О ПОЛИНОРМАХ НА НЕАССОЦИАТИВНЫХ АЛГЕБРАХ И ИХ ВОЗМОЖНОМ ПРИМЕНЕНИИ В ФИЗИКЕ

А. А. Элиович

Российский университет дружбы народов, НИИ ГСГФ
eliovich@mail.ru

В работе доказывается ряд утверждений о неассоциативных алгебрах, квадратичных над своим центром. В частности, доказывается, что в квадратичных алгебрах существует почти точный антиавтоморфизм. Как частный, но широкий класс таких алгебр, вводится понятие алгебр с центральным сопряжением, обобщающее гиперкомплексные алгебры Кэли-Диксона. Доказывается, что альтернативные алгебры с центральным сопряжением обладают мультипликативной нормой степени 2 (вообще говоря, не вещественной). Как следствие, эти алгебры (в частности, бикватернионы и биоктавы) обладают мультипликативной вещественной полинормой, которая может иметь несколько различных, но эквивалентных представлений. Вводится квадроскалярное и квадровекторное произведение. На примере алгебры бикватернионов рассматриваются некоторые возможности для применения полученного аппарата в геометрии и физике. В частности, показывается, что рассмотрение 4-нормы в теории поля делает естественным переход от электродинамики Максвелла к электродинамике Борна-Инфельда, а также обосновывает модифицированный лагранжиан для модели Скирма.

Введение

В последние два десятилетия фундаментальная теоретическая физика находится в состоянии идейного поиска. В этой ситуации приобретают смысл не только магистральные направления исследований, но и разного рода "окольные тропы" [19]. Одной из таких полузабытых программ была красивая идея алгебраизации физики, предложенная в середине XIX века Уильямом Гамильтоном и поддержанная, в частности, Уильямом Клиффордом. Они пытались понять устройство природы, предположив, что в основе физики лежит геометрия, а в основе геометрии – некоторая гиперкомплексная алгебра с исключительными свойствами. На этом пути был найден ряд замечательных наблюдений и неочевидных связей. Согласно гиперкомплексной программе они представляют собой осколки единой картины, которую со временем удастся собрать; напротив, большинство современных исследователей полагает, что здесь имеет место лишь набор совпадений, неизбежных в малых размерностях. Вне зависимости от того, насколько соответствует истине мечта Гамильтона, те или иные связи между гиперкомплексными алгебрами, геометрией и физикой представляются интересным объектом изучения.

Статья состоит из трех частей. Первая кратко представляет мотивировку и предмет исследования. Во второй части вводится основные математические конструкции и доказывается ряд утверждений. В третьей показываются некоторые возможности для применения полученного аппарата в физике, в частности, для теории поля.

Часть 1. Общий обзор

1.1. Классические гиперкомплексные алгебры

Кватернионы (см., например, [1]) есть гиперкомплексные числа вида

$$\mathbf{a} = a_0 1 + a_1 \mathbf{q}_1 + a_2 \mathbf{q}_2 + a_3 \mathbf{q}_3, \tag{1}$$

где a_i – вещественные числа, а орты $\mathbf{q}_i$ перемножаются согласно правилу умножения

$$1\mathbf{q}_k = \mathbf{q}_k 1 = \mathbf{q}_k, \qquad \mathbf{q}_j\mathbf{q}_k = -\delta_{jk}1 + \varepsilon_{jkn}\mathbf{q}_n,$$

где δ_{jk} и ε_{jkn} – символы Кронекера и Леви-Чивиты $(j,k,n = 1,2,3)$.

Умножение кватернионов некоммутативно, но ассоциативно (т. е. не зависит от расстановки скобок). Кватернионы были придуманы У. Гамильтоном в 1843 г. для описания вращений 3-мерного пространства (подобно тому, как комплексные числа могут служить для описания преобразований плоскости). Самое замечательное в кватернионах – мультипликативность их нормы: норма произведения кватернионов равна произведению их норм. Норма кватерниона вводится, как и для комплексных чисел, с помощью умножения на сопряженный элемент:

$$\bar{\mathbf{a}} = a_0 - a_1\mathbf{q}_1 - a_2\mathbf{q}_2 - a_3\mathbf{q}_3\,, \tag{2}$$

$$N(\mathbf{a}) = \mathbf{a}\bar{\mathbf{a}} = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2\,, \tag{3}$$

$$N(\mathbf{ab}) = N(\mathbf{a})N(\mathbf{b})\,. \tag{4}$$

Из вида нормы ясно, что метрика кватернионов имеет сигнатуру $+4$. Мультипликативность нормы кватернионов приводит к появлению для вещественных чисел замечательного тождества четырех квадратов: правильно записанное произведение сумм четырех квадратов есть снова сумма четырех квадратов. Отметим, что кватернионное сопряжение переставляет порядок сомножителей (является антиавтоморфизмом):

$$\overline{\mathbf{ab}} = \bar{\mathbf{b}}\bar{\mathbf{a}}. \tag{5}$$

Октонионы, или *октавы,* (см. [1], [2] и [3]) были введены Т. Грейвсом (1844) и независимо А. Кэли (1845). Это гиперкомплексные числа вида

$$\mathbf{a} = a_0 + a_1\mathbf{q}_1 + a_2\mathbf{q}_2 + a_3\mathbf{q}_3 + A_0\mathbf{e}_0 + A_1\mathbf{e}_1 + A_2\mathbf{e}_2 + A_3\mathbf{e}_3, \tag{6}$$

где правило умножения орт $\mathbf{q}_i, \mathbf{e}_j$ определяется на основании *формулы удвоения Кэли-Диксона* кватернионов (сами кватернионы также получаются с помощью этого удвоения – от комплексных чисел):

$$(a + A\cdot\mathbf{e}_0)(b + B\cdot\mathbf{e}_0) = ab - \bar{B}A + (Ba + A\bar{b})\cdot\mathbf{e}_0, \tag{7}$$

$(a,b,A,B$ – кватернионы). Если снять различие между мнимыми элементами $\mathbf{q}_i$и $\mathbf{e}_j$ (положив $\mathbf{e}_j \equiv \mathbf{q}_{j+4}$), правило умножения может быть выражено следующим образом:

$$\mathbf{q}_i\cdot\mathbf{q}_j \;=\; -\delta_{ij}\cdot 1 + C_{ijk}\mathbf{q}_k, \qquad i,j,k = 1,2,\ldots,7, \tag{8}$$

где полностью антисимметричные октонионные структурные константы C_{ijk} равны

$$C_{123} = C_{145} = C_{176} = C_{246} = C_{257} = C_{347} = C_{365} = 1 \tag{9}$$

(и обращаются в нуль в при других сочетаниях индексов).

Для удобства приведем таблицу умножения октав (ее левый верхний угол заодно представляет таблицу умножения кватернионов):

$\times$	1	$\mathbf{q}_1$	$\mathbf{q}_2$	$\mathbf{q}_3$	$\mathbf{e}_0$	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_3$
1	1	$\mathbf{q}_1$	$\mathbf{q}_2$	$\mathbf{q}_3$	$\mathbf{e}_0$	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_3$
$\mathbf{q}_1$	$\mathbf{q}_1$	-1	$\mathbf{q}_3$	$-\mathbf{q}_2$	$\mathbf{e}_1$	$-\mathbf{e}_0$	$-\mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_2$
$\mathbf{q}_2$	$\mathbf{q}_2$	$-\mathbf{q}_3$	-1	$\mathbf{q}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_3$	$-\mathbf{e}_0$	$-\mathbf{e}_1$
$\mathbf{q}_3$	$\mathbf{q}_3$	$\mathbf{q}_2$	$-\mathbf{q}_1$	-1	$\mathbf{e}_3$	$-\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_1$	$-\mathbf{e}_0$
$\mathbf{e}_0$	$\mathbf{e}_0$	$-\mathbf{e}_1$	$-\mathbf{e}_2$	$-\mathbf{e}_3$	-1	$\mathbf{q}_1$	$\mathbf{q}_2$	$\mathbf{q}_3$
$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_0$	$-\mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_2$	$-\mathbf{q}_1$	-1	$-\mathbf{q}_3$	$\mathbf{q}_2$
$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_0$	$-\mathbf{e}_1$	$-\mathbf{q}_2$	$\mathbf{q}_3$	-1	$-\mathbf{q}_1$
$\mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_3$	$-\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_0$	$-\mathbf{q}_3$	$-\mathbf{q}_2$	$\mathbf{q}_1$	-1

. $(Tab.\ 1)$

Удвоение Кэли-Диксона обеспечивает октавы хорошими свойствами. Хотя их умножение не ассоциативно, оно обладает ослабленной ассоциативностью – оно *альтернативно*:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{bb}=\mathbf{ab}\cdot\mathbf{b} \qquad \text{и} \quad \mathbf{bb}\cdot\mathbf{a}=\mathbf{b}\cdot\mathbf{ba} \tag{10}$$

Другое определение альтернативности – в альтернативной алгебре любые два элемента порождают ассоциативную подалгебру. Теорема Артина утверждает, что эти определения эквивалентны. Самое важное достоинство октав – их норма по-прежнему мультипликативна. Это приводит к выполнению для вещественных чисел тождества восьми квадратов – правильно записанное произведение сумм восьми квадратов есть снова сумма восьми квадратов. Как и в случае кватернионов, норма октав положительно определена; ее метрика имеет сигнатуру $+8$.

Для дальнейшего нам понадобятся также антикватернионы (псевдокватернионы) и антиоктавы (псевдооктавы). Таблица умножения первых получается из таблицы умножения кватернионов изменением всех знаков в нижней правой четверти:

$\times$	1	$\mathbf{q}_1$	$\mathbf{q}_2$	$\mathbf{q}_3$
1	1	$\mathbf{q}_1$	$\mathbf{q}_2$	$\mathbf{q}_3$
$\mathbf{q}_1$	$\mathbf{q}_1$	-1	$\mathbf{q}_3$	$-\mathbf{q}_2$
$\mathbf{q}_2$	$\mathbf{q}_2$	$-\mathbf{q}_3$	1	$-\mathbf{q}_1$
$\mathbf{q}_3$	$\mathbf{q}_3$	$\mathbf{q}_2$	$\mathbf{q}_1$	1

. $(Tab.\ 2)$

Точно также, таблица умножения антиоктав получается из таблицы для октав изменением всех знаков в нижней правой четверти. Все замечательные свойства кватернионов и октав переносятся на антикватернионы и антиоктавы, за одним исключением – норма теперь не является положительно определенной, так что корректно говорить о псевдонорме. Метрика антикватернионов имеет сигнатуру $(+2,-2)$, октав $(+4,-4)$.

1.2. Гиперкомплексные алгебры над комплексными и двойными числами

Бикватернионы есть кватернионы, определенные над полем комплексных чисел ($\mathbf{i}^2=-1$). *Дикватернионы* – это кватернионы, определенные над алгеброй двойных чисел ($\mathbf{i}^2=+1$). В связи с этим, эти числа можно по-прежнему записывать в виде (1), имея в виду под коэффициентами a_i уже комплексные (двойные) числа. Однако, мы примем более свободную трактовку бикватернионов (дикватернионов) как 8-мерной алгебры над полем вещественных чисел, состоящей из двух блоков:

$$\mathbf{a}=a+k\cdot\mathbf{i}_0, \tag{11}$$

или, в развернутой записи,

$$\mathbf{a} = a_0 + a_1\mathbf{q}_1 + a_2\mathbf{q}_2 + a_3\mathbf{q}_3 + k_0\mathbf{i}_0 + k_1\mathbf{i}_1 + k_2\mathbf{i}_2 + k_3\mathbf{i}_3, \tag{12}$$

где a, k – кватернионы с вещественными коэффициентами. $\mathbf{i}_0$ является внешней единицей, коммутирующей с кватернионами a, k; $\mathbf{i}_0^2 = -1$ для бикватернионов и $+1$ для дикватернионов, единицы $\mathbf{i}_j$ – результат внешнего (тензорного) произведения $\mathbf{i}_0 \otimes \mathbf{q}_j$. (Мы будем использовать для удобства изложения одинаковое обозначение $\mathbf{i}_0$ для обеих алгебр, поскольку перемешиваться в данной работе они не будут.) Отсюда вытекает правило умножения бикватернионов (дикватернионов, нижний знак) в блочном и табличном виде:

$$(a + k \cdot \mathbf{i}_0)(b + l \cdot \mathbf{i}_0) = ab \mp kl + (al + kb) \cdot \mathbf{i}_0. \tag{13}$$

$\times$	1	$\mathbf{q}_1$	$\mathbf{q}_2$	$\mathbf{q}_3$	$\mathbf{i}_0$	$\mathbf{i}_1$	$\mathbf{i}_2$	$\mathbf{i}_3$
1	1	$\mathbf{q}_1$	$\mathbf{q}_2$	$\mathbf{q}_3$	$\mathbf{i}_0$	$\mathbf{i}_1$	$\mathbf{i}_2$	$\mathbf{i}_3$
$\mathbf{q}_1$	$\mathbf{q}_1$	-1	$\mathbf{q}_3$	$-\mathbf{q}_2$	$\mathbf{i}_1$	$-\mathbf{i}_0$	$\mathbf{i}_3$	$-\mathbf{i}_2$
$\mathbf{q}_2$	$\mathbf{q}_2$	$-\mathbf{q}_3$	-1	$\mathbf{q}_1$	$\mathbf{i}_2$	$-\mathbf{i}_3$	$-\mathbf{i}_0$	$\mathbf{i}_1$
$\mathbf{q}_3$	$\mathbf{q}_3$	$\mathbf{q}_2$	$-\mathbf{q}_1$	-1	$\mathbf{i}_3$	$\mathbf{i}_2$	$-\mathbf{i}_1$	$-\mathbf{i}_0$
$\mathbf{i}_0$	$\mathbf{i}_0$	$\mathbf{i}_1$	$\mathbf{i}_2$	$\mathbf{i}_3$	∓ 1	$\mp\mathbf{q}_1$	$\mp\mathbf{q}_2$	$\mp\mathbf{q}_3$
$\mathbf{i}_1$	$\mathbf{i}_1$	$-\mathbf{i}_0$	$\mathbf{i}_3$	$-\mathbf{i}_2$	$\mp\mathbf{q}_1$	± 1	$\mp\mathbf{q}_3$	$\pm\mathbf{q}_2$
$\mathbf{i}_2$	$\mathbf{i}_2$	$-\mathbf{i}_3$	$-\mathbf{i}_0$	$\mathbf{i}_1$	$\mp\mathbf{q}_2$	$\pm\mathbf{q}_3$	± 1	$\mp\mathbf{q}_1$
$\mathbf{i}_3$	$\mathbf{i}_3$	$\mathbf{i}_2$	$-\mathbf{i}_1$	$-\mathbf{i}_0$	$\mp\mathbf{q}_3$	$\mp\mathbf{q}_2$	$\pm\mathbf{q}_1$	± 1

. $(Tab.\ 3)$

Дуокватернионы есть кватернионы, определенные над полем дуальных чисел ($\mathbf{i}^2 = 0$). Они здесь изучаться не будут.

Наконец, *биоктавы (биоктонионы)* – это октавы, определенные над полем комплексных чисел, т. е. алгебра размерности 16 над полем вещественных чисел. Из определения вытекает правило умножения октав в блочном виде:

$$\begin{gathered}(a + A \cdot \mathbf{e}_0 + k \cdot \mathbf{i}_0 + K \cdot \mathbf{f}_0)(b + B \cdot \mathbf{e}_0 + l \cdot \mathbf{i}_0 + L \cdot \mathbf{f}_0) = ab - \bar{B}A - kl + \bar{L}K + \\ (Ba + A\bar{b} - Lk - K\bar{l}) \cdot \mathbf{e}_0 + (al - \bar{L}A + kb - \bar{B}K) \cdot \mathbf{i}_0 + (La + K\bar{b} + Bk + A\bar{l}) \cdot \mathbf{f}_0,\end{gathered} \tag{14}$$

где $\mathbf{f}_0 \equiv \mathbf{i}_0 \cdot \mathbf{e}_0$. Его можно записать в виде символической таблицы:

$\times$	b	$B \cdot \mathbf{e}_0$	$l \cdot \mathbf{i}_0$	$L \cdot \mathbf{f}_0$
a	ab	$Ba \cdot \mathbf{e}_0$	$al \cdot \mathbf{i}_0$	$La \cdot \mathbf{f}_0$
$A \cdot \mathbf{e}_0$	$A\bar{b} \cdot \mathbf{e}_0$	$-\bar{B}A$	$A\bar{l} \cdot \mathbf{f}_0$	$-\bar{L}A \cdot \mathbf{i}_0$
$k \cdot \mathbf{i}_0$	$kb \cdot \mathbf{i}_0$	$Bk \cdot \mathbf{f}_0$	$-kl$	$-Lk \cdot \mathbf{e}_0$
$K \cdot \mathbf{f}_0$	$K\bar{b} \cdot \mathbf{f}_0$	$-\bar{B}K \cdot \mathbf{i}_0$	$-K\bar{l} \cdot \mathbf{e}_0$	$\bar{L}K$

$(Tab.\ 4)$

Эта таблица содержит в качестве фрагментов таблицы умножения бикватернионов и октав.

Ниже мы увидим, что правильным образом введенная (псевдо)норма бикватернионов и биоктав также обладает замечательным свойством мультипликативности.

1.3. Система сопряжений для бикватернионов

Учитывая, что бикватернионы и дикватернионы есть прямо удвоенные кватернионы, аналогичное *кватернионное сопряжение* $\bar{\mathbf{a}}$ для них можно ввести по очевидному правилу:

$$\bar{\mathbf{a}} = a_0 - a_1\mathbf{q}_1 - a_2\mathbf{q}_2 - a_3\mathbf{q}_3,$$
$$\text{(запись с комплексными коэффициентами)},$$
$$\bar{\mathbf{a}} = a_0 - a_1\mathbf{q}_1 - a_2\mathbf{q}_2 - a_3\mathbf{q}_3 + k_0\mathbf{i}_0 - k_1\mathbf{i}_1 - k_2\mathbf{i}_2 - k_3\mathbf{i}_3, \tag{15}$$
$$\text{(полная запись с вещественными коэффициентами)},$$
$$\bar{\mathbf{a}} = \overline{a + k\cdot\mathbf{i}_0} = \bar{a} + \bar{k}\cdot\mathbf{i}_0$$
$$\text{(сокращенная запись)}.$$

Однако, для изучения 4-нормы и 4-скалярного произведения в алгебрах бикватернионов и дикватернионов этого сопряжения, как мы увидим ниже, недостаточно. Введем поэтому второе, *дуальное кватернионное сопряжение* по следующему правилу (записи в той же последовательности):

$$\widetilde{\mathbf{a}} = a_0^* - a_1^*\mathbf{q}_1 - a_2^*\mathbf{q}_2 - a_3^*\mathbf{q}_3,$$
$$\widetilde{\mathbf{a}} = a_0 - a_1\mathbf{q}_1 - a_2\mathbf{q}_2 - a_3\mathbf{q}_3 - k_0\mathbf{i}_0 + k_1\mathbf{i}_1 + k_2\mathbf{i}_2 + k_3\mathbf{i}_3. \tag{16}$$
$$\widetilde{\mathbf{a}} = \widetilde{\alpha + k\cdot\mathbf{i}_0} = \bar{\alpha} - \bar{k}\cdot\mathbf{i}_0$$

Сопряжение $\widetilde{\mathbf{a}}$ (16) также является инволюционным антиавтоморфизмом и поэтому заслуживает название сопряжения.

Теперь рассмотрим комбинацию сопряжений $\bar{\widetilde{\mathbf{a}}}$:

$$\bar{\widetilde{\mathbf{a}}} = a_0^* + a_1^*\mathbf{q}_1 + a_2^*\mathbf{q}_2 + a_3^*\mathbf{q}_3,$$
$$\bar{\widetilde{\mathbf{a}}} = a_0 + a_1\mathbf{q}_1 + a_2\mathbf{q}_2 + a_3\mathbf{q}_3 - k_0\mathbf{i}_0 - k_1\mathbf{i}_1 - k_2\mathbf{i}_2 - k_3\mathbf{i}_3, \tag{17}$$
$$\bar{\widetilde{\mathbf{a}}} = \overline{\widetilde{a + k\cdot\mathbf{i}_0}} = a - k\cdot\mathbf{i}_0.$$

Иначе говоря, это преобразование $\bar{\widetilde{\mathbf{a}}}$ есть *комплексное сопряжение*, внешнее для кватернионов a, k. Обозначим его $\mathbf{a}^*$. Оно является инволюцией и автоморфизмом (а не антиавтоморфизмом):

$$(\mathbf{a}^*)^* = \mathbf{a} \qquad \text{и} \qquad (\mathbf{ab})^* = \mathbf{a}^*\mathbf{b}^*. \tag{18}$$

Как следствие, выражение $\mathbf{aa}^*$ изменяется при сопряжении своего рода (иначе говоря, не является инвариантным, реальным для него):

$$(\mathbf{aa}^*)^* = \mathbf{a}^*\mathbf{a} \neq \mathbf{aa}^*. \tag{19}$$

В связи с этим, комбинированное преобразование (комплексное сопряжение) $\mathbf{a}^*$, строго говоря, не является сопряжением данной алгебры.

Самое важное преимущество базового сопряжения $\bar{\mathbf{a}}$ (15) перед дуальным сопряжением $\widetilde{\mathbf{a}}$ в том, что гиперкомплексные числа, реальные (инвариантные) относительно основного сопряжения $\bar{\mathbf{a}}$, содержат в себе только орты 1 и $\mathbf{i_0}$ и поэтому, подобно вещественным числам, коммутируют с любыми числами алгебры. Данное свойство кватернионного сопряжения и является источником ряда хороших свойств алгебр кватернионов, бикватернионов, а также октав и биоктав. Важно, что далеко не все алгебры располагают таким "хорошим" сопряжением. Во второй части статьи будут изучаться алгебры именно с таким сопряжением.

1.4. Обобщенно-ассоциативные свойства алгебр и классические теоремы об исключительности

Для упрощения дальнейших выкладок введем, как принято, *ассоциатор*

$$\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\} \equiv (\mathbf{ab})\mathbf{c} - \mathbf{a}(\mathbf{bc}). \tag{20}$$

С очевидностью он линеен по каждому из элементов. В ассоциативных алгебрах ассоциатор тождественно равен нулю. В альтернативных он антисимметричен по всем переменным:

$$\begin{aligned} &\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{b}\}=0 \quad \Leftrightarrow \quad \{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\} = -\{\mathbf{a},\mathbf{c},\mathbf{b}\} \qquad \text{(правая альтернативность)},\\ &\{\mathbf{a},\mathbf{a},\mathbf{b}\}=0 \quad \Leftrightarrow \quad \{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\} = -\{\mathbf{b},\mathbf{a},\mathbf{c}\} \qquad \text{(левая альтернативность)}.\end{aligned} \tag{21}$$

Как следствие, ассоциатор в альтернативных алгебрах цикличен:

$$\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\} = \{\mathbf{c},\mathbf{a},\mathbf{b}\}. \tag{22}$$

Альтернативные алгебры, с очевидностью, *эластичны,* т. е.

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{ba} = \mathbf{ab}\cdot\mathbf{a}, \qquad \text{поскольку в них} \tag{23}$$

$$\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{a}\} = -\{\mathbf{a},\mathbf{a},\mathbf{b}\} = 0.$$

Но обратное неверно: не всякая эластичная алгебра альтернативна. Отметим, что свойство эластичности с очевидностью эквивалентно

$$\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\} = -\{\mathbf{c},\mathbf{b},\mathbf{a}\}. \tag{24}$$

Легко показать, что всякая алгебра, полученная удвоением Кэли-Диксона (7) из эластичной квадратичной алгебры, также эластична и квадратична. Таким образом, эластична вся бесконечная цепочка алгебр Кэли-Диксона, начинающаяся с вещественных чисел.

Для физических приложений важно свойство *йордановости*:

$$\mathbf{a}^2\mathbf{b}\cdot\mathbf{a} = \mathbf{a}^2\cdot\mathbf{ba} \qquad \text{или} \quad \{\mathbf{a}^2,\mathbf{b},\mathbf{a}\}=0, \tag{25}$$

Как легко видеть, заменив в (25) $\mathbf{a}$ на $\mathbf{a}+1$, для алгебр с единицей из йордановости вытекает эластичность. В квадратичных алгебрах верно и обратное, но в общем случае это не так – йордановость уже (сильнее) эластичности.

Наконец, *моноассоциативными*, или *степенно ассоциативными* называют алгебры, в которых один элемент порождает ассоциативную подалгебру. Иначе говоря, в произведениях элемента на самого себя можно не следить за расстановкой скобок, заменяя все произведения на соответствующую степень элемента:

$$\mathbf{a}^n\cdot\mathbf{a}^m = \mathbf{a}^{n+m}\,.$$

Как известно ([14]), алгебра над полем характеристики 0 будет моноассоциативна, если в ней выполняются два тождества:

$$\begin{gathered}\mathbf{a}\cdot\mathbf{aa} = \mathbf{aa}\cdot\mathbf{a} \qquad \text{и} \quad \mathbf{aa}\cdot\mathbf{aa} = (\mathbf{aa}\cdot\mathbf{a})\mathbf{a}\,, \qquad \text{т. е.}\\ \{\mathbf{a},\mathbf{a},\mathbf{a}\} = \mathbf{0}, \qquad \{\mathbf{a^2},\mathbf{a},\mathbf{a}\} = \mathbf{0}.\end{gathered} \tag{26}$$

Подытожим все сказанное в виде иерархии уровней ассоциативных свойств (из верхних уровней вытекают нижние, но вообще говоря не наоборот):

ассоциативность:	$\mathbf{a}\cdot\mathbf{bc}=\mathbf{ab}\cdot\mathbf{c}$		$\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\}=0;$
альтернативность:	$\mathbf{a}\cdot\mathbf{bb}=\mathbf{ab}\cdot\mathbf{b}$	$\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\}=-\{\mathbf{a},\mathbf{c},\mathbf{b}\}$	$\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{b}\}=0$
вместе с	$\mathbf{a}\cdot\mathbf{ab}=\mathbf{aa}\cdot\mathbf{b}$	$\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\}=-\{\mathbf{b},\mathbf{a},\mathbf{c}\}$	$\{\mathbf{a},\mathbf{a},\mathbf{b}\}=0;$
йордановость:	$\mathbf{a}^2\cdot\mathbf{ba}=\mathbf{a}^2\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$		$\{\mathbf{a}^2,\mathbf{b},\mathbf{a}\}=0;$
эластичность:	$\mathbf{a}\cdot\mathbf{ba}=\mathbf{ab}\cdot\mathbf{a}$	$\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\}=-\{\mathbf{c},\mathbf{b},\mathbf{a}\}$	$\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{a}\}=0;$
моноассоциативность:	$\mathbf{a}^n\cdot\mathbf{a}^m=\mathbf{a}^{n+m}$	$\{\mathbf{a}^2,\mathbf{a},\mathbf{a}\}=0$	$\{\mathbf{a},\mathbf{a},\mathbf{a}\}=0;$

Теперь можно привести классические теоремы об исключительных алгебрах (см. [1], [2], [12], [13]).

Теорема Гурвица: любая алгебра с единицей, обладающая мультипликативной положительно определенной нормой, изоморфна действительным числам либо комплексным числам, кватернионам или октавам.

Обобщенная теорема Фробениуса: любая альтернативная алгебра с делением изоморфна одной из алгебр того же списка.

Теорема Алберта: альтернативными алгебрами с единицей, реальные элементы в которых суть вещественные числа и которые обладают невырожденной мультипликативной квадратичной формой, являются только алгебры комплексных и двойных чисел, кватернионы и антикватернионы, октавы и антиоктавы.

Теорема Цорна: единственными простыми конечномерными альтернативными неассоциативными алгебрами являются октавы, антиоктавы и биоктавы.

Обобщенная теорема Понтрягина: только вещественные, комплексные числа, кватернионы и октавы являются связными локально компактными альтернативными топологическими телами.

1.5. Краткая история применения гиперкомплексных алгебр в физике ([3], [4])

– Кватернионы и 3-мерные вращения.

Кватернионы – обертывающая алгебра для алгебры Ли группы 3-мерных вращений $SO(3)$. Группа автоморфизмов кватернионов $SU(2)$ локально изоморфна этой группе. Как следствие, кватернионы – естественный язык для машинного моделирования поворотов, для описания вращений твердого тела и для ньютоновой механики в целом.

– Бикватернионы и группа Лоренца.

Бикватернионы – обертывающая алгебра для алгебры Ли группы Лоренца $SO(1,3)$. Группа автоморфизмов бикватернионов $SL(2,C)$ локально изоморфна этой группе. Как следствие, многие результаты частной теории относительности могут быть довольно органично записаны на языке бикватернионов.

– Аналитические функции от бикватернионов и уравнения Максвелла.

Прямолинейные попытки создать аналог теории функций комплексных переменных для кватернионов или бикватернионов не проходят, что связано с их некоммутативностью (см. [10]). Швейцарским математиком Фютером был предложен более тонкий вариант введения аналитичных кватернионных и бикватернионных функций от переменных того же рода, который стал фактически стандартным (хотя есть и несколько других, менее известных вариантов). Уравнения Фютера, выражающие условие аналитичности бикватернионных переменных, совпали с уравнениями Максвелла (см. [4]).

– Бикватернионы и матрицы Паули.

Матрицы Паули, рассматриваемые с алгебраической точки зрения, изоморфны бикватернионам. Уже одно это показывает связь этой алгебры с квантовой механикой, в частности, с теорией спиноров.

– Октавы связаны с исключительными группами Ли, значение которых для физики в последнее время растет. Кроме того, октавы связаны с наиболее глубокими областями проективной геометрии. В целом, роль октав в физике остается не вполне проясненной.

Проблемы:

– Во всех этих успехах нет ясной системы.

– Даже высшей классической исключительной алгебры – октав не хватает для "упаковки" всего богатства физики в духе программы Гамильтона. Это связано уже хотя бы с положительной определенностью ее нормы, что затрудняет описание релятивистской физики. В связи с этим, имеет смысл изучить алгебры, псевдонорма которых имеет степень выше 2 *(полинорма),* т. е. алгебры выше квадратичных (над полем вещественных чисел). Как минимум, это те же бикватернионы, а в перспективе биоктавы или иные алгебры. Правда, переход к алгебрам более высокой размерности затруднен, т. к. обостряется проблема лишних измерений (она есть уже для бикватернионов).

1.6. Нормы выше квадратичных – за и против

Отметим наиболее распространенные соображения против использования форм степени выше 2:

– Аргумент максимальной подвижности, выдвинутый Гельмгольцем и Ли: только в пространствах с квадратичной метрикой возможно вращение твердых тел, в прочих пространствах группа движений с фиксированной точкой беднее [5]. Аргумент не имеет решающей силы с позиций релятивистской и квантовой физики.

– Все классические простые группы Ли есть, как известно, группы инвариантности той или иной квадратичной формы. При этом все простые группы известны (перечислены в полной классификации Картана), а остальные невырожденные непрерывные группы сводятся к ним. Поскольку геометрии согласно Эрлангенской программе Клейна связаны с теми или иными группами, формы степени выше 2 выглядят излишними.

Можно выдвинуть и контраргументы в пользу использования полинорм:

– В современной физике применяются не только простые, но и полупростые группы (прямые произведения простых групп), а они приводят к формам выше квадратичных.

– Представления одной и той же абстрактной группы могут сильно отличаться по своим геометрическим характеристикам. Есть ситуации, когда группа, оставляющая инвариантной квадратичную форму в некотором пространстве, вместе с тем действует и как группа преобразований в совершенно другом пространстве (иной размерности), оставляя в нем инвариантной форму более высокой размерности, например, 4. С точки зрения математики, достаточно изучить лишь первый случай, второй излишен. С физической точки зрения это не так, поскольку a priori неясно, какое из этих пространств отвечает реальному миру.

– Исключительные группы (см. примеры ниже) явно связаны с формами выше 2 (прежде всего, антисимметричными).

Главная проблема в том, что переход к алгебрам с псевдонормой (формой) выше квадратичной открывает слишком много степеней свободы. Чтобы нащупать какой-то ясный путь, имеет смысл и здесь действовать в духе программы Гамильтона, рассматривая не все алгебры, а прежде всего чем-то замечательные, выделяющиеся среди прочих.

Общая идея подхода – искать какие-либо жесткие ограничения, исключительности в алгебрах выше квадратичных.

1.7. Мультипликативные полинормы

Самый простой и очевидный подход к полинормам – распространить на них условие мультипликативности 2-нормы $N(a \cdot b) = N(a)N(b)$. Это условие естественным образом связывает псевдонорму (форму) с умножением алгебры. В 1950–60-х гг. вопрос о мультипликативности форм степени выше 2 поставил и решил Ричард Д. Шафер [6]– [8] (с дополнениями К. МакКриммона [9]). Пусть V – векторное пространство, возможно ∞-мерное, над полем F характеристики 0 или $p > n$. Отображение $\mathbf{u} \to N(\mathbf{u})$ V на F называется *формой степени n* на V в случае

$$N(\lambda\mathbf{u}) = \lambda^n N(\mathbf{u}) \qquad \text{для любых} \quad \lambda \in F,\ \mathbf{u} \in V.$$

Теорема Шафера. *Пусть $\mathbb{U}$ – алгебра с единицей, вообще говоря бесконечномерная, над полем F характеристики 0 или $p > n$. Необходимое и достаточное условие для существования на $\mathbb{U}$ невырожденной формы N степени $n > 0$, допускающей композицию, состоит в том, что $\mathbb{U}$ является конечномерной сепарабельной альтернативной алгеброй $\mathbb{U} = \mathbb{U}_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{U}_r$, $\mathbb{U}_i$ – простые алгебры степени m_i, где*

$$n = m_1 f_1 + \ldots + m_r f_r,$$

удовлетворяется для положительных целых чисел f_i $(i = 1, \ldots, r)$. Более того, форма N на $\mathbb{U}$ задается посредством

$$N(\mathbf{u}) = [n_1(u_1)]^{f_1} \cdots [n_r(u_r)]^{f_r}, \tag{27}$$

где $n_j(u_j)$ – форма, заданная на простой алгебре $\mathbb{U}_j$.

В теореме существенным является понятие *невырожденности* нормы степени n, которое вводится так: С каждой n-нормой связывается n-линейная форма *n-скалярного произведения* от n гиперкомплексных чисел по формуле Шафера:

$$\begin{aligned}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n) = \frac{1}{n!}\big[N(\mathbf{u}_1 + \ldots + \mathbf{u}_n) - \sum_{i=1}^{n} N(\mathbf{u}_1 + \ldots + \check{\mathbf{u}}_i + \ldots + \mathbf{u}_n)\\ + \sum_{i<j} N(\mathbf{u}_1 + \ldots + \check{\mathbf{u}}_i + \ldots + \check{\mathbf{u}}_j + \ldots + \mathbf{u}_n) - \ldots + (-1)^{n-1} \sum N(\mathbf{u}_i)\big],\end{aligned} \tag{28}$$

где запись $\check{\mathbf{u}}_i$ означает, что $\mathbf{u}_i$ опущен. Легко видеть, что

$$N_n(\mathbf{u}) = (\mathbf{u}, \mathbf{u}, \ldots, \mathbf{u}), \qquad \text{поскольку} \quad \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k C_n^k (n-k)^n = n!$$

Форма $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n)$ имеет все свойства, которые естественно ожидать от обобщения понятия скалярного произведения. Она вещественна, симметрична относительно любых перестановок векторов, линейна по каждому из них (в частности, обращается в нуль, если один из векторов равен нулю). Более точно называть эту форму n-псевдоскалярным произведением, т. к. она вообще говоря не является положительно определенной.

По определению Шафера, формы степени n называются *невырожденными* в случае, если из $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n) = 0$ для всех $\mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n \in V$ вытекает $\mathbf{u}_1 = 0$.

Итак, в случае мультипликативных полинорм ситуация представляется достаточно ясной. Кроме того, условие мультипликативности вносит искомое ограничение, сужая круг рассматриваемых алгебр. Однако, возможно, это условие является слишком жестким. Мультипликативной полинормой обладают только ассоциативные алгебры и альтернативные (их мало; по-сути, они сводятся к октавам или антиоктавам над каким-либо центром, например, к комплексным или двойным октавам). Имеет смысл изучить, возможны ли какие-либо не столь жесткие ограничения, с более широким охватом.

1.8. Проблемы и предварительные выводы

– Фундаментальная проблема: *неясно, как связать (псевдо)норму с алгеброй, если она неассоциативна и неальтернативна.* Вероятно, не для всякой алгебры можно ввести норму, естественным образом связанную с ее таблицей умножения. Существование такой нормы является первым ограничением на алгебры.

– Очевидный путь ввести норму, используя умножение алгебры, – теорема Гамильтона-Кэли (или ее обобщение): любой элемент x алгебры удовлетворяет соотношению [6]

$$x^n - T_1(x)x^{n-1} + T_2(x)x^{n-2} - ... + (-1)^n T_n(x)1 = 0, \quad \text{где} \;\; T_i(x) = C_n^i(\underbrace{x, \overset{i}{...} x}, 1...1) \tag{29}$$

Однако, эта теорема заведомо верна только для ассоциативных и альтернативных алгебр. В любом случае для этого пути как минимум нужна моноассоциативность, т. е. надо иметь уверенность, что интересные для приложений в геометрии и физике алгебры должны обладать некоторым остатком ассоциативных свойств.

– Для существенно неассоциативных алгебр можно пойти другим путем: найти универсальный алгоритм, который порождает вещественное (комплексное) число для любого элемента данной алгебры. Однако это успешно работает, только если степень нормы не выше 4. Есть сильные аргументы, что для норм степени выше 4 в общем случае такого алгоритма не существует, – даже для ассоциативных алгебр. Точнее, такой алгоритм невыразим средствами самой алгебры (сложение, умножение + инволюции умножения). Для нахождения полинормы приходится переходить к определенному матричному представлению и считать детерминант. Отсутствие инвариантной записи плохо вяжется с духом геометрического подхода. Здесь просматривается некоторая аналогия с теорией Галуа. Отметим, что ограничение нормой 4 порядка не есть плохо, напротив это хорошо, поскольку является неким ограничением уже за пределами классических теорем Фробениуса – Гурвица. Возможно, требование, что норма должна быть не выше 4 степени, отделяет "хорошие" алгебры от "не очень хороших".

– Неоднозначное соответствие между существенно неассоциативными алгебрами и нормами. Нередко одну и ту же норму могут иметь несколько алгебр и, что еще хуже, одной алгебре соответствует несколько норм. Требование однозначности полинормы может рассматриваться как одно из ограничивающих, вводящих исключительность. По-видимому, это требование также эквивалентно выполнению в алгебре некоторых свойств ослабленной ассоциативности.

– Следующий вопрос возникает в связи с тем, что группа движений, оставляющих полинорму инвариантной, вообще говоря, не совпадает с группой автоморфизмов алгебры, т. е. набором преобразований, сохраняющих умножение алгебры. Основная идея геометрии состоит в том, что картина мира не должна зависеть от выбора угла зрения. Это должно выражаться в существовании некоторых инвариантов или, более общо, инвариантных соотношений, сохраняющихся при некоторых преобразованиях, считающихся допустимыми. Для ассоциативных и альтернативных алгебр в силу мультипликативности полинормы такие преобразования можно вводить посредством изометрий, ее сохраняющих: $A' = U \cdot A \cdot V$, где U и V – элементы алгебры с единичной нормой, $N_k(U) = N_k(V) = 1$. Возникают две копии групп и алгебр Ли, порождаемых коммутаторами исходной гиперкомплексной алгебры (т. е. обертывающей алгебры по отношению к ним). Однако, поскольку мы рассматриваем геометрию в контексте исходной алгебры, ее порождающей, интересна более сильная вещь, чем изометрия, – *автоморфизм*, независимость умножения $(A \cdot B)' = A' \cdot B'$. Известно, что для ассоциативных алгебр всякий автоморфизм является внутренним, т. е. порождается некоторым элементом алгебры U

по формуле $A' = U \cdot A \cdot U^{-1}$. Тогда в ассоциативном случае возникает вместо двух одна группа и алгебра Ли, жестко порождаемая коммутаторами исходной гиперкомплексной алгебры. Отметим, что в узком случае ассоциативно-коммутативных алгебр этот путь заблокирован, поскольку, как легко видеть, в них нет нетривиальных автоморфизмов.

Проблема состоит в том, что для неассоциативных алгебр не существует универсального алгоритма, дающего группу автоморфизмов. Поэтому становится актуальным вопрос: какой геометрический объект связан с автоморфизмами алгебры (инвариантен относительно них и только них), поскольку требования инвариантности полинормы недостаточно? Пример подсказывают кватернионы и октавы. В них, как известно, существует смешанное произведение (антисимметричная форма 3 степени), которое является скаляром, но при этом инвариантно относительно именно автоморфизмов, а не относительно всех изометрий (для октав группа автоморфизмов есть G_2, в то время, как группа изометрий есть $SO(8)$). Сходным образом, для единственной исключительной йордановой алгебры Алберта размерности 27 группа автоморфизмов есть исключительная группа F_4, а группа инвариантности формы 3 степени (детерминанта квазиматрицы), связанной с алгеброй Алберта, есть существенно более широкая исключительная группа E_6. По-видимому, это говорит о том, что для геометрий, связанных с алгебрами, фундаментальным понятием является не симметрическая форма, а антисимметрическая (в частности, для классических квадратичных алгебр – не длина, а объем).

Если это так, то в центре внимания оказывается не только таблица умножения алгебры, но и система заданных на ней *сопряжений* (линейных инволюционных антиавтоморфизмов), поскольку сопряжения представляются необходимым языком для записи антисимметричных форм. В таком случае условием существования в алгебре нетривиальной группы автоморфизмов (которая всегда будет подгруппой группы изометрий) является наличие в ней сопряжений. Это также является важным ограничением.

– Просуммируем все найденные выше ограничения на алгебры, позволяющие связать с ними нетривиальные геометрии. Алгебра должна обладать полинормой, связанную с нею некоторым естественным образом (посредством формулы Гамильтона-Кэли или некоторого универсального алгоритма). Существование такого алгоритма гарантировано только для полинорм степени не выше 4, для норм более высокой степени этот алгоритм существует не для всех алгебр. Алгебре, по-видимому, должна соответствовать одна норма, а не несколько. Эта норма должна быть инвариантна относительно нетривиальной группы движений. Желательно также, чтобы алгебра обладала нетривиальной группой автоморфизмов, связанной с некоторым геометрическим объектом. В связи с этим, в алгебре должен существовать набор сопряжений (антиавтоморфизмов).

Все это подводит к общему выводу: перспективна какая-то разумная доза неассоциативности, когда уже возникают интересные вещи, которых нет в ассоциативном случае, и в то же время алгебра еще не слишком "искорежена" и можно выстроить мост от нее к геометрии.

Ниже будет разобран некоторый класс таких алгебр, которые являются естественным обобщением гиперкомплексных алгебр Кэли-Диксона.

Часть 2. Алгебры с центральным сопряжением

2.1. Основные теоремы

Далее везде будет подразумевается, что алгебры обладают единицей и что они заданы над полем характеристики 0 (поля вещественных и комплексных чисел).

Рассмотрение основывается на двух идеях: 1) рассмотрение набора сопряжений, заданных в алгебре, позволяет доказать многие факты довольно простым и общим образом; 2) правильнее изучать полинормы, естественно возникающие в алгебрах, чем искусственно приписывать им квадратичную норму (как это нередко делается). (См. подробности в [18].)

Далеко не во всех гиперкомплексных алгебрах существует сопряжение, "плохих" гиперкомплексных алгебр без сопряжения несопоставимо больше. Под сопряжениями понимаются линейные инволюционные антиавтоморфизмы:

$$\begin{aligned} C(\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b}) = \lambda C(\mathbf{a})+\mu C(\mathbf{b}) &\quad (\lambda,\mu\ \text{ – элементы центра, линейность}),\\ C(C(\mathbf{a}))=\mathbf{a} &\quad (\text{инволюция}),\\ C(\mathbf{ab})=C(\mathbf{b})\cdot C(\mathbf{a}) &\quad (\text{антиавтоморфизм}).\end{aligned}$$

Благодаря этим свойствам, следующие выражения не изменяются при сопряжении:

$$\begin{gathered} \Re(\mathbf{a}) = 1/2(\mathbf{a}+C(\mathbf{a})) \quad (\textit{реальная часть } \mathbf{a}),\\ N_r=\mathbf{a}\cdot C(\mathbf{a}),\quad N_l=C(\mathbf{a})\cdot\mathbf{a}=N_r(C(\mathbf{a})) \quad (\textit{правая и левая 2-нормы}) \end{gathered} \tag{30}$$

(назовем их *инвариантными* или *реальными* для данного сопряжения). При этом $\Re(C(\mathbf{a}))=\Re(\mathbf{a})$, но вообще говоря $N(C(\mathbf{a}))\neq N(\mathbf{a})$.

Для неквадратичных алгебр инвариантные выражения, вообще говоря, не являются вещественными числами. Однако, выражения $\mathbf{a}\cdot C(\mathbf{a})$ и $C(\mathbf{a})\cdot\mathbf{a}$ во многих алгебрах коммутируют со всеми элементами и вполне заслуживают название 2-нормы. Такое понимание (псевдо)нормы выглядит более правомерным, чем вещественное выражение в виде суммы или разности квадратов, никак не укорененное в свойствах алгебры.

Определение 1. *Сопряжение, реальные элементы которого принадлежат коммутативному и ассоциативному центру алгебры, будем называть* ***центральным****. (Другое название –* ***скалярное*** *сопряжение).*

Все реально изучаемые гиперкомплексные алгебры (в частности, все алгебры бесконечной цепочки Кэли-Диксона), со всеми их комплексификациями и гиперболическими удвоениями, есть алгебры с центральным сопряжением (обозначим их $\mathbb{A}_c$).

Для понимания того, что такое алгебры с центральным (скалярным) сопряжением важна следующая

Теорема 1. *Алгебра с центральным сопряжением $\mathbb{A}_c$ представляет собой внешнее (тензорное) произведение своего центра $\mathbb{Z}$ на некоторую квадратичную алгебру, т. е. является квадратичной алгеброй над некоторой унитальной (обладающей единицей) коммутативно-ассоциативной алгеброй $\mathbb{A}_0$.*

В самом деле, используя (30), видим, что для произвольного элемента алгебры $\mathbf{a}$ (n,t – некоторые элементы центра алгебры $\mathbb{A}_c$):

$$\mathbf{a}\cdot C(\mathbf{a})=n;\quad \mathbf{a}+C(\mathbf{a})=2t \quad\Rightarrow\quad \mathbf{a}\cdot(2t-\mathbf{a})=n \qquad \text{или}$$

$$\mathbf{a}^2-2t(\mathbf{a})\cdot\mathbf{a}+n(\mathbf{a})=0, \tag{31}$$

что и означает, что алгебра $\mathbb{A}_c$ квадратична над своим центром; $t(\mathbf{a})$ – *след* (*реальная часть*) элемента $\mathbf{a}$, $n(\mathbf{a})$ – его (правая) *2-норма.*

Конструкция алгебр над ассоциативно-коммутативными алгебрами, а не над полем, как это делается обычно, удобна тем, что позволяет единым образом рассматривать как алгебры над комплексными числами, так и алгебры над двойными числами.

Отметим также, что хотя алгебраические свойства квадратичных алгебр и алгебр $\mathbb{A}_c$ во-многом аналогичны, геометрические и топологические свойства связанных с ними многообразий могут существенно отличаться. Уже поэтому целесообразно различать квадратичные алгебры в строгом смысле (заданные над полем вещественных чисел) и алгебры с центральным сопряжением (квадратичные над ассоциативно-коммутативными унитальными алгебрами $\mathbb{A}_0$).

Принципиально важно также и то, что *не всякие квадратичные алгебры над своим центром есть алгебры с центральным сопряжением.* Чтобы прояснить этот вопрос, докажем ряд утверждений о квадратичных алгебрах.

Лемма 1. *Всякая квадратичная алгебра моноассоциативна.*

В самом деле, равенство (31) позволяет свести умножение $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}$ к линейному по $\mathbf{a}$ члену, убрав скобку вместе с умножением, что и позволяет не заботиться о порядке расстановки скобок при перемножениях $\mathbf{a}$ на самое себя.

Введем важное понятие

Определение 2. *Отображение $\mathbf{a}\to\widetilde{\mathbf{a}}$ назовем **почти точным антиавтоморфизмом** (почти-сопряжением), если оно отличается от антиавтоморфизма не более, чем на элемент $\mathbf{r}$ центра алгебры (в частном случае – на вещественное, комплексное или двойное число), т. е.*

$$\widetilde{(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})} = \widetilde{\mathbf{b}}\cdot\widetilde{\mathbf{a}} + r$$

Введем и докажем следующую важную теорему.

Теорема 2. *В любой квадратичной алгебре существует инволюция, являющаяся почти точным центральным антиавтоморфизмом* (т. е. оставляющая инвариантным центр алгебры).

Доказательство. Мы предполагаем, что для всех элементов алгебры выполняется соотношение (31)

$$\mathbf{a}^2 - 2t(\mathbf{a})\cdot\mathbf{a} + n(\mathbf{a}) = 0,$$

где $t(\mathbf{a})$, $n(\mathbf{a})$ принадлежат алгебраически замкнутому ассоциативному и коммутативному центру алгебры, который не совпадает с самой алгеброй. Для самосогласованности определения мы должны также полагать, что центр представляет алгебру 1 порядка над самим собой, т. е. выполняется

$$r - t(r) = 0 \qquad \text{или} \quad t(r) = r \quad (r \in \text{центру алгебры}). \tag{32}$$

Как следствие,

$$n(r) = r^2, \qquad t(1) = 1, \qquad n(1) = 1, \qquad t(t(\mathbf{a}) = t(\mathbf{a}). \tag{33}$$

1. Несложно показать, что для всех элементов алгебры след линеен по аргументу, а норма имеет 2 порядок (для элементов центра это очевидно):

$$t(r\mathbf{a} + s\mathbf{b}) = r\,t(\mathbf{a}) + s\,t(\mathbf{b}); \quad n(r\mathbf{a}) = r^2 n(\mathbf{a}) \qquad (r, s \in \text{центру алгебры}).$$

В самом деле, для $r\mathbf{a}$ как элемента алгебры выполняется

$$(r\mathbf{a})\cdot(r\mathbf{a}) - 2t(r\mathbf{a})\cdot r\mathbf{a} + n(r\mathbf{a}) = 0, \qquad \Rightarrow$$

$$r^2\mathbf{a}^2 - 2t(r\mathbf{a})\cdot r\mathbf{a} + n(r\mathbf{a}) = 0. \tag{34}$$

Домножая (31) на r^2 и вычитая (34), имеем:

$$-2t(r\mathbf{a})\cdot r\mathbf{a}+n(r\mathbf{a})+2r^2t(\mathbf{a})\cdot\mathbf{a}-r^2n(\mathbf{a})=0,\qquad\Rightarrow$$

$$2\mathbf{a}r\big[rt(\mathbf{a})-t(r\mathbf{a})\big]+n(r\mathbf{a})-r^2n(\mathbf{a})=0\qquad\text{или}$$

$$\mathbf{a}r_1+r_2=0,\qquad\text{где }\ r_1,\,r_2\in\text{ центру алгебры.}$$

Поскольку элемент $\mathbf{a}$ не принадлежит алгебраически замкнутому центру алгебры, то $r_1=0$, $r_2=0$, что завершает 1 этап доказательства.

2. Теперь мы можем рассмотреть каноническое отображение $\mathbf{a}\to\widetilde{\mathbf{a}}$, заданное посредством

$$\widetilde{\mathbf{a}}=2t(\mathbf{a})-\mathbf{a}.\tag{35}$$

Это отображение является инволюцией в силу (33):

$$\widetilde{\widetilde{\mathbf{a}}}=2t(\widetilde{\mathbf{a}})-\widetilde{\mathbf{a}}=2t(2t(\mathbf{a})-\mathbf{a})-(2t(\mathbf{a})-\mathbf{a})=4t(t(\mathbf{a}))-2t(\mathbf{a})-2t(\mathbf{a})+\mathbf{a}=\mathbf{a}.$$

По той же причине оно оставляет центр алгебры инвариантным

$$\widetilde{r}=2t(r)-r=2r-r=r\qquad(\text{в частности, }\widetilde{1}=1).\tag{36}$$

3. Теперь осталось доказать, что наше отображение является почти точным антиавтоморфизмом. Из (31) легко видеть, что

$$n(\mathbf{a})=2t(\mathbf{a})\,\mathbf{a}-\mathbf{a}^2=\widetilde{\mathbf{a}}\cdot\mathbf{a}=\mathbf{a}\cdot\widetilde{\mathbf{a}}.$$

Это означает, что выполняется следующая Лемма:

Лемма 2. *В квадратичных алгебрах совпадают правая и левая 2-нормы:*

$$N_l(\mathbf{a})\equiv\widetilde{\mathbf{a}}\mathbf{a}=N_r(\mathbf{a})\equiv\mathbf{a}\widetilde{\mathbf{a}}.\tag{37}$$

Поляризуя 2- норму, введем для удобства *2-скалярное произведение.*

$$2(\mathbf{a},\mathbf{b})=n(\mathbf{a}+\mathbf{b})-n(\mathbf{a})-n(\mathbf{b}).\tag{38}$$

Оно с очевидностью принадлежит центру алгебры, симметрично по аргументам, а кроме того, как и норма, не будет разделяться на правое и левое:

$$(\mathbf{a},\mathbf{b})_p=1/2\,(\mathbf{a}\widetilde{\mathbf{b}}+\mathbf{b}\widetilde{\mathbf{a}})=1/2\,(\widetilde{\mathbf{a}}\mathbf{b}+\widetilde{\mathbf{b}}\mathbf{a})=(\mathbf{a},\mathbf{b})_l=(\widetilde{\mathbf{a}},\widetilde{\mathbf{b}})_p\,,$$

или иначе, в квадратичных алгебрах совпадают скалярные произведения элементов и скалярные произведения сопряженных к ним. С учетом (36) легко видеть,

$$n(\mathbf{a})=(\mathbf{a},\mathbf{a});\quad 2(\mathbf{a},\mathbf{b})=(\mathbf{a}\widetilde{\mathbf{b}}+\mathbf{b}\widetilde{\mathbf{a}});\quad 2(\mathbf{a},1)=\mathbf{a}+\widetilde{\mathbf{a}}=2t(\mathbf{a});\quad(\mathbf{a},r)=r(\mathbf{a},1).$$

Рассмотрим разность, которую можно назвать *дефектом антиавтоморфизма*:

$$\mathbf{x}\widetilde{\mathbf{y}}-\widetilde{\mathbf{y}\widetilde{\mathbf{x}}}=\lambda(\mathbf{x},\mathbf{y})\tag{39}$$

Добавим и вычтем слева $\mathbf{y}\widetilde{\mathbf{x}}$:

$$\mathbf{x}\widetilde{\mathbf{y}}+\mathbf{y}\widetilde{\mathbf{x}}-\mathbf{y}\widetilde{\mathbf{x}}-\widetilde{\mathbf{y}\widetilde{\mathbf{x}}}=\lambda(\mathbf{x},\mathbf{y}),\qquad\text{т. е.}$$

$$2(\mathbf{x},\mathbf{y})-2(\mathbf{y}\widetilde{\mathbf{x}},1)=\lambda(\mathbf{x},\mathbf{y})$$

Откуда сразу видно, что дефект антиавтоморфизма принадлежит центру алгебры, что завершает доказательство теоремы. □

Лемма 3. *Дефект антиавтоморфизма является антисимметричной функцией от аргументов:*

$$\lambda(\mathbf{x},\mathbf{y}) = -\lambda(\mathbf{y},\mathbf{x}); \quad \lambda(\mathbf{x},\mathbf{x}) = 0\,. \tag{40}$$

В самом деле,

$$\begin{aligned}&\lambda(\mathbf{x},\mathbf{y}) + \lambda(\mathbf{y},\mathbf{x}) = 2(\mathbf{x},\mathbf{y}) - 2(\mathbf{y}\widetilde{\mathbf{x}},1) + 2(\mathbf{y},\mathbf{x}) - 2(\mathbf{x}\widetilde{\mathbf{y}},1) = \\ &= 4(\mathbf{x},\mathbf{y}) - 2(\mathbf{y}\widetilde{\mathbf{x}} + \mathbf{x}\widetilde{\mathbf{y}},1) = 4(\mathbf{x},\mathbf{y}) - 4((\mathbf{x},\mathbf{y}),1) = 0 \qquad \text{по (33).}\end{aligned}$$

Кроме того, с очевидностью $\lambda(\mathbf{x},1) = 0$.

В каком случае дефект антиавтоморфизма равен 0, т е. квадратичная алгебра является алгеброй с центральным сопряжением? Докажем ряд утверждений.

Теорема 3. *Эластичные (и тем более альтернативные) квадратичные алгебры обладают строгим антиавтоморфизмом (т. е., сопряжением).*

В самом деле, в эластичных алгебрах

$$\begin{gathered}\mathbf{ab}\cdot\mathbf{a} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{ba}.\\ \widetilde{\mathbf{ab}\cdot\mathbf{a}} = \widetilde{\mathbf{a}}\cdot\widetilde{\mathbf{ab}} - \lambda(\mathbf{ab},\mathbf{a}) = \widetilde{\mathbf{a}}\cdot\widetilde{\mathbf{b}}\widetilde{\mathbf{a}} - \widetilde{\mathbf{a}}\lambda(\mathbf{a},\mathbf{b});\\ \widetilde{\mathbf{a}\cdot\mathbf{ba}} = \widetilde{\mathbf{ba}}\cdot\widetilde{\mathbf{a}} - \lambda(\mathbf{a},\mathbf{ba}) = \widetilde{\mathbf{a}}\widetilde{\mathbf{b}}\cdot\widetilde{\mathbf{a}} - \widetilde{\mathbf{a}}\lambda(\mathbf{b},\mathbf{a}) - \lambda(\mathbf{a},\mathbf{ba}) \qquad \text{или}\\ \widetilde{\mathbf{a}}\lambda(\mathbf{a},\mathbf{b}) + \lambda(\mathbf{ab},\mathbf{a}) = \widetilde{\mathbf{a}}\lambda(\mathbf{b},\mathbf{a}) + \lambda(\mathbf{a},\mathbf{ba}) \qquad \text{или}\\ 2\widetilde{\mathbf{a}}\lambda(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \lambda(\mathbf{a},\mathbf{ba}) - \lambda(\mathbf{ab},\mathbf{a}).\end{gathered}$$

Т. е. произвольный элемент $\widetilde{\mathbf{a}}$ оказывается принадлежащим центру алгебры, или же $\lambda(\mathbf{a},\mathbf{b}) = 0$ (и в правой части также 0).

Условие эластичности является достаточным, но не необходимым. Множество квадратичных алгебр с точным антиавтоморфизмом значительно шире множества эластичных алгебр. В следующем разделе будет приведен пример неэластичной квадратичной алгебры с точным антиавтоморфизмом. В отношении необходимых условий можно доказать две леммы.

Лемма 4. *Отображение $\mathbf{x} \to \widetilde{\mathbf{x}}$ в квадратичной алгебре является точным антиавтоморфизмом тогда и только тогда, когда возможно перестановка сомножителей под знаком реальной части:*

$$Re\,(\mathbf{xy}) = Re\,(\mathbf{yx}).$$

В самом деле,

$$\begin{gathered}\lambda(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathbf{x}\widetilde{\mathbf{y}} - \widetilde{\mathbf{y}\widetilde{\mathbf{x}}} \Rightarrow\\ \lambda(\mathbf{x},\mathbf{y}) = (\mathbf{x}\widetilde{\mathbf{y}} - \widetilde{\mathbf{y}\widetilde{\mathbf{x}}},1) = (\mathbf{x}\widetilde{\mathbf{y}} - \mathbf{y}\widetilde{\mathbf{x}},1)\end{gathered}$$

Поскольку $\lambda(\mathbf{x},1) = 0$, в этом выражении остаются лишь чисто мнимые части $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$:

$$\lambda(\mathbf{p},\mathbf{q}) = (-\mathbf{pq} + \mathbf{qp},1) = Re\,(\mathbf{qp} - \mathbf{pq}).$$

Лемма 5. *Отображение $\mathbf{x} \to \widetilde{\mathbf{x}}$ в квадратичной алгебре является точным антиавтоморфизмом тогда и только тогда, когда коммутатор произвольных элементов алгебры является чисто мнимым.*

В самом деле,

$$\widetilde{[\mathbf{a},\mathbf{b}]} = \widetilde{\mathbf{ab}} - \widetilde{\mathbf{ba}} = \widetilde{\mathbf{b}}\widetilde{\mathbf{a}} - \lambda(\mathbf{a},\mathbf{b}) - \widetilde{\mathbf{a}}\widetilde{\mathbf{b}} + \lambda(\mathbf{b},\mathbf{a}) = -[\widetilde{\mathbf{a}},\widetilde{\mathbf{b}}] + 2\lambda(\mathbf{b},\mathbf{a}) = -[\mathbf{a},\mathbf{b}] + 2\lambda(\mathbf{b},\mathbf{a})$$

(последнее равенство вытекает из того, что элементы центра коммутируют со всеми элементами алгебры).

Лемма 3 позволяет сразу же построить пример квадратичной алгебры с неточным антиавтоморфизмом ("испорченные" кватернионы, r – вещественное число).

$\times$	1	$\mathbf{q}_1$	$\mathbf{q}_2$	$\mathbf{q}_3$
1	1	$\mathbf{q}_1$	$\mathbf{q}_2$	$\mathbf{q}_3$
$\mathbf{q}_1$	$\mathbf{q}_1$	-1	$\mathbf{q}_3 + r$	$-\mathbf{q}_2$
$\mathbf{q}_2$	$\mathbf{q}_2$	$-\mathbf{q}_3 - r$	-1	$\mathbf{q}_1$
$\mathbf{q}_3$	$\mathbf{q}_3$	$\mathbf{q}_2$	$-\mathbf{q}_1$	-1

. (*Tab. N*)

Отображение $\widetilde{\mathbf{a}}$ меняет знак у орт $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3$. Алгебра квадратична:

$$\mathbf{a} = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot \mathbf{q}_1 + a_2\mathbf{q}_2 + a_3\mathbf{q}_3$$
$$\mathbf{a}\widetilde{\mathbf{a}} = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + ra_1a_2 - ra_2a_1 = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2.$$

Однако,

$$\widetilde{\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2} = \widetilde{\mathbf{q}_3 + r} = -\mathbf{q}_3 + r \ \neq$$
$$\widetilde{\mathbf{q}}_2\widetilde{\mathbf{q}}_1 = \mathbf{q}_2\mathbf{q}_1 = -\mathbf{q}_3 - r.$$

В соответствии с теоремой 3, алгебра неэластична:

$$\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2\mathbf{q}_1 = \mathbf{q}_1(-\mathbf{q}_3 - r) = \mathbf{q}_2 - r\mathbf{q}_1\,, \qquad \text{но}$$
$$\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2 \cdot \mathbf{q}_1 = (\mathbf{q}_3 + r)\mathbf{q}_1 = \mathbf{q}_2 + r\mathbf{q}_1$$

Отметим, что все результаты для квадратичных алгебр (например, их моноассоциативность) есть вместе с тем и результаты для алгебр с центральным сопряжением, но, вообще говоря, не обратно.

Итак, понятие алгебры с центральным сопряжением шире крайне узкого понимания гиперкомплексных алгебр как алгебр Кэли-Диксона, но уже предельно широкого их понимания как конечномерных алгебр с единицей.

Несложно доказать ряд утверждений об алгебрах с центральным сопряжением.

Теорема 4. *Всякая альтернативная алгебра с центральным сопряжением обладает мультипликативной (не всегда вещественной) 2-нормой* $N_2 = \mathbf{a}\bar{\mathbf{a}} = \bar{\mathbf{a}}\mathbf{a}$.

Для произвольной, уже неальтернативной алгебры с центральным сопряжением несложно доказать следующую теорему (результат новый):

Теорема 5. *Любая алгебра с центральным сопряжением (и в частности всякая квадратичная алгебра) монокомпозиционна, т. е. 2-норма квадрата элемента равна квадрату 2-нормы этого элемента:*

$$N_2(\mathbf{aa}) = N_2(\mathbf{a})N_2(\mathbf{a}), \quad \text{и более того} \quad N_2(\mathbf{a}^k) = N_2(\mathbf{a})^k. \tag{41}$$

Лемма 6. *Во всякой эластичной алгебре с центральным сопряжением произведение трех элементов под знаком реальной части ассоциативно:*

$$Re(\mathbf{ab} \cdot \mathbf{c}) = Re(\mathbf{a} \cdot \mathbf{bc}). \tag{42}$$

(Для произведения произвольного числа элементов это не так.)

Лемма 7. *Во всякой эластичной алгебре с центральным сопряжением возможна циклическая перестановка 3 сомножителей под знаком реальной части.*

$$Re(\mathbf{a}\cdot\mathbf{bc}) = Re(\mathbf{ab}\cdot\mathbf{c}) = Re(\mathbf{c}\cdot\mathbf{ab}) = Re(\mathbf{ca}\cdot\mathbf{b}) = Re(\mathbf{b}\cdot\mathbf{ca}). \ \square \tag{43}$$

Введем теперь, по аналогии с кватернионами, *левое и правое векторные произведения*:

$$\begin{aligned} \langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle_l &\equiv Im(\bar{\mathbf{a}}\mathbf{b}) = 1/2(\bar{\mathbf{a}}\mathbf{b} - \bar{\mathbf{b}}\mathbf{a}) \\ \langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle_p &\equiv Im(\mathbf{a}\bar{\mathbf{b}}) = 1/2(\mathbf{a}\bar{\mathbf{b}} - \mathbf{b}\bar{\mathbf{a}}) \end{aligned} \tag{44}$$

С очевидностью, выполняется:

$$\langle\mathbf{b},\mathbf{a}\rangle = -\langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle, \qquad \langle\mathbf{a},\mathbf{a}\rangle = 0, \quad \langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle_p = \langle\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}}\rangle_l.$$

Отметим, что для векторных произведений

$$\langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle \neq \langle\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}}\rangle \qquad \text{или} \qquad \langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle_p \neq \langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle_l.$$

Вместо этого, в эластичных алгебрах с центральным сопряжением выполняется:

$$\langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle^2 = \langle\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}}\rangle^2, \qquad \text{т. е.} \quad \langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle_p^2 = \langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle_l^2, \tag{45}$$

однако, не является верным равенство

$$(\langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle + \langle\mathbf{c},\mathbf{d}\rangle)^2 \neq (\langle\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}}\rangle + \langle\bar{\mathbf{c}},\bar{\mathbf{d}}\rangle)^2.$$

В альтернативных алгебрах $\mathbb{A}_c$ верно тождество (более общее выражение мультипликативности 2-нормы)

$$N_2(\mathbf{a})N_2(\mathbf{b}) = (\mathbf{a},\mathbf{b})^2 - \langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle^2. \tag{46}$$

Несложно доказать, что в любых алгебрах с центральным сопряжением (и $\Rightarrow$ в любых квадратичных алгебрах) выполняются следующие тождества ($\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\} = \mathbf{ab}\cdot\mathbf{c} - \mathbf{a}\cdot\mathbf{bc}$ – ассоциатор, $[\mathbf{a},\mathbf{b}] = \mathbf{ab} - \mathbf{ba}$ – коммутатор):

$$\begin{aligned} \{[\mathbf{a},\mathbf{b}]^2,\mathbf{c},\mathbf{d}\} &\equiv 0 && \text{Тождество Клейнфельда} \\ [[\mathbf{a},\mathbf{b}]^2,\mathbf{c}] &\equiv 0 && \text{Тождество Холла} \\ \Re\big(\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\} + \{\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{a}\} + \{\mathbf{c},\mathbf{a},\mathbf{b}\}\big) &\equiv 0 \end{aligned}$$

2.2. О геометрии и ассоциативности: алгебра, связанная с псевдонормой Минковского

Значение ассоциативных свойств для геометрии, естественно порождаемой алгеброй, можно проиллюстрировать на одном простом и наглядном примере. Можно вспомнить, что кватернионы имеют метрику сигнатуры $+4$, а антикватернионы – метрику сигнатуры $(+2,-2)$. Зададимся вопросом, какая алгебра соответствует напрямую метрике Минковского $(1,-3)$ $s^2 = t^2 - x^2 - y^2 - z^2$. Таких алгебр можно сконструировать несколько, причем все они будут неассоциативны. По степени нарушения ассоциативности эти алгебры будут распадаться на два класса. Рассмотрим, к примеру, две таблицы умножения:

$\times$	1	$\mathbf{q}_1$	$\mathbf{q}_2$	$\mathbf{q}_3$
1	1	$\mathbf{q}_1$	$\mathbf{q}_2$	$\mathbf{q}_3$
$\mathbf{q}_1$	$\mathbf{q}_1$	1	$\mathbf{q}_3$	$-\mathbf{q}_2$
$\mathbf{q}_2$	$\mathbf{q}_2$	$-\mathbf{q}_3$	1	$\mathbf{q}_1$
$\mathbf{q}_3$	$\mathbf{q}_3$	$\mathbf{q}_2$	$-\mathbf{q}_1$	1

. (*Tab. A*)

$\times$	1	$\mathbf{q}_1$	$\mathbf{q}_2$	$\mathbf{q}_3$
1	1	$\mathbf{q}_1$	$\mathbf{q}_2$	$\mathbf{q}_3$
$\mathbf{q}_1$	$\mathbf{q}_1$	1	$-\mathbf{q}_3$	$-\mathbf{q}_2$
$\mathbf{q}_2$	$\mathbf{q}_2$	$\mathbf{q}_3$	1	$\mathbf{q}_1$
$\mathbf{q}_3$	$\mathbf{q}_3$	$\mathbf{q}_2$	$-\mathbf{q}_1$	1

. (*Tab. B*)

Сопряжение в таких алгебрах согласно Лемме 4 существует (т. е. является точным антиавтоморфизмом); оно задается обычным образом (все орты, кроме 1, полагаются мнимыми):

$$\bar{\mathbf{a}} = a_0 \cdot 1 - a_1\mathbf{q}_1 - a_2\mathbf{q}_2 - a_3\mathbf{q}_3\,, \qquad \overline{\mathbf{ab}} = \bar{\mathbf{b}}\bar{\mathbf{a}}\,.$$

Поскольку реальная часть элемента алгебр есть просто вещественное число, перед нами алгебры с центральным сопряжением. Естественная квадратичная норма также является вещественным числом и совпадает с метрикой Минковского:

$$\mathbf{a}\bar{\mathbf{a}} = a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2.$$

Рассматриваемые алгебры неассоциативны и, более того, неальтернативны:

$$\mathbf{q}_3\mathbf{q}_3 \cdot \mathbf{q}_1 = \mathbf{q}_1, \qquad \text{но} \quad \mathbf{q}_3 \cdot \mathbf{q}_3\mathbf{q}_1 = \mathbf{q}_3(-\mathbf{q}_2) = -\mathbf{q}_1.$$

Вторая из алгебр даже не эластична (хотя согласно Лемме 1, она, как и все квадратичные алгебры, моноассоциативна).

Теперь рассмотрим непосредственные геометрические следствия этих свойств.

1) Поскольку алгебры *неассоциативны,* движения в них нельзя задать посредством внутренних автоморфизмов:

$$\mathbf{a}' = \mathbf{u}\mathbf{a}\mathbf{u}^{-1}, \tag{47}$$

поскольку не проходит то, что проходит в ассоциативных алгебрах:

$$\mathbf{a}' \cdot \mathbf{b}' = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{a}\mathbf{u}^{-1}) \cdot (\mathbf{u} \cdot \mathbf{b}\mathbf{u}^{-1}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{a} \cdot (\mathbf{u}^{-1} \cdot \mathbf{u}) \cdot \mathbf{b}\mathbf{u}^{-1} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{ab} \cdot \mathbf{u}^{-1} = (\mathbf{ab})'.$$

2) Поскольку алгебры *неальтернативны,* норма произведения не равна произведению норм, а значит движения в них нельзя задать посредством умножения на элемент (элементы) единичной нормы $\mathbf{e}$:

$$N_2(\mathbf{ea}) \neq N_2(\mathbf{e})N_2(\mathbf{a}) = N_2(\mathbf{a}).$$

3) Поскольку вторая из алгебр *неэластична,* возникают проблемы с определением ортогональности чисто мнимых элементов (по идее, соответствующих векторам обычного трехмерного пространства). Чтобы убедиться в этом, можно доказать:

Теорема 6. *В эластичных алгебрах с центральным сопряжением векторное произведение произвольных мнимых векторов ортогонально каждому из них [18]:*

$$(\mathbf{q}, \langle \mathbf{q}, \mathbf{p} \rangle) = 0.$$

Все это иллюстрирует, что требование порождать "хорошие" геометрии является довольно жестким ограничением для гиперкомплексных алгебр. Чрезмерное удаление от ассоциативности приводит к малосодержательным, по-видимому, геометриям.

2.3. Полинорма. 4-норма для бикватернионов, дикватернионов и биоктав

Используя теорему Вейерштрасса об ассоциативно-коммутативных алгебрах (утверждающую, что все такие алгебры без нильпотентных элементов разлагаются в прямую сумму вещественных и комплексных чисел), несложно доказать:

Теорема 7. *Всякая альтернативная алгебра с центральным сопряжением обладает невырожденной 2-нормой и вещественной невырожденной мультипликативной нормой степени n, выражающейся с помощью набора инволюций через исходную 2-норму. При этом степень нормы вдвое выше размерности центра алгебры $n = 2r$.*

Поскольку n-норма строится на основе 2-нормы, многие ее свойства в альтернативных алгебрах с центральным сопряжением автоматически переносятся на n-норму и порождаемую ею n-скалярное произведение. Так,

$$N_n(\bar{\mathbf{u}}) = N_n(\mathbf{u}), \qquad (\bar{\mathbf{u}}_1, \bar{\mathbf{u}}_2, \dots, \bar{\mathbf{u}}_n) = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n),$$
$$(\mathbf{v}\mathbf{u}_1, \mathbf{v}\mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{v}\mathbf{u}_n) = N_n(\mathbf{v})(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n).$$

Особенно легко получить вещественную норму алгебр бикватернионов, дикватернионов, биоктав или диоктав, она будет иметь степень 4. Алгоритм очевиден: 2-норма является здесь комплексным или двойным числом; умножив его на сопряженное, получим вещественное число [* – комплексное или двойное сопряжение $(\mathbf{ab})^* = \mathbf{a}^*\mathbf{b}^*$, см. 1.3]:

$$N_4(\mathbf{a}) = N_2(\mathbf{a})N_2(\mathbf{a})^* = \mathbf{a}\bar{\mathbf{a}}(\mathbf{a}\bar{\mathbf{a}})^* = \mathbf{a}\bar{\mathbf{a}}\mathbf{a}^*\bar{\mathbf{a}}^* = N_2(\mathbf{a})N_2(\mathbf{a}^*). \tag{48}$$

В блочном виде 4-норма для алгебр бикватернионов (верхний знак) и дикватернионов равна:

$$N_4(\mathbf{a}) = N_4(a + k \cdot \mathbf{i}_0) = (N_2(a) \mp N_2(k))^2 \pm 4(a, k)^2, \tag{49}$$

а для биоктав:

$$N_4(a + A \cdot \mathbf{e}_0 + k \cdot \mathbf{i}_0 + K \cdot \mathbf{f}_0) = (N_2(a) + N_2(A) - N_2(k) - N_2(K))^2 + 4((a, k) + (A, K))^2. \tag{50}$$

В покомпонентном виде 4-норма бикватернионов и дикватернионов равна:

$$N_4(\mathbf{a}) = (a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \ \mp (k_0^2 + k_1^2 + k_2^2 + k_3^2))^2 \ \pm 4(a_0k_0 + a_1k_1 + a_2k_2 + a_3k_3)^2, \tag{51}$$

для биоктав:

$$N_4(\mathbf{a}) = (a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \ + A_0^2 + A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 \ - k_0^2 - k_1^2 - k_2^2 - k_3^2 \ - K_0^2 - K_1^2 - K_2^2 - K_3^2)^2$$
$$+ 4(a_0k_0 + a_1k_1 + a_2k_2 + a_3k_3 \ + A_0K_0 + A_1K_1 + A_2K_2 + A_3K_3)^2. \tag{52}$$

С очевидностью, все 4-нормы неотрицательны. Но они не являются положительно определенными (и не могут являться в силу теоремы Фробениуса): из факта $N_4(\mathbf{a}) = 0$ не следует $\mathbf{a} = 0$. (Поэтому более корректно говорить о *псевдонормах.*) Для дикватернионов достаточно взять $a = A$ и 4-норма будет $= 0$: Для бикватернионов ситуация несколько хитрее. Чтобы занулить 4-норму, нужно взять A равным по 2-норме a, и при этом перпендикулярным ему: $(a, A) = 0$. Например, $a = 3\mathbf{i}_1 - 2\mathbf{i}_3,\ A = 2\mathbf{i}_0 + 3\mathbf{i}_2$.

Формула мультипликативности 4-нормы алгебры биоктав в кватернионной записи выглядит так (с помощью ряда преобразований ее несложно доказать и напрямую):

$$\begin{gathered}
\big(N_2(a) + N_2(A) - N_2(k) - N_2(K)\big)^2 + 4\big((a, k) + (A, K)\big)^2 \cdot \\
\big(N_2(b) + N_2(B) - N_2(l) - N_2(L)\big)^2 + 4\big((b, l) + (B, L)\big)^2 = \\
= \big(N_2(ab - \bar{B}A - kl + \bar{L}K) + N_2(Ba + A\bar{b} - Lk - K\bar{l}) \\
-N_2(al - \bar{L}A + kb - \bar{B}K) - N_2(La + K\bar{b} + Bk + A\bar{l})\big)^2 \\
+4\big((ab - \bar{B}A - kl + \bar{L}K,\ al - \bar{L}A + kb - \bar{B}K) \\
+(Ba + A\bar{b} - Lk - K\bar{l},\ La + K\bar{b} + Bk + A\bar{l})\big)^2
\end{gathered} \tag{53}$$

Это громоздкое в вещественных числах тождество [18] является непосредственным обобщением знаменитого тождества восьми квадратов. Более того, его можно считать максимальным и исключительным. Поскольку по теореме Цорна биоктавы – максимальная простая альтернативная (неассоциативная) алгебра, то все тождества большей размерности, связанные с неассоциативными алгебрами, сведутся к данному или его фрагментам. Подобно формулам суммы квадратов, это тождество, случайное для вещественных чисел, является отражением существования алгебры биоктав.

Для бикватернионов (а также для дикватернионов, но не для биоктав) 4-норма может быть представлена в ином виде [18] :

$$N_4(\mathbf{a}) = N_4(a + k\cdot \mathbf{i}_0) = (N_2(a) - N_2(k))^2 + 4(a,k)^2 = (N_2(a) + N_2(k))^2 + 4\langle k, a\rangle^2. \quad (54)$$

Знание 4-нормы позволяет ввести *обратный элемент* для алгебр би(ди)кватернионов и биоктав (и вообще для любой алгебры с центральным сопряжением и нормой 4 порядка). Поскольку

$$N_4(\mathbf{a}) = N_2(\mathbf{a})N_2^*(\mathbf{a}) = \mathbf{a}\bar{\mathbf{a}}N_2^*(\mathbf{a}), \quad N_4(\bar{\mathbf{a}}) = \bar{\mathbf{a}}\mathbf{a}N_2^*(\bar{\mathbf{a}}), \quad N_4(\bar{\mathbf{a}}) = N_4(\mathbf{a}),$$

то ясно, как ввести правый и левый обратный элемент (он, конечно, $\exists$ не всегда):

$$\mathbf{a}_p^{-1} = \frac{\bar{\mathbf{a}}N_2^*(\mathbf{a})}{N_4(\mathbf{a})} = \frac{\bar{\mathbf{a}}\cdot\mathbf{a}^*\bar{\mathbf{a}}^*}{N_4(\mathbf{a})}, \quad \mathbf{a}_l^{-1} = \frac{N_2^*(\bar{\mathbf{a}})\bar{\mathbf{a}}}{N_4(\mathbf{a})} \equiv \mathbf{a}_p^{-1}. \quad (55)$$

Поскольку $N_2(\bar{\mathbf{a}}) = N_2(\mathbf{a})$, то *правый и левый обратные элементы совпадают в любой алгебре с центральным сопряжением* – с любой степенью нормы, поскольку рассуждение легко обобщается. Т. о., обратный элемент существует для каждого элемента с ненулевой 4-нормой алгебры $\mathbb{A}_c$.

2.4. Четырехскалярное произведение для би(ди)-кватернионов и биоктав

Для случая $n = 4$ формула Шафера (28) выглядит так:

$$\begin{aligned}(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d}) = \frac{1}{24}\big[&N_4(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}) - N_4(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}) - N_4(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{d}) - N_4(\mathbf{a}+\mathbf{c}+\mathbf{d})\\ &- N_4(\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}) + N_4(\mathbf{a}+\mathbf{b}) + N_4(\mathbf{a}+\mathbf{c}) + N_4(\mathbf{b}+\mathbf{c}) + N_4(\mathbf{a}+\mathbf{d})\\ &+ N_4(\mathbf{b}+\mathbf{d}) + N_4(\mathbf{c}+\mathbf{d}) - N_4(\mathbf{a}) - N_4(\mathbf{b}) - N_4(\mathbf{c}) - N_4(\mathbf{d})\big]. \quad (56)\end{aligned}$$

Учтя теперь формулу, выражающую для алгебр бикватернионов и биоктав 4-норму через 2-норму (48), и выражая 2-норму суммы через 2-скалярное произведение согласно (38), получаем после ряда упрощений формулу 4-скалярного произведения в алгебрах с центральным сопряжением с (псевдо)нормой 4 степени:

$$\begin{aligned}(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d}) = \frac{1}{6}\big[&(\mathbf{a},\mathbf{b})(\mathbf{c}^*,\mathbf{d}^*) + (\mathbf{a},\mathbf{c})(\mathbf{b}^*,\mathbf{d}^*) + (\mathbf{a},\mathbf{d})(\mathbf{b}^*,\mathbf{c}^*)\\ &+ (\mathbf{c},\mathbf{d})(\mathbf{a}^*,\mathbf{b}^*) + (\mathbf{b},\mathbf{d})(\mathbf{a}^*,\mathbf{c}^*) + (\mathbf{b},\mathbf{c})(\mathbf{a}^*,\mathbf{d}^*)\big]. \quad (57)\end{aligned}$$

Несложно вывести ряд полезных следствий из этой формулы. Так, при решении геометрических вопросов важны вещественные 4-формы от двух векторов. На основании 4-формы от 4 векторов их можно ввести две:

$$(\mathbf{a},\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{b}) = \frac{1}{6}\big[N_2(\mathbf{a})N_2^*(\mathbf{b}) + 4(\mathbf{a},\mathbf{b})(\mathbf{a},\mathbf{b})^* + N_2(\mathbf{b})N_2^*(\mathbf{a})\big], \quad (58)$$

$$(\mathbf{a},\mathbf{a},\mathbf{a},\mathbf{b}) = \frac{1}{2}\big[N_2(\mathbf{a})(\mathbf{a},\mathbf{b})^* + (\mathbf{a},\mathbf{b})N_2^*(\mathbf{a})\big], \quad (59)$$

а кроме того может оказаться полезной третья

$$\{\mathbf{a},\mathbf{b}\} = (\mathbf{a},\mathbf{b})(\mathbf{a},\mathbf{b})^*. \tag{60}$$

Отметим также симметризованную форму:

$$\mathbf{a}\circ\mathbf{b} = (\mathbf{a},\mathbf{a},\mathbf{a},\mathbf{b}) + (\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{b},\mathbf{b}) = \frac{1}{2}\big[(N_2(\mathbf{a}) + N_2(\mathbf{b}))(\mathbf{a},\mathbf{b})^* + (\mathbf{a},\mathbf{b})(N_2^*(\mathbf{a}) + N_2^*(\mathbf{b}))\big] \tag{61}$$

С ее использованием формула 4-нормы суммы

$$N_4(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = (\mathbf{a}+\mathbf{b},\mathbf{a}+\mathbf{b},\mathbf{a}+\mathbf{b},\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \\ = N_4(\mathbf{a}) + 4(\mathbf{a},\mathbf{a},\mathbf{a},\mathbf{b}) + 6(\mathbf{a},\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{b}) + 4(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{b},\mathbf{b}) + N_4(\mathbf{b}) \tag{62}$$

выглядит так:

$$N_4(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = N_4(\mathbf{a}) + N_4(\mathbf{b}) + N_2(\mathbf{a})N_2^*(\mathbf{b}) + N_2(\mathbf{b})N_2^*(\mathbf{a}) + 4\{\mathbf{a},\mathbf{b}\} + 4\mathbf{a}\circ\mathbf{b} \tag{63}$$

Свойства форм $(\mathbf{a},\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{b})$ и $(\mathbf{a},\mathbf{a},\mathbf{a},\mathbf{b})$ весьма различны. В самом деле, как несложно подсчитать, симметричная форма $(\mathbf{j}_p,\mathbf{j}_p,\mathbf{j}_q,\mathbf{j}_q)$ для биоктав (и значит, в том числе, для октав, бикватернионов и дикватернионов) равна

$$\begin{gathered}(\mathbf{j}_p,\mathbf{j}_p,\mathbf{j}_q,\mathbf{j}_q) = 1 \qquad \text{при} \quad p = q, \\ (\mathbf{j}_p,\mathbf{j}_p,\mathbf{j}_q,\mathbf{j}_q) = \pm 1/3 \qquad \text{при} \quad p \neq q.\end{gathered} \tag{64}$$

Напротив, $\mathbf{j}_p \circ \mathbf{j}_q$ равен нулю не только тогда, когда 2-скалярное произведение $(\mathbf{j}_p,\mathbf{j}_q) = 0$, но и во всех случаях, когда орты $\mathbf{j}_p$ и $\mathbf{j}_q$ различны:

$$\begin{gathered}(\mathbf{j}_p,\mathbf{j}_p,\mathbf{j}_p,\mathbf{j}_q) = 0 \qquad \text{если} \quad p \neq q, \qquad \text{и поэтому} \\ \mathbf{j}_p \circ \mathbf{j}_q = \delta_{pq},\end{gathered}$$

Таким образом, *отношение* $\mathbf{a}\circ\mathbf{b} = 0$ *можно рассматривать как обобщение ортогональности векторов на случай форм 4 степени.*

2.5. Четырехвекторное произведение для бикватернионов и биоктав

Имеет смысл пойти дальше результатов Шафера и обобщить не только скалярное, но и векторное произведение. Для алгебр бикватернионов, биоктав и им подобным четырехвекторное произведение можно предложить на основе следующей формулы:

$$\langle\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d}\rangle = \frac{1}{6}\big[\langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle\langle\mathbf{c}^*,\mathbf{d}^*\rangle + \langle\mathbf{a},\mathbf{c}\rangle\langle\mathbf{d}^*,\mathbf{b}^*\rangle + \langle\mathbf{a},\mathbf{d}\rangle\langle\mathbf{b}^*,\mathbf{c}^*\rangle \\ + \langle\mathbf{c},\mathbf{d}\rangle\langle\mathbf{a}^*,\mathbf{b}^*\rangle + \langle\mathbf{d},\mathbf{b}\rangle\langle\mathbf{a}^*,\mathbf{c}^*\rangle + \langle\mathbf{b},\mathbf{c}\rangle\langle\mathbf{a}^*,\mathbf{d}^*\rangle\big]. \tag{65}$$

Как легко видеть, 4-векторное произведение полностью антисимметрично относительно перестановок в любой паре векторов. Как и 2-векторное произведение, это не вещественное число, а гиперкомплексный вектор. В отличие от мнимого 2-векторного произведения, 4-векторное произведение реально относительно базового сопряжения $\bar{\mathbf{r}}$ (и содержит поэтому только орты 1 и $\mathbf{i}_0$). Можно показать, что если половина степени нормы $n/2$ – четное число, то n-векторное произведение будет реальным, при нечетным $n/2$ – мнимым (так, мнимо 2-векторное произведение кватернионов).

Если образовать 4-векторное произведение из кватернионов (алгебры с нормой степени 2, а не 4), получится вещественное число с ясным геометрическим смыслом. Как легко показать, оно равно детерминанту матрицы, составленной из координат всех 4-х векторов:

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d} \rangle = \begin{bmatrix} a_0 & b_0 & c_0 & d_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{bmatrix}.$$

Т. о. 4-векторное произведение для кватернионов равно 4-объему параллелепипеда, натянутого на четыре вектора, т. е. совпадает с смешанным произведением 4 порядка.

2.5. Основные конструкции в матричном представлении

Для приложения введенных выше конструкций в геометрии и физике целесообразно увидеть, как они будут выглядеть в матричном представлении. Бикватернионы имеют точное матричное представление посредством комплексных матриц 2×2. Это представление известно как алгебра матриц Паули.

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{q}_1 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{q}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{q}_3 = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{i}_0 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}; \quad \mathbf{i}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{i}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{i}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

В данном представлении бикватернион

$$\mathbf{a} = a_0 \cdot 1 + a_1\mathbf{q}_1 + a_2\mathbf{q}_2 + a_3\mathbf{q}_3 \ + k_0\mathbf{i}_0 + k_1\mathbf{i}_1 + k_2\mathbf{i}_2 + k_3\mathbf{i}_3$$

записывается так:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 + k_3 - ia_3 + ik_0 & -ia_1 - a_2 + k_1 - ik_2 \\ -ia_1 + a_2 + k_1 + ik_2 & a_0 - k_3 + ia_3 + ik_0 \end{pmatrix}. \tag{66}$$

Бикватернионному сопряжению (15)

$$\bar{\mathbf{a}} = a_0 \cdot 1 - a_1\mathbf{q}_1 - a_2\mathbf{q}_2 - a_3\mathbf{q}_3 \ + k_0\mathbf{i}_0 - k_1\mathbf{i}_1 - k_2\mathbf{i}_2 - k_3\mathbf{i}_3$$

соответствует присоединенная матрица

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 - k_3 + ia_3 + ik_0 & ia_1 + a_2 - k_1 + ik_2 \\ ia_1 - a_2 - k_1 - ik_2 & a_0 + k_3 - ia_3 + ik_0 \end{pmatrix}. \tag{67}$$

2-норма бикватерниона, понимаемая как комплексное число, равна детерминанту его матрицы, а с другой стороны, она может быть выражена через произведение матрицы бикватерниона на присоединенную ($\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}' = Det\,\mathbf{A} \cdot I$):

$$N_2(\mathbf{a}) = Det\,\mathbf{A} = \frac{1}{2} Sp(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}'). \tag{68}$$

Отсюда 2-скалярное произведение (комплексное число) есть:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{1}{4} Sp(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}' + \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}'). \tag{69}$$

Правое 2-векторное произведение (элемент алгебры) есть:

$$< \mathbf{a}, \mathbf{b} >= \frac{1}{2}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}' - \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}'). \tag{70}$$

Дуальному кватернионному сопряжению (16)

$$\widetilde{\mathbf{a}} = a_0 - a_1\mathbf{q}_1 - a_2\mathbf{q}_2 - a_3\mathbf{q}_3 - k_0\mathbf{i}_0 + k_1\mathbf{i}_1 + k_2\mathbf{i}_2 + k_3\mathbf{i}_3$$

соответствует эрмитово-сопряженная матрица

$$\mathbf{A}^+ = \begin{pmatrix} a_{11}^* & a_{21}^* \\ a_{12}^* & a_{22}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 + k_3 + ia_3 - ik_0 & ia_1 + a_2 + k_1 - ik_2 \\ ia_1 - a_2 + k_1 + ik_2 & a_0 - k_3 - ia_3 - ik_0 \end{pmatrix}. \tag{71}$$

Внешнему для кватернионов комплексному сопряжению (17) (равному комбинации сопряжений $\bar{\widetilde{\mathbf{a}}}$)

$$\bar{\widetilde{\mathbf{a}}} = \mathbf{a}^\star = a_0 + a_1\mathbf{q}_1 + a_2\mathbf{q}_2 + a_3\mathbf{q}_3 - k_0\mathbf{i}_0 - k_1\mathbf{i}_1 - k_2\mathbf{i}_2 - k_3\mathbf{i}_3$$

соответствует матрица

$$\mathbf{A}'^+ = \mathbf{A}^\star = \begin{pmatrix} a_{22}^* & -a_{21}^* \\ -a_{12}^* & a_{11}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 - k_3 - ia_3 - ik_0 & -ia_1 - a_2 - k_1 + ik_2 \\ -ia_1 + a_2 - k_1 - ik_2 & a_0 + k_3 + ia_3 - ik_0 \end{pmatrix}. \tag{72}$$

Как следствие, 4-норма равна,

$$N_4(\mathbf{a}) = \frac{1}{4}Sp(\mathbf{A}\mathbf{A}')[Sp(\mathbf{A}\mathbf{A}')]^* = \frac{1}{4}Sp(\mathbf{A}\mathbf{A}')Sp(\mathbf{A}^\star\mathbf{A}^{\star\prime}) \tag{73}$$

а 4-скалярное произведение есть

$$\begin{gathered}(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d}) = \frac{1}{96}\big[Sp(\mathbf{A}\mathbf{B}' + \mathbf{B}\mathbf{A}')\, Sp(\mathbf{C}^\star\mathbf{D}^{\star\prime} + \mathbf{D}^\star\mathbf{C}^{\star\prime}) + Sp(\mathbf{A}\mathbf{C}' + \mathbf{C}\mathbf{A}')\, Sp(\mathbf{B}^\star\mathbf{D}^{\star\prime} + \mathbf{D}^\star\mathbf{B}^{\star\prime}) + \\ + Sp(\mathbf{A}\mathbf{D}' + \mathbf{D}\mathbf{A}')\, Sp(\mathbf{B}^\star\mathbf{C}^{\star\prime} + \mathbf{C}^\star\mathbf{B}^{\star\prime}) + Sp(\mathbf{C}\mathbf{D}' + \mathbf{D}\mathbf{C}')\, Sp(\mathbf{A}^\star\mathbf{B}^{\star\prime} + \mathbf{B}^\star\mathbf{A}^{\star\prime}) \\ + Sp(\mathbf{B}\mathbf{D}' + \mathbf{D}\mathbf{B}')\, Sp(\mathbf{A}^\star\mathbf{C}^{\star\prime} + \mathbf{C}^\star\mathbf{A}^{\star\prime}) + Sp(\mathbf{B}\mathbf{C}' + \mathbf{C}\mathbf{B}')\, Sp(\mathbf{A}^\star\mathbf{D}^{\star\prime} + \mathbf{D}^\star\mathbf{A}^{\star\prime})\big].\end{gathered} \tag{74}$$

Все формулы значительно упрощаются в важном для приложений случае чисто мнимых бикватернионов ($a_0 = k_0 = 0$), шесть координат не равны 0. В этом случае

$$\bar{\mathbf{a}} = -\mathbf{a}, \quad \mathbf{a}^\star = -\widetilde{\mathbf{a}}, \quad \text{т. е.} \quad \mathbf{A}' = -\mathbf{A}, \quad \mathbf{A}^\star = -\mathbf{A}^+.$$

Тогда 2-норма, 2-скалярное и 2-векторное произведения есть:

$$N_2(\mathbf{a}) = -\mathbf{a}^2 = -\frac{1}{2}Sp(\mathbf{A}^2), \tag{75}$$

$$(\mathbf{a},\mathbf{b}) = -\frac{1}{4}Sp(\mathbf{A}\mathbf{B} + \mathbf{B}\mathbf{A}), \tag{76}$$

$$< \mathbf{a}, \mathbf{b} >= \frac{1}{2}(\mathbf{B}\mathbf{A} - \mathbf{A}\mathbf{B}) = \frac{1}{2}[\mathbf{B}, \mathbf{A}] \tag{77}$$

$$< \mathbf{a}, \mathbf{b} >^2 = -N_2(< \mathbf{a}, \mathbf{b} >) = \frac{1}{8}Sp([\mathbf{A}, \mathbf{B}]^2). \tag{78}$$

(т. е. векторное произведение чисто мнимых кватернионов сводится к коммутатору матриц $[\mathbf{A},\mathbf{B}]$). 4-норма и 4-скалярное произведение в данном случае равны

$$N_4(\mathbf{a}) = \frac{1}{4}Sp(\mathbf{A}^2)Sp(\mathbf{A}^{+2}) \tag{79}$$

$$\begin{gathered}(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d}) = \frac{1}{96}\big[Sp(\mathbf{A}\mathbf{B} + \mathbf{B}\mathbf{A})\, Sp(\mathbf{C}^+\mathbf{D}^+ + \mathbf{D}^+\mathbf{C}^+) + Sp(\mathbf{A}\mathbf{C} + \mathbf{C}\mathbf{A})\, Sp(\mathbf{B}^+\mathbf{D}^+ + \mathbf{D}^+\mathbf{B}^+) + \\ + Sp(\mathbf{A}\mathbf{D} + \mathbf{D}\mathbf{A})\, Sp(\mathbf{B}^+\mathbf{C}^+ + \mathbf{C}^+\mathbf{B}^+) + Sp(\mathbf{C}\mathbf{D} + \mathbf{D}\mathbf{C})\, Sp(\mathbf{A}^+\mathbf{B}^+ + \mathbf{B}^+\mathbf{A}^+) \\ + Sp(\mathbf{B}\mathbf{D} + \mathbf{D}\mathbf{B})\, Sp(\mathbf{A}^+\mathbf{C}^+ + \mathbf{C}^+\mathbf{A}^+) + Sp(\mathbf{B}\mathbf{C} + \mathbf{C}\mathbf{B})\, Sp(\mathbf{A}^+\mathbf{D}^+ + \mathbf{D}^+\mathbf{A}^+)\big].\end{gathered} \tag{80}$$

Часть 3. Некоторые возможности применения полинорм алгебр с центральным сопряжением в физике

Как хорошо известно [4], электромагнитное поле довольно естественно описывается бикватернионными переменными, поэтому здесь логично искать приложение норм 4 порядка и иных конструкций для алгебр с центральным сопряжением.

3.1. 4-форма и элемент массы электромагнитного поля

Введем бикватернион электромагнитного поля

$$\mathbf{F} = \mathbf{q}_1 H_1 + \mathbf{q}_2 H_2 + \mathbf{q}_3 H_3 + \mathbf{i}_1 E_1 + \mathbf{i}_2 E_2 + \mathbf{i}_3 E_3 = \mathbf{H} + \mathbf{i}_0 \mathbf{E} \tag{81}$$

($\mathbf{H}$ и $\mathbf{E}$ – чисто мнимые кватернионы, которые могут рассматриваться просто как 3-векторы). Его комплексная 2-норма равна

$$\begin{aligned} N_2(\mathbf{F}) = H_1^2 + H_2^2 + H_3^2 - E_1^2 - E_2^2 - E_3^2 + 2\mathbf{i}_0(H_1E_1 + H_2E_2 + H_3E_3) = \\ = \mathbf{H}^2 - \mathbf{E}^2 + 2\mathbf{i}_0(\mathbf{H}, \mathbf{E}) = \mathbf{I}_s + 2 \cdot \mathbf{i}_0 \mathbf{I}_p, \end{aligned} \tag{82}$$

т. е. она составлена из скалярного $\mathbf{I}_s$ и псевдоскалярного $\mathbf{I}_p$ инвариантов электромагнитного поля, а 4-норма (вещественный скаляр):

$$\begin{aligned} N_4(\mathbf{F}) = (H_1^2 + H_2^2 + H_3^2 - E_1^2 - E_2^2 - E_3^2)^2 + 4(H_1E_1 + H_2E_2 + H_3E_3)^2 \\ N_4(\mathbf{F}) = (\mathbf{H}^2 - \mathbf{E}^2)^2 + 4(\mathbf{H}, \mathbf{E})^2 = \mathbf{I}_s^2 + 4\,\mathbf{I}_p^2\,. \end{aligned} \tag{83}$$

Чтобы выявить скрытый смысл этого выражения, используем (54):

$$\begin{aligned} N_4(\mathbf{F}) = (\mathbf{H}^2 - \mathbf{E}^2)^2 + 4(\mathbf{E}, \mathbf{H})^2 = (\mathbf{H}^2 + \mathbf{E}^2)^2 + 4\langle \mathbf{H}, \mathbf{E}\rangle^2 \qquad \text{или} \\ N_4(\mathbf{F}) = (\mathbf{H}^2 + \mathbf{E}^2)^2 - 4|\langle \mathbf{H}, \mathbf{E}\rangle^2| \end{aligned} \tag{84}$$

(последний член ≤ 0). Т. о. 4-норма эл. магн. поля имеет ясный физический смысл: она является нормой 4-вектора Пойнтинга, т. е. по сути представляет собой квадрат *плотности массы поля.* (Эта плотность $\neq 0$ в силу неаддитивности массы в релятивистской физике.)

3.2. 4-форма и преобразование дуальности электромагнитного поля

В виде (84) становится очевидным, что 4-норма эл. магн. поля содержит скрытую симметрию кирального типа U(1). Она инвариантна при замене

$$\begin{aligned} \mathbf{E}' &= \mathbf{E}\cos\theta + \mathbf{H}\sin\theta \\ \mathbf{H}' &= -\mathbf{E}\sin\theta + \mathbf{H}\cos\theta, \qquad \text{т. е.} \end{aligned} \tag{85}$$

$$\mathbf{F}' = (\mathbf{H} + \mathbf{i}_0\mathbf{E})' = \mathbf{F}e^{\mathbf{i}_0\theta} \tag{86}$$

Это – обобщенное преобразование дуальности, оставляющее, как известно, инвариантными уравнения Максвелла в вакууме [16]. При наличии зарядов его надо дополнить преобразованием

$$\begin{aligned} e' &= e\cos\theta + g\sin\theta \\ g' &= -e\sin\theta + g\cos\theta. \end{aligned} \tag{87}$$

Т. о., введение в рассмотрение 4-нормы эл. магн. поля позволяет прояснить природу обобщенной дуальной инвариантности уравнений Максвелла, скрытую при стандартном квадратичном подходе.

3.3. Связь с электродинамикой Борна-Инфельда

Вид (83) 4-нормы эл. магн. поля содержит в качестве одного из своих членов выражение, совпадающее с Максвелловским лагранжианом. Что получится, если использовать 4-норму при конструировании лагранжиана поля? Оказывается, это естественным путем ведет к электродинамике Борна-Инфельда. В самом деле, принцип соответствия подсказывает следующий вид модифицированного лагранжиана в первом нетривиальном приближении:

$$L' = L_0 + \Lambda,$$

где L_0 – Максвелловский лагранжиан, а Λ – малая в обычных условиях поправка. Т. е., модифицированный лагранжиан, использующий 4-норму поля, должен иметь в 1-м постмаксвелловском приближении следующий вид:

$$L' = -\frac{1}{8\pi}\Big[(\mathbf{H}^2 - \mathbf{E}^2) + \alpha\big((\mathbf{H}^2 - \mathbf{E}^2)^2 + 4(\mathbf{H},\mathbf{E})^2\big)\Big]. \tag{88}$$

Именно такое приближение дает электродинамика Борна-Инфельда. В самом деле, лагранжиан здесь, как известно, равен:

$$L = -\frac{1}{4\pi a^2}\Big[\sqrt{1 + a^2(\mathbf{H}^2 - \mathbf{E}^2) - a^4(\mathbf{H},\mathbf{E})^2} - 1\Big]. \tag{89}$$

Используя разложение корня $\sqrt{1+x} \approx 1 + x/2 - x^2/8$ и сохраняя члены до a^4, получаем следующее соответствие с электродинамикой Максвелла:

$$\begin{aligned} L \approx -\frac{1}{4\pi a^2}\Big(1 + \frac{1}{2}a^2(\mathbf{H}^2 - \mathbf{E}^2) - \frac{1}{2}a^4(\mathbf{H},\mathbf{E})^2 - \frac{1}{8}a^4(\mathbf{H}^2 - \mathbf{E}^2)^2 - 1\Big) = \\ = -\frac{1}{8\pi}\Big((\mathbf{H}^2 - \mathbf{E}^2) - \frac{1}{4}a^2\big((\mathbf{H}^2 - \mathbf{E}^2)^2 + 4(\mathbf{H},\mathbf{E})^2\big)\Big) \end{aligned}$$

т. е. в точности вид (88).

Преобразовав лагранжиан Борна-Инфельда к виду

$$\begin{aligned} L = -\frac{1}{4\pi a^2}\Big[\sqrt{\big(1 + \frac{a^2}{2}(\mathbf{H}^2 - \mathbf{E}^2)\big)^2 - \frac{a^4}{4}\big((\mathbf{H}^2 - \mathbf{E}^2)^2 + 4(\mathbf{H},\mathbf{E})^2\big)} - 1\Big] = \\ = -\frac{1}{4\pi a^2}\Big[\sqrt{\big(1 + \frac{a^2}{2}L_0\big)^2 - \frac{a^4}{4}N_4(\mathbf{F})} - 1\Big] \end{aligned}$$

можно увидеть, что сходная ситуация будет сохраняться во всех порядках: будут комбинироваться 2-норма (Максвелловский лагранжиан) и 4-норма эл. магн. поля (83), т. е. скаляры 2-го и 4-го порядка. Оговорим, что требование составлять лагранжиан из скаляров 2 и 4 порядка вместе с принципом соответствия жестко дает теорию Борна-Инфельда лишь в первом нетривиальном порядке. В следующих порядках этих условий недостаточно, чтобы зафиксировать коэффициенты, т. е. возникает некоторый теоретический произвол (диапазон теорий). Тем не менее, несомненно, что рассмотрение 4-нормы показывает естественность нелинейного обобщения электродинамики в теории Борна-Инфельда.

3.4. О лагранжиане модели Скирма

Проф. В. И. Санюк (РУДН) предложил выяснить, могут ли развитые выше алгебраические соображения дать обоснование модели Скирма [17] ядерных взаимодействий. Т. Скирма создавал эту модель для описания барионов как протяженных локализованных структур с нетривиальным топологическим зарядом, который интерпретировался как барионное число. Модель оказалась простым и удачным прообразом эффективной мезонной теории (в общем виде еще неизвестной), к которой должна сводиться квантовая хромодинамика в низкоэнергетическом пределе. В этом пределе сильные взаимодействия в значительной мере сводятся к обмену π-мезонами. В рамках модели Скирма удается удовлетворительным образом описывать спектроскопию основных состояний адронов и их взаимодействия.

Основной объект модели – *скирмионы* – представляют собой киральные топологические солитоны со спонтанно нарушенной киральной симметрией. Описывающее их киральное поле $U(x)$ принимает значения на полевом многообразии модели $\Phi = S^3 \simeq [SU(2)]$ и параметризуется изовекторным полем $\varphi^a(x)$, соответствующим триплету пионных полей:

$$\begin{gathered} U(x) = \varphi^0 + i(\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\varphi}) = \exp[i(n^a\tau^a)\Theta(x)]; \\ n^a = \varphi^a/|\boldsymbol{\varphi}|; \quad \sin\Theta = \pm|\varphi|; \quad a = 1,2,3, \end{gathered} \tag{90}$$

где $\boldsymbol{n}$ – единичный вектор, $\boldsymbol{\tau}$ – матрицы Паули, $\Theta(x)$ – киральный угол, $x = (x^0, \boldsymbol{x})$. Поля (90) подчинены естественным граничным условиям на пространственной бесконечности

$$U(x) \to \boldsymbol{I} \quad (\varphi^a(x) \to 0) \quad \text{при} \quad |\boldsymbol{x}| \to \infty, \tag{91}$$

где $\boldsymbol{I}$ – единичная 2×2 матрица.

Левоинвариантные киральные токи $l_\mu = U^{-1}\partial_\mu U$ принимают значения в алгебре Ли группы $SU(2)$. Динамика модели Скирма определяется плотностью лагранжиана

$$\mathfrak{L} = -\frac{1}{4\lambda^2}Sp(l_\mu l^\mu) + \frac{\varepsilon^2}{16}Sp([l_\mu, l_\nu][l^\mu, l^\nu]), \tag{92}$$

где ε, λ – параметры модели. Первый член совпадает с лагранжианом Вайнберга-Гюрши, который в "древесном" приближении хорошо воспроизводит результаты алгебры токов для низкоэнергетической динамики пионов. Второй член 4 порядка отвечает идее Скирма рассматривать барионы как вихри в некоторой жидкости, описываемой "обобщенными скоростями" l_μ.

Однако, поскольку лагранжиан модели Скирма не выводится напрямую из КХД и не является единственным обобщением лагранжиана Вайнберга-Гюрши, возникает вопрос о возможности его обоснования посредством алгебраических соображений.

Как легко видеть, в алгебраическом плане каждая из компонент токов l_μ представляет собой чисто мнимый кватернион. Это означает, что мы имеем дело с тензорным произведением алгебры бикватернионов (эрмитовы компоненты которой представляются матрицами Паули и отвечают пространству-времени) на алгебру кватернионов $B \otimes H$. Такая алгебра не является алгеброй с центральным сопряжением, поэтому здесь приходится расширять технику, изложенную выше. Можно показать, что в общем случае алгебра $B \otimes H$ обладает вещественной формой 8 степени. Однако в данном случае ситуация сильно упрощается благодаря тому, что не равны 0 только 12 компонент этой алгебры (по 3 чисто мнимых кватерниона на каждую из 4 эрмитовых компонент пространственно-временного бикватерниона). Благодаря этому псевдонорма сводится к форме 4 степени. Опустив за недостатком места вычисления, приведем конечный результат – в кватернионной записи 4-форма равна

$$\begin{gathered} N_4 = (|\boldsymbol{l}_0|^2 - |\boldsymbol{l}_1|^2 - |\boldsymbol{l}_2|^2 - |\boldsymbol{l}_3|^2)^2 + \\ +4\big(<\boldsymbol{l}_2,\boldsymbol{l}_3>^2 + <\boldsymbol{l}_3,\boldsymbol{l}_1>^2 + <\boldsymbol{l}_1,\boldsymbol{l}_2>^2 - <\boldsymbol{l}_0,\boldsymbol{l}_1>^2 - <\boldsymbol{l}_0,\boldsymbol{l}_2>^2 - <\boldsymbol{l}_0,\boldsymbol{l}_3>^2\big). \end{gathered} \tag{93}$$

Используя формулы (77), (78) подраздела 2.5, можно перевести эту 4-форму на обычный тензорный язык:

$$N_4 = \frac{1}{4}\big(Sp(l_\mu l^\mu)\big)^2 + \frac{1}{2}\big(Sp([l_\mu, l_\nu][l^\mu, l^\nu])\big). \tag{94}$$

В согласии с принципом соответствия и по аналогии с электродинамикой Борна-Инфельда естественно считать, что лагранжиан модели (в первом постлинейном приближении) должен представлять собой сумму вещественной части псевдонормы 2 порядка $N_2 = \frac{1}{2}Sp(l_\mu l^\mu)$ и псевдонормы 4 порядка в качестве малой поправки. Т. о. лагранжиан в этом приближении должен иметь вид

$$\mathfrak{L} = N_2 + \alpha N_4, \quad \text{или}$$

$$\mathfrak{L} = -\frac{1}{4\lambda^2}Sp(l_\mu l^\mu) + \frac{\varepsilon^2}{32}\Big(\big(Sp(l_\mu l^\mu)\big)^2 + 2Sp([l_\mu, l_\nu][l^\mu, l^\nu])\Big), \tag{95}$$

Это выражение очень похоже на лагранжиан Скирма, в частности, естественным образом появляется нелинейный "вихревой член". Однако, в лагранжиане Скирма нет среднего члена. В связи с этим имеет смысл выяснить, улучшает ли добавление этого члена свойства модели.

Как и в электродинамике Борна-Инфельда, алгебраические соображения вместе с принципом соответствия определяют вид модифицированного лагранжиана Скирма (95) лишь в первом постлинейном порядке. В общем случае лагранжиан может представлять собой некоторую функцию, комбинирующую псевдонормы 2 и 4 порядка, т. е. опять же возникает диапазон теорий. В связи с этим, приведем согласованный с алгебраическими соображениями вид модифицированного лагранжиана в форме, сходной с электродинамикой Борна-Инфельда:

$$\mathfrak{L} = -\frac{1}{\lambda^2}\left[\sqrt{\Big(1 + \frac{1}{2}N_2\Big)^2 - \frac{\varepsilon^2\lambda^2}{4}N_4} - 1\right] =$$

$$= -\frac{1}{\lambda^2}\left[\sqrt{\big(1 + \frac{1}{4}Sp(l_\mu l^\mu)\big)^2 - \frac{\varepsilon^2\lambda^2}{16}\Big(\big(Sp(l_\mu l^\mu)\big)^2 + 2Sp([l_\mu, l_\nu][l^\mu, l^\nu])\Big)} - 1\right]. \tag{96}$$

3.5. О моменте импульса

Имеет смысл поискать какие-либо аналоги подобных построений в механике. Тензор момента импульса также можно рассмотреть как бикватернион:

$$\mathbf{M} = \mathbf{q}_1 M_{23} + \mathbf{q}_2 M_{31} + \mathbf{q}_3 M_{12} + \mathbf{i}_1 M_{01} + \mathbf{i}_2 M_{02} + \mathbf{i}_3 M_{03} = \mathbf{K} + \mathbf{i}_0\mathbf{L} \tag{97}$$

Его 2-норма и 4- нормы равны

$$N_2(\mathbf{M}) = (M_{23}^2 + M_{31}^2 + M_{12}^2 - M_{01}^2 - M_{02}^2 - M_{03}^2) + 2\mathbf{i}_0(M_{23}M_{01} + M_{31}M_{02} + M_{12}M_{03}) =$$

$$= \mathbf{K}^2 - \mathbf{L}^2 + 2\mathbf{i}_0(\mathbf{K}, \mathbf{L})$$

$$N_4(\mathbf{M}) = (\mathbf{K}^2 - \mathbf{L}^2)^2 + 4\,(\mathbf{K}, \mathbf{L})^2$$

Однако, 4-норма здесь тривиально сводится к 2-норме, так как несложно показать, что $(\mathbf{K}, \mathbf{L}) = M_{23}M_{01} + M_{31}M_{02} + M_{12}M_{03} \equiv 0$. Квадратичность бикватерниона момента импульса тесно связана с квадратичностью релятивистского вектора энергии-импульса. Можно сказать, что для механики материальных точек, в отличие от теории поля, характерна квадратичность (величины 4 ранга не нужны).

Выводы

Поскольку 4-норма для алгебр бикватернионов и биоктав однозначно выражается через 2-норму (которая также является мультипликативной), неясно, насколько существенными будут те новые возможности, которые создает переход от комплексной (или двойной) 2-нормы к вещественной 4-норме. Точно так же неясно, дадут ли что-то принципиально новое 4-скалярное и 4-векторное произведения, поскольку и они выражаются через свои прототипы 2 степени. Тем не менее, как минимум выявляются некоторые новые связи между уже известными вещами, которые затушеваны при стандартном квадратичном подходе.

В любом случае, представляются интересными попытки придать квадраобъектам какой-либо геометрический и физический смысл. Некоторые первые попытки сделать это (прежде всего, для электромагнитного поля) представлены здесь. При этом возникает новый угол зрения на ряд привычных вопросов. В частности, рассмотрение связанной с бикватернионами вещественной 4-нормы показывает естественность перехода от электродинамики Максвелла к нелинейной электродинамике Борна-Инфельда. Кроме того, алгебраический подход показывает естественность добавления предложенного Т. Скирма нелинейного члена в лагранжиан, описывающий ядерные взаимодействия посредством обмена пионами. При этом выявляется целесообразность введения дополнительного члена в лагранжиане Скирма, что предположительно может улучшить свойства модели. Т. о., алгебраическое рассмотрение позволяет внести некоторые дополнительные элементы жесткости в нелинейные полевые теории.

Благодарности

Автору приятно выразить свою признательность Ю. П. Рыбакову, И. В. Воловичу, участникам семинара отдела математической физики МИРАН за ценное обсуждение и, прежде всего, проф. В. И. Санюку за предложение применить описанную выше методику и конструкции к модели Скирма.

Литература

[1] И. Л. Кантор и А. С. Солодовников. *Гиперкомплексные числа*, Наука, М. 1973.

[2] John C. Baez. *The Octonions*. ArXiv: math-RA/0105155. Русский перевод: Баэз Джон С., *Октонионы,* Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **1 (5)**, том 3, 2006, 120–176.

[3] Я. Лыхмус, Э. Паал, Л. Соргесепп, "Неассоциативность в математике и физике". Труды института физики Академии наук Эстонии, вып. 66, 8 – 22.

[4] А. В. Березин, Ю. А. Курочкин, Е. А. Толкачев, "Кватернионы в релятивистской физике", Изд. 2, УРСС, М. 2003.

[5] "Об основаниях геометрии". Сборник к столетию со дня смерти Лобачевского под ред. А. П. Нордена, М., ГИТТЛ, 1956.

[6] R. D. Schafer. *On forms of degree n permitting composition*, J. Math. Mech. **12** (1963), 777–792. Русский перевод: Р. Д. Шафер, *О формах степени n, допускающих композицию,* Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **1**, том 1, 2004, 140–154.

[7] R. D. Schafer. *Forms permitting composition*, Advances in Mathematics **4**, 111 – 148 (1970).

[8] R. D. Schafer. *An introduction to nonassociative algebras*, Academic Press, New York, 1 изд. 1967, 2 изд. 1991.

[9] K. McCrimmon. *Generically algebraic algebras*, Trans. Amer. math. Soc. **127** (1967), 527–551.

[10] A. Sudbery, *Quaternionic Analysis,* Math. Proc. Camb. Phil. Soc. (1979), **85**, 199–225. Русский перевод: Э. Садбери, *Кватернионный анализ,* Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **2**, том 1, 2004, 130–157.

[11] Б. А. Розенфельд: *Многомерные пространства*, Наука, М. 1966.

[12] Б. А. Розенфельд, М. П. Замаховский: *Геометрия групп Ли*, МЦНМО, М. 2003.
[13] "Общая алгебра", том 1. Справочная математическая библиотека. М., "Наука", Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990.
[14] А. Т. Гайнов. *Тождественные соотношения для бинарно лиевых колец,* Успехи мат. наук, 1957, т. 12, №3, 141–146.
[15] M. Bremner, L. Murakami, I. Shestakov, *Nonassociative agrebras.* Chapter 69 of Handbook of Linear Algebra. ed. by L. Hogben. Chapman & Hall/ CRC, 2007.
[16] В. И. Стражев, Л. М. Томильчик. Электродинамика с магнитным зарядом, "Наука и техника", Минск, 1975.
[17] Ю. П. Рыбаков, В. И. Санюк. Многомерные солитоны, изд-во Российского унив-та дружбы народов, М., 2001.
[18] А. А. Элиович. О норме бикватернионов и иных алгебр с центральным сопряжением, Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **2**, том 1, 2004, 24–50.
[19] А. А. Элиович. От эфира к струнам (методологические размышления о современной физике) – в печати.