ФИНСЛЕРОВЫ N-СПИНОРЫ С КОМПЛЕКСНЫМИ КОМПОНЕНТАМИ[1]

Ю. С. Владимиров, А. В. Соловьев

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
anton@spin.phys.msu.ru

Изучаются математические объекты, называемые финслеровыми N-спинорами. Строится общая алгебраическая теория финслеровых N-спиноров. Показано, что финслеровы N-спиноры тесно связаны с N^2-мерным плоским финслеровым пространством. Произведено обобщение эпиморфизма $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \to \mathrm{O}_+^{\uparrow}(1,3)$ на случай группы $\mathrm{SL}(N,\mathbb{C})$. Детально рассмотрены примеры финслеровых N-спиноров при $N = 2, 3$.

1. Введение

Спиноры как геометрические объекты были открыты Э. Картаном в 1913 году при исследовании линейных представлений ортогональных групп [1]. Полутора десятилетиями позднее В. Паули [2] и П. А. М. Дирак [3] переоткрыли спиноры в связи с квантовой задачей описания спина электрона. С тех пор спиноры интенсивно используются в математике и физике.

В классических работах [4,5] понятие спинора было обобщено на случай произвольного n-мерного псевдоевклидова пространства. В этой статье рассматривается другое обобщение спиноров, ведущее непосредственно к финслеровой геометрии. Первоначально такое обобщение под названием *гиперспиноров* было предложено в работах [6, 7], в которых, однако, не была построена сколько-нибудь полная алгебраическая теория данных объектов. Те же математические объекты под названием *финслеровых N-спиноров* совершенно независимо изучались в наших работах, посвященных реляционной теории пространства-времени (см., например, [8,9] и библиографию к ним). Соответствующая математическая схема оказалась довольно содержательной и ее алгебраическая часть будет представлена ниже.

В следующем разделе статьи строится общий алгебраический формализм финслеровых N-спиноров. Дальнейшие разделы посвящены теории простейших финслеровых 2- и 3-спиноров. Заключение содержит некоторые замечания, касающиеся полученных в статье результатов.

2. Общий формализм

Пусть $\mathbb{FS}^N$ — векторное пространство $N > 1$ измерений над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел, а

$$[\cdot,\cdot,\ldots,\cdot]\colon\ \underbrace{\mathbb{FS}^N \times \mathbb{FS}^N \times \cdots \times \mathbb{FS}^N}_{N \text{ множителей}} \to \mathbb{C} \tag{1}$$

— ненулевой антисимметричный N-линейный функционал на $\mathbb{FS}^N$. Последнее означает:

(i) существуют такие $\boldsymbol{\xi}_0$, $\boldsymbol{\eta}_0$, …, $\boldsymbol{\lambda}_0 \in \mathbb{FS}^N$, что

$$[\boldsymbol{\xi}_0, \boldsymbol{\eta}_0, \ldots, \boldsymbol{\lambda}_0] = z_0 \neq 0 \quad (z_0 \in \mathbb{C}); \tag{2}$$

[1] Переработанный русскоязычный вариант статьи авторов: A. V. Solov'yov and Yu. S. Vladimirov. *Finslerian N-spinors: Algebra.* International Journal of Theoretical Physics **40**, 1511–1523 (2001).

(ii) для любых $\boldsymbol{\xi}_1$, $\boldsymbol{\xi}_2$, …, $\boldsymbol{\xi}_N \in \mathbb{FS}^N$ выполняются соотношения

$$[\boldsymbol{\xi}_a, \boldsymbol{\xi}_b, \ldots, \boldsymbol{\xi}_c] = \varepsilon_{ab\ldots c}\,[\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \ldots, \boldsymbol{\xi}_N],$$

где a, b, …, $c = 1, 2, \ldots, N$, а $\varepsilon_{ab\ldots c}$ — N-мерный символ Леви-Чивиты, нормированный стандартным условием $\varepsilon_{12\ldots N} = 1$;

(iii) для любых $\boldsymbol{\xi}_1$, $\boldsymbol{\eta}_1$, $\boldsymbol{\xi}_2$, $\boldsymbol{\eta}_2$, …, $\boldsymbol{\xi}_N$, $\boldsymbol{\eta}_N \in \mathbb{FS}^N$ и $z \in \mathbb{C}$ выполняются соотношения

$$[\boldsymbol{\xi}_1, \ldots, \boldsymbol{\xi}_a + \boldsymbol{\eta}_a, \ldots, \boldsymbol{\xi}_N] = [\boldsymbol{\xi}_1, \ldots, \boldsymbol{\xi}_a, \ldots, \boldsymbol{\xi}_N] + [\boldsymbol{\xi}_1, \ldots, \boldsymbol{\eta}_a, \ldots, \boldsymbol{\xi}_N],$$
$$[\boldsymbol{\xi}_1, \ldots, z\boldsymbol{\xi}_a, \ldots, \boldsymbol{\xi}_N] = z[\boldsymbol{\xi}_1, \ldots, \boldsymbol{\xi}_a, \ldots, \boldsymbol{\xi}_N],$$

где a принимает значения 1, 2, …, N.

Мы будем использовать следующую терминологию. Пространство $\mathbb{FS}^N$, снабженное функционалом (1) со свойствами (i), (ii) и (iii), называется *пространством финслеровых N-спиноров*. Комплексное число $[\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \ldots, \boldsymbol{\lambda}]$, соответственно, называется *скалярным N-произведением* финслеровых N-спиноров $\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\eta}$, …, $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{FS}^N$.

Следует отметить, что $\boldsymbol{\xi}_0$, $\boldsymbol{\eta}_0$, …, $\boldsymbol{\lambda}_0$ линейно независимы. Действительно, если бы они были линейно зависимы, то один из финслеровых N-спиноров $\boldsymbol{\xi}_0$, $\boldsymbol{\eta}_0$, …, $\boldsymbol{\lambda}_0$ был бы линейной комбинацией остальных и, в соответствии с (ii)–(iii), скалярное N-произведение $[\boldsymbol{\xi}_0, \boldsymbol{\eta}_0, \ldots, \boldsymbol{\lambda}_0]$ обратилось бы в нуль. Но это противоречит (2). Таким образом, $\boldsymbol{\xi}_0$, $\boldsymbol{\eta}_0$, …, $\boldsymbol{\lambda}_0$ линейно независимы, т. е. образуют базис в $\mathbb{FS}^N$.

Введем обозначения: $\boldsymbol{\epsilon}_1 = \boldsymbol{\xi}_0$, $\boldsymbol{\epsilon}_2 = \boldsymbol{\eta}_0$, …, $\boldsymbol{\epsilon}_N = \boldsymbol{\lambda}_0/z_0$. Очевидно, упорядоченное множество $\{\boldsymbol{\epsilon}_1, \boldsymbol{\epsilon}_2, \ldots, \boldsymbol{\epsilon}_N\}$ является базисом в $\mathbb{FS}^N$. В силу (2) и (iii) его элементы удовлетворяют условию

$$[\boldsymbol{\epsilon}_1, \boldsymbol{\epsilon}_2, \ldots, \boldsymbol{\epsilon}_N] = 1. \tag{3}$$

Базисы в пространстве $\mathbb{FS}^N$, для которых имеет место (3), назовем *каноническими*. Они играют выделенную роль во всем развиваемом формализме.

Пусть $\boldsymbol{\epsilon}'_1$, $\boldsymbol{\epsilon}'_2$, …, $\boldsymbol{\epsilon}'_N$ — произвольные финслеровы N-спиноры, а

$$\boldsymbol{\epsilon}'_a = c_a^b \boldsymbol{\epsilon}_b \tag{4}$$

— их разложения по каноническому базису $\{\boldsymbol{\epsilon}_1, \boldsymbol{\epsilon}_2, \ldots, \boldsymbol{\epsilon}_N\}$; здесь a, $b = 1, 2, \ldots, N$, $c_a^b \in \mathbb{C}$ и производится суммирование по повторяющемуся индексу b. При помощи (ii), (iii), (3) и (4) находим

$$[\boldsymbol{\epsilon}'_1, \boldsymbol{\epsilon}'_2, \ldots, \boldsymbol{\epsilon}'_N] = \det \mathrm{C}_N, \tag{5}$$

где $\mathrm{C}_N = \|c_a^b\|$. Поскольку линейная (не)зависимость $\boldsymbol{\epsilon}'_1$, $\boldsymbol{\epsilon}'_2$, …, $\boldsymbol{\epsilon}'_N$ равносильна линейной (не)зависимости столбцов комплексной $N\times N$-матрицы C_N, то $\{\boldsymbol{\epsilon}'_1, \boldsymbol{\epsilon}'_2, \ldots, \boldsymbol{\epsilon}'_N\}$ является базисом в $\mathbb{FS}^N$ тогда и только тогда, когда $\det \mathrm{C}_N \neq 0$. Кроме того, из (5) следует, что $\{\boldsymbol{\epsilon}'_1, \boldsymbol{\epsilon}'_2, \ldots, \boldsymbol{\epsilon}'_N\}$ — канонический базис, если $\det \mathrm{C}_N = 1$. Таким образом, когда матрица C_N пробегает группу $\mathrm{SL}(N, \mathbb{C})$ комплексных $N\times N$-матриц с единичным определителем, соответствующий базис $\{\boldsymbol{\epsilon}'_1, \boldsymbol{\epsilon}'_2, \ldots, \boldsymbol{\epsilon}'_N\}$ пробегает множество $\mathbf{E}(\mathbb{FS}^N)$ канонических базисов в $\mathbb{FS}^N$.

Выразим скалярное N-произведение финслеровых N-спиноров через их компоненты относительно *произвольного* канонического базиса $\{\boldsymbol{\epsilon}_1, \ldots, \boldsymbol{\epsilon}_N\} \in \mathbf{E}(\mathbb{FS}^N)$. Используя (ii), (iii), (3) и разложения $\boldsymbol{\xi} = \xi^a \boldsymbol{\epsilon}_a$, $\boldsymbol{\eta} = \eta^b \boldsymbol{\epsilon}_b$, …, $\boldsymbol{\lambda} = \lambda^c \boldsymbol{\epsilon}_c$, получаем

$$[\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \ldots, \boldsymbol{\lambda}] = \varepsilon_{ab\ldots c}\, \xi^a \eta^b \cdots \lambda^c, \tag{6}$$

где $\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\eta}$, …, $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{FS}^N$, ξ^a, η^b, …, $\lambda^c \in \mathbb{C}$, a, b, …, $c = 1, 2, \ldots, N$ (здесь, как и в других формулах этой статьи, производится суммирование по всем повторяющимся индексам).

Ясно, что скалярное N-произведение (6) обращается в нуль тогда и только тогда, когда финслеровы N-спиноры $\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\eta}$, …, $\boldsymbol{\lambda}$ линейно зависимы.

Рассмотрим отображение

$$\begin{gathered}\boldsymbol{S}\colon \mathbf{E}(\mathbb{FS}^N) \to \mathbb{C}^{N^{k+l+m+n}},\\ \{\boldsymbol{\epsilon}_1,\ldots,\boldsymbol{\epsilon}_N\} \mapsto \boldsymbol{S}\{\boldsymbol{\epsilon}_1,\ldots,\boldsymbol{\epsilon}_N\} = \left(S^{b_1\ldots b_k\dot{c}_1\ldots\dot{c}_l}_{a_1\ldots a_m\dot{d}_1\ldots\dot{d}_n}\{\boldsymbol{\epsilon}_1,\ldots,\boldsymbol{\epsilon}_N\}\right)\end{gathered} \tag{7}$$

такое, что для любых двух канонических базисов $\{\boldsymbol{\epsilon}_1,\ldots,\boldsymbol{\epsilon}_N\}$, $\{\boldsymbol{\epsilon}'_1,\ldots,\boldsymbol{\epsilon}'_N\} \in \mathbf{E}(\mathbb{FS}^N)$, связанных между собой соотношениями (4), имеют место формулы

$$\begin{aligned}S^{b_1\ldots b_k\dot{c}_1\ldots\dot{c}_l}_{a_1\ldots a_m\dot{d}_1\ldots\dot{d}_n}\{\boldsymbol{\epsilon}'_1,\ldots,\boldsymbol{\epsilon}'_N\} = c^{e_1}_{a_1}\cdots c^{e_m}_{a_m}\overline{c^{\dot{h}_1}_{\dot{d}_1}}\cdots\overline{c^{\dot{h}_n}_{\dot{d}_n}}d^{b_1}_{f_1}\cdots d^{b_k}_{f_k}\overline{d^{\dot{c}_1}_{\dot{g}_1}}\cdots\overline{d^{\dot{c}_l}_{\dot{g}_l}}\times\\ \times S^{f_1\ldots f_k\dot{g}_1\ldots\dot{g}_l}_{e_1\ldots e_m\dot{h}_1\ldots\dot{h}_n}\{\boldsymbol{\epsilon}_1,\ldots,\boldsymbol{\epsilon}_N\};\end{aligned} \tag{8}$$

здесь все индексы (обычные и пунктирные) независимо пробегают значения от 1 до N, горизонтальные линии обозначают комплексное сопряжение, d^a_b — комплексные числа, удовлетворяющие условиям $c^b_a d^a_c = \delta^b_c$ (δ^b_c — символ Кронекера), $\det\|c^a_b\| = \det\|d^a_b\| = 1$, а k, l, m, n — неотрицательные целые числа.

Всякое отображение (7), обладающее свойством (8), будем называть *финслеровым N-спинтензором валентности* $\left[\begin{smallmatrix}k & l\\ m & n\end{smallmatrix}\right]$. Операции сложения и умножения таких N-спинтензоров определяются стандартным способом: если $\boldsymbol{S}$ и $\boldsymbol{T}$ имеют одинаковую валентность $\left[\begin{smallmatrix}k & l\\ m & n\end{smallmatrix}\right]$, а $\boldsymbol{U}$ имеет валентность $\left[\begin{smallmatrix}p & q\\ r & s\end{smallmatrix}\right]$, то числа

$$\begin{aligned}(S+T)^{b_1\ldots b_k\dot{c}_1\ldots\dot{c}_l}_{a_1\ldots a_m\dot{d}_1\ldots\dot{d}_n}\{\boldsymbol{\epsilon}_1,\ldots,\boldsymbol{\epsilon}_N\} = S^{b_1\ldots b_k\dot{c}_1\ldots\dot{c}_l}_{a_1\ldots a_m\dot{d}_1\ldots\dot{d}_n}\{\boldsymbol{\epsilon}_1,\ldots,\boldsymbol{\epsilon}_N\}+\\ + T^{b_1\ldots b_k\dot{c}_1\ldots\dot{c}_l}_{a_1\ldots a_m\dot{d}_1\ldots\dot{d}_n}\{\boldsymbol{\epsilon}_1,\ldots,\boldsymbol{\epsilon}_N\}\end{aligned}$$

являются компонентами суммы $\boldsymbol{S}+\boldsymbol{T}$, а числа

$$\begin{aligned}(S\otimes U)^{b_1\ldots b_{k+p}\dot{c}_1\ldots\dot{c}_{l+q}}_{a_1\ldots a_{m+r}\dot{d}_1\ldots\dot{d}_{n+s}}\{\boldsymbol{\epsilon}_1,\ldots,\boldsymbol{\epsilon}_N\} = S^{b_1\ldots b_k\dot{c}_1\ldots\dot{c}_l}_{a_1\ldots a_m\dot{d}_1\ldots\dot{d}_n}\{\boldsymbol{\epsilon}_1,\ldots,\boldsymbol{\epsilon}_N\}\times\\ \times U^{b_{k+1}\ldots b_{k+p}\dot{c}_{l+1}\ldots\dot{c}_{l+q}}_{a_{m+1}\ldots a_{m+r}\dot{d}_{n+1}\ldots\dot{d}_{n+s}}\{\boldsymbol{\epsilon}_1,\ldots,\boldsymbol{\epsilon}_N\}\end{aligned}$$

— компонентами произведения $\boldsymbol{S}\otimes\boldsymbol{U}$ относительно произвольного канонического базиса $\{\boldsymbol{\epsilon}_1,\ldots,\boldsymbol{\epsilon}_N\} \in \mathbf{E}(\mathbb{FS}^N)$. Отметим, что все финслеровы N-спинтензоры валентности $\left[\begin{smallmatrix}k & l\\ m & n\end{smallmatrix}\right]$ образуют $N^{k+l+m+n}$-мерное векторное пространство над полем $\mathbb{C}$.

Пусть $\mathrm{Herm}(N)$ — *векторное пространство N^2 измерений над полем* $\mathbb{R}$ действительных чисел, состоящее из финслеровых N-спинтензоров $\boldsymbol{X}$ валентности $\left[\begin{smallmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{smallmatrix}\right]$, компоненты которых удовлетворяют условиям эрмитовой симметрии

$$X^{b\dot{c}}\{\boldsymbol{\epsilon}_1,\ldots,\boldsymbol{\epsilon}_N\} = \overline{X^{c\dot{b}}\{\boldsymbol{\epsilon}_1,\ldots,\boldsymbol{\epsilon}_N\}} \tag{9}$$

для любого $\{\boldsymbol{\epsilon}_1,\ldots,\boldsymbol{\epsilon}_N\} \in \mathbf{E}(\mathbb{FS}^N)$. Пусть, кроме того, $\{\boldsymbol{E}_0,\boldsymbol{E}_1,\ldots,\boldsymbol{E}_{N^2-1}\}$ — некоторый базис в $\mathrm{Herm}(N)$, а $\{\boldsymbol{\epsilon}_1,\boldsymbol{\epsilon}_2,\ldots,\boldsymbol{\epsilon}_N\}$ — некоторый канонический базис в $\mathbb{FS}^N$. С каждым $\{\boldsymbol{\epsilon}'_1,\boldsymbol{\epsilon}'_2,\ldots,\boldsymbol{\epsilon}'_N\} \in \mathbf{E}(\mathbb{FS}^N)$ свяжем базис $\{\boldsymbol{E}'_0,\boldsymbol{E}'_1,\ldots,\boldsymbol{E}'_{N^2-1}\}$ в $\mathrm{Herm}(N)$ такой, что

$$E'^{b\dot{c}}_{\alpha}\{\boldsymbol{\epsilon}'_1,\ldots,\boldsymbol{\epsilon}'_N\} = E^{b\dot{c}}_{\alpha}, \tag{10}$$

где $E^{b\dot{c}}_{\alpha} = E^{b\dot{c}}_{\alpha}\{\boldsymbol{\epsilon}_1,\ldots,\boldsymbol{\epsilon}_N\}$, а $\alpha = 0,1,\ldots,N^2-1$. Иными словами, (10) определяет отображение $\{\boldsymbol{\epsilon}'_1,\boldsymbol{\epsilon}'_2,\ldots,\boldsymbol{\epsilon}'_N\} \mapsto \{\boldsymbol{E}'_0,\boldsymbol{E}'_1,\ldots,\boldsymbol{E}'_{N^2-1}\}$ множества $\mathbf{E}(\mathbb{FS}^N)$ в множество всех базисов пространства $\mathrm{Herm}(N)$. Но согласно N-спинтензорному закону преобразования (8)

$$E'^{b\dot{c}}_{\alpha}\{\boldsymbol{\epsilon}_1,\ldots,\boldsymbol{\epsilon}_N\} = c^b_f\overline{c^{\dot{c}}_{\dot{g}}}\,E'^{f\dot{g}}_{\alpha}\{\boldsymbol{\epsilon}'_1,\ldots,\boldsymbol{\epsilon}'_N\}. \tag{11}$$

Сравнивая (10) и (11), получаем формулы

$$E'^{b\dot{c}}_{\alpha}\{\boldsymbol{\epsilon}_1, \ldots, \boldsymbol{\epsilon}_N\} = c^b_f \overline{c^{\dot{c}}_{\dot{g}}}\, E^{f\dot{g}}_{\alpha}, \tag{12}$$

связывающие между собой компоненты финслеровых N-спинтензоров $\boldsymbol{E}'_{\alpha}$ и $\boldsymbol{E}_{\alpha}$ относительно одного и того же канонического базиса $\{\boldsymbol{\epsilon}_1, \ldots, \boldsymbol{\epsilon}_N\} \in \mathbf{E}(\mathbb{FS}^N)$.

Рассмотрим следующие разложения

$$\boldsymbol{E}'_{\alpha} = L(\mathrm{C}_N)^{\beta}_{\alpha}\boldsymbol{E}_{\beta}, \tag{13}$$

где $L(\mathrm{C}_N)^{\beta}_{\alpha} \in \mathbb{R}$, а $\alpha, \beta = 0, 1, \ldots, N^2 - 1$. Чтобы найти $L(\mathrm{C}_N)^{\beta}_{\alpha}$ как функции c^b_a, полезно ввести N^2 финслеровых N-спинтензоров $\boldsymbol{E}^{\alpha}$ валентности $\left[\begin{smallmatrix}0&0\\1&1\end{smallmatrix}\right]$ таких, что

$$\text{свертка}(\boldsymbol{E}^{\alpha} \otimes \boldsymbol{E}_{\beta}) = \delta^{\alpha}_{\beta}. \tag{14}$$

Легко показать, что $\boldsymbol{E}^{\alpha}$ существуют, единственны и $E^{\alpha}_{b\dot{c}} = \overline{E^{\alpha}_{c\dot{b}}}$ в обозначениях $E^{\alpha}_{b\dot{c}} = E^{\alpha}_{b\dot{c}}\{\boldsymbol{\epsilon}_1, \ldots, \boldsymbol{\epsilon}_N\}$. На основании (13) и (14) заключаем, что

$$L(\mathrm{C}_N)^{\alpha}_{\beta} = \text{свертка}(\boldsymbol{E}^{\alpha} \otimes \boldsymbol{E}'_{\beta}). \tag{15}$$

С другой стороны, из (12) следует

$$\text{свертка}(\boldsymbol{E}^{\alpha} \otimes \boldsymbol{E}'_{\beta}) = E^{\alpha}_{b\dot{c}} c^b_f \overline{c^{\dot{c}}_{\dot{g}}} E^{f\dot{g}}_{\beta}. \tag{16}$$

Таким образом, согласно (15) и (16) имеем

$$L(\mathrm{C}_N)^{\alpha}_{\beta} = E^{\alpha}_{b\dot{c}} c^b_f \overline{c^{\dot{c}}_{\dot{g}}} E^{f\dot{g}}_{\beta}. \tag{17}$$

Пусть $\mathrm{E}^{\alpha} = \|E^{\alpha}_{\dot{c}b}\|$, $\mathrm{E}_{\beta} = \|E^{f\dot{g}}_{\beta}\|$, а $\mathrm{E}'_{\beta} = \|E'^{f\dot{g}}_{\beta}\{\boldsymbol{\epsilon}_1, \ldots, \boldsymbol{\epsilon}_N\}\|$. Тогда (12) и (17) можно переписать в матричной форме как, соответственно,

$$\mathrm{E}'_{\beta} = \mathrm{C}_N \mathrm{E}_{\beta} \mathrm{C}^{+}_N \tag{18}$$

и

$$L(\mathrm{C}_N)^{\alpha}_{\beta} = \mathrm{Tr}(\mathrm{E}^{\alpha}\mathrm{C}_N \mathrm{E}_{\beta} \mathrm{C}^{+}_N), \tag{19}$$

где крест обозначает эрмитово сопряжение. Однако из (13) следует, что $\mathrm{E}'_{\beta} = L(\mathrm{C}_N)^{\gamma}_{\beta}\mathrm{E}_{\gamma}$. Поэтому

$$\mathrm{C}_N \mathrm{E}_{\beta} \mathrm{C}^{+}_N = L(\mathrm{C}_N)^{\gamma}_{\beta}\mathrm{E}_{\gamma}. \tag{20}$$

Принимая во внимание (19) и (20), немедленно получаем

$$L(\mathrm{B}_N\mathrm{C}_N)^{\alpha}_{\beta} = \mathrm{Tr}(\mathrm{E}^{\alpha}\mathrm{B}_N\mathrm{C}_N \mathrm{E}_{\beta} \mathrm{C}^{+}_N\mathrm{B}^{+}_N) = L(\mathrm{B}_N)^{\alpha}_{\gamma}L(\mathrm{C}_N)^{\gamma}_{\beta} \tag{21}$$

для любых $\mathrm{B}_N, \mathrm{C}_N \in \mathrm{SL}(N, \mathbb{C})$.

Пусть $L(\mathrm{C}_N) = \|L(\mathrm{C}_N)^{\alpha}_{\beta}\|$, а $\mathrm{FL}(N^2, \mathbb{R}) = \{L(\mathrm{C}_N) \mid \mathrm{C}_N \in \mathrm{SL}(N, \mathbb{C})\}$. Тогда (21) означает, что $\mathrm{FL}(N^2, \mathbb{R})$ — группа относительно матричного умножения, а отображение

$$L\colon\ \mathrm{SL}(N, \mathbb{C}) \to \mathrm{FL}(N^2, \mathbb{R}), \qquad \mathrm{C}_N \mapsto L(\mathrm{C}_N) \tag{22}$$

— эпиморфизм, так что, в частности, $L(1_N) = 1_{N^2}$ (1_N, 1_{N^2} — единичные матрицы соответствующих порядков) и $L(\mathrm{C}^{-1}_N) = L(\mathrm{C}_N)^{-1}$. Легко проверить, что ядро эпиморфизма (22) имеет вид

$$\ker L = \{e^{i\frac{2\pi k}{N}}1_N \mid k = 0, 1, \ldots, N-1\}. \tag{23}$$

Вернемся к соотношениям (13). Поскольку $\{\boldsymbol{E}_0, \ldots, \boldsymbol{E}_{N^2-1}\}$ и $\{\boldsymbol{E}'_0, \ldots, \boldsymbol{E}'_{N^2-1}\}$ являются базисами в $\mathrm{Herm}(N)$, то произвольный вектор $\boldsymbol{X} \in \mathrm{Herm}(N)$ может быть разложен двояким образом

$$\boldsymbol{X} = X^\alpha \boldsymbol{E}_\alpha = X'^\beta \boldsymbol{E}'_\beta, \tag{24}$$

где X^α, $X'^\beta \in \mathbb{R}$. Очевидно, что $X'^\beta = L(\mathrm{C}_N^{-1})^\beta_\alpha X^\alpha$. С другой стороны, $X^{b\dot{c}}\{\boldsymbol{\epsilon}_1, \ldots, \boldsymbol{\epsilon}_N\} = c^b_f \overline{c^{\dot{c}}_{\dot{g}}}\, X^{f\dot{g}}\{\boldsymbol{\epsilon}'_1, \ldots, \boldsymbol{\epsilon}'_N\}$ или, что то же самое,

$$\|X^{b\dot{c}}\{\boldsymbol{\epsilon}_1, \ldots, \boldsymbol{\epsilon}_N\}\| = \mathrm{C}_N \|X^{f\dot{g}}\{\boldsymbol{\epsilon}'_1, \ldots, \boldsymbol{\epsilon}'_N\}\| \mathrm{C}_N^+. \tag{25}$$

Вспоминая, что $\det \mathrm{C}_N = 1$, и вычисляя определитель от обеих сторон равенства (25), получаем

$$\det \|X^{b\dot{c}}\{\boldsymbol{\epsilon}_1, \ldots, \boldsymbol{\epsilon}_N\}\| = \det \|X^{f\dot{g}}\{\boldsymbol{\epsilon}'_1, \ldots, \boldsymbol{\epsilon}'_N\}\| \tag{26}$$

для *любого* $\{\boldsymbol{\epsilon}'_1, \ldots, \boldsymbol{\epsilon}'_N\} \in \mathbf{E}(\mathbb{FS}^N)$. Значит формула (26) задает *инвариантную* числовую характеристику вектора $\boldsymbol{X}$, которую естественно обозначить через $\det \boldsymbol{X}$. Отметим, что $\det \boldsymbol{X} = \det \|X^{b\dot{c}}\{\boldsymbol{\epsilon}_1, \ldots, \boldsymbol{\epsilon}_N\}\| \in \mathbb{R}$ как это следует из (9).

Таким образом, не ограничивая общности, можно вычислить $\det \boldsymbol{X}$ относительно базиса $\{\boldsymbol{\epsilon}_1, \ldots, \boldsymbol{\epsilon}_N\} \in \mathbf{E}(\mathbb{FS}^N)$. Согласно (24) и (26) имеем $\det \boldsymbol{X} = \det(X^\alpha \mathrm{E}_\alpha) = \det(X'^\beta \mathrm{E}'_\beta)$. Однако из (18) следует, что $\det(X'^\beta \mathrm{E}'_\beta) = \det(\mathrm{C}_N X'^\beta \mathrm{E}_\beta \mathrm{C}_N^+) = \det(X'^\beta \mathrm{E}_\beta)$. Поэтому

$$\det \boldsymbol{X} = \det(X^\alpha \mathrm{E}_\alpha) = \det(X'^\alpha \mathrm{E}_\alpha). \tag{27}$$

С другой стороны,

$$\det(X^\alpha \mathrm{E}_\alpha) = G_{\alpha\beta\ldots\gamma} \underbrace{X^\alpha X^\beta \cdots X^\gamma}_{N \text{ множителей}}, \tag{28}$$

где действительные коэффициенты $G_{\alpha\beta\ldots\gamma}$ полностью определяются выбором базиса $\{\boldsymbol{E}_0, \ldots, \boldsymbol{E}_{N^2-1}\}$ в $\mathrm{Herm}(N)$. В силу (27) и (28)

$$\det \boldsymbol{X} = G_{\alpha\beta\ldots\gamma} X^\alpha X^\beta \cdots X^\gamma = G_{\alpha\beta\ldots\gamma} X'^\alpha X'^\beta \cdots X'^\gamma, \tag{29}$$

т. е. $\det \boldsymbol{X}$ *форминвариантен* относительно преобразований из группы $\mathrm{FL}(N^2, \mathbb{R})$. Отметим, что (29) справедливо для *любого* базиса $\{\boldsymbol{E}'_0, \ldots, \boldsymbol{E}'_{N^2-1}\}$, элементы которого связаны с элементами базиса $\{\boldsymbol{E}_0, \ldots, \boldsymbol{E}_{N^2-1}\}$ соотношениями (13).

Обозначая $\det \boldsymbol{X}$ через $\boldsymbol{X}^N$ и используя (28), получаем (в базисе $\{\boldsymbol{E}_0, \ldots, \boldsymbol{E}_{N^2-1}\}$)

$$\boldsymbol{X}^N = G_{\alpha\beta\ldots\gamma} X^\alpha X^\beta \cdots X^\gamma, \tag{30}$$

где $G_{\alpha\beta\ldots\gamma}$ симметричны по всем индексам и не зависят от выбора канонического базиса в $\mathbb{FS}^N$. Таким образом, (30) корректно определяет на $\mathrm{Herm}(N)$ структуру N^2*-мерного плоского финслерова пространства*, так что $\boldsymbol{X}^N$ представляет собой N-ую степень финслеровой длины вектора $\boldsymbol{X} \in \mathrm{Herm}(N)$ [10]. Следует отметить, что однородная алгебраическая форма (30), вообще говоря, не является положительно определенной.

В следующих двух разделах мы проиллюстрируем изложенный формализм простейшими примерами финслеровых 2- и 3-спиноров.

3. Финслеровы 2-спиноры

Рассмотрим применение общего формализма при $N = 2$. В этом случае функционал (1) является обычным симплектическим скалярным умножением на $\mathbb{FS}^2$. Значит $\mathbb{FS}^2$ изоморфно пространству $\mathbb{S}^2$ стандартных 2-спиноров [11], так что финслеровы

2-спиноры *совпадают* с вейлевскими 2-спинорами. Ниже мы воспроизведем некоторые существенные сведения о 2-спинорах, которые понадобятся в следующем разделе статьи.

Прежде всего, для любых $\{\boldsymbol{\epsilon}_1, \boldsymbol{\epsilon}_2\}$, $\{\boldsymbol{\epsilon}'_1, \boldsymbol{\epsilon}'_2\} \in \mathbf{E}(\mathbb{FS}^2)$ и $\boldsymbol{\xi} = \xi^a \boldsymbol{\epsilon}_a = \xi'^b \boldsymbol{\epsilon}'_b \in \mathbb{FS}^2$ из (4) вытекают соотношения

$$\xi'^a = d^a_b \xi^b, \tag{31}$$

где ξ'^a, $\xi^b \in \mathbb{C}$, $c^a_b d^b_c = \delta^a_c$, а a, b, $c = 1, 2$. Само собой разумеется, что C_2, $\mathrm{D}_2 \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ и $\mathrm{D}_2 = \mathrm{C}_2^{-1}$ в обозначениях $\mathrm{C}_2 = \|c^a_b\|$, $\mathrm{D}_2 = \|d^a_b\|$. Аналогичным образом из (6) получаем формулу

$$[\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}] = \varepsilon_{ab}\, \xi^a \eta^b = \xi^1 \eta^2 - \xi^2 \eta^1 \tag{32}$$

для скалярного произведения произвольных 2-спиноров $\boldsymbol{\xi}$ и $\boldsymbol{\eta}$ относительно канонического базиса $\{\boldsymbol{\epsilon}_1, \boldsymbol{\epsilon}_2\} \in \mathbf{E}(\mathbb{FS}^2)$.

Положим

$$\mathrm{E}^\alpha = \frac{1}{2}\sigma^\alpha, \qquad \mathrm{E}_\beta = \sigma_\beta, \tag{33}$$

где α, $\beta = 0, 1, 2, 3$, $\sigma^\alpha = \sigma_\alpha$, а

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{34}$$

— единичная матрица и три матрицы Паули. Поскольку $\mathrm{Tr}(\sigma^\alpha \sigma_\beta) = 2\delta^\alpha_\beta$, такой выбор гарантирует выполнение условий (14). Из (13), (21) и (24) следует, что

$$X'^\alpha = L(\mathrm{D}_2)^\alpha_\beta X^\beta \tag{35}$$

для любого 4-вектора $\boldsymbol{X} \in \mathrm{Herm}(2)$. Используя (19), (33) и (34), получаем

$$L(\mathrm{D}_2)^\alpha_\beta = \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}(\sigma^\alpha \mathrm{D}_2 \sigma_\beta \mathrm{D}_2^+) \tag{36}$$

или, в явном виде,

$$\begin{aligned}
L(\mathrm{D}_2)^0_0 &= \frac{1}{2}(d^1_1\overline{d^{\dot 1}_{\dot 1}} + d^1_2\overline{d^{\dot 1}_{\dot 2}} + d^2_1\overline{d^{\dot 2}_{\dot 1}} + d^2_2\overline{d^{\dot 2}_{\dot 2}}), & L(\mathrm{D}_2)^0_1 &= \frac{1}{2}(d^1_1\overline{d^{\dot 1}_{\dot 2}} + d^2_1\overline{d^{\dot 2}_{\dot 2}} + d^1_2\overline{d^{\dot 1}_{\dot 1}} + d^2_2\overline{d^{\dot 2}_{\dot 1}}),\\
L(\mathrm{D}_2)^0_2 &= \frac{i}{2}(d^1_2\overline{d^{\dot 1}_{\dot 1}} + d^2_2\overline{d^{\dot 2}_{\dot 1}} - d^1_1\overline{d^{\dot 1}_{\dot 2}} - d^2_1\overline{d^{\dot 2}_{\dot 2}}), & L(\mathrm{D}_2)^0_3 &= \frac{1}{2}(d^1_1\overline{d^{\dot 1}_{\dot 1}} + d^2_1\overline{d^{\dot 2}_{\dot 1}} - d^1_2\overline{d^{\dot 1}_{\dot 2}} - d^2_2\overline{d^{\dot 2}_{\dot 2}}),\\
L(\mathrm{D}_2)^1_0 &= \frac{1}{2}(d^1_1\overline{d^{\dot 2}_{\dot 1}} + d^2_1\overline{d^{\dot 1}_{\dot 1}} + d^1_2\overline{d^{\dot 2}_{\dot 2}} + d^2_2\overline{d^{\dot 1}_{\dot 2}}), & L(\mathrm{D}_2)^1_1 &= \frac{1}{2}(d^1_1\overline{d^{\dot 2}_{\dot 2}} + d^2_1\overline{d^{\dot 1}_{\dot 2}} + d^1_2\overline{d^{\dot 2}_{\dot 1}} + d^2_2\overline{d^{\dot 1}_{\dot 1}}),\\
L(\mathrm{D}_2)^1_2 &= \frac{i}{2}(d^1_2\overline{d^{\dot 2}_{\dot 1}} + d^2_2\overline{d^{\dot 1}_{\dot 1}} - d^1_1\overline{d^{\dot 2}_{\dot 2}} - d^2_1\overline{d^{\dot 1}_{\dot 2}}), & L(\mathrm{D}_2)^1_3 &= \frac{1}{2}(d^1_1\overline{d^{\dot 2}_{\dot 1}} + d^2_1\overline{d^{\dot 1}_{\dot 1}} - d^1_2\overline{d^{\dot 2}_{\dot 2}} - d^2_2\overline{d^{\dot 1}_{\dot 2}}),\\
L(\mathrm{D}_2)^2_0 &= \frac{i}{2}(d^1_1\overline{d^{\dot 2}_{\dot 1}} - d^2_1\overline{d^{\dot 1}_{\dot 1}} + d^1_2\overline{d^{\dot 2}_{\dot 2}} - d^2_2\overline{d^{\dot 1}_{\dot 2}}), & L(\mathrm{D}_2)^2_1 &= \frac{i}{2}(d^1_1\overline{d^{\dot 2}_{\dot 2}} - d^2_1\overline{d^{\dot 1}_{\dot 2}} + d^1_2\overline{d^{\dot 2}_{\dot 1}} - d^2_2\overline{d^{\dot 1}_{\dot 1}}),\\
L(\mathrm{D}_2)^2_2 &= \frac{1}{2}(d^1_1\overline{d^{\dot 2}_{\dot 2}} + d^2_2\overline{d^{\dot 1}_{\dot 1}} - d^1_2\overline{d^{\dot 2}_{\dot 1}} - d^2_1\overline{d^{\dot 1}_{\dot 2}}), & L(\mathrm{D}_2)^2_3 &= \frac{i}{2}(d^1_1\overline{d^{\dot 2}_{\dot 1}} - d^2_1\overline{d^{\dot 1}_{\dot 1}} - d^1_2\overline{d^{\dot 2}_{\dot 2}} + d^2_2\overline{d^{\dot 1}_{\dot 2}}),\\
L(\mathrm{D}_2)^3_0 &= \frac{1}{2}(d^1_1\overline{d^{\dot 1}_{\dot 1}} - d^2_1\overline{d^{\dot 2}_{\dot 1}} + d^1_2\overline{d^{\dot 1}_{\dot 2}} - d^2_2\overline{d^{\dot 2}_{\dot 2}}), & L(\mathrm{D}_2)^3_1 &= \frac{1}{2}(d^1_1\overline{d^{\dot 1}_{\dot 2}} - d^2_1\overline{d^{\dot 2}_{\dot 2}} + d^1_2\overline{d^{\dot 1}_{\dot 1}} - d^2_2\overline{d^{\dot 2}_{\dot 1}}),\\
L(\mathrm{D}_2)^3_2 &= \frac{i}{2}(d^1_2\overline{d^{\dot 1}_{\dot 1}} - d^2_2\overline{d^{\dot 2}_{\dot 1}} - d^1_1\overline{d^{\dot 1}_{\dot 2}} + d^2_1\overline{d^{\dot 2}_{\dot 2}}), & L(\mathrm{D}_2)^3_3 &= \frac{1}{2}(d^1_1\overline{d^{\dot 1}_{\dot 1}} - d^1_2\overline{d^{\dot 1}_{\dot 2}} - d^2_1\overline{d^{\dot 2}_{\dot 1}} + d^2_2\overline{d^{\dot 2}_{\dot 2}}).
\end{aligned} \tag{36a}$$

Кроме того, из (28), (30), (33) и (34) следует

$$\boldsymbol{X}^2 = G_{\alpha\beta} X^\alpha X^\beta = (X^0)^2 - (X^1)^2 - (X^2)^2 - (X^3)^2. \tag{37}$$

В силу (29) и (37) Herm(2) изоморфно пространству Минковского, $\mathrm{FL}(4,\mathbb{R}) = \mathrm{O}_+^\uparrow(1,3)$, а (22) совпадает с известным эпиморфизмом $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \to \mathrm{O}_+^\uparrow(1,3)$ [11].

Пусть $\mathbb{FS}^2_\mathbb{R}$ — овеществление $\mathbb{FS}^2$ (исчерпывающая информация об общей процедуре овеществления векторных пространств содержится в книге [12]). Тогда $\mathbb{FS}^2_\mathbb{R}$ является 4-мерным векторным пространством над полем $\mathbb{R}$, а его элементы — майорановскими 4-спинорами. Действительно, полагая

$$\xi^1 = \xi^1_\mathbb{R} - i\xi^2_\mathbb{R}, \quad \xi^2 = \xi^3_\mathbb{R} - i\xi^4_\mathbb{R}, \quad \xi'^1 = \xi'^1_\mathbb{R} - i\xi'^2_\mathbb{R}, \quad \xi'^2 = \xi'^3_\mathbb{R} - i\xi'^4_\mathbb{R}, \tag{38}$$

получаем

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\xi} &= \xi^a \boldsymbol{\epsilon}_a = \xi^1_\mathbb{R}\boldsymbol{\epsilon}_1 - \xi^2_\mathbb{R} i\boldsymbol{\epsilon}_1 + \xi^3_\mathbb{R}\boldsymbol{\epsilon}_2 - \xi^4_\mathbb{R} i\boldsymbol{\epsilon}_2, \\ \boldsymbol{\xi} &= \xi'^b \boldsymbol{\epsilon}'_b = \xi'^1_\mathbb{R}\boldsymbol{\epsilon}'_1 - \xi'^2_\mathbb{R} i\boldsymbol{\epsilon}'_1 + \xi'^3_\mathbb{R}\boldsymbol{\epsilon}'_2 - \xi'^4_\mathbb{R} i\boldsymbol{\epsilon}'_2 \end{aligned} \tag{39}$$

для любых $\{\boldsymbol{\epsilon}_1, \boldsymbol{\epsilon}_2\}$, $\{\boldsymbol{\epsilon}'_1, \boldsymbol{\epsilon}'_2\} \in \mathbf{E}(\mathbb{FS}^2)$ и $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{FS}^2$; здесь $\xi^i_\mathbb{R}$, $\xi'^j_\mathbb{R} \in \mathbb{R}$ (i, $j = 1, 2, 3, 4$). Из (39) следует, что $\{\boldsymbol{\epsilon}_1, -i\boldsymbol{\epsilon}_1, \boldsymbol{\epsilon}_2, -i\boldsymbol{\epsilon}_2\}$ и $\{\boldsymbol{\epsilon}'_1, -i\boldsymbol{\epsilon}'_1, \boldsymbol{\epsilon}'_2, -i\boldsymbol{\epsilon}'_2\}$ являются базисами в $\mathbb{FS}^2_\mathbb{R}$. Более того, подстановка (38) в (31) показывает, что

$$\xi'^i_\mathbb{R} = M(\mathrm{D}_2)^i_j \xi^j_\mathbb{R}, \tag{40}$$

где $M(\mathrm{D}_2)^i_j \in \mathbb{R}$ имеют вид

$$\begin{aligned}
M(\mathrm{D}_2)^1_1 &= \frac{1}{2}(\overline{d^1_1} + d^1_1), & M(\mathrm{D}_2)^3_1 &= \frac{1}{2}(\overline{d^2_1} + d^2_1), \\
M(\mathrm{D}_2)^1_2 &= \frac{i}{2}(\overline{d^1_1} - d^1_1), & M(\mathrm{D}_2)^3_2 &= \frac{i}{2}(\overline{d^2_1} - d^2_1), \\
M(\mathrm{D}_2)^1_3 &= \frac{1}{2}(\overline{d^1_2} + d^1_2), & M(\mathrm{D}_2)^3_3 &= \frac{1}{2}(\overline{d^2_2} + d^2_2), \\
M(\mathrm{D}_2)^1_4 &= \frac{i}{2}(\overline{d^1_2} - d^1_2), & M(\mathrm{D}_2)^3_4 &= \frac{i}{2}(\overline{d^2_2} - d^2_2), \\
M(\mathrm{D}_2)^2_1 &= \frac{i}{2}(d^1_1 - \overline{d^1_1}), & M(\mathrm{D}_2)^4_1 &= \frac{i}{2}(d^2_1 - \overline{d^2_1}), \\
M(\mathrm{D}_2)^2_2 &= \frac{1}{2}(d^1_1 + \overline{d^1_1}), & M(\mathrm{D}_2)^4_2 &= \frac{1}{2}(d^2_1 + \overline{d^2_1}), \\
M(\mathrm{D}_2)^2_3 &= \frac{i}{2}(d^1_2 - \overline{d^1_2}), & M(\mathrm{D}_2)^4_3 &= \frac{i}{2}(d^2_2 - \overline{d^2_2}), \\
M(\mathrm{D}_2)^2_4 &= \frac{1}{2}(d^1_2 + \overline{d^1_2}), & M(\mathrm{D}_2)^4_4 &= \frac{1}{2}(d^2_2 + \overline{d^2_2}).
\end{aligned} \tag{41}$$

Очевидно, матричная группа $\mathrm{Maj}(4) = \{\|M(\mathrm{D}_2)^i_j\| \mid \mathrm{D}_2 \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})\}$ изоморфна группе $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$. Наконец, используя $\eta^1 = \eta^1_\mathbb{R} - i\eta^2_\mathbb{R}$, $\eta^2 = \eta^3_\mathbb{R} - i\eta^4_\mathbb{R}$ и (38), можно переписать (32) как

$$[\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}] = \overline{\xi}\gamma^5\eta - i\overline{\xi}\eta,$$

где $\xi = (\xi^1_\mathbb{R}, \xi^2_\mathbb{R}, \xi^3_\mathbb{R}, \xi^4_\mathbb{R})^\top$ и $\eta = (\eta^1_\mathbb{R}, \eta^2_\mathbb{R}, \eta^3_\mathbb{R}, \eta^4_\mathbb{R})^\top$ — матрицы-столбцы, знак “$\top$” обозначает транспонирование, $\overline{\xi} = \xi^\top\gamma^0$ — матрица-строка, а

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix}, \quad \gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix},$$

$$\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = \gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{42}$$

— матрицы Дирака в майорановском представлении [13], которые удовлетворяют стандартным условиям $\gamma^\alpha\gamma^\beta + \gamma^\beta\gamma^\alpha = 2g^{\alpha\beta}$ с $\|g^{\alpha\beta}\| = \mathrm{diag}\,(1, -1, -1, -1)$.

4. Финслеровы 3-спиноры

В этом разделе мы рассмотрим нетривиальный случай финслеровых N-спиноров при $N = 3$. Кроме того, здесь будет изучено алгебраическое строение группы $\mathrm{FL}(9, \mathbb{R})$.

Начнем со следующего замечания. Для любых $\{\boldsymbol{\epsilon}_1, \boldsymbol{\epsilon}_2, \boldsymbol{\epsilon}_3\}$, $\{\boldsymbol{\epsilon}'_1, \boldsymbol{\epsilon}'_2, \boldsymbol{\epsilon}'_3\} \in \mathbf{E}(\mathbb{FS}^3)$ и $\boldsymbol{\xi} = \xi^a \boldsymbol{\epsilon}_a = \xi'^b \boldsymbol{\epsilon}'_b \in \mathbb{FS}^3$ из (4) вытекают соотношения $\xi'^a = d^a_b \xi^b$, где ξ'^a, $\xi^b \in \mathbb{C}$, $c^a_b d^b_c = \delta^a_c$, а a, b, $c = 1$, 2, 3. Ясно, что C_3, $\mathrm{D}_3 \in \mathrm{SL}(3, \mathbb{C})$ и $\mathrm{D}_3 = \mathrm{C}_3^{-1}$ в обозначениях $\mathrm{C}_3 = \|c^a_b\|$, $\mathrm{D}_3 = \|d^a_b\|$. Аналогичным образом из (6) получаем формулу $[\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\zeta}] = \varepsilon_{abc}\, \xi^a \eta^b \zeta^c$ для скалярного 3-произведения произвольных финслеровых 3-спиноров $\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\eta}$ и $\boldsymbol{\zeta}$ относительно канонического базиса $\{\boldsymbol{\epsilon}_1, \boldsymbol{\epsilon}_2, \boldsymbol{\epsilon}_3\} \in \mathbf{E}(\mathbb{FS}^3)$.

По аналогии с предыдущим разделом положим

$$\mathrm{E}^A = \frac{1}{2}\lambda^A, \quad \mathrm{E}_B = \lambda_B, \tag{43}$$

где $A, B = 0, 1, \ldots, 8$, $\lambda^A = \lambda_A$ $(A \neq 8)$, $\lambda^8 = 2\lambda_8$, а

$$\lambda_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_8 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{44}$$

$(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_7$ совпадают с матрицами Гелл-Манна). Поскольку $\mathrm{Tr}(\lambda^A \lambda_B) = 2\delta^A_B$, выбор (43) обеспечивает выполнение условий (14). Из (13), (21) и (24) следует, что

$$X'^A = L(\mathrm{D}_3)^A_B X^B \tag{45}$$

для любого 9-вектора $\boldsymbol{X} \in \mathrm{Herm}(3)$. Используя (19), (43) и (44), получаем

$$L(\mathrm{D}_3)^A_B = \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}(\lambda^A \mathrm{D}_3 \lambda_B \mathrm{D}_3^+). \tag{46}$$

Кроме того, из (28), (30), (43) и (44) вытекает формула

$$\boldsymbol{X}^3 = G_{AB\Gamma} X^A X^B X^\Gamma = [(X^0)^2 - (X^1)^2 - (X^2)^2 - (X^3)^2] X^8$$

$$
\begin{aligned}
&- X^0[(X^4)^2 + (X^5)^2 + (X^6)^2 + (X^7)^2] \\
&+ 2X^1[X^4X^6 + X^5X^7] + 2X^2[X^5X^6 - X^4X^7] \\
&+ X^3[(X^4)^2 + (X^5)^2 - (X^6)^2 - (X^7)^2].
\end{aligned} \tag{47}
$$

В силу (29) финслеров “скалярный куб” (47) 9-вектора $\boldsymbol{X} \in \mathrm{Herm}(3)$ форминвариантен относительно преобразований (45) – (46) из группы $\mathrm{FL}(9, \mathbb{R})$.

Более или менее ясно, что любая матрица $\widehat{\mathrm{D}}_3 \in \mathrm{SL}(3, \mathbb{C})$ с $\hat{d}_3^3 \neq 0$ может быть представлена в виде произведения

$$
\widehat{\mathrm{D}}_3 = \mathrm{D}_3^{(1)}\mathrm{D}_3^{(2)}\mathrm{D}_3^{(3)}\mathrm{D}_3^{(4)}, \tag{48}
$$

где

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{D}_3^{(1)} = \begin{pmatrix} d_1^1 & d_2^1 & 0 \\ d_1^2 & d_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{D}_3^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & d_3^1 \\ 0 & 1 & d_3^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
&\mathrm{D}_3^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ d_1^3 & d_2^3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{D}_3^{(4)} = \begin{pmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & d^{-2} \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{49}
$$

также являются $\mathrm{SL}(3, \mathbb{C})$-матрицами. Используя формулы (21), (48) и (49), получаем разложение

$$
L(\widehat{\mathrm{D}}_3) = L(\mathrm{D}_3^{(1)})L(\mathrm{D}_3^{(2)})L(\mathrm{D}_3^{(3)})L(\mathrm{D}_3^{(4)}) \tag{50}
$$

соответствующей $\mathrm{FL}(9, \mathbb{R})$-матрицы $L(\widehat{\mathrm{D}}_3)$. Таким образом, (50) сводит общее $\mathrm{FL}(9, \mathbb{R})$-преобразование $X'^A = L(\widehat{\mathrm{D}}_3)^A_B X^B$ к композиции четырех более простых преобразований, индуцированных матрицами (49). Явное описание этих $\mathrm{FL}(9, \mathbb{R})$-преобразований будет дано ниже.

Пусть $\xi^i_{\mathbb{R}} = X^{3+i}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$. Тогда, с помощью (45) и (46), $\mathrm{FL}(9, \mathbb{R})$-преобразование $X'^A = L(\mathrm{D}_3^{(1)})^A_B X^B$ записывается в следующей форме

$$
\begin{aligned}
X'^\alpha &= L(\mathrm{D}_2)^\alpha_\beta X^\beta, \\
\xi'^i_{\mathbb{R}} &= M(\mathrm{D}_2)^i_j \xi^j_{\mathbb{R}}, \\
X'^8 &= X^8,
\end{aligned} \tag{51}
$$

где $\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3$, а $i, j = 1, 2, 3, 4$. Нетрудно видеть, что первая строка в (51) совпадает с преобразованием Лоренца (35) – (36a) 4-вектора X^α, а вторая строка — с преобразованием (40) – (41) майорановского 4-спинора $\xi^i_{\mathbb{R}}$. Поэтому преобразования (51) образуют 6-параметрическую неабелеву подгруппу группы $\mathrm{FL}(9, \mathbb{R})$.

Пусть $d_3^1 = \varepsilon^1 - i\varepsilon^2$, $d_3^2 = \varepsilon^3 - i\varepsilon^4$ — параметризация комплексной матрицы $\mathrm{D}_3^{(2)}$ из (49). Вводя действительные матрицы-столбцы $\varepsilon = (\varepsilon^1, \varepsilon^2, \varepsilon^3, \varepsilon^4)^\top$, $\xi = (X^4, X^5, X^6, X^7)^\top$ и используя (42), (45), (46), запишем $\mathrm{FL}(9, \mathbb{R})$-преобразование $X'^A = L(\mathrm{D}_3^{(2)})^A_B X^B$ как

$$
\begin{aligned}
X'^\alpha &= X^\alpha + \bar{\varepsilon}\gamma^\alpha\xi + \tfrac{1}{2}\bar{\varepsilon}\gamma^\alpha\varepsilon X^8, \\
\xi' &= \xi + \varepsilon X^8, \\
X'^8 &= X^8,
\end{aligned} \tag{52}
$$

где $\alpha = 0, 1, 2, 3$, а $\bar{\varepsilon} = \varepsilon^\top\gamma^0$. Поскольку ε^1, ε^2, ε^3, $\varepsilon^4 \in \mathbb{R}$, преобразования (52) образуют 4-параметрическую абелеву подгруппу группы $\mathrm{FL}(9, \mathbb{R})$.

Пусть $d^3_1 = \varkappa^3 - i\varkappa^4$, $d^3_2 = -\varkappa^1 + i\varkappa^2$ — параметризация комплексной матрицы $\mathrm{D}^{(3)}_3$ из (49). Вводя действительные матрицы-столбцы $\varkappa = (\varkappa^1, \varkappa^2, \varkappa^3, \varkappa^4)^\top$, $\xi = (X^4, X^5, X^6, X^7)^\top$ и используя (42), (45), (46), запишем $\mathrm{FL}(9, \mathbb{R})$-преобразование $X'^A = L(\mathrm{D}^{(3)}_3)^A_B X^B$ как

$$
\begin{aligned}
X'^\alpha &= X^\alpha,\\
\xi' &= -ig_{\alpha\beta}\gamma^\alpha\varkappa X^\beta + \xi,\\
X'^8 &= g_{\alpha\beta}\overline{\varkappa}\gamma^\alpha\varkappa X^\beta + 2i\overline{\varkappa}\xi + X^8,
\end{aligned}
\tag{53}
$$

где $\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3$, $\overline{\varkappa} = \varkappa^\top\gamma^0$, а $\|g_{\alpha\beta}\| = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$. Поскольку $\varkappa^1$, $\varkappa^2$, $\varkappa^3$, $\varkappa^4 \in \mathbb{R}$, преобразования (53) образуют 4-параметрическую абелеву подгруппу группы $\mathrm{FL}(9, \mathbb{R})$.

Пусть $d = |d|e^{i\varphi} \neq 0$ — параметризация комплексной матрицы $\mathrm{D}^{(4)}_3$ из (49). Используя (45) и (46), представим $\mathrm{FL}(9, \mathbb{R})$-преобразование $X'^A = L(\mathrm{D}^{(4)}_3)^A_B X^B$ в следующей форме

$$
\begin{aligned}
X'^\alpha &= |d|^2 X^\alpha,\\
\begin{pmatrix} X'^4 \\ X'^5 \end{pmatrix} &= |d|^{-1}\begin{pmatrix} \cos 3\varphi & \sin 3\varphi \\ -\sin 3\varphi & \cos 3\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X^4 \\ X^5 \end{pmatrix},\\
\begin{pmatrix} X'^6 \\ X'^7 \end{pmatrix} &= |d|^{-1}\begin{pmatrix} \cos 3\varphi & \sin 3\varphi \\ -\sin 3\varphi & \cos 3\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X^6 \\ X^7 \end{pmatrix},\\
X'^8 &= |d|^{-4} X^8,
\end{aligned}
\tag{54}
$$

где $\alpha = 0, 1, 2, 3$. Поскольку $|d| > 0$ и $\varphi \in \mathbb{R}$, преобразования (54) образуют 2-параметрическую абелеву подгруппу группы $\mathrm{FL}(9, \mathbb{R})$.

Таким образом, все четыре $\mathrm{FL}(9, \mathbb{R})$-преобразования, отвечающие матрицам разложения (50), описаны явно в (51), (52), (53) и (54). Наконец, в использованных выше обозначениях, можно переписать (47) как

$$
\boldsymbol{X}^3 = g_{\alpha\beta}X^\alpha X^\beta X^8 - g_{\alpha\beta}X^\alpha\overline{\xi}\gamma^\beta\xi.
$$

Заключение

В этой статье мы рассмотрели алгебраические аспекты теории финслеровых N-спиноров. Были сформулированы общие определения финслерова N-спинора и финслерова N-спинтензора произвольной валентности.

Показано, что эрмитово-симметричные финслеровы N-спинтензоры валентности $\left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]$ являются векторами N^2-мерного плоского финслерова пространства $\mathrm{Herm}(N)$. Метрика на $\mathrm{Herm}(N)$ характеризуется однородной алгебраической формой N-ой степени (30).

Мы также построили обобщение (22) хорошо известного группового эпиморфизма $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \to \mathrm{O}^\uparrow_+(1, 3)$ и обнаружили, что его ядро состоит из N скалярных матриц (23). В частности, оказалось, что финслеровы 2-спиноры совпадают со стандартными вейлевскими 2-спинорами. В этой связи пришлось напомнить некоторые существенные сведения о майорановских 4-спинорах.

Наконец, мы рассмотрели свойства финслеровых 3-спиноров и дали подробное описание алгебраического строения группы $\mathrm{FL}(9, \mathbb{R})$, преобразования которой сохраняют финслерову метрику (47).

Обратим внимание, что в линейном по ε и $\varkappa$ приближении преобразования (52) и (53) весьма напоминают преобразования $N = 1$ суперсимметрии. Отличие заключается лишь в том, что в нашем случае элементы столбцов ε и $\varkappa$ являются комплексными, а не грассмановыми числами.

References

[1] Cartan É. (1913). Les groupes projectifs, qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane, *Bulletin de la Société Mathématique de France*, **41**, 53–96.

[2] Pauli W. (1927). Zur Quantenmechanik des magnetischen Elektrons, *Zeitschrift für Physik*, **43**, 601–623.

[3] Dirac P. A. M. (1928). The quantum theory of the electron, *Proceedings of the Royal Society (London)*, **A117**, 610–624.

[4] Brauer R. and Weyl H. (1935). Spinors in n dimensions, *American Journal of Mathematics*, **57**, 425–449.

[5] Cartan É. (1938). *Leçons sur la théorie des spineurs.* Actualités scientifiques et industrielles, Paris.

[6] Finkelstein D. (1986). Hyperspin and hyperspace, *Physical Review Letters*, **56**, 1532–1533.

[7] Finkelstein D., Finkelstein S. R., and Holm C. (1986). Hyperspin Manifolds, *International Journal of Theoretical Physics*, **25**, 441–463.

[8] Владимиров Ю. С. (2008). *Основания физики.* М.: БИНОМ. Лаборатория знаний.

[9] Соловьев А. В. (1996). *N-спинорное исчисление в реляционной теории пространства-времени.* Дисс. канд. физ.-мат. наук: 01.04.02, Москва.

[10] Finsler P. (1918). *Über Kurven und Flächen in allgemeinen Räumen.* Dissertation, Göttingen.

[11] Пенроуз Р., Риндлер В. (1987). *Спиноры и пространство-время. Два-спинорное исчисление и релятивистские поля.* М.: Мир.

[12] Кострикин А. И., Манин Ю. И. (1986). *Линейная алгебра и геометрия.* М.: Наука.

[13] Majorana E. (1937). Teoria simmetrica dell'elettrone e del positrone, *Nuovo Cimento*, **14**, 171–184.