К ВОПРОСУ ОБ АНИЗОТРОПНЫХ КОСМОЛОГИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ

М. Л. Фильченков[a,b1], Ю. П. Лаптев[a,c], Р. Х. Сайбаталов[b], В. В. Плотников[a]

Классические анизотропные космологические модели описываются с помощью уравнения Райчаудури для идеальной жидкости. Квантовые модели рассматриваются, используя уравнение Уилера-ДеВиттта. Вычисляется вероятность рождения Вселенной для плоской модели с пылью и деситтеровским вакуумом. Рассматривается метрика типа Бервальда-Моора. Показано, что она сводится к произведению двух анизотропных римановых метрик.

Ключевые слова: анизотропные космологические модели, уравнение Райчаудури, уравнение Уилера-ДеВитта, метрика Бервальда-Моора.

Введение

Рассматриваются анизотропные космологические модели с идеальной жидкостью, учитывающие вращение и сдвиг [1]. Лагранжиан для анизотропных космологических моделей получен из уравнения Райчаудури при условии, что ускорение равно нулю. Изучены анизотропные квантовые космологические модели, для которых уравнение Уилера-ДеВитта выводится, следуя стандартному гамильтонову формализму. С учетом вращения и сдвига вычислены вероятности рождения (коэффициенты прохождения) для плоской Вселенной, заполненной пылью и деситтеровским вакуумом. Анализ анизотропии пространства-времени в рамках римановой геометрии, проведенный в предыдущей работе [2], обобщен на случай анизотропных космологических моделей, рассматриваемых в рамках финслеровой геометрии для метрик типа Бервальда-Моора.

1. Космологическая жидкость

Мы будем следовать гидродинамическому подходу, в котором вещество во Вселенной считается идеальной жидкостью.

Движение космологической жидкости описывается в общей теории относительности с помощью уравнения Райчаудури [3]

$$\dot{\theta} + \frac{1}{3}\theta^2 - A^i_{;i} + 2(\sigma^2 - \omega^2) = -\frac{4\pi G}{c^2}(\varepsilon + 3p), \tag{1}$$

где θ – скаляр расширения, A^i – 4-ускорение, σ – скаляр сдвига, ω – скаляр вращения, ε – плотность энергии, p – давление.

Метрика пространства-времени имеет вид

$$ds^2 = (N^2 - N_\alpha N^\alpha)dt^2 - 2N_\alpha dt dx^\alpha - \gamma_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3), \tag{2}$$

где N – функция хода, $N_\alpha = cg_{0\alpha}$ – функция сдвига и перекрестный член метрики $g_{0\alpha}$, удовлетворяющий соотношению $g^{00} = 1 - g_{0\alpha}g^{0\alpha}$, $\gamma_{11}\gamma_{22}\gamma_{33} = a^6$, $a(t)$ – масштабный фактор. Величины θ, A^i, σ, ω имеют вид

$$\theta = u^i_{;i}, \quad A^i = u^i_{;k}u^k, \quad \omega^2 = \frac{1}{2}\omega_{ik}\omega^{ik}, \quad \sigma^2 = \frac{1}{2}\sigma_{ik}\sigma^{ik},$$

[1] fmichael@mail.ru [a] Институт гравитации и космологии, Российский университет дружбы народов, Москва; [b] Фридмановская лаборатория теоретической физики, Санкт-Петербург; [c] Кафедра физики, Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана.

где u_i – 4-скорость. Условия ортогональности имеют вид

$$u_i\omega_{ik} = 0, \quad u^i\sigma_{ik} = 0, \quad u^iA_i = 0.$$

Из закона сохранения $T^{ik}_{;k} = 0$ для тензора энергии-импульса

$$T^{ik} = (p+\varepsilon)u^iu^k - pg^{ik}, \tag{3}$$

при условии $\theta = \dfrac{3\dot{a}}{a}$, которое справедливо, если $\sigma_{\alpha\beta}n^\alpha n^\beta = 0$, где $n^\alpha n_\alpha = 1$, получаем следующее выражение для дивергенции 4-ускорения

$$A^i_{;i} = w(1-g^{00})(\dot{\theta}+\theta^2), \qquad g^{00} = const, \tag{4}$$

где $1-g^{00}$ характеризует отклонение от фридмановской геометрии. Уравнение состояния $p = w\varepsilon$, где $w = const$.

2. Гамильтонов формализм

Лагранжиан для идеальной жидкости дается формулой

$$\mathcal{L} = \frac{3p-\varepsilon}{2}Na^3. \tag{5}$$

Считаем космологическую материю двухкомпонентной средой, состоящей из деситтеровского вакуума и пыли с уравнениями состояния соответственно $p = -\varepsilon$ и $p = 0$. Для пыли и деситтеровского вакуума $A^i_{;i} = 0$. Уравнение Райчаудури в этом случае принимает вид

$$\frac{\ddot{a}c^2}{N^2} = -\frac{4\pi G}{3c}(\varepsilon+3p)a + \frac{2}{3}(\omega^2-\sigma^2). \tag{6}$$

Выводя ε и p из (5), получаем

$$\mathcal{L} = \frac{a\dot{a}^2}{2N} - \frac{kNa}{2} + \frac{4\pi G\varepsilon}{3c^4}Na^3 + \frac{2Na}{3c^2}\int(\omega^2-\sigma^2)ada. \tag{7}$$

Гамильтониан $\mathcal{H} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{a}}\dot{a} - \mathcal{L}$ сводится к

$$\mathcal{H} = N\left[\frac{p_a^2}{2a} + \frac{ka}{2} - \frac{4\pi G\varepsilon}{3c^4}a^3 - \frac{2a}{3c^2}\int(\omega^2-\sigma^2)ada\right], \tag{8}$$

где $p_a = \dfrac{a\dot{a}}{N}$. Так как $\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{N}} = 0$, $H = \dfrac{\partial\mathcal{H}}{\partial N} = 0$, мы имеем гамильтонову связь

$$H = \frac{p_a^2}{2a} + \frac{ka}{2} - \frac{4\pi G\varepsilon}{3c^4}a^3 - \frac{2a}{3c^2}\int(\omega^2-\sigma^2)ada = 0. \tag{9}$$

3. Квантовая космология

Из факта расширения Вселенной следует, что в прошлом она имела очень малый размер и должна рассматриваться в рамках квантовой модели. В 1973 г. физики Э. П. Трайен (США) и П. И. Фомин (СССР) независимо друг от друга выдвинули предположение о том, что Вселенная возникла из вакуума в результате квантовой флуктуации. Так родилось новое научное направление – квантовая космология. В 1982 г. А. Виленкин

(США) предложил интерпретировать спонтанное квантовое рождение Вселенной из де-ситтеровского вакуума (см. предыдущий параграф) как туннельный эффект, подобный альфа-распаду атомного ядра.

Квантовая космология базируется на подходе, получившем название квантовой геометродинамики (КГД). Квантовая геометродинамика представляет собой квантование геометрии в целом. Основное уравнение КГД, позволившее объединить общую теорию относительности и квантовую теорию, называется уравнением Уилера-ДеВитта (УДВ). Ниже приводится алгоритм получения УДВ, основанный на стандартном гамильтоновом формализме.

Заменим p_a в (9) на оператор $\hat{p_a} = \dfrac{l_{pl}^2}{i}\dfrac{d}{da}$. Тогда получим оператор Гамильтона, который действует на волновую функцию Вселенной ψ, т.е. $\hat{H}\psi = 0$, что сводится к уравнению Уилера-ДеВитта [4]

$$\frac{d^2\psi}{da^2} - V(a)\psi = 0, \tag{10}$$

которое описывает раннюю Вселенную в рамках квантовой космологии, где потенциал

$$V(a) = \frac{1}{l_{pl}^4}\left[ka^2 - \frac{8\pi G\varepsilon}{3c^4}a^4 - \frac{4a^2}{3c^2}\int(\omega^2 - \sigma^2)ada\right], \tag{11}$$

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \sum_{n=0,3} B_n \left(\frac{r_0}{a}\right)^n, \quad B_0 + B_3 = 1. \tag{12}$$

Здесь r_0 и ε_0 – соответственно деситтеровский радиус и плотность энергии.

Для пыли имеем

$$\omega = \frac{Jc^2}{\varepsilon a^5}, \tag{13}$$

где $J = const$ (закон сохранения углового момента),

$$\sigma = \frac{\Sigma}{a^3}, \tag{14}$$

где $\Sigma = const$. Для деситтеровского вакуума $\omega = \sigma = 0$ и $g^{00} = 1$.

Потенциал может быть представлен в виде

$$V(a) = f_1a^2 + f_2a^4 + f_3a + f_4 + f_5a^{-2}, \tag{15}$$

где

$$f_1 = \frac{k}{l_{pl}^4}(k = 0, \pm1), \quad f_2 = -\frac{B_0}{r_0^2 l_{pl}^4}, \quad f_3 = -\frac{B_3 r_0}{l_{pl}^4},$$

$$f_4 = \frac{2c^2 J_3^2}{3\varepsilon_0^2 l_{pl}^4 B_3^2 r_0^6}, \quad f_5 = -\frac{\Sigma_3^2}{3c^2 l_{pl}^4}.$$

Вероятность рождения Вселенной (коэффициент прохождения для туннелирования через потенциальный барьер V) дается формулой Гамова, которая вблизи максимума потенциала a_m принимает вид

$$D = \exp\left\{-\frac{\pi\sqrt{2}V(a_m)}{\sqrt{-V''(a_m)}}\right\}, \tag{16}$$

где $V'(a_m)$. Для плоской модели ($k = 0$) имеем

$$a_m = \sqrt[3]{-\frac{f_3}{8f_2} + \sqrt{\frac{1}{64}\left(\frac{f_3}{f_2}\right)^2 + \frac{f_5}{2f_2}}}. \tag{17}$$

Вычисляя $V_m = V(a_m)$ and $V_m'' = V_m''(a_m)$, получаем

$$D = \exp\left\{-\pi\sqrt{2}\frac{f_2 a_m^4 + f_3 a_m + f_5 a_m^{-2} + f_4}{\sqrt{-12 f_2 a_m^2 - 6 f_5 a_m^{-4}}}\right\}. \tag{18}$$

Таким образом, деситтеровский вакуум, пыль и сдвиг увеличивают коэффициент прохождения D, а вращение уменьшает его.

При $f_2 f_5 \gg f_3^2$ максимум барьера сводится к

$$a_m = \sqrt[6]{\frac{f_5}{2f_2}}, \tag{19}$$

а коэффициент прохождения к

$$D = \exp\left\{-\frac{2^{\frac{1}{6}}\pi}{3^{\frac{1}{3}}}\frac{f_4}{\sqrt[6]{-f_2^2 f_5}}\right\}. \tag{20}$$

Угловой момент J_3 квантован, что неявно следует из формулы Бора-Зоммерфельда

$$2\int\limits_0^{a_0} \sqrt{-V(a)}da = \pi l, \tag{21}$$

где $V(a_0) = 0, \quad a_0 < a_m$, и l – орбитальное квантовое число. Уровни J_3, существующие при $|f_5| \geq \frac{1}{4}$ могут быть оценены по формуле

$$2a_m\sqrt{f_4} = \pi l \tag{22}$$

при условии, что $l \ll \dfrac{\sqrt{|f_5|}}{2\pi}$. Заметим, что параметр f_4 в формулах (20) и (22) пропорционален J_3^2.

4. Метрика типа Бервальда-Моора

В заключение рассмотрим метрику типа Бервальда-Моора

$$\begin{aligned} ds^4 = (cdt + Adx + Bdy + Cdz)(cdt + Ddx + Edy + Fdz) \\ (cdt + Gdx + Hdy + Idz)(cdt + Kdx + Ldy + Mdz), \end{aligned} \tag{23}$$

где величины $A, B, C, D, E, F, G, H, I, K, L, M$, вообще говоря, являются функциями времени и пространственных координат, в отличие от постоянных, равных ± 1 для метрики Бервальда-Моора. Сравним метрику с произведением двух римановых анизотропных метрик типа

$$ds_A^2 = c^2dt^2 - 2g_{0\alpha}cdtdx^\alpha - \gamma_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta, \tag{24}$$

где $\alpha, \beta = 1, 2, 3$, выведенных из (2), переопределяя время t. Приравнивая (24) к билинейной форме

$$ds^2 = (cdt + Adx + Bdy + Cdz)(cdt + Ddx + Edy + Fdz), \tag{25}$$

получим

$$\begin{aligned} A &= -g_{01} \pm \sqrt{g_{01}^2 + \gamma_{11}}, \\ B &= -g_{02} \pm \sqrt{g_{02}^2 + \gamma_{22}}, \\ C &= -g_{03} \pm \sqrt{g_{03}^2 + \gamma_{33}}, \end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{aligned} D &= -g_{01} \mp \sqrt{g_{01}^2 + \gamma_{11}}, \\ E &= -g_{02} \mp \sqrt{g_{02}^2 + \gamma_{22}}, \\ F &= -g_{03} \mp \sqrt{g_{03}^2 + \gamma_{33}}, \end{aligned} \tag{27}$$

$$\gamma_{12} = \sqrt{(g_{01}^2 + \gamma_{11})(g_{02}^2 + \gamma_{22})} - g_{01}g_{02}, \tag{28}$$

$$\gamma_{13} = \sqrt{(g_{01}^2 + \gamma_{11})(g_{03}^2 + \gamma_{33})} - g_{01}g_{03}, \tag{29}$$

$$\gamma_{23} = \sqrt{(g_{02}^2 + \gamma_{22})(g_{03}^2 + \gamma_{33})} - g_{02}g_{03}. \tag{30}$$

Наложим следующие условия на коэффициенты

$$\begin{aligned} G = A, \ \ D = K = -A, \ \ E = B, \\ H = L = -B, \ \ M = C, \ \ F = I = -C, \end{aligned} \tag{31}$$

которые сводят (23) к стандартному виду метрики Бервальда-Моора (см., например, [5])

$$\begin{aligned} ds^4 =& (cdt + dx + dy + dz)(cdt - dx + dy - dz) \\ & (cdt + dx - dy - dz)(cdt - dx - dy + dz) \end{aligned} \tag{32}$$

при условии, что $A = B = C = 1$. Из формул (28) – (31) получим

$$g_{01} = g_{03} = \gamma_{12} = \gamma_{23} = 0, \quad \gamma_{13} = \sqrt{\gamma_{11}\gamma_{33}}, \quad \gamma_{22} = -g_{02}^2. \tag{33}$$

Тогда формулы (26), (27) примут вид

$$\begin{aligned} A = \pm\sqrt{\gamma_{11}}, \quad B = -g_{02}, \quad C = \pm\sqrt{\gamma_{33}}, \\ D = \mp\sqrt{\gamma_{11}}, \quad E = -g_{02}, \quad F = \mp\sqrt{\gamma_{33}}, \end{aligned} \tag{34}$$

$$\begin{aligned} G = \pm\sqrt{\gamma_{11}}, \quad H = g_{02}, \quad I = \mp\sqrt{\gamma_{33}}, \\ K = \mp\sqrt{\gamma_{11}}, \quad L = g_{02}, \quad M = \pm\sqrt{\gamma_{33}}. \end{aligned} \tag{35}$$

Анизотропная метрика (24) сводится к

$$ds_A^2 = c^2dt^2 - 2g_{02}cdtdy - \gamma_{11}dx^2 + g_{02}^2dy^2 - \gamma_{33}dz^2 - 2\sqrt{\gamma_{11}\gamma_{33}}dxdz. \tag{36}$$

Отсюда следует, что метрика типа Бервальда-Моора может быть сведена к произведению двух римановых анизотропных метрик: одна дается формулой (36), а другая следующей формулой

$$ds_{A'}^2 = c^2dt^2 + 2g_{02}cdtdy - \gamma_{11}dx^2 + g_{02}^2dy^2 - \gamma_{33}dz^2 + 2\sqrt{\gamma_{11}\gamma_{33}}dxdz. \tag{37}$$

Так как определитель пространственной части $\gamma = \det \gamma_{\alpha\beta} = 0$ для метрик ds_A^2 и $ds_{A'}^2$, то они могут сводиться к виду

$$ds_A^2 = c^2dT^2 - dL^2, \quad ds_{A'}^2 = c^2dT^2 - dl^2, \tag{38}$$

где

$$cdT = cdt - g_{02}dy, \quad dL = \sqrt{\gamma_{11}}dx + \sqrt{\gamma_{33}}dz, \quad dl = \sqrt{\gamma_{11}}dx - \sqrt{\gamma_{33}}dz.$$

Метрика типа Бервальда-Моора принимает вид

$$ds^4 = (c^2dT^2 - dL^2)(c^2dT^2 - dl^2). \tag{39}$$

Таким образом, метрика типа Бервальда-Моора представляет собой "пересечение" двух римановых метрик с нулевым определителем γ, имеющих одну временную и одну пространственную координату. Сведение финслеровых метрик к произведению двух анизотропных римановых метрик с ненулевым определителем γ будет предметом нашей следующей работы.

Заключение

Гамильтонова связь выведена из уравнения Райчаудури при условии, что дивергенция ускорения равна нулю, что позволяет рассматривать двухкомпонентную модель с пылью и деситтеровским вакуумом. Уравнение Уилера-ДеВитта выведена, следуя стандартному гамильтонову формализму, не зная явного вида метрики пространства-времени. В явном виде получена формула для квантования углового момента пыли. Вычислена вероятность рождения Вселенной в зависимости от относительных вкладов компонент в полную плотность энергии на горизонте де Ситтера. Метрика типа Бервальда-Моора представлена в виде произведения двух римановых анизотропных метрик с нулевым определителем пространственной метрики.

References

[1] M. L. Fil'chenkov, R. Kh. Saibatalov, *Grav. Cosmol.*, Vol. 11, 2005, p. 116.

[2] М. Л. Фильченков, Ю. П. Лаптев, *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, № 2 (8), том 4, 2007, с. 71.

[3] С. Хокинг, Дж. Эллис "Крупномасштабная структура пространства-времени", Изд. "Мир": М. 1977.

[4] A. Vilenkin, *Phys. Rev.*, Vol. D50, 1994, p. 2581.

[5] Р. Г. Зарипов, *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, № 2 (8), том 4, 2007, с. 24.