О ПОЧТИ КОМПЛЕКСНЫХ СТРУКТУРАХ КЭЛИ НА ШЕСТИМЕРНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЯХ СФЕР

Н. К. Смоленцев

Кемеровский государственный университет, Россия

smolen@kuzbass.net

В статье рассматриваются почти комплексные структуры Кэли на сфере S^6 и на произведениях сфер $S^1 \times S^5$, $S^2 \times S^4$ и $S^3 \times S^3$, которые естественно возникают при их вложении в алгебру октав Кэли. Показано, что все они являются неинтегрируемыми. Получено выражение фундаментальной формы для каждого случая через калибровки пространства $\mathbb{R}^7$, найдено выражение тензора Нейенхейса.

УДК 514.76

1. Введение. Хорошо известно [6], что на ориентируемом шестимерном подмногообразии M в алгебре $\mathbb{C}$a чисел Кэли может быль определена почти комплексная структура при помощи трехместного векторного произведения. Такая структура Кэли достаточно активно изучается в случае сферы $S^6 \subset \mathbb{R}^7 = Im(\mathbb{C}\mathrm{a})$, [2], [4], [3], [11], [14]. Структуры Кэли на произведениях сфер $S^1 \times S^5, S^2 \times S^4$ и $S^3 \times S^3$ пока не столь популярны. Напомним, что на произведениях нечетномерных сфер имеется комплексная структура, определенная Екманом и Калаби [10], см. также [12]. Для произведений четномерных сфер ситуация значительно сложнее. Единственный нетривиальный случай существования почти комплексной структуры на произведениях четномерных сфер дает произведение $S^2 \times S^4$ [5]. Вопрос о существовании интегрируемой почти комплексной структуры в настоящее время открыт как для $S^2 \times S^4$, так и для S^6. Известно, что ортогональные почти комплексные структуры J на S^6 со стандартной метрикой g_0 не интегрируемы [11]. В работе [1] показано, что неинтегрируемыми будут почти комплексные структуры J, ортогональные относительно метрик, близких к стандартной. Среди ортогональных почти комплексных структур J на (S^6, g_0) почти комплексная структура Кэли J_c занимает особое место. В работе [3] показано, что для структуры Кэли объем многообразия $J_c(S^6)$ в пространстве ортогональных комплексных структур в $\mathbb{R}^8$ является минимальным среди всех других ортогональных почти комплексных структур на S^6. В работе [13] для структуры Кэли J_c на сфере получены явные выражения фундаментальной формы и ее внешнего дифференциала через калибровки пространства $\mathbb{R}^7$, найден тензор Нейенхейса через тройное векторное произведение и показано, что фундаментальная форма ω является собственной для оператора Лапласа.

1.1. Числа Кэли. Пусть $\mathbb{C}$a – алгебра чисел Кэли, т. е. чисел вида $x = x^0 + x^1 e_1 + \cdots + x^7 e_7$, где $x^i \in \mathbb{R}$, а числа $e_1, \ldots, e_7$ – мнимые единицы. Квадрат каждой мнимой единицы равен -1; правила их перемножения задаются таблицей:

$\times$	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	0	e_3	$-e_2$	e_5	$-e_4$	$-e_7$	e_6
e_2	$-e_3$	0	e_1	e_6	e_7	$-e_4$	$-e_5$
e_3	e_2	$-e_1$	0	e_7	$-e_6$	e_5	$-e_4$
e_4	$-e_5$	$-e_6$	$-e_7$	0	e_1	e_2	e_3
e_5	e_4	$-e_7$	e_6	$-e_1$	0	$-e_3$	e_2
e_6	e_7	e_4	$-e_5$	$-e_2$	e_3	0	$-e_1$
e_7	$-e_6$	e_5	e_4	$-e_3$	$-e_2$	e_1	0

Если $x^0 = 0$, то число Кэли x называется чисто мнимым. Будем записывать число Кэли x в виде $x = x^0 + X$, где x^0 – действительная часть и $X = x^1e_1 + \cdots + x^7e_7$ – чисто мнимая часть.

Алгебра Кэли $\mathbb{C}\mathrm{a}$ имеет операцию сопряжения, $\overline{x} = x^0 - X$, которая обладает свойством $\overline{x}\,\overline{y} = \overline{yx}$ и позволяет определить естественным образом скалярное произведение и норму: $\langle x, y\rangle = \frac{1}{2}(x\overline{y} + y\overline{x})$, $|x|^2 = x\overline{x}$. Формула $X \times Y = \frac{1}{2}(XY - YX)$ определяет векторное произведение в пространстве $\mathrm{Im}(\mathbb{C}\mathrm{a})$ чисто мнимых чисел Кэли.

Алгебра чисел Кэли $\mathbb{C}\mathrm{a}$ неассоциативна, т. е. $(xy)z \neq x(yz)$. *Ассоциатором* называется выражение $[x, y, z] = (xy)z - x(yz)$. Ассоциатор кососимметричен по всем аргументам, что сразу следует из следующих хорошо известных свойств алгебры Кэли:

– альтернативность, $(xx)y = x(xy)$, $x(yy) = (xy)y$, $x(yx) = (xy)x$, т. е. $[x, x, y] = 0$, $[x, y, y] = 0$, $[x, y, x] = 0$, а также $(x\overline{x})y = x(\overline{x}y)$, $x(\overline{y}y) = (x\overline{y})y$, т. е. $[x, \overline{x}, y] = 0$ и $[x, \overline{y}, y] = 0$;

– тождества Муфанг, $((xy)z)y = x(yzy)$, $(xyx)z = x(y(xz))$, $(xy)(zx) = x(yz)x$;

– иордановость, $(xxy)x = xx(yx)$, т. е. $[xx, y, x] = 0$.

Напомним еще ряд свойств алгебры Кэли: $\langle xy, zy\rangle = \langle x, z\rangle\langle y, y\rangle$, $\langle xw, y\rangle = \langle x, y\overline{w}\rangle$, $\langle wx, y\rangle = \langle x, \overline{w}y\rangle$, $(xu)\overline{v} + (xv)\overline{u} = 2x\langle u, v\rangle$, $u(\overline{v}x) + v(\overline{u}x) = 2x\langle u, v\rangle$.

1.2. Векторное произведение в $\mathbb{R}^7 = \mathrm{Im}(\mathbb{C}\mathrm{a})$. Пространство $\mathbb{R}^7 = \mathrm{Im}(\mathbb{C}\mathrm{a})$ мнимых октав наследует из $\mathbb{C}\mathrm{a}$ скалярное произведение $\langle X, Y\rangle$ и векторное произведение $X \times Y$, которые определяются как вещественная и чисто мнимая части произведения XY:

$$\langle X, Y\rangle = -\mathrm{Re}(XY), \qquad X \times Y = \mathrm{Im}(XY). \tag{1.1}$$

Это сразу следует из формулы: $xy = (x^0y^0 - \langle X, Y\rangle) + x^0Y + y^0X + X \times Y$. Легко видеть, что векторное произведение $X \times Y$ билинейно, кососимметрично и ортогонально каждому их сомножителей.

Смешанное произведение определяется равенством $(XYZ) = \langle X, Y \times Z\rangle = \langle X \times Y, Z\rangle$ и представляет собой кососимметричную 3-форму, которая называется *ассоциативной калибровкой* [8] пространства $\mathbb{R}^7 = \mathrm{Im}(\mathbb{C}\mathrm{a})$ и обозначается буквой φ,

$$\varphi(X, Y, Z) = \langle X, Y \times Z\rangle. \tag{1.2}$$

Если $\omega_{pqr} = dx_p \wedge dx_q \wedge dx_r$, то калибровка φ имеет следующее выражение:

$$\varphi = \omega_{123} - \omega_{167} + \omega_{257} - \omega_{356} + \omega_{145} + \omega_{246} + \omega_{347}.$$

Тройное векторное произведение определяется равенством

$$[XYZ] = (X \times Y) \times Z - \langle X, Z\rangle Y + \langle Y, Z\rangle X = -X \times (Y \times Z) + \langle X, Z\rangle Y - \langle X, Y\rangle Z. \tag{1.3}$$

Тройное векторное произведение связано с ассоциатором следующей формулой: $[X, Y, Z] = 2[XYZ]$.

Нам потребуются также следующие свойства векторного произведения, которые сразу следуют из равенства (1.3).

Если $n, Y, Z \in \mathbb{R}^7$ и если $Y, Z \perp n$, то

$$(n \times Y) \times Z = -n \times (Y \times Z) - \langle Y, Z\rangle n.$$

Если n – чисто мнимый вектор единичной длины, то для любого $Z \in \mathbb{R}^7$,

$$n \times (n \times Z) = -Z + \langle n, Z\rangle n.$$

Отсюда следует, что для любых $X, Y \in \mathbb{R}^7$ имеет место равенство

$$\langle n \times X, n \times Y \rangle = \langle X, Y \rangle - \langle X, n \rangle \langle Y, n \rangle.$$

Коассоциативная калибровка [8] пространства $\mathbb{R}^7 = \mathrm{Im}\mathbb{C}\mathrm{a}$ – это внешняя 4-форма ψ, определенная равенством

$$\psi(X, Y, Z, W) = \frac{1}{2}\langle X, [Y, Z, W] \rangle = \langle X, [YZW] \rangle. \tag{1.4}$$

Калибровка ψ имеет следующее выражение в стандартных координатах $\mathbb{R}^7$:

$$\psi = \omega_{4567} - \omega_{4523} - \omega_{4163} - \omega_{4127} + \omega_{2367} + \omega_{1357} + \omega_{1256}.$$

Легко видеть, что формы φ и ψ связаны соотношением $\psi = *\varphi$, где $*$ – оператор Ходжа.

1.3. Векторное произведение на алгебре Кэли. Напомним, что векторным (r-местным) произведением на n-мерном евклидовом пространстве V называется [6] полилинейное отображение $P : V^r \to V$, $r = 1, \dots, n$, обладающее свойствами

$$\langle P(x_1, \dots, x_r), x_i \rangle = 0, \; i = 1, \dots, r,$$
$$\|P(x_1, \dots, x_r)\|^2 = \det(\langle x_i, x_j \rangle).$$

Одноместное векторное произведение на V есть ортогональная комплексная структура J. Двухместное векторное произведение существует только в размерности 3 и 7. На семимерном пространстве V двухместное векторное произведение изоморфно введенному выше векторному произведению на пространстве $\mathrm{Im}(\mathbb{C}\mathrm{a})$ чисто мнимых чисел Кэли. Как известно [6], на алгебре Кэли $\mathbb{C}\mathrm{a}$ трехместное векторное произведение определено формулами:

$$P(x, y, z) = -(x\overline{y})z + \langle x, y \rangle z + \langle y, z \rangle x - \langle z, x \rangle y, \tag{1.5}$$
$$P_1(x, y, z) = -x(\overline{y}z) + \langle x, y \rangle z + \langle y, z \rangle x - \langle z, x \rangle y,$$

Отметим, что если векторы x, y, z взаимно ортогональны, то $P(x, y, z) = -(x\overline{y})z$. Легко видеть также, что операция сопряжения определяет антиизоморфизм этих векторных произведений. Поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать на $\mathbb{C}\mathrm{a}$ только первое векторное произведение P, заданное формулой (1.5).

Из свойств векторного произведения сразу следует, что 4-форма

$$\Phi(x, y, x, u) = \langle P(x, y, z), u \rangle \tag{1.6}$$

является кососимметрической. Простые вычисления [13] показывают, что

$$\Phi = dx_0 \wedge \varphi + \psi, \tag{1.7}$$

где φ и ϕ – введенные ранее ассоциативная и коассоциативная калибровки. Легко также видеть, что форма Φ является антиавтодуальной, $*\Phi = -\Phi$.

Понятие векторного произведения естественно определяется и на римановых многообразиях. При этом имеет место следующее свойство.

Теорема 1. ([6]) *Пусть P_M – r-местное векторное произведение на римановом многообразии M и N – ориентируемое подмногообразие коразмерности k в M. Тогда P_M определяет $(r-k)$-местное векторное произведение P_N на подмногообразии N по формуле*

$$P_N(X_1, \dots, X_{r-k}) = P_M(n_1, \dots, n_k, X_1, \dots, X_{r-k}), \tag{1.8}$$

где $n_1, \dots, n_k$ – локально определенный ортонормированный базис нормального расслоения к подмногообразию N.

Из этой теоремы следует, что любое семимерное ориентируемое подмногообразие M^7 в алгебре $\mathbb{C}\mathrm{a} = \mathbb{R}^8$ имеет двухместное векторное произведение, а любое шестимерное ориентируемое подмногообразие $N \subset \mathbb{R}^8$ имеет почти комплексную структуру (одноместное векторное произведение), определенную формулой $J(X) = P(n_1, n_2, X)$. В частности, любое шестимерное ориентируемое подмногообразие $N \subset M^7$ имеет почти комплексную структуру.

2. Структура Кэли. Возьмем разложение $\mathbb{C}\mathrm{a} = \mathbb{R}^8$ на две ортогональных плоскости $\mathbb{C}\mathrm{a} = E^p \oplus E^q$, $p + q = 8$, причем так, что первая плоскость E^p содержит вещественную ось пространства $\mathbb{C}\mathrm{a}$. В каждой плоскости E^p и E^q рассмотрим единичную сферу S^{p-1} и S^{q-1}. Их произведение $S^{p-1} \times S^{q-1}$ является шестимерным ориентируемым подмногообразием в $\mathbb{R}^8$ и, поэтому, имеет почти комплексную структуру, определенную формулой $J(X) = P(n_1, n_2, X)$, где $n_1(x) = x \in S^{p-1}$ и $n_2(y) = y \in S^{q-1}$ – нормальные векторы сфер, а X – касательный вектор к произведению сфер. Поскольку второй вектор n_2 – чисто мнимый и все векторы n_1, n_2 и X взаимно ортогональны, то по формуле (1.5) получаем следующую формулу для почти комплексной структуры на произведении сфер:

$$J(X) = P(n_1, n_2, X) = (n_1 n_2)X, \qquad X \in T_{(n_1,n_2)} S^{p-1} \times S^{q-1}. \tag{2.1}$$

Отметим, что поскольку n_1 и n_2 являются ортогональными, единичной длины и n_2 – чисто мнимый вектор, то их произведение $n = n_1 n_2$ является чисто мнимым единичным вектором. Поэтому при фиксированных n_1 и n_2, формула $J(X) = (n_1 n_2)X$ определяет комплексную структуру во всем пространстве $\mathbb{C}\mathrm{a}$. Действительно, для $n = n_1 n_2$ имеем: $J^2(X) = n(nX) = (nn)X = -X$. Поскольку n_1 и n_2 являются ортогональными и n_2 – чисто мнимый, то

$$P(n_1, n_2, X) = (n_1 n_2)X + \langle n_2, X\rangle n_1 - \langle n_1, X\rangle n_2.$$

Поэтому получаем следующее выражение для оператора почти комплексной структуры на пространстве $\mathbb{C}\mathrm{a}$:

$$J(X) = P(n_1, n_2, X) - \langle n_2, X\rangle n_1 + \langle n_1, X\rangle n_2. \tag{2.2}$$

Отсюда, в частности, следует, что $J(n_1) = n_2$ и $J(n_2) = -n_1$, а также

$$\langle J(X), n_1\rangle = -\langle X, n_2\rangle \quad \text{и} \quad \langle J(X), n_2\rangle = \langle X, n_1\rangle. \tag{2.3}$$

Оператор J комплексной структуры на $\mathbb{C}\mathrm{a}$ зависит от векторов $(n_1, n_2) \in S^{p-1} \times S^{q-1}$. Легко видеть, что эту зависимость можно продолжить на открытое всюду плотное множество $E^{p,q}$ в $\mathbb{C}\mathrm{a}$, являющееся произведением плоскостей E^p и E^q с выкинутыми нулями,

$$E^{p,q} = (E^p \setminus \{0\}) \times (E^q \setminus \{0\}) \subset \mathbb{C}\mathrm{a}. \tag{2.4}$$

Элементы пространства $E^{p,q}$ будем записывать в виде $x = (x_1, x_2)$, где $x_1 \in E^p$ и $x_2 \in E^q$. Для каждой точки $x \in E^{p,q}$ определены два ортогональных единичных вектора,

$$n_1(x) = \frac{x_1}{\|x_1\|}, \qquad n_2(x) = \frac{x_2}{\|x_2\|}. \tag{2.5}$$

Тогда оператор J_x почти комплексной структуры на восьмимерном многообразии $E^{p,q}$ в точке $x = (x_1, x_2)$ определим по той же формуле

$$J_x(X) = (n_1(x) n_2(x))X, \qquad X \in T_x E^{p,q} = \mathbb{C}\mathrm{a}. \tag{2.6}$$

Определение 1. *Почти комплексную структуру J на $E^{p,q} = (E^p \setminus \{0\}) \times (E^q \setminus \{0\}) \subset \mathbb{C}\mathrm{a}$, определенную формулой* (2.6) *будем называть почти комплексной структурой Кэли.*

Найдем выражение тензора Нейенхейса $N(X,Y) = 2([JX,JY] - [X,Y] - J[X,JY] - J[JX,Y])$ структуры Кэли на $E^{p,q}$. Для вычисления $N(X,Y)$ нам потребуется производная $D_X(J)$ тензорного поля J в направлении вектора X. $D_X(J)(Y) = D_X((n_1 n_2)Y) - (n_1 n_2)(D_X Y)$. Поскольку пространство $E^{p,q}$ является открытым подмножеством в $\mathbb{R}^8$, то можно считать векторы X,Y параллельными векторными полями на $E^{p,q}$ и тогда $D_X(J)(Y) = D_X(n_1 n_2)Y$. Производная единичных векторов n_1 и n_2 в направлении вектора $X = (X_1, X_2)$ в точке $x = (x_1, x_2)$ находится простым дифференцированием указанных выше формул (2.5) для n_1 и n_2,

$$dn_1(X) = \frac{1}{\|x_1\|}\left(X_1 - \langle X, n_1\rangle n_1\right), \quad dn_2(X) = \frac{1}{\|x_2\|}\left(X_2 - \langle X, n_2\rangle n_2\right),$$

Поэтому из формулы $D_X(J)(Y) = D_X(n_1 n_2)Y = (dn_1(X)n_2 + n_1 dn_2(X))Y$ получаем следующую формулу для производной почти комплексной структуры на $E^{p,q}$:

$$D_X(J)(Y) = \frac{1}{\|x_1\|}(X_1 n_2)Y + \frac{1}{\|x_2\|}(n_1 X_2)Y - \left(\frac{1}{\|x_1\|}\langle X, n_1\rangle + \frac{1}{\|x_2\|}\langle X, n_2\rangle\right)(n_1 n_2)Y.$$

В частности, в точках произведения сфер $S^{p-1} \times S^{q-1}$ мы имеем: $\|x_1\| = \|x_2\| = 1$, поэтому

$$D_X(J)Y = (X_1 n_2)Y + (n_1 X_2)Y - (\langle X, n_1\rangle + \langle X, n_2\rangle)(n_1 n_2)Y. \tag{2.7}$$

Для векторов X, Y, ортогональных $S^{p-1} \times S^{q-1}$ получаем:

$$D_X(J)(Y) = (X_1 n_2)Y + (n_1 X_2)Y. \tag{2.8}$$

Напомним, что нижний индекс у векторов X_1 и X_2 обозначает компоненты вектора X в пространствах E^p и E^q, соответственно.

Вычислим теперь все слагаемые тензора Нейенхейса $N(X,Y) = 2([JX,JY] - [X,Y] - J[X,JY] - J[JX,Y])$ структуры Кэли на $E^{p,q}$ в точках произведения сфер и для векторов X, Y, ортогональных произведению сфер. Поскольку X, Y – параллельные векторные поля, то $[X,Y] = 0$. Для остальных слагаемых имеем:

$$[JX, JY] = D_{JX}(JY) - D_{JY}(JX)) = D_{JX}(J)Y - D_{JY}(J)X =$$

$$= ((JX)_1 n_2)Y + (n_1 (JX)_2)Y - ((JY)_1 n_2)X + (n_1 (JY)_2)X,$$

$$J[X, JY] = J(D_X(JY) - D_{JY}X) = J(D_X(J)Y) = J((X_1 n_2)Y + (n_1 X_2)Y),$$

$$J[JX, Y] = J(D_{JX}Y - D_Y(JX)) = -J(D_Y(J)X) = -J((Y_1 n_2)X + (n_1 Y_2)X).$$

Получаем получаем следующее выражение тензора Нейенхейса в точках произведения сфер $S^{p-1} \times S^{q-1}$ для векторов X, Y ортогональных произведению сфер,

$$N(X,Y) = 2\left\{(((JX)_1 n_2 + n_1 (JX)_2)Y - ((JY)_1 n_2 + n_1 (JY)_2)X - \right. \tag{2.9}$$

$$\left. - J((X_1 n_2)Y - (Y_1 n_2)X + (n_1 X_2)Y - (n_1 Y_2)X)\right\}.$$

Из полученного выражения следует, что почти комплексная структура J на $E^{p,q}$ является неинтегрируемой.

Вычислим также $\langle D_X(J)Y, Z\rangle$ в точках произведения сфер и для векторов X, Y, Z ортогональных произведению сфер через векторное произведение. Если в формуле трехместного векторного произведения P второй вектор y – чисто мнимый, то $P(x, y, z) = (xy)z + \langle x, y\rangle z + \langle y, z\rangle x - \langle z, x\rangle y$. Поэтому $(xy)z = P(x, y, z) - \langle x, y\rangle z - \langle y, z\rangle x + \langle z, x\rangle y$. Тогда для $D_X(J)Y = (X_1 n_2)Y + (n_1 X_2)Y$ имеем:

$$(X_1 n_2)Y = P(X_1, n_2, Y) + \langle Y, X_1\rangle n_2, \quad (n_1 X_2)Y = P(n_1, X_2, Y) - \langle X_2, Y\rangle n_1.$$

Поэтому

$$D_X(J)Y = P(X_1, n_2, Y) + P(n_1, X_2, Y) + \langle Y, X_1\rangle n_2 - \langle X_2, Y\rangle n_1. \tag{2.10}$$

Если Z – любой вектор, ортогональный произведению сфер в точке x, то

$$\langle D_X(J)Y, Z\rangle = \Phi(X_1, n_2, Y, Z) + \Phi(n_1, X_2, Y, Z). \tag{2.11}$$

Теорема 2. *Почти комплексная структура Кэли J на $E^{p,q}$ является ортогональной и неинтегрируемой. Ее фундаментальная форма $\Omega(X, Y) = \langle JX, Y\rangle$ имеет вид:*

$$\Omega_x(X, Y) = \Phi(n_1, n_2, X, Y) + n_1^* \wedge n_2^*(X, Y), \tag{2.12}$$

где символами n_1^* и n_2^* обозначены линейные формы, дуальные к векторным полям $n_1(x)$ и $n_2(x)$ на $E^{p,q}$.

Доказательство. Ортогональность J следует из свойства $\langle nX, nY\rangle = \langle n, n\rangle\langle X, Y\rangle$, когда $n = n_1 n_2$. Поскольку открытое множество $E^{p,q}$ имеет единые координаты из $\mathbb{R}^8$, то тензор Нейенхейса $N(X, Y) = 2([JX, JY] - [X, Y] - J[X, JY] - J[JX, Y])$ может быть вычислен непосредственно по формуле $N^i_{jk} = 2(J^h_j \partial_h J^i_k - J^h_k \partial_h J^i_j - J^i_h \partial_j J^h_k + J^i_h \partial_k J^h_j)$. Для того, чтобы воспользоваться этой формулой достаточно оператор умножения $J_x(X) = \frac{x_1 x_2}{\|x_1\|\|x_2\|} X$ записать в виде матрицы, действующей на столбец координат вектора X и провести явное вычисление компонент N^i_{jk}. Легко видеть, что квадраты компонент N^i_{jk} тензора Нейенхейса являются рациональными функциями координат точки x. Поэтому для доказательства неинтегрируемости J достаточно показать, что хотя бы в одной точке значение тензора $N_x(X, Y) \neq 0$. Тогда $N \neq 0$ почти всюду на $E^{p,q}$. Поэтому можно использовать формулу (2.9) для нахождения тензора Нейенхейса в точках точках произведения сфер и для векторов X, Y ортогональных произведению сфер. Пусть например: $n_1 = 1$, $n_2 = e_5$, $X = X_1 = e_1$, $Y = Y_1 = e_2$. Тогда $N_{(n_1, n_2)}(e_1, e_2) = 4e_3 - 4e_6 \neq 0$.

Фундаментальная 2-форма почти комплексной структуры J на $E^{p,q}$ находится достаточно просто из (2.2),

$$\begin{aligned}\Omega_x(X, Y) &= \langle JX, Y\rangle = \langle P(n_1, n_2, X) - \langle n_2, X\rangle n_1 + \langle n_1, X\rangle n_2, Y\rangle = \\ &= \Phi(n_1, n_2, X, Y) + \langle n_1, X\rangle\langle n_2, Y\rangle - \langle n_1, Y\rangle\langle n_2, X\rangle = \\ &= \Phi(n_1, n_2, X, Y) + n_1^* \wedge n_2^*(X, Y).\end{aligned}$$

где $\Phi(x, y, z, w) = \langle P(x, y, z), w\rangle$ – введенная ранее кососимметрическая 4-форма на алгебре $\mathbb{C}$a, а символами n_1^* и n_2^* обозначены линейные формы, дуальные к векторным полям $n_1(x)$ и $n_2(x)$ на $E^{p,q}$.

3. Шестимерные произведения сфер в $\mathbb{C}a = \mathbb{R}^8$. Почти комплексная структура Кэли на открытом множестве $E^{p,q}$ при ограничении на подмногообразие $S^{p-1} \times S^{q-1}$ определяет на нем почти комплексную структуру, которую также будем называть именем Кэли. Точку $x \in S^{p-1} \times S^{q-1}$ естественно представить в виде двух компонент, $x = (n_1, n_2)$, где $n_1 \in S^{p-1}$ и $n_2 \in S^{q-1}$ отождествляются также с нормальными векторами сфер. Тогда для вектора $X \in T_x(S^{p-1} \times S^{q-1})$ имеем $J_x(X) = P(n_1, n_2, X) = (n_1 n_2)X$.

Теорема 3. *Ортогональная почти комплексная структура Кэли J на $S^{p-1} \times S^{q-1}$ является неинтегрируемой. Фундаментальная 2-форма на $S^{p-1} \times S^{q-1}$ и ее внешний дифференциал имеют выражения*

$$\Omega_x(X,Y) = \Phi(n_1, n_2, X, Y), \tag{3.1}$$

$$d\Omega(X,Y,Z) = \Phi(X_1, n_2, X, Z) + \Phi(Y_1, n_2, Z, X) + \Phi(Z_1, n_2, X, Y) +$$
$$+\Phi(n_1, X_2, X, Z) + \Phi(n_1, Y_2, Z, X) + \Phi(n_1, Z_2, X, Y),$$

где $n_1 \in S^{p-1}$, $n_2 \in S^{q-1}$, а нижние индексы 1 и 2 у векторов $X, Y, Z \in T_x(S^{p-1} \times S^{q-1})$ обозначают компоненты этих векторов, касательные к S^{p-1} и S^{q-1}, соответственно.

Для ковариантной производной $\nabla_X J$ на $S^{p-1} \times S^{q-1}$ имеет место следующее выражение

$$\langle \nabla_X(J)Y, Z\rangle = \Phi(X_1, n_2, Y, Z) + \Phi(n_1, X_2, Y, Z). \tag{3.2}$$

Почти комплексная структура Кэли J на $S^{p-1} \times S^{q-1}$ является частично приблизительно кэлеровой, т. е. имеют место следующие равенства:

$$\nabla_{X_1}(J)X_1 = 0, \quad \nabla_{X_2}(J)X_2 = 0, \tag{3.3}$$

для любых векторов касательных только к одному из сомножителей в произведении $S^{p-1} \times S^{q-1}$, т. е. векторов вида $X = (X_1, 0)$ и $X = (0, X_2)$.

Доказательство. Поскольку сфера $S^{p-1} \times S^{q-1}$ (почти)голоморфно вкладывается в пространство $E^{p,q}$, то выражения тензора Нейенхейса, фундаментальной формы и ковариантной производной тензора J получаются из общих выражений, полученных для пространства $E^{p,q}$, считая, что все векторы X, Y, Z ортогональны нормальным векторам n_1 и n_2. Таким образом, на сфере $S^{p-1} \times S^{q-1}$ тензор Нейенхейса имеет выражение (2.9), из которого следует неинтегрируемость J.

Для фундаментальной 2-формы, учитывая, что X, Y ортогональны n_1 и n_2, имеем: $\Omega_x(X,Y) = \langle JX, Y\rangle = \langle P(n_1, n_2, X) - \langle n_2, X\rangle n_1 + \langle n_1, X\rangle n_2, Y\rangle = \langle P(n_1, n_2, X), Y\rangle = \Phi(n_1, n_2, X, Y)$.

Найдем внешний дифференциал формы Ω по формуле $d\Omega(X,Y,Z) = X\Omega(Y,Z) + Y\Omega(Z,X) + Z\Omega(X,Y) - \Omega([X,Y],Z) - \Omega([Z,X],Y) - \Omega([Y,Z],X)$. Векторы $X, Y, Z \in T_x(S^{p-1} \times S^{q-1})$ удобно считать продолженными на $E^{p,q}$ как параллельные векторные поля, тогда их скобки Ли будут нулевыми. Поскольку вектор $X = (X_1, X_2)$ ортогонален к n_1 и n_2, то $dn_1(X) = X_1$ и $dn_2(X) = X_2$, Поэтому $X\Omega(Y,Z) = X\Phi(n_1, n_2, X, Y) = \Phi(X_1, n_2, X, Y) + \Phi(n_1, X_2, X, Y)$. Остальные компоненты вычисляются аналогично. Складывая их, получаем $d\Omega$.

Формула (3.2) установлена ранее как формула (2.11). Из последнего выражения легко получается, что $\nabla_{X_1}(J)X_1 = 0$, $\nabla_{X_2}(J)X_2 = 0$, для векторов вида $X = (X_1, 0) = X_1$ и $X = (0, X_2) = X_2$. Это свойство естественно назвать частичной приблизительно кэлеровостью, т. е. приблизительно кэлеровость отдельно по направлениям, касательным к S^{p-1} и отдельно к S^{q-1}. Для общего вектора X это свойство не выполняется, что легко проверяется прямыми вычислениями. Теорема доказана.

Рассмотрим теперь различные случаи произведений сфер в пространстве $\mathbb{C}$a. Отметим, что в отличие от S^6, на произведении сфер $S^1 \times S^{2m-1}$ существует комплексная структура, она была открыта Хопфом [9]. Калаби и Экман нашли комплексную структуру на произведении любых нечетномерных сфер, см. [10] и [12]. Как известно [5], на произведении четномерных сфер почти комплексная структура существует только в случае $S^2 \times S^4$. Мы рассмотрим почти комплексные структуры Кэли на S^6, $S^1 \times S^5$, $S^2 \times S^4$ и $S^3 \times S^3$.

3.1 Сфера S^6. Для шестимерной сферы S^6 нужно брать разложение пространства $\mathbb{C}$a в произведение одномерного и семимерного подпространств, $\mathbb{C}\mathrm{a} = \mathbb{R}\times\mathbb{R}^7$. Получаем $S^0 \times S^6 = \{-1,+1\} \times S^6$ – два экземпляра стандартной единичной сферы S^6 в пространстве $\mathbb{R}^7$ чисто мнимых чисел Кэли. Будем рассматривать один экземпляр $S^6 \subset \mathbb{R}^7$. Почти комплексная структура Кэли J на S^6 определяется следующим образом. Если $n = n(x)$ – единичный нормальный вектор в точке $x \in S^6$, тогда $J_x : T_xS^6 \to T_xS^6$ есть умножение на n слева, $J_x(X) = n \times X$. Очевидно, что J является ортогональной. Хорошо известно, что J не интегрируема, т. е. $N(X,Y) \neq 0$.

Пусть $\omega(X,Y) = \langle JX, Y\rangle$ – фундаментальная 2-форма, соответствующая J. Форма ω имеет очень простое выражение через векторное произведение:

$$\omega(X,Y) = \langle n\times X, Y\rangle = \langle n, X\times Y\rangle \tag{3.4}$$

По классификации Грея-Харвеллы [7] почти эрмитовых многообразий, многообразие (S^6, J_0) принадлежит классу $W_1 = NK$ приблизительно кэлеровых многообразий (nearly Kähler). Напомним, что это такие многообразия, что $\nabla_X(J)X = 0$, или $3\nabla\omega = d\omega$. В работе [7] установлены следующие свойства приблизительно кэлеровых многообразий:

$$\delta\omega = 0, \qquad |\nabla\omega|^2 = \frac{1}{9}|d\omega|^2 = \frac{1}{16}|N|^2 = s - s^*,$$

где ω – фундаментальная форма, N – тензор Нейенхейса и s, s^* – скалярные кривизны.

Выразим основные характеристики почти комплексной структуры J на сфере S^6 через векторное произведение (подробные вычисления см. в [13]).

Лемма 1. *Калибровка φ при ее ограничении на сферу обладает свойством:*

$$\varphi(JX,Y,Z) = \varphi(X,JY,Z) = \varphi(X,Y,JZ). \tag{3.5}$$

Доказательство. $\varphi(Z,JX,Y) = \langle Z, JX\times Y\rangle = \langle Z, -n\times(X\times Y) - (X,Y)n\rangle = \langle Z, -n\times (X\times Y)\rangle = -\langle Z\times n, X\times Y\rangle = \langle n\times Z, X\times Y\rangle = \langle JZ, X\times Y\rangle = \varphi(JZ,X,Y)$.

Лемма 2. *Пусть φ и ψ – ассоциативная и соответственно, коассоциативная калибровки пространства $\mathbb{R}^7$. Тогда для любых X,Y,Z касательных к сфере S^6 имеет место равенство*

$$i_n\psi(X,Y,Z) = -\varphi(JX,Y,Z), \tag{3.6}$$

где i_n – внутреннее произведение с вектором нормали $n(x)$.

Доказательство. $i_n\psi(X,Y,Z) = \langle n, [XYZ]\rangle = \langle n, -X\times(Y\times Z)\rangle = -\langle n\times X, Y\times Z\rangle = -\varphi(JX,Y,Z)$.

Пусть $*_S$ – оператор Ходжа на сфере и $\theta|_S$ – ограничение дифференциальной формы θ в $\mathbb{R}^7$ на подмногообразие S^6.

Теорема 4. ([13]) *Фундаментальная форма ω почти комплексной структуры Кэли J на S^6 и ее внешний дифференциал $d\omega$ обладают свойствами:*

$$\omega = i_n\varphi, \qquad d\omega = 3\varphi|_S, \tag{3.7}$$

$$*_S\ \omega = \psi|_S, \qquad *_S\ d\omega = -3\ i_n\psi, \tag{3.8}$$

$$d\omega(X,Y,Z) = 3\ i_n\psi(JX,Y,Z), \tag{3.9}$$

$$d\omega(JX,Y,Z) = d\omega(X,JY,Z) = d\omega(X,Y,JZ), \tag{3.10}$$

$$d\omega(X,JY,JZ) = -d\omega(X,Y,Z). \tag{3.11}$$

Напомним, что $\omega(X,Y) = \langle n(x), X \times Y\rangle$. Из теоремы сразу следует, что

$$d\omega(X,Y,Z) = 3\langle X, Y \times Z\rangle.$$

Найдем ковариантную производную тензора J. Поскольку $n(x) = x$, то для любого касательного вектора $X \in T_xS^6$ имеем $Dn_x(X) = X$. Тогда, из равенства $(\nabla_X J)Y = pr(D_X(JY)) = pr(D_X(n\times Y)) = pr(X\times Y)$, где pr – проекция на касательное пространство T_xS^6, получаем,

$$(\nabla_X J)Y = X \times Y - \langle n(x), X \times Y\rangle n = X \times Y - \omega(X,Y)n. \tag{3.12}$$

Теорема 5. *Тензор Нейенхейса $N(X,Y)$ почти комплексной структуры J имеет вид*

$$N(X,Y) = -8\; n \times (X \times Y). \tag{3.13}$$

Доказательство. Сразу следует из формулы (2.9). Можно также использовать формулу $g(N(X,Y), JZ) = 4g((\nabla_Z J)X, Y) + 2d\omega(Z, JX, JY) - 2d\omega(Z, X, Y)$, установленную в книге [10] (с учетом разницы в определении внешней степени и фундаментальной формы) и равенства (3.12) и (3.11).

Теорема 6. ([6]) *Фундаментальная 2-форма ω почти комплексной структуры Кэли является собственной для оператора Лапласа*

$$\triangle\omega = 12\;\omega. \tag{3.14}$$

3.2. Произведение сфер $S^1 \times S^5$. Произведение двух нечетномерных сфер S^1 и S^5 вложим в $\mathbb{C}\mathrm{a} = \mathbb{R}^8$ следующим образом. Сфера S^1 является единичной в координатной плоскости $\mathbb{R}^2$, состоящей из чисел вида $x = x^0 + x^4e_4$, а S^5 является единичной в координатной плоскости $\mathbb{R}^6$, состоящей из чисел вида как $x = x^1e_1 + x^2e_2 + x^3e_3 + x^5e_5 + x^6e_6 + x^7e_7$. Единичную нормаль n_1 к сфере S^1 будем отождествлять с точкой $x \in S^1$ этой сферы, $n_1(x) = x \in S^1$. Аналогично, для единичной нормали n_2 к сфере S^5 имеем $n_2(x) = x \in S^5$.

Поскольку $S^1 \times S^5$ есть шестимерное подмногообразие $\mathbb{R}^8$, то оно имеет почти комплексную структуру, определенную формулой

$$J(X) = P(n_1, n_2, X) = (n_1n_2)X, \quad X \in T_{((n_1,n_2))}S^1 \times S^{2m-1}.$$

Вложение $S^1 \times S^5 \subset E^{2,6}$ является (почти)голоморфным. Поэтому мы можем использовать полученные ранее выражения для тензора Нейенхейса (2.9) и для фундаментальной 2-формы (3.1) с учетом того, что касательные векторы X, Y ортогональны к n_1 и n_2.

Отметим, что S^1 является группой относительно умножения чисел Кэли. Легко видеть, что $n_1n_2 \in S^5$. Поэтому группа S^1 действует слева на S^5, $S^1 \times S^5 \to S^5$. Определено также и правое действие группы S^1 на S^5. Это действие удобно выразить при помощи комплексных чисел.

Вектор $x = x^0 + x^4e_4 \in \mathbb{R}^2$ удобно отождествить с комплексным числом $x = x^0 + x^4i = z \in \mathbb{C}$, считая, что $e_4 = i$ – мнимая единица. Для векторов $y \in \mathbb{R}^6$ имеем,

$$y = x^1e_1 + x^2e_2 + x^3e_3 + x^5e_5 + x^6e_6 + x^7e_7 = e_1(x^1 + x^5e_4) + e_2(x^2 + x^6e_4) + e_3(x^3 + x^7e_4) =$$

$$= e_1(x^1 + ix^5) + e_2(x^2 + ix^6) + e_3(x^3 + ix^7) = e_1z^1 + e_2z^2 + e_3z^3 \equiv (z^1, z^2, z^3).$$

Таким образом можно отождествить $\mathbb{R}^6$ с $\mathbb{C}^3$.

Группа S^1 действует на S^5 правым умножением. При этом выполняются следующие свойства. Если $x = x^0 + x^4 i = z \in S^1$ и $y = x^1e_1 + x^2e_2 + x^3e_3 + x^5e_5 + x^6e_6 + x^7e_7 = e_1z^1 + e_2z^2 + e_3z^3$, то

$$yx = (e_1z^1 + e_2z^2 + e_3z^3)z = e_1(z^1z) + e_2(z^2z) + e_3(z^3z) \equiv (z^1z, z^2z, z^3z).$$

Кроме того, для $k = 1, 2, 3$ выполняются следующие свойства умножения:

$$z(z^ke_k) = (zz^k)e_k, \quad e_kz = \overline{z}e_k.$$

Теорема 7. *Ортогональная почти комплексная структура Кэли J на $S^1 \times S^5$ является неинтегрируемой. Она инвариантна при правом действии группы S^1 на $S^1 \times S^5$. Действие S^1 на S^5, заданное умножением справа определяет расслоение Хопфа $S^5 \to \mathbb{C}P^3$. Оператор почти комплексной структуры Кэли J переводит векторное поле V_1, касательное к S^1, в векторное поле V_2 на S^5, касательное к слоям расслоения Хопфа.*

Доказательство. Находим тензор Нейенхейса прямым вычислением по формуле (2.9). Легко видеть, что для $n_1 = \cos(\theta) + \sin(\theta)e_4 = e^{i\theta}$, $n_2 = e_1$, $X = X_2 = e_2$, $Y = Y_2 = e_3$, $N_{(n_1,n_2)}(e_2, e_3) = -4(1 - e^{i2\theta}) \neq 0$. Поэтому J неинтегрируема.

Рассмотрим вопрос об инвариантности почти комплексной структуры J относительно действия S^1 на $S^1 \times S^5$ правым умножением на элемент $z = x^0 + x^4 i \in S^1$. Пусть X – касательный вектор к $S^1 \times S^5$ в точке (n_1, n_2). Тогда $J(n_1, n_2)X = (n_1n_2)X$. При умножении справа на элемент $z \in S^1$ вектор X переходит в вектор Xz в точке (n_1z, n_2z), поэтому $J_{(n_1z,n_2z)}(Xz) = ((n_1z)(n_2z))(Xz)$. В случае инвариантности должно выполняться равенство $dz(J_{(n_1,n_2)}X) = J(n_1z, n_2z)(Xz)$. Учитывая линейность оператора умножения $z : \mathbb{R}^8 \to \mathbb{R}^8$, последнее равенство принимает вид: $((n_1n_2)X)z = ((n_1z)(n_2z))(Xz)$. Оно устанавливается прямым вычислением с использованием коммутативности S^1 и следующих свойства умножения чисел Кэли: $(xx)y = x(xy)$, $x(yy) = (xy)y$, $x(yx) = (xy)x = xyx$, $((xy)z)y = x(yzy)$, $(xyx)z = x(y(xz))$, $(xy)(zx) = x(yz)x$, $(xxy)x = xx(yx)$.

Действительно,

$$((n_1z)(n_2z))(Xz) = ((zn_1)(n_2z))(Xz) = (z(n_1n_2)z)(Xz) = (z(n_1\overline{z}n_2))(Xz)$$

$$= z((\overline{z}n_1n_2)X)z = ((z\overline{z}n_1n_2)X)z = ((n_1n_2)X)z.$$

Пусть $n_1 = \cos(\theta) + i\sin(\theta) = e^{i\theta} \in S_1$ и $n_2 = e_1(x^1 + ix^5) + e_2(x^2 + ix^6) + e_3(x^3 + ix^7) \in S^5$. Тогда $n_1n_2 = e^{i\theta}e_1z^1 + e^{i\theta}e_2z^2 + e^{i\theta}e_3z^3 \in S^5$. Касательное векторное поле $V_1(n_1)$ к окружности S^1 определяется следующим образом: $V_1(n_1) = ie^{i\theta} = in_1$. Тогда $J(V_1(n_1)) = (n_1n_2)ie^{i\theta} = (e^{i\theta}z^1e_1, e^{i\theta}z^2e_2, e^{i\theta}z^3e_3)ie^{i\theta} = (z^1e_1, z^2e_2, z^3e_3)ie^{i\theta}e^{-i\theta} = (z^1, z^2, z^3)i = V_2(n_2)$ – векторное поле, касательное к слоям расслоения Хопфа.

3.3. Произведение сфер $S^2 \times S^4$. Как известно [5], такое произведение четномерных сфер является единственным нетривиальным случаем, когда на нем существует почти комплексная структура. Вложим $S^2 \times S^4$ в $\mathbb{C}\mathrm{a} = \mathbb{R}^8$ следующим образом. Сфера S^2 является единичной в координатной плоскости $\mathbb{R}^3$, состоящей из чисел вида $x = x^0 + x^1e_1 + x^2e_2$, а S^4 является единичной в координатной плоскости $\mathbb{R}^5$, состоящей из чисел вида как $x = x^3e_3 + x^4e_4 + x^5e_5 + x^6e_6 + x^7e_7$. Пусть n_1 и n_2 – нормальные векторы к сферам S^2 и S^4. Как шестимерное подмногообразие $\mathbb{R}^8$, произведение $S^2 \times S^4$ имеет почти комплексную структуру, определенную формулой $J(X) = P(n_1, n_2, X) = (n_1n_2)X$, $X \in T_{(n_1,n_2)}S^2 \times S^4$. Поскольку касательный вектор X ортогонален к n_1 и n_2, то данное вложение $S^2 \times S^4 \subset E^{3,5}$ является (псевдо)голоморфным. Поэтому мы можем использовать полученные ранее выражения (2.9) и (3.1) для тензора Нейенхейса и для фундаментальной 2-формы с учетом того, что касательные векторы X, Y ортогональны к n_1 и n_2.

Прямая проверка показывает, что почти комплексная структура Кэли J на $S^2 \times S^4$ является неинтегрируемой. Действительно, пусть например: $n_1 = 1$, $n_2 = e_5$, $X = X_1 = e_1$, $Y = Y_1 = e_2$. Тогда $N_{(n_1,n_2)}(e_1, e_2) = 4e_3 - 4e_6$.

3.4. Произведение сфер $S^3 \times S^3$. Рассмотрим произведение двух нечетномерных сфер S^3 и S^3, вложенное в $\mathbb{C}\mathrm{a} = \mathbb{R}^8$ следующим образом. Сфера S^3 является единичной в координатной плоскости $\mathbb{R}^4$, состоящей из чисел вида $x = x^0 + x^1e_1 + x^2e_2 + x^3e_3$, а вторая сфера S^3 является единичной в другой координатной плоскости $\mathbb{R}^4$, состоящей из чисел вида $y = x^4e_4 + x^5e_5 + x^6e_6 + x^7e_7$.

Считая число e_1 комплексной мнимой единицей $e_1 = i$, отождествим первое пространство $\mathbb{R}^4$ чисел $x = x^0 + x^1e_1 + x^2e_2 + x^3e_3$ с комплексными матрицами следующим образом:

$$x = x^0 + x^1e_1 + x^2e_2 + x^3e_3 = (x^0 + x^1i) + (x^2 + x^3i)e_2 = z^1 + z^2e_2 \equiv \begin{pmatrix} z^1 & z^2 \\ -\overline{z^2} & \overline{z^1} \end{pmatrix} = U_x.$$

При этом произведение xy чисел Кэли переходит в произведение матриц U_xU_y.

Легко видеть, что сфера $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ отождествляется с группой $SU(2)$. Касательное пространство в единице T_1S^3 имеет базис из векторов $e_1,\ e_2,\ e_3$. При отождествлении $S^3 \equiv SU(2)$, данному базису соответствует базис алгебры Ли $su(2)$, состоящий из матриц:

$$E_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда соответствующие правоинвариантные векторные поля на S^3 имеют вид:

$$V_1(x) = dR_x(E_1) = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z^1 & z^2 \\ -\overline{z^2} & \overline{z^1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} iz^1 & iz^2 \\ i\overline{z^2} & -i\overline{z^1} \end{pmatrix} = (-x^1, x^0, -x^3, x^2),$$

$$V_2(x) = dR_x(E_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z^1 & z^2 \\ -\overline{z^2} & \overline{z^1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\overline{z^2} & \overline{z^1} \\ -z^1 & -z^2 \end{pmatrix} = (-x^2, x^3, x^0, -x^1),$$

$$V_3(x) = dR_x(E_3) = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z^1 & z^2 \\ -\overline{z^2} & \overline{z^1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\overline{z^2} & i\overline{z^1} \\ iz^1 & iz^2 \end{pmatrix} = (-x^3, -x^2, x^1, x^0).$$

Легко видеть, что данные левоинвариантные поля получаются из векторов e_1, e_2, e_3 при их умножении справа (как чисел Кэли) на элемент $x \in S^3$. Действительно:
$e_1x = e_1(x^0 + x^1e_1 + x^2e_2 + x^3e_3) = -x^1 + x^0e_1 - x^3e_2 + x^2e_3 = (-x^1, x^0, -x^3, x^2) = V_1(x)$,
$e_2x = e_2(x^0 + x^1e_1 + x^2e_2 + x^3e_3) = -x^2 + x^3e_1 + x^0e_2 - x^1e_3 = (-x^2, x^3, x^0, -x^1) = V_2(x)$,
$e_3x = e_3(x^0 + x^1e_1 + x^2e_2 + x^3e_3) = -x^3 - x^2e_1x^1e_2 + x^0e_3 = (-x^3, -x^2, x^1, x^0) = V_3(x)$.

Аналогичным образом отождествим второе пространство $\mathbb{R}^4$ чисел $y = x^4e_4 + x^5e_5 + x^6e_6 + x^7e_7 = (x^4 + x^5e_1 + x^6e_2 + x^7e_3)e_4$ с комплексными матрицам следующим образом:

$$y = (x^4, x^5, x^6, x^7) = (x^4 + x^5i, x^6 + x^7i) = (w^1, w^2) = \begin{pmatrix} w^1 & -\overline{w^2} \\ w^2 & \overline{w^1} \end{pmatrix} = U_y.$$

Легко видеть, что сфера $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ отождествляется с группой $SU(2)$. Касательное пространство $T_{e_4}S^3$ в точке e_4 имеет базис из векторов $e_5,\ e_6,\ e_7$. При отождествлении $S^3 \equiv SU(2)$, данному базису соответствует базис алгебры Ли $su(2)$, состоящий из матриц $E_1, -E_2, E_3$. Тогда соответствующие им правоинвариантные векторные поля на S^3 имеют вид:

$$W_1(y) = (-x^5, x^4, x^7, -x^6), \quad W_2(y) = (-x^6, -x^7, x^4, x^5), \quad W_3(y) = (-x^7, x^6, -x^5, x^4).$$

Нетрудно заметить, что данные левоинвариантные поля получаются из векторов e_1, e_2, e_3 при их умножении справа на элемент $y \in S^3$. Действительно, $e_1 y = e_1(x^4 e_4 + x^5 e_5 + x^6 e_6 + x^7 e_7) = x^4 e_5 - x^5 e_4 - x^6 e_7 + x^7 e_6 = (-x^5, x^4, x^7, -x^6) = W_1(y)$, $e_2 y = e_2(x^4 e_4 + x^5 e_5 + x^6 e_6 + x^7 e_7) = x^4 e_6 + x^5 e_7 - x^6 e_4 - x^7 e_5 = (-x^6, -x^7, x^4, x^5) = W_1(y)$, $e_3 y = e_3(x^4 e_4 + x^5 e_5 + x^6 e_6 + x^7 e_7) = x^4 e_7 - x^5 e_6 + x^6 e_5 - x^7 e_4 = (-x^7, x^6, -x^5, x^4) = W_1(y)$.

Теорема 8. *Ортогональная почти комплексная структура Кэли на $S^3 \times S^3$ является неинтегрируемой. При естественном отождествлении произведения сфер $S^3 \times S^3$ с группой Ли $SU(2) \times SU(2)$, почти комплексная структура Кэли J является правоинвариантной. При этом, для базисных левоинвариантных векторных полей V_i и W_j на группах-сомножителях, имеют место равенства: $JW_1 = V_1$, $JW_2 = V_2$, $JW_3 = V_3$.*

Доказательство. Для правоинвариантности структуры Кэли J достаточно показать, что оператор почти комплексной структуры J переводит правоинвариантные векторные поля $W_i(y)$ в правоинвариантные векторные поля $V_i(x)$. Пусть $(x, y) \in S^3 \times S^3$. Как уже отмечалось, $n_1(x) = x$ и $n_2(y) = y$. В дальнейших вычислениях будем использовать следующие свойства:

$n_1 n_2 \perp e_i$, $n_1 \perp n_2$, $n_2 \perp e_i$, $n_1 \perp n_2 \times e_i$ $n_2 \perp n_2 \times e_i$ для $i = 1, 2, 3$;

$uv = U \times V - \langle U, V\rangle$ – для чисто мнимых октав u и v;

$n \times (n \times Z) = -Z + \langle n, Z\rangle n$, если n – вектор единичной длины;

$(X \times Y) \times Z = -X \times (Y \times Z) + 2\langle X, Z\rangle Y - \langle X, Y\rangle Z - \langle Y, Z\rangle X$;

$\langle xy, zy\rangle = \langle x, z\rangle\langle y, y\rangle$.

Учитывая разложение $n_1 = n_1^0 + N_1$ на вещественную и чисто мнимую части, имеем для $i = 1, 2, 3$:

$J(W_i(y)) = J(e_i y) = (n_1 n_2)(e_i n_2) = -\langle n_1 n_2, e_i n_2\rangle + (n_1 n_2) \times (e_i n_2) = -\langle n_1, e_i\rangle + ((n_1^0 + N_1) n_2) \times (e_i \times n_2) = -\langle n_1, e_i\rangle + n_1^0 (n_2 \times (e_i \times n_2) + (N_1 \times n_2) \times (e_i \times n_2) = -\langle n_1, e_i\rangle - n_1^0 (n_2 \times (n_2 \times e_i) - (N_1 \times n_2) \times (n_2 \times e_i) = -\langle n_1, e_i\rangle + n_1^0 e_i - (N_1 \times n_2) \times (n_2 \times e_i) = -\langle n_1, e_i\rangle + n_1^0 e_i + N_1 \times (n_2 \times (n_2 \times e_i)) - 2\langle N_1, n_2 \times e_i\rangle n_2 + \langle N_1, n_2\rangle (n_2 \times e_i) + \langle n_2, n_2 \times e_i\rangle N_1 = -\langle n_1, e_i\rangle + n_1^0 e_i + N_1 \times (n_2 \times (n_2 \times e_i)) = n_1^0 e_i - N_1 \times e_i - \langle N_1, e_i\rangle = n_1^0 e_i + e_i \times N_1 - \langle e_i, N_1\rangle = e_i(n_1^0 + N_1) = e_i n_1 = e_i x = V_i(x)$.

Очевидно, что почти комплексная структура Кэли на $S^3 \times S^3$ является неинтегрируемой. Тензор Нейенхейса легко вычисляется для базисных левоинвариантных полей V_i и W_j, $i, j = 1, 2, 3$ с учетом того, что $[V_i, W_j] = 0$.

Литература

[1] Bor G., Hernandez-Lamoneda L. The canonical bundle of hermitian manifold. // Bol. Soc. Mat. Mexicana, 1999, (3) Vol 5, p. 187–198.

[2] Bryant R. Submanifolds and special structures on the octonions // J. Diff. Geom., 1982, Vol. 17, p. 185–232.

[3] Calabi E. and Gluck H. What are best almost-complex structures on te 6-sphere? // Proc. Symp. in Pure Math. 1993 Vol. 54, Part 2, p. 99–108.

[4] Calabi E. Construction and properties of some 6-dimensional almost-complex manifolds. // Trans. Amer. Math. Soc. 1958, Vol. 87, p. 407–438.

[5] Datta B., Subramanian S. Nonexistence of almost complex structures on products of even-dimensional spheres / Topol. and its Appl., 1990, Vol. 36, No. 1, p. 39–42.

[6] Gray A. Vector cross products on manifolds // Trans AMS, 1969, Vol. 141, p. 465–504.

[7] Gray A., Harvella L.M. The sixteen classes of almost Hermitian manifolds and their linear Invariants // Ann. Math. Pura Appl. 1980, Vol. 123, p. 35–58.

[8] Harvey R., Lawson H. Calibrated geometries. // Acta math. 1982, N148, p. 47–157.

[9] Hopf H. Zur Topologie der komplexen Mannigfaltigkeiten. Studies and Essays presented to R. Courant. N.Y.: Interscience, 1948, 167–185

[10] Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии, т. 1 и т. 2. 1981, М.: Наука.

[11] LeBrun C. Orthogonal complex structures on S^6 // Proc. Amer. Math. Soc. 1958, 101, N1, p. 136–138.

[12] Peng C.K., Tang Z. Integrability Condition on an Almost Complex Structure and Its Application // Acta Math. Sinica, English Series, V. 21, No. 6, 2005, 1459–1464.

[13] Смоленцев Н. К. О почти комплексной структуре Кэли на сфере S^6 // Труды Рубцовского индустриального института. Вып. 12. Математика и приложения. Рубцовск-Барнаул: Изд. Алт. Ун-та., 2003, 78–85.

[14] Sekigawa K. Almost complex submanifolds of a 6-dimensional sphere // Kodai Math. J., 1983, Vol. 6, No. 2, 174–185.