A^k, [\ ]_{l,k} >$ есть в [2].

3. l-АРНАЯ ОПЕРАЦИЯ $[\ ]_{l,\sigma,k}$

Формулы (3) и (4) наводят на мысль об определении еще одной серии многоместных операций, включающей операцию $[\ ]_{n,n-1}$.

Пусть A – полугруппа, $k \geq 2$, $l \geq 2$, σ – подстановка из S_k. Определим на A^k l-арную операцию

$$[\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 \ldots \mathbf{x}_l]_{l,\sigma,k} = (x_{11}x_{2\sigma(1)} \ldots x_{(l-1)\sigma^{l-2}(1)}x_{l\sigma^{l-1}(1)}, \ldots, x_{1k}x_{2\sigma(k)} \ldots x_{(l-1)\sigma^{l-2}(k)}x_{l\sigma^{l-1}(k)}). \quad (5)$$

3.1. Пример. Укажем вид операций $[\ ]_{3,\sigma_1,3}$, $[\ ]_{3,\sigma_2,3}$ и $[\ ]_{4,\sigma,3}$, где $\sigma_1 = (12) \in S_3$, $\sigma_2 = (13) \in S_3$, $\sigma = (132) \in S_3$,

$$[\mathbf{xyz}]_{3,\sigma_1,3} = (x_1y_2z_1, x_2y_1z_2, x_3y_3z_3), \ [\mathbf{xyz}]_{3,\sigma_2,3} = (x_1y_3z_1, x_2y_2z_2, x_3y_1z_3),$$

$$[\mathbf{xyzu}]_{4,\sigma,3} = (x_1y_3z_2u_1, x_2y_1z_3u_2, x_3y_2z_1u_3).$$

Имеет место

3.2. Теорема [3]. Пусть A – полугруппа, $k \geq 2$, $l \geq 2$, σ – подстановка из S_k, удовлетворяющая условию $\sigma^l = \sigma$. Тогда l-арная операция $[\ ]_{l,\sigma,k}$ является ассоциативной.

Покажем, что если в определении операции $[\ ]_{l,\sigma,k}$ подстановка σ не удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то l-арная операция $[\ ]_{l,\sigma,k}$ может быть неассоциативной.

3.3. Пример. Полагая в (5) $l = k = 3$, $\sigma = (132)$, определим на $\mathbb{R}^3$ тернарную операцию $[\ ] = [\ ]_{3,(132),3}$

$$[\mathbf{xyz}] = (x_1y_{\sigma(1)}z_{\sigma^2(1)}, x_2y_{\sigma(2)}z_{\sigma^2(2)}, x_3y_{\sigma(3)}z_{\sigma^2(3)}) = (x_1y_3z_2, x_2y_1z_3, x_3y_2z_1).$$

Так как σ^3 – тождественная подстановка, то условие $\sigma^3 = \sigma$ не выполняется, а так как

$$[[\mathbf{xyz}]\mathbf{uv}] = [(x_1y_3z_2, x_2y_1z_3, x_3y_2z_1)\mathbf{uv}] = (x_1y_3z_2u_3v_2, x_2y_1z_3u_1v_3, x_3y_2z_1u_2v_1),$$

$$[\mathbf{x}[\mathbf{yzu}]\mathbf{v}] = [\mathbf{x}(y_1z_3u_2, y_2z_1u_3, y_3z_2u_1)\mathbf{v}] = (x_1y_3z_2u_1v_2, x_2y_1z_3u_2v_3, x_3y_2z_1u_3v_1),$$

$$[\mathbf{xy}[\mathbf{zuv}]] = [\mathbf{xy}(z_1u_3v_2, z_2u_1v_3, z_3u_2v_1)] = (x_1y_3z_2u_1v_3, x_2y_1z_3u_2v_1, x_3y_2z_1u_3v_2),$$

то элементы $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$, $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ можно выбрать так, что будут выполняться неравенства:

$$[[\mathbf{xyz}]\mathbf{uv}] \neq [\mathbf{x}[\mathbf{yzu}]\mathbf{v}],\ x_1 = y_3 = z_2 = v_2 = 1,\ u_3 \neq u_1;$$

$$[[\mathbf{xyz}]\mathbf{uv}] \neq [\mathbf{xy}[\mathbf{zuv}]],\ x_1 = y_3 = z_2 = u_3 = u_1 = 1,\ v_2 \neq v_3;$$

$$[\mathbf{x}[\mathbf{yzu}]\mathbf{v}] \neq [\mathbf{xy}[\mathbf{zuv}]],\ x_1 = y_3 = z_2 = u_1 = 1,\ v_2 \neq v_3.$$

Следствием любого из трех записанных неравенств является неассоциативность операции $[\ \ ]$. Из второго неравенства вытекает, что операция $[\ \ ]$ не является и полуассоциативной, то есть в $\mathbb{R}^3$ не выполняется тождество

$$[[\mathbf{xyz}]\mathbf{uv}] = [\mathbf{xy}[\mathbf{zuv}]].$$

Покажем, что тернарная операция, определенная на $\mathbb{R}^3$, не являющаяся ассоциативной, может быть полуассоциативной.

3.4. Пример. Определим на $\mathbb{R}^3$ тернарную операцию

$$[\mathbf{xyz}] = (x_1y_3z_1, x_2y_1z_2, x_3y_2z_3).$$

Так как

$$[[\mathbf{xyz}]\mathbf{uv}] = [(x_1y_3z_1, x_2y_1z_2, x_3y_2z_3)\mathbf{uv}] = (x_1y_3z_1u_3v_1, x_2y_1z_2u_1v_2, x_3y_2z_3u_2v_3),$$

$$[\mathbf{xy}[\mathbf{zuv}]] = [\mathbf{xy}(z_1u_3v_1, z_2u_1v_2, z_3u_2v_3)] = (x_1y_3z_1u_3v_1, x_2y_1z_2u_1v_2, x_3y_2z_3u_2v_3),$$

$$[\mathbf{x}[\mathbf{yzu}]\mathbf{v}] = [\mathbf{x}(y_1z_3u_1, y_2z_1u_2, y_3z_2u_3)\mathbf{v}] = (x_1y_3z_2u_3v_1, x_2y_1z_3u_1v_2, x_3y_2z_1u_2v_3),$$

то

$$[[\mathbf{xyz}]\mathbf{uv}] = [\mathbf{xy}[\mathbf{zuv}]]$$

для любых $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$, $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$, но

$$[\mathbf{xy}[\mathbf{zuv}]] \neq [\mathbf{x}[\mathbf{yzu}]\mathbf{v}]$$

для некоторых $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$, $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Следовательно, операция $[\ \ ]$ является полуассоциативной, но не является ассоциативной.

Заметим, что операция $[\ \ ]$ из предыдущего примера не является операцией вида $(\ )_{l,\sigma,k}$.

3.5. Пример. Положим в теореме 3.2 $A = \mathbb{R}$ – полугруппа с обычной операцией умножения чисел, $k = 4$ и укажем все ассоциативные на $\mathbb{R}^4$ операции вида $[\ \ ]_{l,\sigma,4}$, где $\sigma \in S_4$, $l - 1$ – порядок подстановки σ. Каждая из шести транспозиций

$$(12), (13), (14), (23), (24), (34) \in S_4,$$

как элемент второго порядка, определяет на $\mathbb{R}^4$ тернарную ассоциативную операцию. Выпишем, например, явный вид операции $[\ \ ]_{3,(24),4}$:

$$[x_1x_2x_3]_{3,(24),4} = (x_{11}x_{21}x_{31}, x_{12}x_{24}x_{32}, x_{13}x_{23}x_{33}, x_{14}x_{22}x_{34}).$$

Ассоциативные тернарные операции определяют также три элемента второго порядка

$$(12)(34), (13)(24), (14)(23) \in S_4.$$

Выпишем, например, явный вид операции $[\ \ ]_{3,(14)(23),4}$:

$$[x_1x_2x_3]_{3,(14)(23),4} = (x_{11}x_{24}x_{31}, x_{12}x_{23}x_{32}, x_{13}x_{22}x_{33}, x_{14}x_{21}x_{34}).$$

Каждый из восьми циклов

$$(123), (124), (132), (134), (142), (143), (234), (243) \in S_4,$$

как элемент третьего порядка, определяет на $\mathbb{R}^4$ 4-арную ассоциативную операцию. Выпишем, например, явный вид операции $[\ \ ]_{4,(143),4}$:

$$[x_1x_2x_3x_4]_{4,(143),4} = (x_{11}x_{24}x_{33}x_{41}, x_{12}x_{22}x_{32}x_{42}, x_{13}x_{21}x_{34}x_{43}, x_{14}x_{23}x_{31}x_{44}).$$

Каждый из шести циклов

$$(1234), (1243), (1324), (1342), (1423), (1432) \in S_4,$$

как элемент четвертого порядка, определяет на $\mathbb{R}^4$ 5-арную ассоциативную операцию. Выпишем явный вид всех этих операций:

$$[x_1x_2x_3x_4x_5]_{5,(1234),4} = (x_{11}x_{22}x_{33}x_{44}x_{51}, x_{12}x_{23}x_{34}x_{41}x_{52}, x_{13}x_{24}x_{31}x_{42}x_{53}, x_{14}x_{21}x_{32}x_{43}x_{54});$$

$$[x_1x_2x_3x_4x_5]_{5,(1243),4} = (x_{11}x_{22}x_{34}x_{43}x_{51}, x_{12}x_{24}x_{33}x_{41}x_{52}, x_{13}x_{21}x_{32}x_{44}x_{53}, x_{14}x_{23}x_{31}x_{42}x_{54});$$

$$[x_1x_2x_3x_4x_5]_{5,(1324),4} = (x_{11}x_{23}x_{32}x_{44}x_{51}, x_{12}x_{24}x_{31}x_{43}x_{52}, x_{13}x_{22}x_{34}x_{41}x_{53}, x_{15}x_{21}x_{33}x_{42}x_{54});$$

$$[x_1x_2x_3x_4x_5]_{5,(1342),4} = (x_{11}x_{23}x_{34}x_{42}x_{51}, x_{12}x_{21}x_{33}x_{44}x_{52}, x_{13}x_{24}x_{32}x_{41}x_{53}, x_{15}x_{22}x_{31}x_{43}x_{54});$$

$$[x_1x_2x_3x_4x_5]_{5,(1423),4} = (x_{11}x_{24}x_{32}x_{43}x_{51}, x_{12}x_{23}x_{31}x_{44}x_{52}, x_{13}x_{21}x_{34}x_{42}x_{53}, x_{14}x_{22}x_{33}x_{41}x_{54});$$

$$[x_1x_2x_3x_4x_5]_{5,(1432),4} = (x_{31}x_{24}x_{33}x_{42}x_{51}, x_{12}x_{21}x_{34}x_{43}x_{52}, x_{13}x_{22}x_{31}x_{44}x_{53}, x_{15}x_{23}x_{32}x_{41}x_{54}).$$

Заметим, что определенная на $\mathbb{R}^4$ бинарная операция

$$x_1x_2 = (x_{11}x_{21}, x_{12}x_{22}, x_{13}x_{23}, x_{14}x_{24})$$

определяется, как несложно заметить, тождественной подстановкой $\varepsilon \in S_4$, то есть совпадает с операцией $[\ \ ]_{2,\varepsilon,4}$.

Помимо указанных 24 ассоциативных операций, на $\mathbb{R}^4$ имеются и другие ассоциативные полиадические операции. Так как для любой подстановки $\sigma \in S_4$ порядка r и любого целого $t \geq 1$ подстановка σ^{rt} – тождественная, то по теореме 3.2 $[\ \ ]_{rt+1,\sigma,4}$ – ассоциативная $(rt+1)$-арная операция, определенная на $\mathbb{R}^4$. Например, $[\ \ ]_{7,(13)(24),4}$ и $[\ \ ]_{7,(134),4}$ – ассоциативные 7-арные операции. Для первой из указанных операций $r = 2$, $t = 3$, для второй – $r = 3$, $t = 2$.

Если подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, где $l \geq 2$, то и для обратной подстановки σ^{-1} верно соответствующее равенство $(\sigma^{-1})^l = \sigma^{-1}$. Поэтому из теоремы 3.2 вытекает

3.6. Следствие [3]. Пусть A – полугруппа, $k \geq 2$, $l \geq 2$, γ – подстановка из S_k, удовлетворяющая условию $\gamma^l = \gamma$, $\sigma = \gamma^{-1}$. Тогда l-арная операция $[\ \ ]_{l,\sigma,k}$ является ассоциативной.

Например, в примере 3.5 ассоциативность операции $[\ \ ]_{5,(1324),4}$ может быть получена как следствие ассоциативности операции $[\ \ ]_{5,(1423),4}$, так как подстановки (1324) и (1423) взаимно обратны.

3.7. Теорема [4]. Пусть A – полугруппа с единицей, $k \geq 2$, $l \geq 2$, σ – подстановка из S_k, удовлетворяющая условию $\sigma^l \neq \sigma$. Тогда l-арная операция $[\ \ ]_{l,\sigma,k}$ не является полуассоциативной, в частности ассоциативной.

3.8. Предложение. Если $< A, +, \times >$ – ассоциативная алгебра над полем P, то $< A^k, +, [\ \ ]_{l,\sigma,k} >$ – $(2, l)$-алгебра над P. Если же $\sigma^l = \sigma$, то $< A^k, +, [\ \ ]_{l,\sigma,k} >$ – ассоциативная $(2, l)$-алгебра над P.

3.9. Предложение. Пусть полугруппа A содержит единицу и элемент, отличный от единицы. Если подстановка $\sigma \in S_k$ не является тождественной, то l-арный группоид $< A^k, [\ \ ]_{l,\sigma,k} >$ не является абелевым.

3.10. Предложение. Если подстановка $\sigma \in S_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то из абелевости полугруппы A следует полуабелевость l-арной полугруппы $< A^k, [\ \ ]_{l,\sigma,k} >$. Если же полугруппа A содержит единицу, то верно и обратное утверждение, то есть из полуабелевости l-арной полугруппы $< A^k, [\ \ ]_{l,\sigma,k} >$ следует абелевость полугруппы A.

3.11. Предложение. Если A – группа, то $< A^k, [\ \ ]_{l,\sigma,k} >$ – l-арная квазигруппа. Если же, кроме того, выполняется условие $\sigma^l = \sigma$, то $< A^k, [\ \ ]_{l,\sigma,k} >$ – l-арная группа.

3.12. Предложение. Если 0 – нуль полугруппы A, то $\underbrace{(0, \ldots, 0)}_{k}$ – нуль l-арного группоида $< A^k, [\ \ ]_{l,\sigma,k} >$. Если к тому же $l \geq 3$, то в l-арном группоиде $< A^k, [\ \ ]_{l,\sigma,k} >$ все элементы являются делителями его нуля.

3.13. Предложение. Если полугруппа A содержит более одного элемента, а σ – нетождественная подстановка из S_k, то в $< A^k, [\ \ ]_{l,\sigma,k} >$ нет единиц.

Если $< A, +, \times >$ – алгебра над полем P, $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_k) \in A^k$, то положим

$$\overline{\mathbf{a}} = (a_1, -a_2, \ldots, -a_k) \in A^k.$$

3.14. Предложение. Если A – ассоциативная алгебра над полем P, то

$$\overline{[\mathbf{x_1 x_2} \ldots \mathbf{x}_l]_{l,\sigma,k}} = [\overline{\mathbf{x}}_\mathbf{1} \mathbf{x_2} \ldots \mathbf{x}_l]_{l,\sigma,k}.$$

Если же σ – цикл длины k из S_k, удовлетворяющий условию $\sigma^l = \sigma$, то

$$\overline{[\mathbf{x_1 x_2} \ldots \mathbf{x}_l]_{l,\sigma,k}} = [\overline{\mathbf{x}}_\mathbf{1} \overline{\mathbf{x}}_\mathbf{2} \ldots \overline{\mathbf{x}}_l]_{l,\sigma,k}$$

при четном $\dfrac{(l-1)(k-1)}{k}$,

$$\overline{[\mathbf{x_1 x_2} \ldots \mathbf{x}_l]_{l,\sigma,k}} = -[\overline{\mathbf{x}}_\mathbf{1} \overline{\mathbf{x}}_\mathbf{2} \ldots \overline{\mathbf{x}}_l]_{l,\sigma,k}$$

при нечетном $\dfrac{(l-1)(k-1)}{k}$,

3.15. Следствие. Если A – ассоциативная алгебра над полем P, σ – цикл длины k из S_k, то

$$\overline{[\mathbf{x_1 x_2} \ldots \mathbf{x_{k+1}}]_{k+1,\sigma,k}} = [\overline{\mathbf{x}}_\mathbf{1} \overline{\mathbf{x}}_\mathbf{2} \ldots \overline{\mathbf{x}}_\mathbf{k+1}]_{k+1,\sigma,k}$$

при нечетном k,

$$\overline{[\mathbf{x_1 x_2} \ldots \mathbf{x_{k+1}}]_{k+1,\sigma,k}} = -[\overline{\mathbf{x}}_\mathbf{1} \overline{\mathbf{x}}_\mathbf{2} \ldots \overline{\mathbf{x}}_\mathbf{k+1}]_{k+1,\sigma,k}.$$

при четном k.

3.16. Следствие. Если A – ассоциативная алгебра над полем P, σ – цикл длины k из S_k, то

$$\overline{[\mathbf{x_1 x_2 \ldots x_{2k-1}}]_{2k-1,\sigma,k}} = [\overline{\mathbf{x}}_\mathbf{1}\overline{\mathbf{x}}_\mathbf{2}\ldots\overline{\mathbf{x}}_\mathbf{2k-1}]_{2k-1,\sigma,k}.$$

3.17. Предложение. Если A – группа, 1 – ее единица, $\sigma = \sigma_1 \ldots \sigma_p$ – разложение в произведение независимых циклов, исключая циклы единичной длины, подстановки $\sigma \in S_k$, удовлетворяющей условию $\sigma^l = \sigma$, то элемент $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k)$ является идемпотентом в $< A^k, [\ \ ]_{l,\sigma,k} >$ тогда и только тогда, когда компоненты ε_m, индексы m которых подстановка σ оставляет неподвижными, удовлетворяют условию

$$\varepsilon_m^{l-1} = 1,$$

а компоненты, индексы которых входят в запись цикла σ_r $(r = 1, \ldots, p)$, удовлетворяют условию

$$\varepsilon_{i_r}\varepsilon_{\sigma(i_r)}\varepsilon_{\sigma^2(i_r)} \ldots \varepsilon_{\sigma^{l-2}(i_r)} = 1,$$

где i_r – любой символ, входящий в запись цикла σ_r.

3.18. Следствие. Если A – группа, 1 – ее единица, цикл $\sigma \in S_k$ длины k удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то

$$I(A^k, [\ \ ]_{l,\sigma,k}) = \{(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k) \in A^k | (\varepsilon_1\varepsilon_{\sigma(1)}\varepsilon_{\sigma^2(1)} \ldots \varepsilon_{\sigma^{k-1}(1)})^{\frac{l-1}{k}} = 1\}.$$

В частности,

$$I(A^k, [\ \ ]_{k+1,\sigma,k}) = \{(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k) \in A^k | \varepsilon_1\varepsilon_{\sigma(1)}\varepsilon_{\sigma^2(1)} \ldots \varepsilon_{\sigma^{k-1}(1)} = 1\}.$$

3.19. Следствие. Если A – абелева группа, 1 – ее единица, а цикл $\sigma \in S_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то

$$I(A^k, [\ \ ]_{l,\sigma,k}) = \{(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k) \in A^k | (\varepsilon_1\varepsilon_2 \ldots \varepsilon_k)^{\frac{l-1}{k}} = 1\}.$$

В частности,

$$I(A^k, [\ \ ]_{k+1,\sigma,k}) = \{(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k) \in A^k | \varepsilon_1\varepsilon_2 \ldots \varepsilon_k = 1\}.$$

3.20. Замечание. В предложении 3.17 условие

$$\varepsilon_{i_r}\varepsilon_{\sigma(i_r)}\varepsilon_{\sigma^2(i_r)} \ldots \varepsilon_{\sigma^{l-2}(i_r)} = 1$$

можно заменить равносильным условием

$$\varepsilon_{\sigma(i_r)}\varepsilon_{\sigma^2(i_r)} \ldots \varepsilon_{\sigma^{l-2}(i_r)}\varepsilon_{i_r} = 1.$$

Соответствующие замены можно сделать в следствиях 3.18 и 3.19.

3.21. Теорема. Пусть, $< A, +, \times >$ – ассоциативная алгебра над полем P, 0 – ее нуль, $k \geq 2$, $l \geq 3$, k делит $l-1$, σ – цикл длины k из S_k. Тогда:

1) $< A^k, +, [\ \ ]_{l,\sigma,k} >$ – ассоциативная $(2, l)$-алгебра над P, в которой все элементы являются делителями ее нуля $\underbrace{(0, \ldots, 0)}_{k}$;

2) если $< A, +, \times >$ – коммутативна, то $< A^k, +, [\ \ ]_{l,\sigma,k} >$ – полуабелева;

3) если $< A\backslash\{0\}, \times >$ – группа, то $< (A\backslash\{0\})^k, [\ \ ]_{l,\sigma,k} >$ – l-арная группа;

4) для любого $j \in \{1, \ldots, k\}$ и любого $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_{j-1}, 0, a_{j+1}, \ldots, a_k) \in A^k$ верно

$$[\underbrace{\mathbf{a}, \ldots, \mathbf{a}}_{l}]_{l,\sigma,k} = \underbrace{(0, \ldots, 0)}_{k};$$

5) если алгебра $< A, +, \times >$ содержит более одного элемента и в ней есть единица, то $< A^k, +, [\ \ ]_{l,\sigma,k} >$ – неабелева;

6) если A содержит более одного элемента, то в $< A^k, +, [\ \ ]_{l,\sigma,k} >$ нет единиц;

7) если $< A \backslash \{0\}, \times >$ – группа, 1 – ее единица, то

$$I(A^k, [\ \ ]_{l,\sigma,k}) = \{(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k) \in A^k | (\varepsilon_1 \varepsilon_{\sigma(1)} \ldots \varepsilon_{\sigma^{l-2}(1)})^{\frac{l-1}{k}} = 1\} \bigcup \{(\underbrace{0, \ldots, 0}_{k})\};$$

8) если $\dfrac{(l-1)(k-1)}{k}$ – четное, то $\overline{[\mathbf{x_1 x_2} \ldots \mathbf{x}_l]}_{l,\sigma,k} = [\overline{\mathbf{x}}_\mathbf{1} \overline{\mathbf{x}}_\mathbf{2} \ldots \overline{\mathbf{x}}_l]_{l,\sigma,k}$, если же $\dfrac{(l-1)(k-1)}{k}$ – нечетное, то $\overline{[\mathbf{x_1 x_2} \ldots \mathbf{x}_l]}_{l,\sigma,k} = -[\overline{\mathbf{x}}_\mathbf{1} \overline{\mathbf{x}}_\mathbf{2} \ldots \overline{\mathbf{x}}_l]_{l,\sigma,k}$.

Доказательство. 1) Используются предложения 3.8 и 3.12.

2) Используется предложение 3.10.

3) Используется предложение 3.11.

4) Проверяется непосредственными вычислениями.

5) Используется предложение 3.9.

6) Используется предложение 3.13.

7) Используется следствие 3.18 и утверждение 4).

8) Используется предложение 3.14. Предложение доказано.

Полагая в теореме 3.21 $l = k + 1$, получим

3.22. Следствие. Пусть $< A, +, \times >$ – ассоциативная алгебра над полем P, 0 – ее нуль, $k \geq 2$, σ – цикл длины k из S_k. Тогда:

1) $< A^k, +, [\ \ ]_{k+1,\sigma,k} >$ – ассоциативная $(2, k+1)$–алгебра над P, в которой все элементы являются делителями ее нуля $(\underbrace{0, \ldots, 0}_{k})$;

2) если $< A, +, \times >$ – коммутативна, то $< A^k, +, [\ \ ]_{k+1,\sigma,k} >$ – полуабелева;

3) если $< A \backslash \{0\}, \times >$ – группа, то $< (A \backslash \{0\})^k, [\ \ ]_{k+1,\sigma,k} >$ – $(k+1)$-арная группа;

4) для любого $j \in \{1, \ldots, k\}$ и любого $a = (a_1, \ldots, a_{j-1}, 0, a_{j+1}, \ldots, a_k) \in A^k$ верно

$$[\underbrace{a, \ldots, a}_{k+1}]_{k+1,\sigma,k} = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{k});$$

5) если алгебра $< A, +, \times >$ содержит более одного элемента и в ней есть единица, то $< A^k, +, [\ \ ]_{k+1,\sigma,k} >$ – неабелева;

6) если A содержит более одного элемента, то в $< A^k, +, [\ \ ]_{k+1,\sigma,k} >$ нет единиц;

7) если $< A \backslash \{0\}, \times >$ – группа, 1 – ее единица, то

$$I(A^k, +, [\ \ ]_{k+1,\sigma,k}) = \{(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k) \in A^k | \varepsilon_1 \varepsilon_{\sigma(1)} \ldots \varepsilon_{\sigma^{l-2}(1)} = 1\} \bigcup \{(\underbrace{0, \ldots, 0}_{k})\};$$

8) если k – нечетное, то $\overline{[\mathbf{x_1 x_2} \ldots \mathbf{x_{k+1}}]}_{k+1,\sigma,k} = [\overline{\mathbf{x}}_\mathbf{1} \overline{\mathbf{x}}_\mathbf{2} \ldots \overline{\mathbf{x}}_\mathbf{k+1}]_{k+1,\sigma,k}$, если же k – четное, то $\overline{[\mathbf{x_1 x_2} \ldots \mathbf{x_{k+1}}]}_{k+1,\sigma,k} = -[\overline{\mathbf{x}}_\mathbf{1} \overline{\mathbf{x}}_\mathbf{2} \ldots \overline{\mathbf{x}}_\mathbf{k+1}]_{k+1,\sigma,k}$.

Прежде чем перейти к следующему разделу, докажем совпадение операций $[\ \ ]_{l,k}$ и $[\ \ ]_{l,(12\ldots k),k}$.

3.23. Предложение. Пусть A – полугруппа, $l \geq 2$, $k \geq 2$, $\alpha = (12 \ldots k) \in S_k$. Тогда операции $[\ \ ]_{l,k}$ и $[\ \ ]_{l,\alpha,k}$ совпадают: $[\ \ ]_{l,k} = [\ \ ]_{l,\alpha,k}$.

Доказательство. Пусть $l = sk + r$, $s \geq 0$, $1 \leq r \leq k$. Используя теорему 2.7, утверждения 1) и 2) леммы 2.6, определение преобразования f_i и равенства

$$\alpha(j) = j{+}1,\ \alpha^2(j) = j{+}2,\ \ldots,\ \alpha^{k-j}(j) = k,\ \alpha^{k-j+1}(j) = 1,\ \ldots,\ \alpha^{k-1}(j) = j{-}1,\ \alpha^k(j) = j,$$

получим

$$[\mathbf{x_1x_2\ldots x}_l]_{l,k} = [\mathbf{x_1x_2\ldots x_kx_{k+1}x_{k+2}\ldots x_{2k}x_{2k+1}x_{2k+2}}\ldots$$
$$\ldots\mathbf{x_{(s-1)k}x_{(s-1)k+1}x_{(s-1)k+2}\ldots x_{sk}x_{sk+1}x_{sk+2}\ldots x_{sk+r}}]_{l,k} =$$
$$= \mathbf{x_1x_2^{f_1}\ldots x_k^{f_{k-1}}x_{k+1}^{f_k}x_{k+2}^{f_{k+1}}\ldots x_{2k}^{f_{2k-1}}x_{2k+1}^{f_{2k}}x_{2k+2}^{f_{2k+1}}}\ldots$$
$$\ldots\mathbf{x_{(s-1)k}^{f_{(s-1)k-1}}x_{(s-1)k+1}^{f_{(s-1)k}}x_{(s-1)k+2}^{f_{(s-1)k+1}}\ldots x_{sk}^{f_{sk-1}}x_{sk+1}^{f_{sk}}x_{sk+2}^{f_{sk+1}}\ldots x_{sk+r}^{f_{sk+r-1}}} =$$
$$= \mathbf{x_1x_2^{f_1}\ldots x_k^{f_{k-1}}x_{k+1}x_{k+2}^{f_1}\ldots x_{2k}^{f_{k-1}}x_{2k+1}x_{2k+2}^{f_1}}\ldots$$
$$\ldots\mathbf{x_{(s-1)k}^{f_{k-1}}x_{(s-1)k+1}x_{(s-1)k+2}^{f_1}\ldots x_{sk}^{f_{k-1}}x_{sk+1}x_{sk+2}^{f_1}\ldots x_{sk+r}^{f_{r-1}}} =$$
$$= (x_{11},\ldots,x_{1k})(x_{22},\ldots,x_{2k},x_{21})\ldots(x_{kk},x_{k1},\ldots,x_{k(k-1)})$$
$$(x_{(k+1)1},\ldots,x_{(k+1)k})(x_{(k+2)2},\ldots,x_{(k+2)k},x_{(k+2)1})\ldots(x_{(2k)k},x_{(2k)1},\ldots,x_{(2k)(k-1)})$$
$$(x_{(2k+1)1},\ldots,x_{(2k+1)k})(x_{(2k+2)2},\ldots,x_{(2k+2)k},x_{(2k+2)1})\ldots(x_{((s-1)k)k},x_{((s-1)k)1},\ldots,x_{((s-1)k)(k-1)})$$
$$(x_{((s-1)k+1)1},\ldots,x_{((s-1)k+1)k})(x_{((s-1)k+2)2},\ldots,x_{((s-1)k+2)k},x_{((s-1)k+2)1})\ldots$$
$$\ldots(x_{(sk)k},x_{(sk)1},\ldots,x_{(sk)(k-1)})(x_{(sk+1)1},\ldots,x_{(sk+1)k})(x_{(sk+2)2},\ldots,x_{(sk+2)k},x_{(sk+2)1})\ldots$$
$$\ldots(x_{(sk+r)r},\ldots,x_{(sk+r)k},x_{(sk+r)1},\ldots,x_{(sk+r)(r-1)}) =$$
$$= (x_{11},\ldots,x_{1k})(x_{2\alpha(1)},\ldots,x_{2\alpha(k-1)},x_{2\alpha(k)})\ldots(x_{k\alpha^{k-1}(1)}x_{k\alpha^{k-1}(2)},\ldots,x_{k\alpha^{k-1}(k)})$$
$$(x_{(k+1)1},\ldots,x_{(k+1)k})(x_{(k+2)\alpha(1)},\ldots,x_{(k+2)\alpha(k)})\ldots(x_{(2k)\alpha^{k-1}(1)},\ldots,x_{(2k)\alpha^{k-1}(k)})$$
$$(x_{(2k+1)1},\ldots,x_{(2k+1)k})(x_{(2k+2)\alpha(1)},\ldots,x_{(2k+2)\alpha(k)})\ldots(x_{((s-1)k)\alpha^{k-1}(1)},\ldots,x_{((s-1)k)\alpha^{k-1}(k)})\ldots$$
$$\ldots(x_{((s-1)k+1)1},\ldots,x_{((s-1)k+1)k})(x_{((s-1)k+2)\alpha(1)},\ldots,x_{((s-1)k+2)\alpha(k)})\ldots(x_{(sk)\alpha^{k-1}(1)},\ldots,x_{(sk)\alpha^{k-1}(k)})$$
$$(x_{(sk+1)1},\ldots,x_{(sk+1)k})(x_{(sk+2)\alpha(1)},\ldots,x_{(sk+2)\alpha(k)})\ldots(x_{(sk+r)\alpha^{r-1}(1)},\ldots,x_{(sk+r)\alpha^{r-1}(k)}) =$$
$$= (x_{11}x_{2\alpha(1)}\ldots x_{k\alpha^{k-1}(1)}x_{(k+1)1}x_{(k+2)\alpha(1)}\ldots x_{(2k)\alpha^{k-1}(1)}\ldots x_{((s-1)k+1)1}x_{((s-1)k+2)\alpha(1)}\ldots$$
$$\ldots x_{(sk)\alpha^{k-1}(1)}x_{(sk+1)1}x_{(sk+2)\alpha(1)}\ldots x_{(sk+r)\alpha^{r-1}(1)},\ldots,x_{1k}x_{2\alpha(k)}\ldots x_{k\alpha^{k-1}(k)}x_{(k+1)k}x_{(k+2)\alpha(k)}\ldots$$
$$\ldots x_{(2k)\alpha^{k-1}(k)}\ldots x_{((s-1)k+1)k}x_{((s-1)k+2)\alpha(k)}\ldots x_{(sk)\alpha^{k-1}(k)}\ldots x_{(sk+1)k}x_{(sk+2)\alpha(k)}x_{(sk+r)\alpha^{r-1}(k)}) =$$
$$= (x_{11}x_{2\alpha(1)}\ldots x_{k\alpha^{k-1}(1)}x_{(k+1)\alpha^k(1)}x_{(k+2)\alpha^{k+1}(1)}\ldots x_{(2k)\alpha^{2k-1}(1)}\ldots$$
$$\ldots x_{((s-1)k+1)\alpha^{(s-1)k}(1)}x_{((s-1)k+2)\alpha^{(s-1)k+1}(1)}\ldots x_{(sk)\alpha^{sk-1}(1)}x_{(sk+1)\alpha^{sk}(1)}x_{(sk+2)\alpha^{sk+1}(1)}\ldots$$
$$\ldots x_{(sk+r)\alpha^{sk+r-1}(1)},\ldots,x_{1k}x_{2\alpha(k)}\ldots x_{k\alpha^{k-1}(k)}x_{(k+1)\alpha^k(k)}x_{(k+2)\alpha^{k+1}(k)}\ldots x_{(2k)\alpha^{2k-1}(k)}\ldots$$
$$\ldots x_{((s-1)k+1)\alpha^{(s-1)k}(k)}x_{((s-1)k+2)\alpha^{(s-1)k+1}(k)}\ldots x_{(sk)\alpha^{sk-1}(k)}$$
$$x_{(sk+1)\alpha^{sk}(k)}x_{(sk+2)\alpha^{sk+1}(k)}\ldots x_{(sk+r)\alpha^{sk+r-1}(k)}) =$$
$$= (x_{11}x_{2\alpha(1)}\ldots x_{(sk+r)\alpha^{sk+r-1}(1)},\ldots,x_{1k}x_{2\alpha(k)}\ldots x_{(sk+r)\alpha^{sk+r-1}(k)}) =$$
$$= (x_{11}x_{2\alpha(1)}\ldots x_{l\alpha^{l-1}(1)},\ldots,x_{1k}x_{2\alpha(k)}\ldots x_{l\alpha^{l-1}(k)}) = [x_1x_2\ldots x_l]_{l,\alpha,k},$$

то есть

$$[x_1x_2\ldots x_l]_{l,k} = [x_1x_2\ldots x_l]_{l,\alpha,k}.$$

Предложение доказано.

Предложение 3.23 показывает, что теорема 6.1 и следствие 6.2 из [2] являются частными случаями теоремы 3.21 и следствия 3.22 соответственно, так как получаются из них при $n \geq 3$, $l = s(n{-}1)$, $k = n{-}1$, $\sigma = (12\ldots n{-}1)$. Отметим, что частными случаями утверждений 3.8 – 3.19 являются также соответствующие утверждения из [2].

4. n-АРНАЯ ОПЕРАЦИЯ $[\ \ ]_{\mathbf{n,m,m(n-1)}}$

Пусть B – множество, $m \geq 1$, $n \geq 3$, $A = B^m$ – m-ая декартова степень множества A, $< A, \times >$ – полугруппа, операцию которой в некоторых случаях для сокращения записей указывать не будем.

Заметим, что если B – полугруппа, то в качестве $\times$ можно взять операцию, определенную на $A = B^m$ покомпонентно.

Определим на $B^{m(n-1)}$ n-арную операцию $[\ \ ]_{n,m,m(n-1)}$ следующим образом. Если

$$\boldsymbol{\alpha_i} = (\alpha_{i1}^{(1)}, \ldots, \alpha_{im}^{(1)}, \alpha_{i1}^{(2)}, \ldots, \alpha_{im}^{(2)}, \ldots \alpha_{i1}^{(n-1)}, \ldots, \alpha_{im}^{(n-1)}) \in B^{m(n-1)},\ i \in \{1, \ldots, n\},$$

то

$$[\boldsymbol{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n}]_{n,m,m(n-1)} = (y_{11}, \ldots, y_{1m}, y_{21}, \ldots, y_{2m}, \ldots, y_{(n-1)1}, \ldots, y_{(n-1)m}) \in B^{m(n-1)}, \tag{6}$$

где y_{ij} определяются следующим образом

$$\begin{gathered}(y_{j1}, \ldots, y_{jm}) = (\alpha_{11}^{(j)}, \ldots, \alpha_{1m}^{(j)}) \times (\alpha_{21}^{(j+1)}, \ldots, \alpha_{2m}^{(j+1)}) \times \ldots \\ \ldots (\alpha_{(n-j)1}^{(n-1)}, \ldots, \alpha_{(n-j)m}^{(n-1)}) \times (\alpha_{(n-j+1)1}^{(1)}, \ldots, \alpha_{(n-j+1)m}^{(1)}) \times \ldots \\ \ldots (\alpha_{(n-1)1}^{(j-1)}, \ldots, \alpha_{(n-1)m}^{(j-1)}) \times (\alpha_{n1}^{(j)}, \ldots, \alpha_{nm}^{(j)}) \in B^m,\ j = 1, \ldots, n-1.\end{gathered} \tag{7}$$

Если положить $\boldsymbol{\alpha_{ij}} = (\alpha_{i1}^{(j)}, \ldots, \alpha_{im}^{(j)}) \in B^m$, $\mathbf{y_j} = (y_{j1}, \ldots, y_{jm})$, $j \in \{1, \ldots, n-1\}$, то

$$\mathbf{y_j} = \boldsymbol{\alpha_{ij} \alpha_{2(j+1)} \ldots \alpha_{(n-j)(n-1)} \alpha_{(n-j+1)1} \ldots \alpha_{(n-1)(j-1)} \alpha_{nj}} \in B^m.$$

Понятно, что ввиду (2), при $m = 1$ n-арная операция $[\ \ ]_{n,m,m(n-1)}$ совпадает с n-арной операцией $[\ \ ]_{n,n-1}$: $[\ \ ]_{n,n-1} = [\ \ ]_{n,1,n-1}$.

4.1. Теорема [1, 2]. n-Арная операция $[\ \ ]_{n,m,m(n-1)}$ ассоциативна.

Если в теореме 4.1 положить $m = 2$, то получим

4.2. Следствие. n-Арная операция $[\ \ ]_{n,2,2(n-1)}$ ассоциативна.

Если в следствии 4.2 положить $n = 3$, $B = \mathbb{R}$, а в качестве операции $\times$ взять умножение комплексных (двойных, дуальных) чисел, то получим три различные ассоциативные тернарные операции, определенные на $\mathbb{R}^4$. Явный вид этих операций есть в [1, 2].

Вообще, если в качестве операции $\times$ брать операцию умножения комплексных (двойных, дуальных) чисел, то согласно следствию 4.2, для любого $n \geq 3$ на декартовой степени $\mathbb{R}^{2(n-1)}$ можно построить три различные ассоциативные n-арные операции. Укажем здесь явный вид такой операции для умножения комплексных чисел при $n = 4$.

4.3. Следствие [1, 2]. Определенная на $\mathbb{R}^6$ 4-арная операция

$$\begin{gathered}[(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6) \\ (z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6)(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6)]_{4,2,6} = (r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6),\end{gathered}$$

где

$$r_1 = x_1y_3z_5u_1 - x_2y_4z_5u_1 - x_1y_4z_6u_1 - x_2y_3z_6u_1 - x_1y_3z_6u_2 + x_2y_4z_6u_2 - x_1y_4z_5u_2 - x_2y_3z_5u_2,$$

$$r_2 = x_1y_3z_5u_2 - x_2y_4z_5u_2 - x_1y_4z_6u_2 - x_2y_3z_6u_2 + x_1y_3z_6u_1 - x_2y_4z_6u_1 + x_1y_4z_5u_1 + x_2y_3z_5u_1,$$

$r_3 = x_3y_5z_1u_3 - x_4y_6z_1u_3 - x_3y_6z_2u_3 - x_4y_5z_2u_3 - x_3y_5z_2u_4 + x_4y_6z_2u_4 - x_3y_6z_1u_4 - x_4y_5z_1u_4,$

$r_4 = x_3y_5z_1u_4 - x_4y_6z_1u_4 - x_3y_6z_2u_4 - x_4y_5z_2u_4 + x_3y_5z_2u_3 - x_4y_6z_2u_3 + x_3y_6z_1u_3 + x_4y_5z_1u_3,$

$r_5 = x_5y_1z_3u_5 - x_6y_2z_3u_5 - x_5y_2z_4u_5 - x_6y_1z_4u_5 - x_5y_1z_4u_6 + x_6y_2z_4u_6 - x_5y_2z_3u_6 - x_6y_1z_3u_6,$

$r_6 = x_5y_1z_3u_6 - x_6y_2z_3u_6 - x_5y_2z_4u_6 - x_6y_1z_4u_6 + x_5y_1z_4u_5 - x_6y_2z_4u_5 + x_5y_2z_3u_5 + x_6y_1z_3u_5,$

является ассоциативной.

Если в теореме 4.1 положить $m = 4$, $B = \mathbb{R}$, а в качестве операции $\times$ взять умножение кватернионов, то для любого $n \geq 3$ на декартовой степени $\mathbb{R}^{4(n-1)}$ можно определить ассоциативную n-арную операцию. В [1, 2] указан явный вид такой операции при $m = 4$, $n = 3$, то есть тернарной операции, определенной на $\mathbb{R}^8$.

5. l-АРНАЯ ОПЕРАЦИЯ $[\ \ ]_{\mathbf{l,\sigma,m,mk}}$

Как уже отмечалось, при $m = 1$ n-арная операция $[\ \ ]_{n,m,m(n-1)}$ совпадает с n-арной операцией $[\ \ ]_{n,n-1}$, которая является частным случаем операции $[\ \ ]_{l,k}$ при $l = n$, $k = n-1$, а последняя, в свою очередь, является частным случаем операции $[\ \ ]_{l,\sigma,k}$ при $\sigma = (12\ldots k)$. В связи со сказанным возникает задача: обобщить операцию $[\ \ ]_{n,m,m(n-1)}$ так, чтобы при $m = 1$ она совпадала с операцией $[\ \ ]_{l,\sigma,k}$.

Пусть B – множество, $m \geq 1$, $l \geq 2$, $k \geq 2$, $\sigma \in S_k$, $A = B^m$ – m-ая декартова степень множества B, $< A, \times >$ – полугруппа. Как и ранее, в некоторых случаях операцию $\times$ указывать не будем.

Определим на B^{mk} – l-арную $[\ \ ]_{l,\sigma,m,mk}$ следующим образом. Если

$$\boldsymbol{\alpha_i} = (\alpha_{i1}^{(1)}, \ldots, \alpha_{im}^{(1)}, \alpha_{i1}^{(2)}, \ldots, \alpha_{im}^{(2)}, \ldots, \alpha_{i1}^{(k)}, \ldots, \alpha_{im}^{(k)}) \in B^{mk},\ i \in \{1, \ldots, l\},$$

то

$$[\boldsymbol{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_l}]_{l,\sigma,m,mk} = (y_{11}, \ldots, y_{1m}, y_{21}, \ldots, y_{2m}, \ldots, y_{k1}, \ldots, y_{km}) \in B^{mk}, \tag{8}$$

где y_{ij} определяются следующим образом

$$(y_{j1}, \ldots, y_{jm}) = (\alpha_{11}^{(j)}, \ldots, \alpha_{1m}^{(j)}) \times (\alpha_{21}^{(\sigma(j))}, \ldots, \alpha_{2m}^{(\sigma(j))}) \times \ldots$$
$$\ldots(\alpha_{(l-1)1}^{(\sigma^{l-2}(j))}, \ldots, \alpha_{(l-1)m}^{(\sigma^{l-2}(j))}) \times (\alpha_{lm}^{(\sigma^{l-1}(j))}, \ldots, \alpha_{lm}^{(\sigma^{l-1}(j))}). \tag{9}$$

Если положить

$$\boldsymbol{\alpha_{ij}} = (\alpha_{i1}^{(j)}, \ldots, \alpha_{im}^{(j)}) \in B^m,\ \boldsymbol{y_j} = (y_{j1}, \ldots, y_{jm}),\ j \in \{1, \ldots, k\},$$

то равенство (9) примет следующий вид

$$\boldsymbol{y_j = \alpha_{1j}\alpha_{2\sigma(j)}\ldots\alpha_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)}\alpha_{l\sigma^{l-1}(j)}} \in B^m.$$

Понятно, что ввиду (4), при $m = 1$ l-арная операция $[\ \ ]_{l,\sigma,m,mk}$ совпадает с l-арной операцией $(\ \ )_{l,\sigma,k}$. Если же $l = n$, $k = n-1$, $\sigma = (12\ldots n-1)$, то (8) и (9) принимают вид (6) и (7), а операция $[\ \ ]_{l,\sigma,m,mk}$ совпадает с операцией $[\ \ ]_{n,m,m(n-1)}$. Таким образом, поставленная задача обобщения операции $[\ \ ]_{n,m,m(n-1)}$ решена.

Рассмотрим на $A^k = \underbrace{B^m \times \ldots \times B^m}_{k}$ l-арную операцию $(\ )_{l,\sigma,k}$ и запишем явный вид этой операции. Для этого для любого $i \in \{1, \ldots, l\}$ положим

$$\mathbf{x_i} = (\mathbf{x_{i1}}, \ldots, \mathbf{x_{ik}}) \in A^k,\ \mathbf{x_{ij}} = (x_{i1}^{(j)}, \ldots, x_{im}^{(j)}) \in B^m,\ j = 1, \ldots, k,$$

то есть
$$\mathbf{x_i} = ((x_{i1}^{(1)}, \dots, x_{im}^{(1)}), (x_{i1}^{(2)}, \dots, x_{im}^{(2)}), \dots, (x_{i1}^{(k)}, \dots, x_{im}^{(k)})) \in A^k.$$
Используя равенство (5) из определения операции $(\ )_{l,\sigma,k}$, получим
$$[\mathbf{x_1}\mathbf{x_2}\dots\mathbf{x}_l]_{l,\sigma,k} = (\mathbf{y_1}, \mathbf{y_2}, \dots, \mathbf{y_k}),$$
где
$$\mathbf{y_j} = \boldsymbol{x_{1j}x_{2\sigma(j)}\dots x_{(l-1)\sigma^{(l-2)}(j)}x_{l\sigma^{(l-1)}(j)}} \in B^m$$
или
$$\mathbf{y_j} = (x_{11}^{(j)}, \dots, x_{1m}^{(j)})(x_{21}^{(\sigma(j))}, \dots, x_{2m}^{(\sigma(j))})\dots(x_{(l-1)1}^{(\sigma^{l-2}(j))}, \dots, x_{(l-1)m}^{(\sigma^{l-2}(j))})(x_{l1}^{(\sigma^{l-1}(j))}, \dots, x_{lm}^{(\sigma^{l-1}(j))}).$$

5.1. Лемма. Универсальные алгебры $< B^{mk}, [\ \ ]_{l,\sigma,m,mk} >$ и $< A^k, [\ \ ]_{l,\sigma,k} >$ изоморфны.

Доказательство. Ясно, что отображение ψ, ставящее в соответствие элементу
$$(\alpha_1^{(1)}, \dots, \alpha_m^{(1)}, \alpha_1^{(2)}, \dots, \alpha_m^{(2)}, \dots, \alpha_1^{(k)}, \dots, \alpha_m^{(k)}) \in B^{mk}$$
элемент
$$((\alpha_1^{(1)}, \dots, \alpha_m^{(1)}), (\alpha_1^{(2)}, \dots, \alpha_m^{(2)}), \dots, (\alpha_1^{(k)}, \dots, \alpha_m^{(k)})) \in A^k$$
является биекцией B^{mk} на A^k.

Кроме того,
$$[\boldsymbol{\alpha_1\alpha_2}\dots\boldsymbol{\alpha}_l]^{\psi}_{l,\sigma,m,mk} = (y_{11}, \dots, y_{1m}, y_{21}, \dots, y_{2m}, \dots, y_{k1}, \dots, y_{km})^{\psi} =$$
$$= ((y_{11}, \dots, y_{1m}), (y_{21}, \dots, y_{2m}), \dots, (y_{k1}, \dots, y_{km})) = (\mathbf{y_1}, \mathbf{y_2}, \dots, \mathbf{y_k}) =$$
$$= (\boldsymbol{\alpha_{11}\alpha_{2\sigma(1)}}\dots\boldsymbol{\alpha_{(l-1)\sigma^{l-2}(1)}\alpha_{l\sigma^{l-1}(1)}}, \dots, \boldsymbol{\alpha_{1k}\alpha_{2\sigma(k)}}\dots\boldsymbol{\alpha_{(l-1)\sigma^{l-2}(k)}\alpha_{l\sigma^{l-1}(k)}}) =$$
$$= ((\boldsymbol{\alpha_{11}}, \dots, \boldsymbol{\alpha_{1k}})(\boldsymbol{\alpha_{21}}, \dots, \boldsymbol{\alpha_{2k}})\dots(\boldsymbol{\alpha_{l1}}, \dots, \boldsymbol{\alpha_{lk}}))_{l,\sigma,k} =$$
$$= (((\alpha_{11}^{(1)}, \dots, \alpha_{1m}^{(1)}), \dots, (\alpha_{11}^{(k)}, \dots, \alpha_{1m}^{(k)}))((\alpha_{21}^{(1)}, \dots, \alpha_{2m}^{(1)}), \dots, (\alpha_{21}^{(k)}, \dots, \alpha_{2m}^{(k)}))\dots$$
$$\dots((\alpha_{l1}^{(1)}, \dots, \alpha_{lm}^{(1)}), \dots, (\alpha_{l1}^{(k)}, \dots, \alpha_{lm}^{(k)})))_{l,\sigma,k} =$$
$$= ((\alpha_{11}^{(1)}, \dots, \alpha_{1m}^{(1)}, \dots, \alpha_{11}^{(k)}, \dots, \alpha_{1m}^{(k)})^{\psi}(\alpha_{21}^{(1)}, \dots, \alpha_{2m}^{(1)}, \dots, \alpha_{21}^{(k)}, \dots, \alpha_{2m}^{(k)})^{\psi}\dots$$
$$\dots(\alpha_{l1}^{(1)}, \dots, \alpha_{lm}^{(1)}, \dots, \alpha_{l1}^{(k)}, \dots, \alpha_{lm}^{(k)})^{\psi})_{l,\sigma,k} = [\boldsymbol{\alpha_1^{\psi}\alpha_2^{\psi}}\dots\boldsymbol{\alpha_l^{\psi}}]_{l,\sigma,k},$$
то есть
$$[\boldsymbol{\alpha_1\alpha_2}\dots\boldsymbol{\alpha_l}]^{\psi}_{l,\sigma,m,mk} = [\boldsymbol{\alpha_1^{\psi}\alpha_2^{\psi}}\dots\boldsymbol{\alpha_l^{\psi}}]_{l,\sigma,k}$$
Следовательно, ψ – искомый изоморфизм. Лемма доказана.

Лемма 5.1 и теорема 3.2 позволяют сформулировать следующую теорему

5.2. Теорема. Если подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то l-арная операция $[\ \ ]_{l,\sigma,m,mk}$ ассоциативна.

Теорема 4.1 получается из теоремы 5.2 при $l = n$, $k = n - 1$, $\sigma = (12\dots n-1)$.

Если в теореме 5.2 положить $m = 2$, то получим

5.3. Следствие. Если подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то l-арная операция $[\ \ ]_{l,\sigma,2,2k}$ ассоциативна.

Заметим, что 4-арная операция из следствия 4.3 совпадает с операцией $[\ \ ]_{4,(123),2,6}$, то есть является операцией вида $[\ \ ]_{l,\sigma,m,mk}$ при $m = 2$, $l = 4$, $k = 3$, $\sigma = (123)$ –

подстановка третьего порядка из S_3. Но подстановка (132) из S_3 также удовлетворяет условию $\sigma^4 = \sigma$. Поэтому, считая $B = \mathbb{R}$, $< A = \mathbb{R}^2, \times >$ – полугруппа комплексных чисел, и, полагая в следствии 5.3 $l = 4$, $k = 3$, $\sigma = (132)$, получим

5.4. Следствие. Определенная на $\mathbb{R}^6$ 4-арная операция

$$[(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)(y_1, y_2, y_3, y_5, y_6)$$

$$(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6)(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6)]_{4,(132),2,6} = (r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6),$$

где

$$r_1 = x_1y_5z_3u_1 - x_2y_6z_3u_1 - x_1y_6z_4u_1 - x_2y_5z_4u_1 - x_1y_5z_4u_2 + x_2y_6z_4u_2 - x_1y_6z_3u_2 - x_2y_5z_3u_2,$$

$$r_2 = x_1y_5z_3u_2 - x_2y_6z_3u_2 - x_1y_6z_4u_2 - x_2y_5z_4u_2 + x_1y_5z_4u_1 - x_2y_6z_4u_1 + x_1y_6z_3u_1 + x_2y_5z_3u_1,$$

$$r_3 = x_3y_1z_5u_3 - x_4y_2z_5u_3 - x_3y_2z_6u_3 - x_4y_1z_6u_3 - x_3y_1z_6u_4 + x_4y_2z_6u_4 - x_3y_2z_5u_4 - x_4y_1z_5u_4,$$

$$r_4 = x_3y_1z_5u_4 - x_4y_2z_5u_4 - x_3y_2z_6u_4 - x_4y_1z_6u_4 + x_3y_1z_6u_3 - x_4y_2z_6u_3 + x_3y_2z_5u_3 + x_4y_1z_5u_3,$$

$$r_5 = x_5y_3z_1u_5 - x_6y_4z_1u_5 - x_5y_4z_2u_5 - x_6y_3z_2u_5 - x_5y_3z_2u_6 + x_6y_4z_2u_6 - x_5y_4z_1u_6 - x_6y_3z_1u_6,$$

$$r_6 = x_5y_3z_1u_6 - x_6y_4z_1u_6 - x_5y_4z_2u_6 - x_6y_3z_2u_6 + x_5y_3z_2u_5 - x_6y_4z_2u_5 + x_5y_4z_1u_5 + x_6y_3z_1u_5,$$

является ассоциативной.

Заметим, что в соответствии с определением операции $[\ \ ]_{l,\sigma,m,mk}$ компоненты $r_1, \ldots, r_6$ определялись из равенств

$$(r_1, r_2) = (x_1, x_2) \times (y_5, y_6) \times (z_3, z_4) \times (u_1, u_2),$$

$$(r_3, r_4) = (x_3, x_4) \times (y_1, y_2) \times (z_5, z_6) \times (u_3, u_4),$$

$$(r_5, r_6) = (x_5, x_6) \times (y_3, y_4) \times (z_1, z_2) \times (u_5, u_6).$$

Лемма 5.1 и теорема 3.7 позволяют сформулировать следующую теорему.

5.5. Теорема. Если полугруппа $< A, \times >$ из определения операции $[\ \ ]_{l,\sigma,m,mk}$ содержит единицу, а подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma^l \neq \sigma$, то l-арная операция $[\ \ ]_{l,\sigma,m,mk}$ не является полуассоциативной, в частности ассоциативной.

Если в теореме 5.5 положить $m = 2$, то получим

5.6. Следствие. Если полугруппа $< A, \times >$ из определения операции $[\ \ ]_{l,\sigma,m,mk}$ содержит единицу, а подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma^l \neq \sigma$, то l-арная операция $[\ \ ]_{l,\sigma,2,2k}$ не является полуассоциативной, в частности ассоциативной.

Приведем примеры неассоциативных многоместных операций вида $[\ \ ]_{l,\sigma,m,mk}$.

5.7. Пример. Пусть $< A, \times >$ – полугруппа комплексных (двойных, дуальных) чисел, $m = 2$, $k = 3$. Тогда, если $l = 3$, то по следствию 5.6, тернарные операции $[\ \ ]_{3,(123),2,6}$ и $[\ \ ]_{3,(132),2,6}$ не являются ассоциативными. Если же $l = 4$, то по тому же следствию неассоциативными будут 4-арные операции $[\ \ ]_{4,(12),2,6}$, $[\ \ ]_{4,(13),2,6}$ и $[\ \ ]_{4,(23),2,6}$. Все пять указанных операций определены на декартовой степени $\mathbb{R}^6$.

Пусть по-прежнему B – множество, $m \geq 1$, $n \geq 3$, $A = B^m$ – m-ая декартова степень множества B, и пусть, кроме того, $< A, + >$ – группоид. Определим на B^{mk} бинарную операцию $\widetilde{+}$ следующим образом. Если

$$\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{1m}, \ldots, \alpha_{k1}, \ldots, \alpha_{km}),\ \boldsymbol{\beta} = (\beta_{11}, \ldots, \beta_{1m}, \ldots, \beta_{k1}, \ldots, \beta_{km}) \in B^{mk},$$

то
$$\boldsymbol{\alpha}\widetilde{+}\boldsymbol{\beta} = (u_{11}, \ldots, u_{1m}, \ldots, u_{k1}, \ldots, u_{km}) \in B^{mk},$$
где
$$(u_{j1}, \ldots, u_{jm}) = (\alpha_{j1}, \ldots, \alpha_{jm}) + (\beta_{j1}, \ldots, \beta_{jm}) \in B^{mk}$$
для любого $j \in \{1, \ldots, k\}$.

5.8. Замечание. Если на множестве B определена операция $+$, с помощью которой на множестве $A = B^m$ покомпонентно определена операция $+$, то

$$\boldsymbol{\alpha}\widetilde{+}\boldsymbol{\beta} = (\alpha_{11} + \beta_{11}, \ldots, \alpha_{1m} + \beta_{1m}, \ldots, \alpha_{k1} + \beta_{k1}, \ldots, \alpha_{km} + \beta_{km}),$$

то есть, в этом случае, операция $\widetilde{+}$ совпадает с операцией $+$, определенной на B^{mk} покомпонентно.

Пусть при тех же предположениях о m, n, B и A определено произведение элементов поля P на элементы из $A = B^m$:

$$\lambda\mathbf{a} = \lambda(a_1, \ldots, a_m) = (u_1, \ldots, u_m).$$

Определим произведение $\circ$ элементов $\lambda \in P$ на элементы из B^{mk} следующим образом. Если
$$\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{1m}, \ldots, \alpha_{k1}, \ldots, \alpha_{km}) \in B^{mk}$$
то
$$\lambda \circ \boldsymbol{\alpha} = (u_{11}, \ldots, u_{1m}, \ldots, u_{k1}, \ldots, u_{km}),$$
где
$$(u_{j1}, \ldots, u_{jm}) = \lambda(\alpha_{j1}, \ldots, \alpha_{jm})$$
для любого $j \in \{1, \ldots, k\}$.

5.9. Замечание. Если

$$\lambda\mathbf{a} = \lambda(a_1, \ldots, a_m) = (\lambda a_1, \ldots, \lambda a_m),$$

то
$$\lambda \circ \boldsymbol{\alpha} = (\lambda\alpha_{11}, \ldots, \lambda\alpha_{1m}, \ldots, \lambda\alpha_{k1}, \ldots, \lambda\alpha_{km}).$$

Если $< A = B^m, +, \times >$ – алгебра, то для любого

$$\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{1m}, \alpha_{21}, \ldots, \alpha_{2m}, \ldots, \alpha_{k1}, \ldots, \alpha_{km}) \in B^{mk}$$

положим
$$\underline{\boldsymbol{\alpha}} = (\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{1m}, \beta_{21}, \ldots, \beta_{2m}, \ldots, \beta_{k1}, \ldots, \beta_{km}) \in B^{mk}$$
где
$$(\beta_{i1}, \ldots, \beta_{im}) = -(\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{im}),\ i = 2, \ldots, k.$$
Так как
$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{\psi}} &= ((\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{1m}), (\alpha_{21}, \ldots, \alpha_{2m}), \ldots, (\alpha_{k1}, \ldots, \alpha_{km})), \\
\overline{\boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{\psi}}} &= ((\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{1m}), -(\alpha_{21}, \ldots, \alpha_{2m}), \ldots, -(\alpha_{k1}, \ldots, \alpha_{km})) = \\
&= ((\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{1m}), (\beta_{21}, \ldots, \beta_{2m}), \ldots, (\beta_{k1}, \ldots, \beta_{km})), \\
(\overline{\boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{\psi}}})^{\boldsymbol{\psi}^{-1}} &= (\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{1m}, \beta_{21}, \ldots, \beta_{2m}, \ldots, \beta_{k1}, \ldots, \alpha_{km}),
\end{aligned}$$

то имеет место

5.10. Лемма. Для любого $\boldsymbol{\alpha} \in B^{mk}$ верно равенство $\underline{\boldsymbol{\alpha}} = (\overline{\boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{\psi}}})^{\boldsymbol{\psi}^{-1}}$.

5.11. Теорема. Пусть B – множество, $m \geq 1$, $k \geq 2$, $l \geq 3$, k делит $l-1$, σ – цикл длины k из S_k, $< A = B^m, +, \times >$ – ассоциативная алгебра над полем P, $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_m)$ – ее нуль. Тогда:

1) $< B^{mk}, \widetilde{+}, [\ \ ]_{l,\sigma,m,mk} >$ – ассоциативная $(2,l)$-алгебра над полем P, изоморфная $(2,l)$-алгебре $< A^k, +, [\ \ ]_{l,\sigma,k} >$;

2) в $< B^{mk}, \widetilde{+}, [\ \ ]_{l,\sigma,m,mk} >$ все элементы являются делителями ее нуля

$$(\underbrace{\theta_1, \ldots, \theta_m, \ldots, \theta_1, \ldots, \theta_m}_{k});$$

3) если $< A, +, \times >$ – коммутативна, то $< B^{mk}, \widetilde{+}, [\ \ ]_{l,\sigma,m,mk} >$ – полуабелева;

4) если $< A^* = A \backslash \{\theta\}, \times >$ – группа, то $< \widetilde{B}, [\ \ ]_{l,\sigma,m,mk} >$ – l-арная группа, где $\widetilde{B}$ – множество всех элементов

$$(b_{11}, \ldots, b_{1m}, \ldots, b_{k1}, \ldots, b_{km}) \in B^{mk}$$

таких, что $(b_{j1}, \ldots, b_{jm}) \neq (\theta_1, \ldots, \theta_m)$ для любого $j = 1, \ldots, k$;

5) для любого

$$\mathbf{b} = (b_{11}, \ldots, b_{1m}, \ldots, b_{k1}, \ldots, b_{km}) \in B^{mk}$$

такого, что $(b_{j1}, \ldots, b_{jm}) = (\theta_1, \ldots, \theta_m)$ для некоторого $j \in \{1, \ldots, k\}$ верно

$$[\underbrace{\mathbf{b} \ldots \mathbf{b}}_{l}]_{l,\sigma,m,mk} = (\underbrace{\theta_1, \ldots, \theta_m, \ldots, \theta_1, \ldots, \theta_m}_{k});$$

6) если множество B содержит более одного элемента и в $< A, +, \times >$ есть единица, то $< B^{mk}, \widetilde{+}, [\ \ ]_{l,\sigma,m,mk} >$ – неабелева;

7) если множество B содержит более одного элемента, то в $< B^{mk}, \widetilde{+}, [\ \ ]_{l,\sigma,m,mk} >$ нет единиц;

8) если $< A^*, \times >$ – группа, $\mathbf{e}$ – ее единица, то

$$I(B^{mk}, \widetilde{+}, [\ \ ]_{l,\sigma,m,mk}) = J \bigcup \{(\underbrace{\theta_1, \ldots, \theta_m, \ldots, \theta_1, \ldots, \theta_m}_{k})\},$$

где J – множество всех элементов

$$(\varepsilon_{11}, \ldots, \varepsilon_{1m}, \ldots, \varepsilon_{(k-1)1}, \ldots, \varepsilon_{(k-1)m}, \varepsilon_{k1}, \ldots, \varepsilon_{km}) \in B^{mk}$$

таких, что

$$(\boldsymbol{\varepsilon_1} \boldsymbol{\varepsilon_{\sigma(1)}} \ldots \boldsymbol{\varepsilon_{\sigma^{l-2}(1)}})^{\frac{l-1}{k}} = \mathbf{e},$$

где

$$\boldsymbol{\varepsilon_1} = (\varepsilon_{11}, \ldots, \varepsilon_{1m}), \ldots, \boldsymbol{\varepsilon_k} = (\varepsilon_{k1}, \ldots, \varepsilon_{km}) \in A.$$

9) если $\dfrac{(l-1)(k-1)}{k}$ – четное, то

$$[\underline{\boldsymbol{\alpha_1} \boldsymbol{\alpha_2} \ldots \boldsymbol{\alpha_l}}]_{l,\sigma,m,mk} = [\underline{\boldsymbol{\alpha_1}}\ \underline{\boldsymbol{\alpha_2}} \ldots \underline{\boldsymbol{\alpha_l}}]_{l,\sigma,m,mk}$$

если же $\dfrac{(l-1)(k-1)}{k}$ – нечетное, то

$$[\underline{\boldsymbol{\alpha_1} \boldsymbol{\alpha_2} \ldots \boldsymbol{\alpha_l}}]_{l,\sigma,m,mk} = -[\underline{\boldsymbol{\alpha_1}}\ \underline{\boldsymbol{\alpha_2}} \ldots \underline{\boldsymbol{\alpha_l}}]_{l,\sigma,m,mk}$$

Доказательство. 1) Сразу же заметим, что по теореме 3.8 $< A^k, +, [\ \ ]_{l,\sigma,k} >$ – ассоциативная $(2, l)$-алгебра над P.

Ясно, что отображение φ, ставящее в соответствие элементу

$$((\alpha_1^{(1)}, \dots, \alpha_m^{(1)}), (\alpha_1^{(2)}, \dots, \alpha_m^{(2)}), \dots, (\alpha_1^{(k)}, \dots, \alpha_m^{(k)})) \in A^k$$

элемент

$$(\alpha_1^{(1)}, \dots, \alpha_m^{(1)}, \alpha_1^{(2)}, \dots, \alpha_m^{(2)}, \dots, \alpha_1^{(k)}, \dots, \alpha_m^{(k)}) \in B^{mk}$$

является биекцией A^k на B^{mk}.

Так как $\varphi = \psi^{-1}$, где ψ – отображение из леммы 5.1, то φ – изоморфизм $< A^k, +, [\ \ ]_{l,\sigma,k} >$ на $< B^{mk}, [\ \ ]_{l,\sigma,m,mk} >$. Следовательно

$$[\boldsymbol{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_l}]^{\varphi}_{l,\sigma,k} = [\boldsymbol{\alpha_1^{\varphi} \alpha_2^{\varphi} \dots \alpha_l^{\varphi}}]_{l,\sigma,m,mk} \tag{10}$$

Пусть

$$\boldsymbol{\alpha} = ((\alpha_{11}, \dots, \alpha_{1m}), \dots, (\alpha_{k1}, \dots, \alpha_{km})),\ \boldsymbol{\beta} = ((\beta_{11}, \dots, \beta_{1m}), \dots, (\beta_{k1}, \dots, \beta_{km}))$$

произвольные элементы из A^k. Тогда

$$(\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta})^{\boldsymbol{\varphi}} = (((\alpha_{11}, \dots, \alpha_{1m}), \dots, (\alpha_{k1}, \dots, \alpha_{km})) + ((\beta_{11}, \dots, \beta_{1m}), \dots, (\beta_{k1}, \dots, \beta_{km})))^{\varphi} =$$

$$= ((\alpha_{11}, \dots, \alpha_{1m}) + (\beta_{11}, \dots, \beta_{1m}), \dots, (\alpha_{k1}, \dots, \alpha_{km}) + (\beta_{k1}, \dots, \beta_{km}))^{\varphi} =$$

$$= ((v_{11}, \dots, v_{1m}), \dots, (v_{k1}, \dots, v_{km}))^{\varphi} = (v_{11}, \dots, v_{1m}, \dots, v_{k1}, \dots, v_{km}),$$

где для любого $j = 1, \dots, k$ положено

$$(v_{j1}, \dots, v_{jm}) = (\alpha_{j1}, \dots, \alpha_{jm}) + (\beta_{j1}, \dots, \beta_{jm}). \tag{11}$$

Кроме того,

$$\boldsymbol{\alpha^{\varphi}} \widetilde{+} \boldsymbol{\beta^{\varphi}} = ((\alpha_{11}, \dots, \alpha_{1m}), \dots, (\alpha_{k1}, \dots, \alpha_{km}))^{\varphi} \widetilde{+} ((\beta_{11}, \dots, \beta_{1m}), \dots, (\beta_{k1}, \dots, \beta_{km}))^{\varphi} =$$

$$= (\alpha_{11}, \dots, \alpha_{1m}, \dots, \alpha_{k1}, \dots, \alpha_{km}) \widetilde{+} (\beta_{11}, \dots, \beta_{1m}, \dots, \beta_{k1}, \dots, \beta_{km}) =$$

$$= (u_{11}, \dots, u_{1m}, \dots, u_{k1}, \dots, u_{km}),$$

где, согласно определению операции $\widetilde{+}$,

$$(u_{j1}, \dots, u_{jm}) = (\alpha_{j1}, \dots, \alpha_{jm}) + (\beta_{j1}, \dots, \beta_{jm}). \tag{12}$$

для любого $j = \{1, \dots, k\}$. Так как правые части в (11) и (12) равны, то

$$(\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta})^{\boldsymbol{\varphi}} = \boldsymbol{\alpha^{\varphi}} \widetilde{+} \boldsymbol{\beta^{\varphi}} \tag{13}$$

Пусть

$$\boldsymbol{\alpha} = ((\alpha_{11}, \dots, \alpha_{1m}), \dots, (\alpha_{k1}, \dots, \alpha_{km}))$$

– произвольный элемент из A^k. Тогда

$$(\lambda\boldsymbol{\alpha})^{\varphi} = (\lambda((\alpha_{11}, \dots, \alpha_{1m}), \dots, (\alpha_{k1}, \dots, \alpha_{km})))^{\varphi} =$$

$$= (\lambda(\alpha_{11}, \dots, \alpha_{1m}), \dots, \lambda(\alpha_{k1}, \dots, \alpha_{km}))^{\varphi} = ((v_{11}, \dots, v_{1m}), \dots, (v_{k1}, \dots, v_{km}))^{\varphi} =$$

$$= (v_{11}, \dots, v_{1m}, \dots, v_{k1}, \dots, v_{km}),$$

где положено
$$(v_{j1},\dots,v_{jm})=\lambda(\alpha_{j1},\dots,\alpha_{jm}).\tag{14}$$
Кроме того,
$$\lambda\circ\boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{\varphi}}=\lambda\circ((\alpha_{11},\dots,\alpha_{1m}),\dots,(\alpha_{k1},\dots,\alpha_{km}))^{\varphi}=$$
$$=\lambda\circ(\alpha_{11},\dots,\alpha_{1m},\dots,\alpha_{k1},\dots,\alpha_{km})=(u_{11},\dots,u_{1m},\dots,u_{k1},\dots,u_{km}),$$
где, согласно определению произведения $\circ$,
$$(u_{j1},\dots,u_{jm})=\lambda(\alpha_{j1},\dots,\alpha_{jm})\tag{15}$$
для любого $j=\{1,\dots,k\}$. Так как правые части в (14) и (15) равны, то
$$(\lambda\boldsymbol{\alpha})^{\varphi}=\lambda\circ\boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{\varphi}}\tag{16}$$
Из (10), (13) и (16) следует, что φ является изоморфизмом $<A^k,+,[\ \ ]_{l,\sigma,k}>$ на $<B^{mk},\widetilde{+},[\ \ ]_{l,\sigma,m,mk}>$. А так как $<A^k,+,[\ \ ]_{l,\sigma,k}>$ – ассоциативная $(2,l)$-алгебра над P, то $<B^{mk},\widetilde{+},[\ \ ]_{l,\sigma,m,mk}>$ – ассоциативная $(2,l)$-алгебра над P.

2) согласно утверждению 1) теоремы 3.21, в $(2,l)$-алгебре $<A^k,+,[\ \ ]_{l,\sigma,k}>$ все элементы являются делителями ее нуля
$$(\underbrace{\boldsymbol{\theta}\dots\boldsymbol{\theta}}_{k})=((\theta_1,\dots,\theta_m),\dots,(\theta_1,\dots,\theta_m)).$$
Далее используется установленный в 1) изоморфизм φ.

3) Используются утверждение 2) теоремы 3.21 и изоморфизм φ.

4) Используются утверждение 3) теоремы 3.21 и равенство
$$((A\backslash\{(\theta_1,\dots,\theta_m)\}^k)^{\varphi}=\widetilde{B}.$$

5) Используются утверждение 4) теоремы 3.21 и изоморфизм φ.

6) Используются утверждение 5) теоремы 3.21 и изоморфизм φ.

7) Используются утверждение 6) теоремы 3.21 и изоморфизм φ.

8) Используются утверждения 7) теоремы 3.21 и изоморфизм φ.

9) По лемме 5.10 $\underline{\boldsymbol{\alpha}}=(\overline{\boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{\psi}}})^{\varphi}$ для любого $\boldsymbol{\alpha}\in B^{mk}$, где ψ – изоморфизм из леммы 5.1, а $\varphi=\psi^{-1}$ – изоморфизм из утверждения 1). Тогда, ввиду 8) теоремы 3.21,
$$\underline{[\boldsymbol{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_l}]}_{l,\sigma,m,mk}=(\overline{[\boldsymbol{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_l}]^{\psi}_{l,\sigma,m,mk}})^{\varphi}=$$
$$=(\overline{[\boldsymbol{\alpha_1^{\psi}\alpha_2^{\psi}\dots\alpha_l^{\psi}}]_{l,\sigma,mk}})^{\varphi}=([\overline{\boldsymbol{\alpha_1^{\psi}}}\ \overline{\boldsymbol{\alpha_2^{\psi}}}\dots\overline{\boldsymbol{\alpha_l^{\psi}}}]_{l,\sigma,mk})^{\varphi}=$$
$$=[(\overline{\boldsymbol{\alpha_1^{\psi}}})^{\varphi}\ (\overline{\boldsymbol{\alpha_2^{\psi}}})^{\varphi}\dots(\overline{\boldsymbol{\alpha_l^{\psi}}})^{\varphi}]_{l,\sigma,m,mk}=[\underline{\boldsymbol{\alpha_1}}\ \underline{\boldsymbol{\alpha_2}}\dots\underline{\boldsymbol{\alpha_l}}]_{l,\sigma,m,mk}$$
при четном $\dfrac{(l-1)(k-1)}{k}$.

Если же $\dfrac{(l-1)(k-1)}{k}$ – нечетное, то, снова применяя утверждения 8) теоремы 3.2.1, получим
$$\underline{[\boldsymbol{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_l}]}_{l,\sigma,m,mk}=(\overline{[\boldsymbol{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_l}]^{\psi}_{l,\sigma,m,mk}})^{\varphi}=$$
$$=(\overline{[\boldsymbol{\alpha_1^{\psi}\alpha_2^{\psi}\dots\alpha_l^{\psi}}]_{l,\sigma,mk}})^{\varphi}=(-[\overline{\boldsymbol{\alpha_1^{\psi}}}\ \overline{\boldsymbol{\alpha_2^{\psi}}}\dots\overline{\boldsymbol{\alpha_l^{\psi}}}]_{l,\sigma,mk})^{\varphi}=-([\overline{\boldsymbol{\alpha_1^{\psi}}}\ \overline{\boldsymbol{\alpha_2^{\psi}}}\dots\overline{\boldsymbol{\alpha_l^{\psi}}}]_{l,\sigma,m,mk})^{\varphi}=$$
$$=-[(\overline{\boldsymbol{\alpha_1^{\psi}}})^{\varphi}\ (\overline{\boldsymbol{\alpha_2^{\psi}}})^{\varphi}\dots(\overline{\boldsymbol{\alpha_l^{\psi}}})^{\varphi}]_{l,\sigma,m,mk}=-[\underline{\boldsymbol{\alpha_1}}\ \underline{\boldsymbol{\alpha_2}}\dots\underline{\boldsymbol{\alpha_l}}]_{l,\sigma,m,mk}$$

Теорема доказана.

Если в теореме 5.11 положить $m = 2$, $l = 4$, $k = 3$, $\sigma = (132)$, $B = \mathbb{R}$, $< A = \mathbb{R}^2, +, \times >$ – алгебра комплексных чисел, то получим

5.12. Следствие. Справедливы следующие утверждения:

1) $< \mathbb{R}^6, +, [\ \ ]_{4,(132),2,6} >$ – ассоциативная, неабелева, полуабелева (2, 4)-алгебра над $\mathbb{R}$, в которой все элементы являются делителями ее нуля (0, 0, 0, 0, 0, 0), и в которой нет единиц;

2) $< \widetilde{\mathbb{R}}, [\ \ ]_{4,(132),2,6} >$ – 4-арная группа, где

$$\widetilde{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^6 \setminus (\{(0,\ 0,\ a,\ b,\ c,\ d) \mid a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{R}\} \bigcup$$

$$\bigcup \{(a,\ b,\ 0,\ 0,\ c,\ d) \mid a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{R}\} \bigcup \{(a,\ b,\ c,\ d,\ 0,\ 0) \mid a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{R}\});$$

3) множество всех мультипликативных идемпотентов в $< \mathbb{R}^6, +, [\ \ ]_{4,(132),2,6} >$ имеет следующий вид

$$I(\mathbb{R}^6, +, [\ \ ]_{4,2,6}) =$$

$$= \{(a,\ b,\ c,\ d, \frac{ac - bd}{(a^2+b^2)(c^2+d^2)},\ \frac{-ad - bc}{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}) \mid a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{R},$$

$$a^2 + b^2 \neq 0, \quad c^2 + d^2 \neq 0\} \bigcup \{(0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0, 0)\}.$$

4) для любых $\boldsymbol{\alpha_1}, \ldots, \boldsymbol{\alpha_6} \in \mathbb{R}^6$ верно

$$[\underline{\boldsymbol{\alpha_1}\boldsymbol{\alpha_2}\ldots\boldsymbol{\alpha_6}}]_{4,(132),2,6} = [\underline{\boldsymbol{\alpha_1}}\ \underline{\boldsymbol{\alpha_2}}\ldots\underline{\boldsymbol{\alpha_6}}]_{4,(132),2,6}$$

5.13. Замечание. Утверждение 3) предыдущего следствия вытекает из следствия 3.19, согласно которому для абелевой группы A и любых подстановок σ и $\tau \in S_k$, удовлетворяющих условиям $\sigma^l = \sigma$, $\tau^l = \tau$, верно равенство $I(A^k, [\ \ ]_{l,\sigma,k}) = I(A^k, [\ \ ]_{l,\tau,k})$.

6. СООТВЕТСТВУЮЩАЯ ГРУППА l-АРНОЙ ГРУППЫ $< A^k, [\ \ ]_{l,\sigma,k} >$

Если A – группа, и выполняется условие $\sigma^l = \sigma$, то по предложению 3.11 $< A^k, [\ \ ]_{l,\sigma,k} >$ – l-арная группа. А так как согласно Посту [6], всякая l-арная группа обладает соответствующей группой, то возникает задача нахождения соответствующей группы Поста $(A^k)_0$ l-арной группы $< A^k, [\ \ ]_{l,\sigma,k} >$.

6.1. Предложение. Если A – группа, $l \geq 3$, $k \geq 2$, σ – подстановка из S_k, удовлетворяющая условию $\sigma^l = \sigma$, то соответствующая группа Поста $(A^k)_0$ l-арной группы $< A^k, [\ \ ]_{l,\sigma,k} >$ изоморфна прямому произведению A^k k экземпляров группы A: $(A^k)_0 \simeq A^k$.

Доказательство. Положим $\boldsymbol{e} = (\underbrace{1, \ldots, 1}_{k})$, где 1 – единица группы A. Согласно предложению 1.6.1 [8], группа $(A^k)_0$ изоморфна группе $< A^k, ⓔ >$ с операцией

$$\mathbf{x} ⓔ \mathbf{y} = [\mathbf{x}\ \underbrace{\boldsymbol{e}\ldots\boldsymbol{e}}_{l-2}\ \mathbf{y}]_{l,\sigma,k}$$

Так как $\sigma^{l-1}(j) = j$ для любого $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$, то полагая

$$\mathbf{x} = (x_{11}, \ldots, x_{1k}),\ \mathbf{y} = (x_{l1}, \ldots, x_{lk}),$$

получим

$$\mathbf{x} \circledcirc \mathbf{y} = [\mathbf{x} \underbrace{e \ldots e}_{l-2} \mathbf{y}]_{l,\sigma,k} =$$

$$= [(x_{11}, \ldots, x_{1k})(x_{21} = 1, \ldots, x_{2k} = 1) \ldots (x_{(l-1)1} = 1, \ldots, x_{(l-1)k} = 1)(x_{l1}, \ldots, x_{lk})]_{l,\sigma,k} =$$

$$= (x_{11}x_{2\sigma(1)} \ldots x_{(l-1)\sigma^{l-2}(1)}x_{l\sigma^{l-1}(1)}, \ldots, x_{1k}x_{2\sigma(k)} \ldots x_{(l-1)\sigma^{l-2}(k)}x_{l\sigma^{l-1}(k)}) =$$

$$= (x_{11} \underbrace{1 \ldots 1}_{l-2} x_{l1}, \ldots, x_{1k} \underbrace{1 \ldots 1}_{l-2} x_{lk}) = (x_{11}x_{l1}, \ldots, x_{1k}x_{lk}) = (x_{11}, \ldots, x_{1k})(x_{l1}, \ldots, x_{lk}) = \mathbf{xy}.$$

Таким образом, $\mathbf{x} \circledcirc \mathbf{y} = \mathbf{xy}$, то есть операция $\circledcirc$ совпадает с операцией в прямом произведении A^k k экземпляров группы A. Предложение доказано.

6.2. Следствие. Если A – группа, $l \geq 3$, $k \geq 2$, то для любых подстановок σ, $\tau \in S_k$, удовлетворяющих условиям $\sigma^l = \sigma$, $\tau^l = \tau$, соответствующие группы Поста l-арных групп $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$ и $< A^k, [\ ]_{l,\tau,k} >$ являются изоморфными.

Значение предложения 6.1 состоит в том, что с его помощью, используя соответствующие результаты теории полиадических групп, можно получать новую информацию об l-арной группе $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$.

В качестве примера докажем следующее

6.3. Предложение. Если A – группа, $l \geq 3$, $k \geq 2$, σ – подстановка из S_k, удовлетворяющая условию $\sigma^l = \sigma$, то l-арная группа $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$ не является полуциклической.

Доказательство. Полиадическую группу называют полуциклической [8], если ее соответствующая группа Поста циклическая. Так как прямое произведение A^k не является циклической группой, то, ввиду предложения 6.1, соответствующая группа Поста $(A^k)_0$ l-арной группы $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$ также не является циклической. Поэтому l-арная группа $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$ неполуциклична. Предложение доказано.

Заметим, что нецикличность l-арной группы $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$ следует из предложения 3.9, согласно которому $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$ – неабелева.

Из предложений 3.10 и 6.3 вытекает

6.4. Следствие. Если A – абелева группа, $l \geq 3$, $k \geq 2$, σ – подстановка из S_k, удовлетворяющая условию $\sigma^l = \sigma$, то l-арная группа $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$ является полуабелевой, но не является полуциклической.

Так как всякая полуциклическая l-арная группа является полуабелевой, то из следствия 6.4 вытекает, что для любого $l \geq 3$ класс всех полуабелевых l-арных групп шире класса всех полуциклических l-арных групп.

Предложение 6.1 может быть использовано не только для получения новых результатов, но и для упрощения доказательств уже известных результатов. Например, согласно критерию Поста, полуабелевость полиадической группы равносильна абелевости ее соответствующей группы Поста. Поэтому, если A – абелева группа, и $\sigma^l = \sigma$, то из абелевости прямого произведения A^k, ввиду предложения 6.1, следует полуабелевость l-арной группы $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$.

Литература

1. **Гальмак А. М.** О многоместных операциях на декартовых степенях / А. М. Гальмак // Веснік МДУ імя А. А. Куляшова. – 2008. – №2 – 3(30). – С. 134 – 139.

2. **Гальмак А. М.** Полиадические операции на декартовых степенях / А. М. Гальмак // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. – 2008. – № 1(9). – С. 112 – 139.

3. **Гальмак А. М.** Многоместные ассоциативные операции на декартовых степенях / А. М. Гальмак // Весцi НАН Беларусi. – 2008. – №3. – С. 28 – 34.

4. **Гальмак А. М.** Многоместные неассоциативные операции на декартовых степенях / А. М. Гальмак // Вестник ПГУ. – 2008. – № 9. – С. 66 – 72.

5. **Dörnte W.** Untersuchungen über einen verallgemeinerten Gruppenbegriff / W. Dörnte // Math. Z. – 1928. – Bd. 29. – S. 1 – 19.

6. **Post E. L.** Polyadic groups / E. L. Post // Trans. Amer. Math. Soc. – 1940. – Vol. 48, №2. – P. 208 – 350.

7. **Русаков С. А.** Алгебраические n-арные системы / С. А. Русаков. – Минск: Навука i тэхнiка. – 1992.

8. **Гальмак А. М.** n-Арные группы. Часть 1 / А. М. Гальмак. – Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины. – 2003.

9. **Гальмак А. М.** n-Арные группы. Часть 2 / А. М. Гальмак. – Минск: Изд. центр БГУ. – 2007.