ФИНСЛЕРОВА ГЕОМЕТРИЯ В РЕЛЯЦИОННОМ ПОДХОДЕ К ФИЗИКЕ

Ю. С. Владимиров

Физический факультет МГУ

Рассмотрен класс финслеровых геометрий, соответствующих многоточечным геометриям, наиболее близким геометрии Бервальда-Моора. Показано, что в реляционом подходе к физике, основанном на идее теории прямого межчастичного взаимодействия и на теории систем отношений, возникают свойства многоточечной геометрии в ряде ключевых положений теории. Это имеет место в реляционной формулировке как классической физики, так и физики микромира.

1 Введение

Имеется ряд пониманий финслеровой геометрии, которым соответствуют различные каналы исследований. Одним из таковых являются исследования в рамках геометрии Бервальда–Моора, метрика задается не квадратично, а выражением четвертой степени по смещениям (см. [1]). Это направление ближе всего к так называемым многоточечным геометриям, где метрика определяется не для двух, а для трех, четырех и т. д. точек [2]. Именно в таком духе здесь будет пониматься финслерова геометрия.

Реляционный подход к физике означает использование концепции дальнодействия, которая опирается не на готовое пространственно-временное многообразие, а на отношения между элементами, в качестве которых могут выступать геометрические точки, физические события или физические лагранжианы (действия) между взаимодействующими частицами [3]. Наиболее известными теориями такого рода являются теории прямого межчастичного взаимодействия Фоккера–Фейнмана [4, 5].

Сопоставление идей многоточечных геометрий и концепции дальнодействия в совокупности с развиваемой в нашей группе теории систем отношений позволяет выявить ряд любопытных обстоятельств и закономерностей.

1. Прежде всего, следует отметить, что в основе теории систем отношений лежит понятие закона системы отношений, который записывается для некоторого числа (ранга) элементов (точек), (парные) отношения между которыми входят в закон. Закон записывается в виде равенства нулю определителей из парных отношений между элементами.

2. Ранги закона фактически определяют размерность используемого аналога геометрии. Миноры определителей в формулировке закона характеризуют многоточечные понятия (отношения), которые возможны в рамках используемого аналога общепринятых геометрий.

3. Поскольку физики стремятся применить финслеровы и многоточечные геометрии для описания физических взаимодействий и новых следствий из них, следует подчеркнуть, что в реляционном подходе к классической физике присутствуют две системы отношений, что отражено в принципе Фоккера. Одной системы отношений (геометрии) недостаточно.

4. В реляционном подходе к физике микромира используются бинарные системы комплексных отношений, соответствующие общепринятой теории спиноров, причем для описания взаимодействий необходимо перейти к своеобразному бинарному многомерию, приводящему к теории финслеровых спиноров.

5. От бинарных систем комплексных отношений (бинарных геометрий) можно перейти к унарным (общепринятым) геометриям. При этом оказывается, что бинарное многомерие автоматически приводит к финслеровым (унарным) геометриям финслерова типа, в которых мероопределение имеет кубичный, четвертичный и т. д. характер, зависящий от ранга закона для бинарных систем комплексных отношений.

Данная работа посвящена демонстрации указанных обстоятельств и закономерностей многоточечности в реляционной формулировке физики.

2 Реляционный подход к классической физике

Начнем с напоминания основных понятий теории прямого межчастичного взаимодействия (action-at-a-distance) Фоккера–Фейнмана. В этой теории категория полей переносчиков взаимодействий исключается из числа исходных понятий: поля вводятся на некотором этапе развития теории, но лишь как вторичные вспомогательные понятия, строящиеся из характеристик частиц.

Теория прямого межчастичного *электромагнитного взаимодействия* Фоккера является упрощенным вариантом реляционной теории, в которой из всего мира выделяется пара взаимодействующих частиц. Обозначим две выделенные частицы символами 1 и 2. Ключевым понятием этой теории является классическое действие парного взаимодействия $S(1,2)$, которое представляется в виде

$$S^{(e)}_{int}(1,2) = -\frac{1}{c}\int\int j^{\mu}_{(1)} j_{(2)\mu}\delta(s^2(1,2))ds_1 ds_2, \qquad (1)$$

где $j^{\mu}_{(1)} = e_1 dx^{\mu}_1/ds_1$ – вектор 4-тока частицы с номером 1; ds_1, ds_2 – смещения вдоль мировых линий частиц; $\eta_{\mu\nu}$ – метрический тензор пространства-времени Минковского. Интегрирование производится вдоль мировых линий выделенных частиц. Поскольку в классической теории полагается, что каждая частица участвует в огромном количестве событий, то ее удобно апроксимировать в виде непрерывной мировой линии.

Под знаком интеграла в (1) стоят два инвариантных парных отношения, соответствующие двум обобщенным категориям. Слагаемое $j^{\mu}_{(1)} j_{(2)\mu}$ – скалярное произведение токов двух взаимодействующих частиц – характеризует токовое парное отношение. Выражение $s^2(1,2)$ во втором слагаемом под интегралом – квадрат интервала между точками на мировых линиях двух частиц – характеризует пространственно-временное отношение, а дельта-функция от нее представляется в виде

$$\delta(s^2(1,2)) = \delta(c^2 t^2_{12} - r^2_{12}) = \frac{1}{2|r_{12}|}\left[\delta(ct_{12} - r_{12}) + \delta(ct_{12} + r_{12})\right], \qquad (2)$$

где t_{12} и r_{12} – промежуток времени и расстояние между положениями взаимодействующих частиц.

Полное действие для системы взаимодействующих электрических зарядов в классической теории прямого межчастичного электромагнитного взаимодействия записывается с участием действия <свободных> частиц S_0 и S_{int} – всех возможных парных взаимодействий.

Поясним, как в теории прямого межчастичного взаимодействия можно ввести вторичные (вспомогательные) понятия, соответствующие потенциалам и напряженностям электромагнитного поля. Для этого из суммарного действия всех заряженных частиц мира, следует выделить одну частицу, например с номером $i = 1$, и записать для нее действие в более привычной форме

$$S^{(e)}_1 = -m_1 c\int ds_1 - \frac{1}{c}\sum_{k\neq 1}\int j^{\mu}_{(1)} A_{\mu}(1,k) ds_1, \qquad (3)$$

где введено обозначение для отдельного вклада

$$A_\mu(1,k) = \int j_{(k)\mu}\delta(s^2(1,k))ds_k, \tag{4}$$

который интерпретируется как векторный электромагнитный потенциал, создаваемый зарядом e_k в том месте, где находится заряд e_1. Объединяя вклады всех заряженных частиц, получаем суммарный электромагнитный потенциал $A_\mu(1) = \sum_{k\neq 1} A_\mu(1,k)$ в месте нахождения заряда с номером 1 и действие для выделенной частицы:

$$S_1^{(e)} = -m_1 c\int ds_1 - \frac{1}{c}\int j^\mu_{(1)} A_\mu(1) ds_1, \tag{5}$$

формально совпадающее с общепринятым выражением в электродинамике Максвелла-Лоренца. Однако следует подчеркнуть, что *в теории прямого межчастичного взаимодействия бессмысленно говорить о потенциале в точках пространства-времени, где отсутствуют электрические заряды*.

Из действия (5) с помощью принципа наименьшего действия легко получить уравнение движения выделенной заряженной частицы, которое имеет знакомый вид.

Идеи дальнодействия были возрождены в 20-х годах XX века в работах К. Шварцшильда, Г. Тетроде и А. Д. Фоккера [4], благодаря которым концепция прямого межчастичного взаимодействия получила четкую математическую формулировку. Было показано, что теория электромагнетизма, построенная на ее основе, согласуется с теорией Максвелла для статических и стационарных электромагнитных явлений. Тогда же были выявлены и основные трудности, препятствовавшие развитию этой теории. Главная из них состояла в равноправности запаздывающих и опережающих взаимодействий (см. [5]).

В реляционном миропонимании осуществляется переход к двум обобщенным категориям: к пространственно-временным отношениям, которые заменяют первичные категории пространства-времени и частиц, и к категории токовых отношений, которая заменяет категорию полей переносчиков взаимодействий.

2.1 Пространственно-временные отношения

1. Отношение в геометрии – это не что иное, как *метрика (расстояния)*. Однако в современном изложении геометрии, как правило, исходят из координатной системы в многообразии той или иной размерности, а затем через разности координат двух точек задаются расстояния (метрика). Но возможен и другой ход рассуждений: можно начинать с расстояний, – парных отношений между точками, – а затем уже из них получать координаты и все другие понятия.

2. С некоторыми фрагментами переформулировки геометрии в терминах расстояний встречается каждый школьник. Известно определение площади треугольника через половину произведения основания на высоту. Но можно определить его площадь исключительно через расстояния (отношения) между его вершинами. Пусть его вершины обозначаются буквами i, j, k, а расстояния между ними (длины сторон) есть l_{ik}, l_{ij}, l_{jk}. Тогда квадрат площади треугольника S^2_{ijk} находится по формуле Герона

$$S^2_{ijk} = \frac{1}{16}(l_{ik}+l_{ij}+l_{kj})(l_{ik}+l_{ij}-l_{kj})(l_{ik}-l_{ij}+l_{kj})(-l_{ik}+l_{ij}+l_{kj}). \tag{6}$$

Полученное выражение можно переписать с помощью *определителя Кэли–Менгера* для трех точек (вершин треугольника),

$$16S_{ikj}^2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & l_{ik}^2 & l_{ij}^2 \\ 1 & l_{ki}^2 & 0 & l_{kj}^2 \\ 1 & l_{ji}^2 & l_{jk}^2 & 0 \end{vmatrix}. \tag{7}$$

3. Аналогичным образом через определитель Кэли–Менгера на четырех точках находится квадрат 3-мерного объема

$$288V_{ikjn}^2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & l_{ik}^2 & l_{ij}^2 & l_{in}^2 \\ 1 & l_{ki}^2 & 0 & l_{kj}^2 & l_{kn}^2 \\ 1 & l_{ji}^2 & l_{jk}^2 & 0 & l_{jn}^2 \\ 1 & l_{ni}^2 & l_{nk}^2 & l_{nj}^2 & 0 \end{vmatrix}. \tag{8}$$

Очевидно, что обращение в нуль определителя (8) означает, что четыре рассматриваемые точки лежат в одной плоскости.

Через расстояния между точками можно выразить привычные *пространственные координаты* геометрических точек, а через обобщенные определители Кэли–Менгера записывается ряд других геометрических выражений, например, углы между двумя лучами, исходящими из одной точки, значения двугранных и телесных углов и т. д. Таким образом, всю евклидову (и псевдоевклидову) геометрию можно переписать через расстояния.

4. В специальной и общей теориях относительности в качестве отношений вместо расстояний выступают **интервалы** s_{ik} между парами событий i и k. Для них соотношение (8) обобщается на случай уже 6 точек-событий. Выберем произвольные точки-события i, k, a, b, c, d (см. рис. 1), тогда квадраты интервалов между ними удовлетворяют условию

$$\Phi_{(6)} \equiv D_{ikabcd} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & s_{ik}^2 & s_{ia}^2 & s_{ib}^2 & s_{ic}^2 & s_{id}^2 \\ 1 & s_{ki}^2 & 0 & s_{ka}^2 & s_{kb}^2 & s_{kc}^2 & s_{kd}^2 \\ 1 & s_{ai}^2 & s_{ak}^2 & 0 & s_{ab}^2 & s_{ac}^2 & s_{ad}^2 \\ 1 & s_{bi}^2 & s_{bk}^2 & s_{ba}^2 & 0 & s_{bc}^2 & s_{bd}^2 \\ 1 & s_{ci}^2 & s_{ck}^2 & s_{ca}^2 & s_{cb}^2 & 0 & s_{cd}^2 \\ 1 & s_{di}^2 & s_{dk}^2 & s_{da}^2 & s_{db}^2 & s_{dc}^2 & 0 \end{vmatrix} = 0, \tag{9}$$

означающему, что 5-мерный объем образованного ими симплекса равен нулю.

Назовем это соотношение **законом классических пространственно-временных отношений** и будем его рассматривать в качестве первого ключевого постулата, характеризующего реляционный подход к теории относительности. На основе закона (9), т. е. из элементов и миноров определителя Кэли–Менгера строится вся теория пространственно-временных отношений. Назовем ключевые понятия (см. также [6]).

5. **Рангом закона** (9) назовем число точек-событий $r = 6$, для которых он записан. Очевидно, что ранг связан с общепринятым геометрическим понятием размерности n соотношением

$$n = r - 2 \quad \rightarrow \quad 4 = 6 - 2. \tag{10}$$

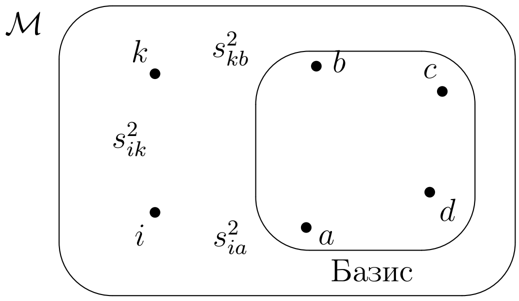

Рис. 1: Унарная система вещественных отношений ранга (6)

Фундаментальной симметрией пространственно-временных отношений назовем свойство любых 6 точек-событий удовлетворять закону (9). В реляционном подходе фундаментальная симметрия заменяет общепринятые симметрии пространства-времени Минковского, описываемые 10-параметрической группой Пуанкаре.

Базис пространственно-временных отношений задается 4 эталонными точками-событиями, относительно которых можно определить координаты всех точек-событий. Для избранного базиса из четырех элементов парные отношения полагаются раз навсегда заданными (на рис. 1 это элементы a, b, c, d. Базис системы отношений соответствует понятию тела отсчета в теории относительности.

6. **Четверку координат** точек-событий можно понимать как функцию парных отношений этого события относительно 4 точек-событий базиса. В этом легко убедиться, рассматривая закон (9) как уравнение для парного отношения s^2_{ik}, полагая остальные 4 элемента a, b, c, d эталонными. Тогда выделенное парное отношение будет являться функцией 4 парных отношений элемента i относительно 4 базисных элементов, 4 парных отношений элемента k относительно базиса и раз навсегда заданных парных отношений между базисными элементами. Таким образом, понятия координат не вводятся, а определяются из закона системы отношений. Как и в случае 3-мерного евклидова пространства их можно выразить через миноры определителя Кэли–Менгера в законе (9).

Легко убедиться, что парные отношения в законе (9) можно представить через параметры (декартовы координаты) точек-событий следующим образом

$$s^2_{ik} = (x^0_i - x^0_k)^2 - \sum_{l=1}^{3}(x^l_i - x^l_k)^2 \equiv \tau^2_{ik} - l^2_{ik}. \tag{11}$$

Очевидно, закон (9) выполняется тождественно при подстановке в него (11).

7. Можно было бы продолжить изложение теории пространственно-временных отношений в сугубо реляционном подходе. Однако ограничимся выводом, который имеет принципиально важное значение для дальнейшего изложения: *все геометрические понятия пространственно-временных отношений могут быть выражены через миноры из определителя Кэли–Менгера в законе (9). И обратно, все миноры закона могут быть наделены некоторым геометрическим смыслом.*

2.2 Электромагнетизм

1. Перейдем к рассмотрению закона для токовых отношений. Для этого положим, что тела состоят из идеализированных микрочастиц с одинаковыми по модулю зарядами. Постулируем что для событий с идеализированными микрочастицами, кроме закона пространственно-временных отношений (9), имеет место второй закон вида

$$\Phi_{(5)} = \begin{vmatrix} \tilde{e}^2 & \tilde{u}_{ik} & \tilde{u}_{ij} & \tilde{u}_{is} & \tilde{u}_{il} \\ \tilde{u}_{ki} & \tilde{e}^2 & \tilde{u}_{kj} & \tilde{u}_{ks} & \tilde{u}_{kl} \\ \tilde{u}_{ji} & \tilde{u}_{jk} & \tilde{e}^2 & \tilde{u}_{js} & \tilde{u}_{jl} \\ \tilde{u}_{si} & \tilde{u}_{sk} & \tilde{u}_{sj} & \tilde{e}^2 & \tilde{u}_{sl} \\ \tilde{u}_{li} & \tilde{u}_{lk} & \tilde{u}_{lj} & \tilde{u}_{ls} & \tilde{e}^2 \end{vmatrix} = 0. \tag{12}$$

От этого выражения можно перейти к определителю с единицами на главной диагонали посредством конформного преобразования всех параметров элементов. В таком случае закон (12) определяет 3-мерную геометрию Лобачевского, физически интерпретируемую как пространство скоростей.

Парные отношения в (12) представляются в виде скалярного произведения 4-мерных векторов, нормированных на универсальную константу: $\tilde{u}^{\mu}_{(i)}\tilde{u}_{(i)\mu} = \tilde{e}^2_{(i)}$. Закон (12) можно трактовать как равенство нулю определителя Грама для 5 элементов, описываемых равными по длине 4-мерными векторами.

2. Конформные факторы разных элементов $\tilde{e}_{(i)}$ в (12) могут отличаться друг от друга лишь знаком. Предлагается их интерпретировать (с точностью до размерного множителя) как электрические заряды элементарных микрочастиц, тогда

$$\tilde{u}_{ik} = \tilde{e}_i\tilde{e}_k u^{\mu}_{(i)} u_{(k)\mu}. \tag{13}$$

Таким образом, теперь парное отношение $\tilde{u}_{ik}$ уже принимает не кинематический, а динамический характер.

Легко видеть, что парное отношение $\tilde{u}_{ik}$ входит в подинтегральное выражение (1) для парного электромагнитного взаимодействия двух частиц. Однако имеется существенное отличие в значениях зарядов взаимодействующих частиц. Выражение в (1) записано для классических частиц с произвольными зарядами q_i, тогда как в (13) входят одинаковые по модулю заряды $\tilde{e}_i$ идеализированных микрочастиц.

3. Чтобы получить в классическом принципе Фоккера произвольные заряды макротел, перейдем от отношений между отдельными микрочастицами к суммам парных отношений элементарных частиц, составляющих два макрообъекта A и B. Поскольку достаточно разнесенные макрообъекты приближенно можно считать точечными (в классическом смысле), то все составляющие их идеализированные микрочастицы полагаются имеющими одинаковые скорости и одинаковые парные пространственно-временные отношения. Это значит, что при суммировании можно вынести за скобки скалярные произведения скоростей частиц и дельта-функцию, тогда процедура перехода к макрообъектам сводится к суммированиям по зарядам микрочастиц, составляющих эти объекты. Так приходим к зарядам двух макрообъектов:

$$\tilde{q}_A = \sum_{(i\subset A)} \tilde{e}_i; \qquad \tilde{q}_B = \sum_{(k\subset B)} \tilde{e}_k. \tag{14}$$

Переходя от безразмерных зарядов $\tilde{e}$ к известным элементарным зарядам электрона $e = \sqrt{\hbar c}|\tilde{e}|$ через размерные универсальные константы, получаем ранее записанное выражение для действия электромагнитного взаимодействия двух классических заряженных частиц.

2.3 Гравитация как следствие электромагнетизма

1. Исходя из закона (12), можно получить и гравитационное взаимодействие. Для этого следует воспользоваться сформулированным выше принципом, согласно которому

физическим смыслом обладают все миноры из определителя, через который сформулирован закон системы отношений. В данном случае это будет определитель из закона токовых отношений (12). Как только что было показано, миноры минимального порядка характеризуют парные электромагнитные взаимодействия. Рассмотрим физический смысл миноров более высокого порядка.

Линеаризованное гравитационное взаимодействие обусловлено учетом *диагональных* миноров следующего, второго порядка в определителе закона (12). Так, для двух частиц, описываемых элементами i и k, можно определить парное отношение:

$$D^{(2)}_{ik} = \begin{vmatrix} \tilde{e}^2 & \tilde{u}_{ik} \\ \tilde{u}_{ki} & \tilde{e}^2 \end{vmatrix} = \tilde{e}^4(1 - u_{ik}u_{ki}) = -\frac{\tilde{e}^4}{2} u^{\mu}_{(i)} u^{\nu}_{(i)} (\eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta} + \eta_{\mu\beta}\eta_{\nu\alpha} - 2\eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta}) u^{\alpha}_{(k)} u^{\beta}_{(k)}, \quad (15)$$

где $\eta_{\mu\nu}$ – опять метрический тензор пространства Минковского.

2. Здесь по-прежнему рассматриваются парные отношения двух элементов, что означает, что в выражении для гравитационного взаимодействия следует использовать прежнее выражение для координатного парного отношения в виде дельта-функции (2). Принцип Фоккера для прямого межчастичного гравитационного взаимодействия представляется в следующем виде:

$$S^{(g)}(i,k) = \frac{G}{2c} m_i m_k \int\int u^{\mu}_{(i)} u^{\nu}_{(i)} (\eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta} + \eta_{\mu\beta}\eta_{\nu\alpha} - 2\eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta}) u^{\alpha}_{(k)} u^{\beta}_{(k)} \delta(s^2(i,k)) ds_i ds_k, \quad (16)$$

аналогичном принципу Фоккера (1) для электромагнитного взаимодействия.

3. Поскольку теперь конформный фактор (электрический заряд) дает квадратичный вклад в множители перед скалярными произведениями скоростей, то эти множители могут принимать лишь положительные значения, в отличие от электрических зарядов в минорах первого порядка. Очевидно, они могут соответствовать лишь значениям масс идеализированных микрочастиц.

2.4 Принцип Маха и прямые многочастичные взаимодействия

Пока были задействованы лишь два простейших вида миноров первого и второго порядков. Рассмотрим оставшиеся миноры более высокого порядка.

1. Из определителя в законе (12) можно построить несколько видов миноров: три вида миноров второго порядка, три вида миноров третьего порядка и два минора четвертого порядка, которые, как оказывается, имеют четкую физическую интерпретацию и играют важную роль в описании классических электромагнитных и гравитационных взаимодействий.

Выпишем в виде таблицы все названные миноры, начиная с первого порядка:

Гравитация	Электромагнетизм	Принцип Маха
$\tilde{e}^2 = e^2/(\hbar c) = Const$	$\tilde{u}_{ik}$	0
$D^{(2)}_{ik} = \begin{vmatrix} \tilde{e}^2_i & \tilde{u}_{ik} \\ \tilde{u}_{ki} & \tilde{e}^2_k \end{vmatrix}$	$D^{(2)}_{ik,j} = \begin{vmatrix} \tilde{u}_{ki} & \tilde{u}_{kj} \\ \tilde{u}_{ji} & \tilde{e}^2_j \end{vmatrix}$	$D^{(2)}_{ikjs} = \begin{vmatrix} \tilde{u}_{ij} & \tilde{u}_{is} \\ \tilde{u}_{kj} & \tilde{u}_{ks} \end{vmatrix}$
$D^{(3)}_{ikj} = \begin{vmatrix} \tilde{e}^2_i & \tilde{u}_{ik} & \tilde{u}_{ij} \\ \tilde{u}_{ki} & \tilde{e}^2_k & \tilde{u}_{kj} \\ \tilde{u}_{ji} & \tilde{u}_{jk} & \tilde{e}^2_j \end{vmatrix}$	$D^{(3)}_{ik,js} = \begin{vmatrix} \tilde{u}_{ik} & \tilde{u}_{ij} & \tilde{u}_{is} \\ \tilde{u}_{jk} & \tilde{e}^2_j & \tilde{u}_{js} \\ \tilde{u}_{sk} & \tilde{u}_{sj} & \tilde{e}^2_s \end{vmatrix}$	$D^{(3)}_{ikjs,l} = \begin{vmatrix} \tilde{u}_{ij} & \tilde{u}_{is} & \tilde{u}_{il} \\ \tilde{u}_{kj} & \tilde{u}_{ks} & \tilde{u}_{kl} \\ \tilde{u}_{lj} & \tilde{u}_{ls} & \tilde{e}^2_l \end{vmatrix}$
$D^{(4)}_{ikjs} = \begin{vmatrix} \tilde{e}^2_i & \tilde{u}_{ik} & \tilde{u}_{ij} & \tilde{u}_{is} \\ \tilde{u}_{ki} & \tilde{e}^2_k & \tilde{u}_{kj} & \tilde{u}_{ks} \\ \tilde{u}_{ji} & \tilde{u}_{jk} & \tilde{e}^2_j & \tilde{u}_{js} \\ \tilde{u}_{si} & \tilde{u}_{sk} & \tilde{u}_{sj} & \tilde{e}^2_s \end{vmatrix}$	$D^{(4)}_{ik,jsl} = \begin{vmatrix} \tilde{u}_{ik} & \tilde{u}_{ij} & \tilde{u}_{is} & \tilde{u}_{il} \\ \tilde{u}_{jk} & \tilde{e}^2_j & \tilde{u}_{js} & \tilde{u}_{jl} \\ \tilde{u}_{sk} & \tilde{u}_{sj} & \tilde{e}^2_s & \tilde{u}_{sl} \\ \tilde{u}_{lk} & \tilde{u}_{lj} & \tilde{u}_{ls} & \tilde{e}^2_l \end{vmatrix}$	0

(17)

Здесь верхний слева элемент $\tilde{e}^2$ выписан для полноты представленных здесь миноров.

2. Два минора $\tilde{u}_{ik}$ и $D^{(2)}_{ik}$ в левом верхнем углу таблицы описывают двухчастичные взаимодействия. Два минора: $D^{(2)}_{ik,j}$ и $D^{(3)}_{ikj}$, расположенные наискось правее и ниже двух названных, описывают трехчастичные взаимодействия. Три минора $D^{(2)}_{ikjs}$, $D^{(3)}_{ik,sj}$ и $D^{(4)}_{ikjs}$, расположенные по диагонали, описывают четырехчастичные взаимодействия. Наконец, два оставшихся минора $D^{(3)}_{iksl,j}$ и $D^{(4)}_{ik,jsl}$ в правом нижнем углу описывают пятичастичные взаимодействия. В обозначениях частиц запятая отделяет электромагнитно взаимодействующие частицы от частиц, оказывающих на них гравитационное воздействие.

3. В выписанной таблице сверху дана физическая интерпретация трех столбцов миноров. Первый столбец характеризует гравитационное взаимодействие двух, трех и четырех частиц. Миноры второго столбца описывают электромагнитное взаимодействие двух частиц и гравитационное влияние на электромагнитное взаимодействие двух частиц со стороны других (третьих и четвертых) частиц. Миноры третьего столбца описывают электромагнитное (и частично гравитационное) влияние на электромагнитно взаимодействующую пару (и четверку) частиц.

Отличие электромагнитных от гравитационных взаимодействий фактически определяется числом диагональных элементов вида $\tilde{e}^2$, входящих в соответствующие миноры. Если число диагональных элементов совпадает с числом элементов, представленных в миноре, то данный минор описывает вклады только в гравитационное взаимодействие. Это имеет место для миноров первого столбца. В минорах $\tilde{u}_{ik}$ и $D^{(2)}_{ikjs}$ названные диагональные элементы отсутствуют, следовательно, данные миноры описывают чисто электромагнитные взаимодействия. Во всех остальных минорах представлены как электромагнитные, так и гравитационные взаимодействия.

Влияние третьих частиц на взаимодействие рассматриваемой пары частиц в литературе принято трактовать как проявления принципа Маха. Строго говоря, принципу Маха соответствуют все трех-, четырех- и пятичастичные взаимодействия, однако значительная часть проявлений принципа Маха маскируется нелинейностью гравитационного взаимодействия (в общей теории относительности). По этой причине лишь миноры третьего столбца отнесены к явному проявлению принципа Маха.

4. Прообраз действия многочастичных взаимодействий, как и прежде, строится в виде произведения вкладов от миноров из пространства токов (скоростей) и из пространственно-временных отношений. Последние должны иметь характер соответствующих n-точечных отношений. Так, ранее для описания двухчастичных взаимодействий использовались парные отношения из двух пространств, что означало одинаковые выражения в виде дельта-функции при разных порядках миноров из токового пространства. Для описании трех- и более частичных взаимодействий необходимо использовать соответствующие многоточечные характеристики из пространственно-временных отношений, которые оказываются в парах с минорами разных рангов. Кроме того, необходимо уточнение коэффициентов перед указанными минорами при построении полного действия (см. [00]).

3 Реляционная теория микромира

Реляционное описание физики микромира осуществляется на основе бинарных систем комплексных отношений. Такая теория была названа бинарной геометрофизикой. Она предназначена для описания элементарного звена (<мига>) перехода системы из одного в другое состояние. Бинарная геометрофизика строится на **двух множествах элементов** $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$, характеризующих соответственно начальное и конечное состояния системы. Условимся обозначать элементы первого множества $\mathcal{M}$ латинскими буквами, а элементы второго множества $\mathcal{N}$ – греческими буквами.

Как и в случае унарного описания мира, бинарные системы комплексных отношений определяются законом, представляющим собой равенство нулю некого определителя из парных отношений между элементами двух множеств. Количества элементов, входящих в закон, определяют ранг бинарной системы комплексных отношений. Это означает, что ранг характеризуется двумя числами. В бинарной геометрофизике оба множества являются эквивалентными, следовательно, будут использоваться лишь симметричные ранги (r, r).

Бинарная геометрофизика строится на основе ранга (6,6), однако в ней рассматриваются и случаи меньших рангов как некие упрощенные или идеализированные варианты.

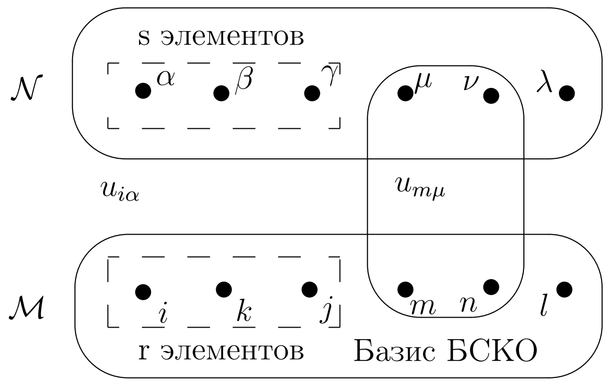

Рис. 2: Бинарная система отношений (структура) ранга (r, s)

3.1 Истоки 4-мерности и сигнатуры классического пространства-времени

Понятия БСКО низших рангов фактически уже давно используются в теоретической физике. В частности, *понятие спина элементарных частиц и теория 2-компонентных спиноров, оказывается, возникает в рамках БСКО минимального невырожденного ранга (3,3)*. Поясним это утверждение. Согласно общей теории бинарных систем отношений, закон БСКО ранга (3,3) имеет вид

$$\Phi = \begin{vmatrix} u_{i\alpha} & u_{i\beta} & u_{i\gamma} \\ u_{k\alpha} & u_{k\beta} & u_{k\gamma} \\ u_{j\alpha} & u_{j\beta} & u_{j\gamma} \end{vmatrix} = 0, \tag{18}$$

где парные отношения

$$u_{i\alpha} = i^1\alpha^1 + i^2\alpha^2 \tag{19}$$

определяются двумя парами комплексных параметров i^1, i^2 (начальное состояние) и α^1, α^2 (конечное состояние).

Возьмем фундаментальное 2×2-отношение (отличный от нуля минор максимального порядка), которое представляется в виде

$$\begin{vmatrix} u_{i\alpha} & u_{i\beta} \\ u_{k\alpha} & u_{k\beta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i^1 & k^1 \\ i^2 & k^2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \alpha^1 & \beta^1 \\ \alpha^2 & \beta^2 \end{vmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \alpha\beta \\ ik \end{bmatrix}. \tag{20}$$

Ограничимся рассмотрением лишь таких элементарных базисов, которые связаны линейными преобразованиями, оставляющими инвариантными (неизменными) каждый из определителей справа в (20), т. е.

$$\begin{vmatrix} i^1 & k^1 \\ i^2 & k^2 \end{vmatrix} = i^1k^2 - i^2k^1 = Inv; \quad \alpha^1\beta^2 - \alpha^2\beta^1 = Inv. \tag{21}$$

Эти выражения можно понимать как антисимметричные метрики в каждом из двух множеств (пространств) БСКО ранга (3,3). Но, если вспомнить определение 2-компонентных спиноров как 2-мерных комплексных векторов, для которых определена инвариантная антисимметричная квадратичная форма (метрика), то станет ясно, что элементы БСКО ранга (3,3) с условием (21) описываются 2-компонентными спинорами.

Коэффициенты линейных преобразований, оставляющих инвариантными антисимметричные формы (21), удовлетворяют условию $C_1^1C_2^2 - C_2^1C_1^2 = 1$. Следовательно, на четыре комплексных коэффициента C_r^s наложено два вещественных условия. Эти преобразования, связывающие выделенный класс базисных элементов, образуют 6-параметрическую группу $SL(2,C)$, соответствующую группе Лоренца.

Линейные преобразования, одновременно сохраняющие инвариантными как антисимметричные формы (21), так и парные отношения $u_{i\alpha}$ в (19), образуют 3-параметрическую группу $SU(2)$, соответствующую вращениям в 3-мерном пространстве.

Напомним, что в общепринятой теории к спинорам приходят, исходя из плоского 4-мерного пространства-времени с соответствующей ему группой Лоренца, а на основе алгебр Клиффорда над полем вещественных чисел можно определить спиноры в пространствах любой размерности и сигнатуры. Но можно рассуждать и в обратном направлении: если задан вид спиноров, то сразу же можно сказать о размерности и сигнатуре многообразия, в котором определены эти спиноры. Учитывая, что в нашем случае автоматически возникают 2-компонентные спиноры, приходим к выводу, что таким образом уже заложены основы 4-мерности теории с сигнатурой $(+ - --)$. Другими словами, можно утверждать, что **размерность (4-мерность) и сигнатура классического пространства-времени обусловлены бинарной системой комплексных отношений минимального невырожденного ранга (3,3)**.

3.2 Переход к унарной геометрии

От БСКО ранга (3,3) можно перейти к унарным системам вещественных отношений, соответствующих общепринятым геометриям, несколькими способами. Переход к прообразу пространственно-временных отношений осуществляется склейкой пар элементов (по одному из каждого множества). Другой способ перехода к унарным системам вещественных отношений основан на сшивке двух пар элементов (по два элемента в каждом из множеств) так, как это изображено на рисунке 3. Он соответствует переходу к унарной геометрии Лобачевского, физически интерпретируемой как пространство скоростей частиц.

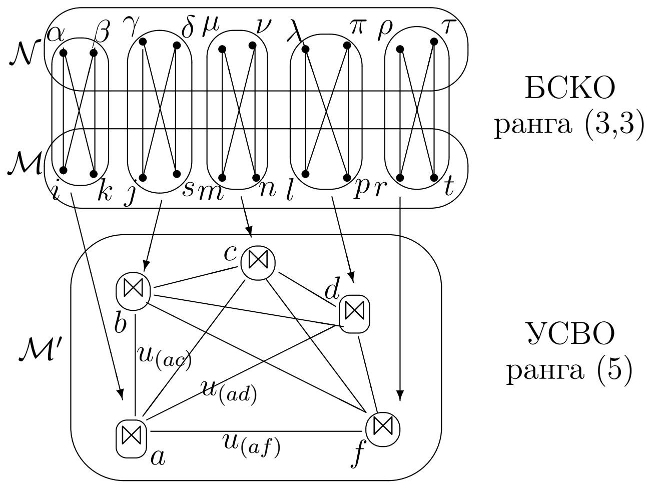

Рис. 3: Переход от БСКО ранга (3,3) к УСВО ранга (5)

В верхней части рисунка изображены четверки сопряженных элементов из двух множеств БСКО ранга (3,3), а в нижней части – сопоставленные с ними элементы одного нового множества $\mathcal{M}'$.

Из параметров пар элементов – двух 2-компонентных спиноров – по обычным правилам строятся 4-мерные векторы, физически интерпретируемые как скорости (или импульса) массивных частиц. Так, компоненты 4-скорости частицы, описываемой элементами i и k в начальном состоянии и α и β в конечном состоянии, записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} u^0 &= \tfrac{1}{2}(i^1\alpha^1 + i^2\alpha^2 + k^1\beta^1 + k^2\beta^2);\\ u^1 &= \tfrac{1}{2}(i^1\alpha^2 + i^2\alpha^1 + k^1\beta^2 + k^2\beta^1);\\ u^2 &= \tfrac{i}{2}(i^1\alpha^2 - i^2\alpha^1 + k^1\beta^2 - k^2\beta^1);\\ u^3 &= \tfrac{1}{2}(i^1\alpha^1 - i^2\alpha^2 + k^1\beta^1 - k^2\beta^2). \end{aligned} \tag{22}$$

Очевидно, компоненты вектора в (22) являются вещественными, если параметры элементов α и β комплексно сопряжены параметрам элементов i и k. Именно компоненты u^μ физически интерпретируются.

3.3 Простейшее бинарное многомерие

1. Поскольку БСКО ранга (3,3) соответствует 4-мерию классической геометрии и физики, то простейшее бинарное многомерие означает использование БСКО ранга (4,4).

В бинарной геометрофизике БСКО ранга (4,4) выступает в нескольких ролях. Во-первых, на основе математического аппарата БСКО ранга (4,4) строится простейший реляционный вариант теории электромагнитных взаимодействий элементарных частиц. Это позволяет говорить об аналогии с 5-мерной теорией Калуцы в рамках многомерных (унарных) геометрических моделей физических взаимодействий. Как известно, в унарной геометрофизике увеличение размерности с четырех до пяти приводит к появлению дополнительных компонент метрики и импульса, которые отождествляются с электромагнитными характеристиками. То же характерно и для случая перехода от БСКО ранга (3,3) к БСКО ранга (4,4).

Во-вторых, БСКО ранга (4,4) позволяет взглянуть на привычные в 4-мерии понятия с более общих позиций. Предпринятый на ее основе анализ показывает, что принятое в унарной геометрии квадратичное мероопределение обусловлено именно рангом (3,3), тогда как более высокие ранги диктуют кубичное, четвертой степени и т. д. мероопределения, которые обычно связываются с финслеровой геометрией.

2. Закон БСКО ранга (4,4) записывается в виде равенства нулю определителя, составленного из 16 парных отношений между двумя четверками элементов i, k, j, l и α, β, γ, λ из двух разных множеств

$$\Phi_{(4,4)} = \begin{vmatrix} u_{i\alpha} & u_{i\beta} & u_{i\gamma} & u_{i\lambda} \\ u_{k\alpha} & u_{k\beta} & u_{k\gamma} & u_{k\lambda} \\ u_{j\alpha} & u_{j\beta} & u_{j\gamma} & u_{j\lambda} \\ u_{l\alpha} & u_{l\beta} & u_{l\gamma} & u_{l\lambda} \end{vmatrix} = 0, \tag{23}$$

где парные отношения $u_{i\alpha}$ задаются формулой

$$u_{i\alpha} = i^1\alpha^1 + i^2\alpha^2 + i^3\alpha^3. \tag{24}$$

Здесь i^1, i^2, i^3 – три комплексных параметра элемента $i \in \mathcal{M}$, а α^1, α^2, α^3 – комплексные параметры элемента $\alpha \in \mathcal{N}$. Это парное отношение можно рассматривать как скалярное произведение двух 3-мерных векторов из двух разных пространств.

3. **Фундаментальное** 3×3**-отношение**, согласно общим правилам, определяется как минор максимального порядка из определителя в законе (23):

$$\begin{bmatrix} \alpha\beta\gamma \\ ikj \end{bmatrix} \equiv \begin{vmatrix} u_{i\alpha} & u_{i\beta} & u_{i\gamma} \\ u_{k\alpha} & u_{k\beta} & u_{k\gamma} \\ u_{j\alpha} & u_{j\beta} & u_{j\gamma} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i^1 & k^1 & j^1 \\ i^2 & k^2 & j^2 \\ i^3 & k^3 & j^3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \alpha^1 & \beta^1 & \gamma^1 \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \\ \alpha^3 & \beta^3 & \gamma^3 \end{vmatrix}, \tag{25}$$

т. е. аналогично (20) записывается через произведение двух определителей отдельно из параметров элементов множеств $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$. Оно играет ключевую роль в общей теории БСКО ранга (4,4) и в определении 3-компонентных спиноров.

3.4 Финслеровы 3-компонентные спиноры и геометрия

1. Если в рамках БСКО ранга (3,3) формулируется новый подход к теории 2-компонентных спиноров, то в БСКО следующего ранга (4,4) по тем же правилам строится теория объектов, которые естественно назвать 3-компонентными спинорами. Они определяются точно так же, как и 2-компонентные спиноры с заменой двух компонент

на три, поскольку каждый элемент БСКО ранга (4,4), согласно (24), описывается вектором в 3-мерном комплексном пространстве. В каждом из двух множеств (пространств) элементов определены линейные преобразования. Далее, поскольку фундаментальное 3×3-отношение, согласно (25), представляется в виде произведения двух определителей из параметров одного множества, то каждый из определителей можно рассматривать как антисимметричную (кубичную) форму для троек элементов в соответствующем множестве. Так, в множестве $\mathcal{M}$ для трех элементов i, k, j определено тройное отношение

$$b_{(ikj)} \equiv \begin{vmatrix} i^1 & k^1 & j^1 \\ i^2 & k^2 & j^2 \\ i^3 & k^3 & j^3 \end{vmatrix} = i^1k^2j^3 + i^3k^1j^2 + i^2k^3j^1 - i^3k^2j^1 - i^2k^1j^3 - i^1k^3j^2, \qquad (26)$$

играющее такую же роль, что и (21) в теории 2-компонентных спиноров в рамках БСКО ранга (3,3).

2. Ограничимся такими преобразованиями, которые оставляют инвариантными эти кубичные формы. Легко убедиться, что при линейных преобразованиях имеет место соотношение

$$b'_{(ikj)} = \begin{vmatrix} C_1^1 & C_2^1 & C_3^1 \\ C_1^2 & C_2^2 & C_3^2 \\ C_1^3 & C_2^3 & C_3^3 \end{vmatrix} b_{(ikj)}, \qquad (27)$$

т. е. для инвариантности $b_{(ikj)}$ на коэффициенты C_r^s следует наложить условие

$$C_1^1C_2^2C_3^3 + C_1^3C_2^1C_3^2 + C_1^2C_2^3C_3^1 - C_1^3C_2^2C_3^1 - C_1^1C_2^3C_3^2 - C_1^2C_2^1C_3^3 \equiv \Delta_c = 1, \qquad (28)$$

обобщающее условие $C_1^1C_2^2 - C_2^1C_1^2 = 1$ в теории БСКО ранга (3,3). Это два условия на 18 вещественных параметров.

Таким образом, можно утверждать, что налицо аналоги всех трех составляющих в определении 2-компонентных спиноров: векторы в комплексном пространстве, линейные преобразования и инвариантная относительно них антисимметричная форма, т. е., действительно, в теории БСКО ранга (4,4) возникают величины, которые естественно назвать 3-компонентными (финслеровыми) спинорами. Термин <финслеровы> обусловлен тем, что унарные геометрии с более общим, нежели общепринятым квадратичным, мероопределением принято называть финслеровыми геометриями.

Линейные преобразования с условием (28) составляют *унимодулярную* (16-параметрическую) *группу* $SL(3, C)$. Эта группа преобразований играет в теории БСКО ранга (4,4) ту же роль, что 6-параметрическая группа $SL(2, C)$ в теории БСКО ранга (3,3).

3. Аналогично 4-мерию, перейдем от 3-компонентных спиноров к векторам. Это можно осуществить несколькими способами. Воспользуемся тем же способом, которым ранее были введены 4-мерные векторы. В итоге находим 9 компонент в виде:

$$B^0_{(3)} = \tfrac{1}{2}(i^1\alpha^1 + i^2\alpha^2 + k^1\beta^1 + k^2\beta^2 + j^1\gamma^1 + j^2\gamma^2);$$
$$B^1_{(3)} = \tfrac{1}{2}(i^1\alpha^2 + i^2\alpha^1 + k^1\beta^2 + k^2\beta^1 + j^1\gamma^2 + j^2\gamma^1);$$
$$B^2_{(3)} = \tfrac{i}{2}(i^1\alpha^2 - i^2\alpha^1 + k^1\beta^2 - k^2\beta^1 + j^1\gamma^2 - j^2\gamma^1);$$
$$B^3_{(3)} = \tfrac{1}{2}(i^1\alpha^1 - i^2\alpha^2 + k^1\beta^1 - k^2\beta^2 + j^1\gamma^1 - j^2\gamma^2);$$

$$\begin{aligned}
B^4_{(3)} &= \tfrac{1}{2}(i^1\alpha^3 + i^3\alpha^1 + k^1\beta^3 + k^3\beta^1 + j^1\gamma^3 + j^3\gamma^1);\\
B^5_{(3)} &= \tfrac{i}{2}(i^1\alpha^3 - i^3\alpha^1 + k^1\beta^3 - k^3\beta^1 + j^1\gamma^3 - j^3\gamma^1);\\
B^6_{(3)} &= \tfrac{1}{2}(i^2\alpha^3 + i^3\alpha^2 + k^2\beta^3 + k^3\beta^2 + j^2\gamma^3 + j^3\gamma^2);\\
B^7_{(3)} &= \tfrac{i}{2}(i^2\alpha^3 - i^3\alpha^2 + k^2\beta^3 - k^3\beta^2 + j^2\gamma^3 - j^3\gamma^2);\\
B^8_{(3)} &= i^3\alpha^3 + k^3\beta^3 + j^3\gamma^3.
\end{aligned} \tag{29}$$

В принципе, можно определить величины B^A с разными знаками вкладов сопряженных пар, составляющих $B^{s\dot{r}}$, а также для случаев, когда вектор определен для одной или для двух <сшитых> пар. Очевидно, что в этих случаях первые четверки компонент совпадают с величинами, определенными в (22).

Зная коэффициенты преобразований спинорных компонент, можно найти векторный закон преобразований компонент B^A относительно группы $SL(3,C)$ в 9-мерном многообразии

$$B'^A = L^A_{\cdot B} B^B, \tag{30}$$

где коэффициенты линейных преобразований $L^A_{\cdot B}$ выражаются через квадратичные комбинации из коэффициентов C^r_s и $\overset{*}{C}{}^r_s$.

Введем 9-мерный инвариант, непосредственно обобщающий инвариант $\eta_{\mu\nu}B^\mu B^\nu$ в 4-мерной теории. Легко показать, что он имеет вид

$$\begin{aligned}
G_{ABC}B^AB^BB^C = B^8\left((B^0)^2 - (B^1)^2 - (B^2)^2 - (B^3)^2\right) + 2B^1\left(B^4B^6 + B^5B^7\right) - \\
- B^0\left((B^4)^2 + (B^5)^2 + (B^6)^2 + (B^7)^2\right) + 2B^2\left(B^5B^6 - B^4B^7\right) + \\
+ B^3\left((B^4)^2 + (B^5)^2 - (B^6)^2 - (B^7)^2\right).
\end{aligned} \tag{31}$$

При данном обобщении **происходит не просто увеличение размерности с четырех до девяти, но и изменение характера мероопределения**. Напомним, что в известных работах по многомерным теориям Калуцы и Клейна обычно используется постулат квадратичного (риманова) мероопределения. В данном же случае получается **унарная финслерова геометрия с кубичным мероопределением**.

Заключение

В заключение сделаем ряд выводов, замечаний и дополнений.

1. В рамках реляционного подхода открывается новый канал обобщений 2-компонентных спиноров, отличный от обычно используемого обобщения, вводимого на основе алгебр Клиффорда над полем вещественных чисел.

2. Теория финслеровых спиноров (бинарное многомерие) порождает унарные финслеровы геометрии с кубичным, четвертичным и т. д. мероопределением, зависящим от ранга исходных бинарных систем комплексных отношений. При этом степень мероопределения тесно связана с размерностью возникающей финслеровой геометрии.

3. В простейшей бинарной модели физических взаимодействий на базе БСКО ранга (4,4) достаточно полно описываются электромагнитные взаимодействия лептонов (без учета барионов). Из тройки параметров элементов этой системы отношений строятся внешние (4-мерные) и внутренние характеристики элементарных частиц по образу и подобию 5-мерной теории Калуцы, где электрические заряды частиц описываются дополнительной компонентой 5-скорости. Теперь таковыми являются дополнительные параметры элементов с номером 3. Оказывается, в этой бинарной модели удается описать

не только электромагнитные, но и ряд свойств электрослабых взаимодействий лептонов. Для описания также сильных взаимодействий следует использовать ранг (6,6).

4. Общепринятые теории физических взаимодействий на самом деле имеют финслеров характер, однако он завуалирован суммированиями по третьим, четвертым и т. д. элементам, приводящими к внутренним характеристикам частиц и полей.

5. В рамках реляционного подхода к физике открывается возможность решения фундаментальной задачи современной физики – вывода классических пространственно-временных отношений из наложений физических факторов, присущих физике микромира.

Литература

[1] *Д. Г. Павлов* Метафизика симметрий //Альманах "Метафизика. Век XXI". Вып. 2. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2007, с. 267–283.

[2] *В. Я. Скоробогатько, Г. Н. Фешин, В. А. Пелых* N-Точечная геометрия типа Евклида //Сб. Математические методы и физико-механические поля. Вып. 1. – Киев.: Наукова думка, 1975, с. 5–10.

[3] *Ю. С. Владимиров* Основания физики. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008.

[4] *A. D. Fokker* Ein invarianter Variationssatz fur die Bewegung mehrerer electrischer Massenteilchen //Z. Phys., 1929, Bd. 58, S. 386–393.

[5] *J. A. Wheeler, R. P. Feynman* Interaction with the absorber as the mechanism of radiation //Rev. Mod. Phys., 1945, vol. 17, p. 157–181.

[6] *Ю. И. Кулаков* Теория физических структур. – М.: 2004.

[7] *Я. И. Грановский, А. А. Пантюшин* К релятивистской теории тяготения //Изв. АН Каз. ССР, сер. физ-мфт., 1965, №2, с. 65–69.

Finsler geometry in relational approach in physics

Yu. S. Vladimirov

The class of Finslerian geometries corresponding to the multipoint geometries very close to the Berwald-Moore geometry is considered. It is shown that in the relational approach in physics based on the action-at-a-distance idea and on the theory of systems of relations, the properties of multipoint geometry appear in a number of key statements of the theory. It holds true in case of relational formulation of classical physics as well as physics of microcosm.