АДДИТИВНЫЕ УГЛЫ В ПРОСТРАНСТВЕ $\mathcal{H}_3$

Д. Г. Павлов, С. С. Кокарев

Институт гиперкомплексных систем в геометрии и физике, Москва,
РНОЦ "Логос", Ярославль
geom2004@mail.ru, logos-distant@mail.ru

Исследуется возможность построения аддитивных полиуглов (бинглов и тринглов) в рамках геометрии Бервальда-Моора $\mathcal{H}_3$. Показано, что при определенном (обобщенном) понимании условия аддитивности, таких полиуглов существует бесчисленное множество.

1 Введение

Традиционными элементарными мерами евклидовой геометрии являются длина и угол. Оба понятия определяются посредством фундаментальной метрической формы — скалярного произведения векторов η: $V \times V \to R$, которое в дальнейшем для любой пары векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ будем обозначать $\eta(\vec{a}, \vec{b})$. Здесь V — линейное вещественное векторное пространство некоторой конечной размерности. Евклидово скалярное произведение обладает тремя характерными свойствами:

1. $\eta(\vec{a}, \vec{b}) = \eta(\vec{b}, \vec{a})$ (симметричность);
2. $\eta(\lambda\vec{a} + \mu\vec{b}, \vec{c}) = \lambda\eta(\vec{a}, \vec{c}) + \mu\eta(\vec{b}, \vec{c})$ (билинейность);
3. $\eta(\vec{a}, \vec{a}) \geq 0$ $(= 0$, только при $\vec{a} = 0)$ (евклидовость).

Здесь $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ — произвольные векторы, λ, μ — произвольные вещественные числа. Скалярное произведение с такими свойствами позволяет корректно определить длину (норму) вектора $|\vec{a}|$ и угол $\varphi(\vec{a}, \vec{b})$ между любой парой ненулевых векторов по формулам:

$$|\vec{a}| = \sqrt{\eta(\vec{a}, \vec{a})}; \qquad \varphi(\vec{a}, \vec{b}) = \arccos \frac{\eta(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}||\vec{b}|}. \tag{1}$$

Определенные таким образом числовые меры векторов и их взаимного расположения в силу аксиом скалярного произведения удовлетворяют следующим привычным свойствам:

1. обе меры инвариантны относительно группы движений евклидового пространства (вращений, трансляций и отражений);
2. мера угла инвариантна относительно действия более широкой группы конформных симметрий евклидова пространства, которая, помимо элементов группы движений, включает в себя однородные растяжения осей координат;
3. норма удовлетворяет неравенству треугольника: $|\vec{a}| + |\vec{b}| \geq |\vec{a} + \vec{b}|$, причем равенство имеет место только в случае коллинеарных (сонаправленных) векторов и это равенство выражает принцип аддитивности евклидовой длины отрезка;
4. свойство евклидовости скалярного произведения гарантирует корректность определения косинуса:

$$\left|\frac{\eta(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}||\vec{b}|}\right| \leq 1;$$

5. имеет место аддитивность углов:

$$\varphi(\vec{a},\vec{b}) = \varphi(\vec{a},\vec{c}) + \varphi(\vec{c},\vec{b}), \tag{2}$$

для всякой тройки ненулевых векторов с

$$\mathrm{vol}(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = 0, \tag{3}$$

где vol — форма объема (смешанное произведение), если угол считать ориентированным и, например, направление от $\vec{a}$ к $\vec{b}$ считать положительным;

6. мера угла симметрична, т. е.:

$$\varphi(\vec{a},\vec{b}) = \varphi(\vec{b},\vec{a}). \tag{4}$$

Целью настоящей статьи является построение финслерова обобщения понятия угла в рамках 3-мерного пространства Бервальда-Моора $\mathcal{H}_3$, возникающего при рассмотрении коммутативно-ассоциативных алгебр [1]. Основным геометрическим объектом в пространстве $\mathcal{H}_3$ является метрика Бервальда-Моора:

$$^3G = \hat{\mathcal{S}}(dx^1 \otimes dx^2 \otimes dx^3) \tag{5}$$

где $\hat{\mathcal{S}}$ — оператор симметризации (без числового множителя). Опираясь на соображения конформной инвариантности и аддитивности, мы исследуем возможность построения углов в $\mathcal{H}_3$. Наш анализ показывает, что геометрия углов в $\mathcal{H}_3$ в определенном смысле богаче геометрии углов в евклидовом пространстве. Вместе с общими точными выражениями для всех видов углов в $\mathcal{H}_3$ мы получаем и соответствующие группы их симметрий, которые также оказываются богаче группы конформной симметрии евклидовой метрики.

2 Аддитивные углы евклидовой и псевдоевклидовой геометрии

Прежде чем приступать к исследованию углов в $\mathcal{H}_3$, продемонстрируем общую идею этого исследования на примере следующей более простой задачи: *найти все аддитивные и конформно-инвариантные углы евклидовой геометрии.* Другими словами, забудем на время про второе определение в (1) и попробуем прийти к нему (или к его обобщению), опираясь лишь на упомянутые свойства конформной инвариантности и аддитивности. Для решения этой задачи заметим, что для любой пары векторов $\vec{a},\vec{b}$ в евклидовом пространстве существует лишь две функционально независимых конформно-инвариантных комбинации, связанных с евклидовой формой:

$$w^a_b \equiv \frac{\eta(\vec{a},\vec{b})}{\eta(\vec{a},\vec{a})} \quad \text{и} \quad w^b_a \equiv \frac{\eta(\vec{a},\vec{b})}{\eta(\vec{b},\vec{b})}. \tag{6}$$

Искомый угол должен определяться теперь некоторой универсальной функцией этих переменных:

$$\varphi(\vec{a},\vec{b}) = f(w^a_b, w^b_a).$$

Для любого третьего ненулевого вектора $\vec{c}$, удовлетворяющего условию компланарности (3), условие аддитивности угла (2) примет вид:

$$f(w^a_b, w^b_a) = f(w^a_c, w^c_a) + f(w^c_b, w^b_c). \tag{7}$$

Для того, чтобы перевести это соотношение на язык координат и затем на язык функциональных уравнений в пространстве функций числовой переменной, выберем декартову систему координат таким образом, чтобы $\vec{a} = (a, 0, 0, \dots, 0)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, 0, \dots, 0)$. Условие компланарности векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ эквивалентно условию:

$$\vec{c} = \alpha_1\vec{a} + \alpha_2\vec{b} = (\alpha_1 a + \alpha_2 b_1, \alpha_2 b_2, 0, \dots, 0),$$

так что, фактически, речь можно вести о евклидовой геометрии на плоскости. Простые вычисления конформно-инвариантных комбинаций, входящих в (7), приводят к выражениям:

$$w_b^a = \frac{b_1}{a}; \quad w_a^b = \frac{ab_1}{b_1^2 + b_2^2}; \quad w_c^a = \alpha_1 + \alpha_2\frac{b_1}{a}; \quad w_a^c = \frac{(\alpha_1 a + \alpha_2 b_1)a}{(\alpha_1 a + \alpha_2 b_1)^2 + (\alpha_2 b_2)^2};$$

$$w_b^c = \frac{(\alpha_1 a + \alpha_2 b_1)b_1 + \alpha_2 b_2^2}{(\alpha_1 a + \alpha_2 b_1)^2 + (\alpha_2 b_2)^2}; \qquad w_c^b = \frac{(\alpha_1 a + \alpha_2 b_1)b_1 + \alpha_2 b_2^2}{b_1^2 + b_2^2}.$$

Подставляя эти выражения в (7) и вводя обозначения: $b_1/a = \xi$, $b_2/a = \eta$, мы приходим к следующему функциональному уравнению, выражающему условие аддитивности угла:

$$f\left(\xi, \frac{\xi}{\xi^2 + \eta^2}\right) = f\left(\alpha_1 + \alpha_2\xi, \frac{\alpha_1 + \alpha_2\xi}{(\alpha_1 + \alpha_2\xi)^2 + (\alpha_2\eta)^2}\right) + \tag{8}$$

$$f\left(\frac{(\alpha_1 + \alpha_2\xi)\xi + \alpha_2\eta^2}{(\alpha_1 + \alpha_2\xi)^2 + (\alpha_2\eta)^2}, \frac{(\alpha_1 + \alpha_2\xi)\xi + \alpha_2\eta^2}{\xi^2 + \eta^2}\right).$$

Разумеется, путем довольно громоздких подстановок с учетом тождества: $\arccos x + \arccos y = \arccos[xy - \sqrt{1 - x^2}\sqrt{1 - y^2}]$, можно непосредственно убедиться, что уравнение (8) имеет решение вида: $f(w_1, w_2) = \arccos\sqrt{w_1 w_2}$, соответствующее стандартному определению угла (1). Для иллюстрации нетривиальности поставленной задачи мы проведем последовательный анализ уравнения (8). Поскольку это уравнение должно удовлетворяться при всех значениях переменных $\eta, \xi, \alpha_1, \alpha_2$, то оно тем более должно выполняться и на некоторых подмногообразиях пространства этих переменных. Рассмотрим это уравнение на подмногообразии $\eta = 0$:

$$f(\xi, 1/\xi) = f(\alpha_1 + \alpha_2\xi, (\alpha_1 + \alpha_2\xi)^{-1}) + f\left(\frac{\xi}{\alpha_1 + \alpha_2\xi}, \frac{\alpha_1 + \alpha_2\xi}{\xi}\right). \tag{9}$$

Вводя обозначение $\alpha_1 + \alpha_2\xi = x$, уравнение (9) можно переписать в виде:

$$f(\xi, 1/\xi) = f(x, 1/x) + f(\xi/x, x/\xi). \tag{10}$$

Уравнение (10) должно выполняться при всех значениях переменных ξ, x. Вводя обозначение $f(w, 1/w) \equiv F(w)$, приходим к эквивалентному уравнению:

$$F(\xi) = F(x) + F(\xi/x), \tag{11}$$

которое также должно выполняться при всех ξ, x. Предполагая гладкость функции F и дифференцируя уравнение (11) последовательно по x и по ξ, приходим к дифференциальному следствию (11):

$$\frac{\partial^2 F(\xi/x)}{\partial x \partial \xi} = 0$$

или

$$F''u + F' = 0, \tag{12}$$

где $u = \xi/x$, а штрих обозначает дифференцирование по всему аргументу. Уравнение (12) имеет общее решение вида:

$$F(u) = C_1 \ln u + C_2, \tag{13}$$

где C_1, C_2 — произвольные константы. Покажем, что решение $F = C_2 = \mathrm{const}$ соответствует стандартному определению угла (1). Действительно, вспоминая, что $F(x) = f(x, 1/x)$, приходим к заключению, что функция $f(w_1, w_2) = \mathrm{const}$ при $w_1 = x$ и $w_2 = 1/x$ и всех значениях x в случае, когда она зависит от w_1 и w_2 в виде их произведения:

$$f(w_1, w_2) = \psi(w_1 w_2). \tag{14}$$

При этом в силу (10) $\psi(1) = 0$. Вернемся теперь к уравнению (8). Используя в нем представление (14) и рассматривая получившееся уравнение на подмногообразии $\alpha_1 = \alpha_2$, приходим к уравнению вида:

$$\psi\left(\frac{\xi^2}{\xi^2+\eta^2}\right) = \psi\left(\frac{(1+\xi)^2}{(1+\xi)^2+\eta^2}\right) + \psi\left(\frac{((1+\xi)\xi+\eta^2)^2}{((1+\xi)^2+\eta^2)(\xi^2+\eta^2)}\right). \tag{15}$$

Перейдем к новым переменным:

$$u = \frac{\xi^2}{\xi^2+\eta^2}; \quad v = \frac{(1+\xi)^2}{(1+\xi)^2+\eta^2}.$$

В этих переменных уравнение (15) принимает более простой вид:

$$\psi(u) = \psi(v) + \psi((\sqrt{(v-1)(u-1)} + \sqrt{uv})^2). \tag{16}$$

Дифференцируя это уравнение последовательно по u и по v, приходим к дифференциальному следствию (16):

$$\frac{\partial^2}{\partial v \partial u}\big(\psi(\sqrt{(v-1)(u-1)} + \sqrt{uv})^2\big) = 0$$

или после некоторых элементарных преобразований к обыкновенному дифференциальному уравнению:

$$(1-\zeta^2)\bar\psi''(\zeta) - \zeta\bar\psi'(\zeta) = 0, \tag{17}$$

где $\zeta = \sqrt{(v-1)(u-1)} + \sqrt{uv}$, $\bar\psi(x) \equiv \psi(x^2)$. Уравнение (17) интегрируется элементарно и его общее решение имеет вид:

$$\bar\psi(\zeta) = A \arcsin\zeta + B \Rightarrow \psi(x) = A \arcsin\sqrt{x} + B. \tag{18}$$

С учетом условия $\psi(1) = 0$, получаем $B = -\pi A/2$, откуда приходим к окончательному виду решения:

$$\psi(x) = A(\arcsin\sqrt{x} - \pi/2) = A \arccos\sqrt{x},$$

что, с точностью до выбора единицы измерения угла, задаваемой параметром A, эквивалентно второму определению (1).

Перейдем теперь к исследованию второго независимого решения, которому в (13) соответствует логарифм. Рассмотрим общее уравнение (8) на подмногообразии $\alpha_1 = 0$:

$$f\left(\xi, \frac{\xi}{\xi^2+\eta^2}\right) = f\left(\alpha_2\xi, \frac{\xi}{\alpha_2(\xi^2+\eta^2)}\right) + f(1/\alpha_2, \alpha_2). \tag{19}$$

Если дополнительно ограничить переменные подмногообразием: $\xi/(\xi^2+\eta^2) = k/\xi$, где $k = \mathrm{const}$ и учесть, что для рассматриваемой ветви решения, как это было установлено выше, $f(x, 1/x) = C\ln x$ то соотношение (19) примет вид:

$$f(\xi, k/\xi) = f(\alpha_2\xi, k/\alpha_2\xi) + C\ln\alpha_2.$$

Вводя обозначение $\Phi_k(\xi) \equiv f(\xi, k/\xi)$, последнее уравнение можно переписать в виде:

$$\Phi_k(\alpha\xi) = \Phi_k(\xi) - C\ln\alpha,$$

для всех ξ, α и k. Последнее уравнение решается аналогично (11) и общее решение имеет вид:

$$\Phi_k(\xi) = \ln(\xi^{-C}) + B_k,$$

где B_k — произвольная функция k. Вспоминая, что $\Phi_k(\xi) = f(\xi, k/\xi)$ и сопоставляя это выражение с полученным решением, мы приходим к выводу, что функция $f(w_1, w_2)$ может зависеть от своих аргументов следующим образом (мы опускаем аддитивную константу, поскольку она соответствует уже разобранной выше ветви с арккосинусом):

$$f(w_1, w_2) = \ln w_1^A w_2^B + \varphi(w_1 w_2), \tag{20}$$

где A, B — пока еще произвольные вещественные числа, φ — произвольная функция, описывающая уже исследованную ветвь решения. Для уточнения значений констант подставим решение (20) (опуская слагаемое с φ) в общее уравнение (8). В результате придем к уравнению, которое выполняется тождественно при всех значениях переменных только при условии $A = -B$. При этом $f(w_1, w_2) = A\ln(w_1/w_2)$.

Полученные в этом разделе результаты сформулируем в виде следующего утверждения.

`Утверждение 1.` *Существует пара линейно-независимых конформно-инвариантных аддитивных выражений для угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ в евклидовой геометрии:*

$$\varphi_1(\vec{a}, \vec{b}) = \arccos\left[\frac{\eta(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}||\vec{b}|}\right]; \quad \varphi_2(\vec{a}, \vec{b}) = \ln\left[\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}\right]. \tag{21}$$

При этом

$$\varphi_1(\vec{a}, \vec{b}) = \varphi_1(\vec{b}, \vec{a}); \quad \varphi_2(\vec{a}, \vec{b}) = -\varphi_2(\vec{b}, \vec{a})$$

и общее выражение для "аддитивного конформно-инвариантного угла" в евклидовой геометрии дается суперпозицией независимых выражений:

$$\varphi(\vec{a}, \vec{b}) = C_1\varphi_1(\vec{a}, \vec{b}) + C_2\varphi_2(\vec{a}, \vec{b}),$$

где C_1, C_2 — произвольные константы.

Отметим, что повторяя почти дословно все рассуждения настоящего раздела, можно сформулировать утверждение для псевдоевклидовой плоскости, аналогичное утверждению 1.

`Утверждение 2.` *Существует пара линейно-независимых конформно-инвариантных аддитивных выражений для угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ в псевдоевклидовой геометрии (η — псевдоевклидова метрика на плоскости):*

$$\varphi_1(\vec{a}, \vec{b}) = \operatorname{arcch}\left[\frac{\eta(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}||\vec{b}|}\right]; \quad \varphi_2(\vec{a}, \vec{b}) = \ln\left[\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}\right]. \tag{22}$$

При этом

$$\varphi_1(\vec{a},\vec{b}) = \varphi_1(\vec{b},\vec{a}); \quad \varphi_2(\vec{a},\vec{b}) = -\varphi_2(\vec{b},\vec{a})$$

и общее выражение для "аддитивного конформно-инвариантного угла" в псевдоевклидовой геометрии дается суперпозицией независимых выражений:

$$\varphi(\vec{a},\vec{b}) = C_1\varphi_1(\vec{a},\vec{b}) + C_2\varphi_2(\vec{a},\vec{b}),$$

где C_1, C_2 — произвольные константы.

Строго говоря, при переходе к формулам (14) и (20) мы рассмотрели не самый общий случай, поэтому утверждение об общности выражений (21) и (22) требует дополнительного обоснования. Дело в том, что добавка вида $(w_1w_2-1)\varphi(w_1,w_2)$ к функциям (14) и (20), где $\varphi(w_1,w_2)$ конечна при $w_1w_2=1$, не меняет условий, которые были выведены на эти функции ранее, поскольку эта добавка обращается в нуль при $w_1w_2=1$. Докажем, что $\varphi\equiv 0$. Подставляя $f=(w_1w_2-1)\varphi(w_1,w_2)$ в общее уравнение (8), после некоторых упрощений получим:

$$\frac{\eta^2}{\xi^2+\eta^2}\varphi\left(\xi,\frac{\xi}{\xi^2+\eta^2}\right) = \frac{(\alpha_2\eta)^2}{(\alpha_1+\alpha_2\xi)^2+(\alpha_2\eta)^2}\varphi\left(\alpha_1+\alpha_2\xi,\frac{\alpha_1+\alpha_2\xi}{(\alpha_1+\alpha_2\xi)^2+(\alpha_2\eta)^2}\right) + \tag{23}$$

$$\frac{(\alpha_1\eta)^2}{((\alpha_1+\alpha_2\xi)^2+(\alpha_2\eta)^2)(\xi^2+\eta^2)}\varphi\left(\frac{(\alpha_1+\alpha_2\xi)\xi+\alpha_2\eta^2}{(\alpha_1+\alpha_2\xi)^2+(\alpha_2\eta)^2},\frac{(\alpha_1+\alpha_2\xi)\xi+\alpha_2\eta^2}{\xi^2+\eta^2}\right).$$

Рассмотрим это уравнение сначала на подмногообразии $\alpha_1=0$. После сокращения на общий множитель, получим уравнение:

$$\varphi\left(\xi,\frac{\xi}{\xi^2+\eta^2}\right) = \varphi\left(\alpha_2\xi,\frac{\xi}{\alpha_2(\xi^2+\eta^2)}\right),$$

откуда в точности следует, что функция φ может зависеть от своих аргументов только в их комбинации произведения: $\varphi=\varphi(w_1w_2)$. Подставляя такое представление в уравнение (23) и рассматривая это уравнение на подмногообразии $\xi=0$, придем после переобозначения переменных к уравнению:

$$\varphi(0) = y\varphi(x) + x\varphi(y).$$

Это уравнение может выполняться тождественно при всех x и y только при $\varphi\equiv 0$, что и требовалось доказать.

Таким образом, выражения (21) и (22) в действительности представляют собой самые общие выражения аддитивных углов на евклидовой и псевдоевклидовой плоскости соответственно. При этом, как легко видеть, аддитивность $\varphi_2(\vec{a},\vec{b})$ выполняется безусловно, т. е. для всякой тройки векторов, а не только для компланарной тройки.

3 Аддитивный бингл в $\mathcal{H}_3$: аффинная версия

В пространстве Бервальда-Моора существует естественная возможность ввести два типа углов: углы, построенные на паре векторов (*бинглы*) и углы, построенные, на тройке векторов (*тринглы*). Последние представляют собой принципиально новые объекты, связанные с кубичным характером метрики (1.1) в $\mathcal{H}_3$, у которых нет прямых аналогов в евклидовой геометрии. В настоящем разделе мы займемся систематическим отысканием бинглов в $\mathcal{H}_3$.

По аналогии с евклидовым случаем, рассмотрим элементарные конформно-инвариантные комбинации, построенные на паре векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ с помощью метрики Бервальда-Моора ${}^3G$:

$$w_a^a \equiv \frac{{}^3G(\vec{a},\vec{a},\vec{b})}{{}^3G(\vec{a},\vec{a},\vec{a})}; \quad w_b^a \equiv \frac{{}^3G(\vec{a},\vec{a},\vec{b})}{{}^3G(\vec{b},\vec{b},\vec{b})}; \quad w_a^b \equiv \frac{{}^3G(\vec{a},\vec{b},\vec{b})}{{}^3G(\vec{a},\vec{a},\vec{a})}; \quad w_b^b \equiv \frac{{}^3G(\vec{a},\vec{b},\vec{b})}{{}^3G(\vec{b},\vec{b},\vec{b})}.$$

Переходя к координатам векторов: $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ и вводя обозначения $\xi_i \equiv b_i/a_i$ $(i = 1, 2, 3)$, получаем:

$$w_a^a = \frac{1}{3}(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3); \quad w_b^a = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\xi_1\xi_2} + \frac{1}{\xi_1\xi_3} + \frac{1}{\xi_2\xi_3}\right); \quad w_a^b = \frac{1}{3}(\xi_1\xi_2 + \xi_1\xi_3 + \xi_2\xi_3);$$

$$w_b^b = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\xi_1} + \frac{1}{\xi_2} + \frac{1}{\xi_3}\right).$$

С учетом того что,

$$\frac{w_a^a}{w_b^a} = \xi_1\xi_2\xi_3 \quad \text{и} \quad w_b^b = \frac{w_a^b w_b^a}{w_a^a},$$

в качестве независимых конформно-инвариантных переменных можно выбрать три симметрических полинома:

$$w_1^{ab} = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3; \quad w_2^{ab} = \xi_1\xi_2 + \xi_1\xi_3 + \xi_2\xi_3; \quad w_3^{ab} = \xi_1\xi_2\xi_3, \tag{24}$$

при этом угол $\varphi(\vec{a},\vec{b}) = f(w_1^{ab}, w_2^{ab}, w_3^{ab})$, где f — функция, подлежащая определению.

По аналогии с евклидовым случаем, свойство аддитивности угла в пространстве $\mathcal{H}_3$ следует формулировать не на произвольной тройке векторов, а на тройке, связанной некоторым соотношением. В случае евклидовой или псевдоевклидовой геометрии таким соотношением выступало соотношение компланарности. В геометрии $\mathcal{H}_3$ мы, вообще говоря, не можем ожидать, что плоскости в ней играют такую же роль, как в геометриях с квадратичной метрикой. Тем не менее, в настоящем разделе мы исследуем возможность построения аддитивного угла для тройки компланарных в обычном смысле векторов. Будем обозначать такую ситуацию *аффинной версией аддитивного угла.*

Пусть третий вектор $\vec{c}$ лежит в плоскости векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$\vec{c} = \alpha_1\vec{a} + \alpha_2\vec{b} = (\alpha_1 a_1 + \alpha_2 b_1, \alpha_1 a_2 + \alpha_2 b_2, \alpha_1 a_3 + \alpha_2 b_3). \tag{25}$$

Условие аддитивности принимает вид:

$$f(w_1^{ab}, w_2^{ab}, w_3^{ab}) = f(w_1^{ac}, w_2^{ac}, w_3^{ac}) + f(w_1^{cb}, w_2^{cb}, w_3^{cb}), \tag{26}$$

которое должно иметь место для всех (неизотропных) векторов $\vec{a}, \vec{b}$ и всякого вектора $\vec{c}$ вида (25). Вычисляя w_i^{ac} и w_i^{cb} с помощью (25) и подставляя результат в (26), приходим после некоторых упрощений к следующему функциональному уравнению:

$$f(w_1, w_2, w_3) = f(3\alpha_1 + \alpha_2 w_1, 3\alpha_1^2 + \alpha_2^2 w_2 + 2\alpha_1\alpha_2 w_1, \Delta) + \tag{27}$$
$$f\left(\frac{\alpha_1^2 w_1 + 3\alpha_2^2 w_3 + 2\alpha_1\alpha_2 w_2}{\Delta}, \frac{\alpha_1 w_2 + 3\alpha_2 w_3}{\Delta}, \frac{w_3}{\Delta}\right),$$

выражающее в явном координатном виде условие аддитивности угла. Здесь

$$\Delta \equiv \alpha_1^3 + \alpha_2^3 w_3 + \alpha_1^2\alpha_2 w_1 + \alpha_1\alpha_2^2 w_2.$$

Рассмотрим соотношение (27), которое как и прежде, должно выполняться при всех значениях пяти переменных $w_1, w_2, w_3, \alpha_1, \alpha_2$, на двумерном подмногообразии, определяемом соотношениями:

$$w_1 = -\frac{3\alpha_1}{\alpha_2}; \quad w_2 = \frac{3\alpha_1^2}{\alpha_2^2}; \quad w_3 = \frac{1-\alpha_1^3}{\alpha_2^3}.$$

На этом подмногообразии уравнение (27) принимает следующий более простой вид:

$$f\left(-\frac{3\alpha_1}{\alpha_2}, \frac{3\alpha_1^2}{\alpha_2^2}, \frac{1-\alpha_1^3}{\alpha_2^3}\right) = f(0,0,1) + f\left(\frac{3}{\alpha_2}, \frac{3}{\alpha_2^2}, \frac{1-\alpha_1^3}{\alpha_2^3}\right)$$

или, вводя переменные $\alpha_1 = x, \alpha_2 = 1/y$:

$$f(-3xy, 3x^2y^2, (1-x^3)y^3) = f(0,0,1) + f(3y, 3y^2, (1-x^3)y^3).$$

Полагая в этом уравнении $y = 0$, приходим к равенству $f(0,0,1) = 0$, так что, на самом деле, мы имеем дело с уравнением:

$$f(-3xy, 3x^2y^2, (1-x^3)y^3) = f(3y, 3y^2, (1-x^3)y^3).$$

Дифференцируя обе части этого уравнения по x и полагая затем $x = -1$ после переобозначения переменных приходим к уравнению в частных производных первого порядка:

$$x_1 \frac{\partial f(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1} + 2x_2 \frac{\partial f(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_2} = 0.$$

Интегрируя его методом характеристик, приходим к следующей зависимости:

$$f(w_1, w_2, w_3) = \psi(w_1^2/w_2, w_3), \tag{28}$$

где ψ — некоторая функция, зависящая уже только от двух переменных.

Подставляя эту зависимость в исходное уравнение (27) и рассматривая его на подмногообразии $\alpha_1 = 0$, приходим теперь к следующему уравнению:

$$\psi\left(\frac{w_1^2}{w_2}, w_3\right) = \psi\left(\frac{w_1^2}{w_2}, \alpha_2^3 w_3\right) + \psi\left(3; \frac{1}{\alpha_2^3}\right).$$

Из этого соотношения следует, что относительно второго аргумента зависимость логарифмическая, и, таким образом:

$$\psi(w_1^2/w_2, w_3) = \chi(w_1^2/w_2) \ln w_3 + C(w_1^2/w_2).$$

Для определения оставшихся функций χ и C подставим это выражение в предыдущее. Окончательно, находим:

$$C = 0, \quad \chi = \text{const}. \tag{29}$$

Для полноты картины остается исследовать случаи, когда аддитивный угол с самого начала предполагается зависящим не от всех переменных w_1, w_2, w_3, а только от их части. Предположим, что ${}^3\varphi(\vec{a}, \vec{b}) = f(w_1, w_2)$. Пользуясь общей формулой (27), приходим в этом случае к условию аддитивности вида:

$$f(w_1, w_2) = f(3\alpha_1 + \alpha_2 w_1, 3\alpha_1^2 + \alpha_2^2 w_2 + 2\alpha_1\alpha_2 w_1) + \tag{30}$$

$$f\left(\frac{\alpha_1^2 w_1 + 3\alpha_2^2 w_3 + 2\alpha_1\alpha_2 w_2}{\Delta}, \frac{\alpha_1 w_2 + 3\alpha_2 w_3}{\Delta}\right).$$

Дифференцируя частным образом это соотношение по w_3, приходим к уравнению:

$$\frac{\partial f}{\partial u_1}(3\alpha_1^2\Delta - (\alpha_1^2 w_1 + 3\alpha_2^2 w_3 + 2\alpha_1\alpha_2 w_2)\alpha_2^3) + \frac{\partial f}{\partial u_2}(3\alpha_2\Delta - (\alpha_1 w_2 + 3\alpha_2 w_3)\alpha_2^3) = 0,$$

где посредством u_1 и u_2 обозначены аргументы функции f во втором слагаемом правой части (42). Рассмотрим это уравнение на подмногообразии $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$:

$$\alpha\frac{\partial f}{\partial u_1}\left(\frac{w_1+3w_3+2w_2}{\alpha(1+w_1+w_2+w_3)}, \frac{w_2+3w_3}{\alpha(1+w_1+w_2+w_3)}\right)(3+2w_1+w_2)+$$

$$\frac{\partial f}{\partial u_2}\left(\frac{w_1+3w_3+2w_2}{\alpha(1+w_1+w_2+w_3)}, \frac{w_2+3w_3}{\alpha(1+w_1+w_2+w_3)}\right)(3+3w_1+2w_2) = 0.$$

Переходя к новым переменным u_1 и u_2, перепишем уравнение в виде:

$$\alpha(u_1\alpha - 3)\frac{\partial f}{\partial u_1} + (u_2\alpha - 3)\frac{\partial f}{\partial u_2} = 0.$$

Решая его методом характеристик, находим, что

$$f(u_1, u_2) = F\left(\frac{u_1 - 3/\alpha}{u_2 - 3/\alpha^2}\right).$$

Но универсальная функция угла не может зависеть от координат α_1 и α_2 произвольного третьего вектора. Отсюда приходим к тривиальному выводу, что $f = \mathrm{const}$.

Пусть теперь ${}^3\varphi(\vec{a}, \vec{b}) = f(w_1, w_3)$. Пользуясь общей формулой (27), приходим в этом случае к условию аддитивности вида:

$$f(w_1, w_3) = f(3\alpha_1 + \alpha_2 w_1, \Delta) + f\left(\frac{\alpha_1^2 w_1 + 3\alpha_2^2 w_3 + 2\alpha_1\alpha_2 w_2}{\Delta}, \frac{w_3}{\Delta}\right). \tag{31}$$

Рассмотрим это уравнение на подмногообразии: $3\alpha_1 + \alpha_2 w_1 = 0$, $\Delta = 1$. Эту пару уравнений можно рассматривать как определяющую α_1 и α_2. Выражая из уравнений подмногообразия эти параметры, подставляя их в уравнение (31) и дифференцируя частным образом обе его части по w_2, приходим к уравнению вида:

$$\frac{\partial f}{\partial u_1} \cdot (\dots) = 0,$$

где скобки с точками заменяют громоздкое выражение, которое зависит от w_1, w_2, w_3 и не обращается всюду в нуль. Отсюда вытекает, что f не зависит от u_1 и мы приходим к случаю зависимости от одного аргумента, который рассмотрим ниже.

Пусть теперь ${}^3\varphi(\vec{a}, \vec{b}) = f(w_2, w_3)$. Снова пользуясь общей формулой (27), приходим в этом случае к условию аддитивности вида:

$$f(w_2, w_3) = f(3\alpha_1 + \alpha_2^2 w_2 + 2\alpha_1\alpha_2 w_1, \Delta) + f\left(\frac{\alpha_1 w_2 + 3\alpha_2 w_3}{\Delta}, \frac{w_3}{\Delta}\right). \tag{32}$$

Переходя аналогично предыдущему случаю на подмногообразие $\Delta = 1$, $\alpha_1 w_2 + 3\alpha_2 w_3 = 0$, получаем снова: $\partial f/\partial u_1 = 0$ — случай зависимости от одной переменной.

В предположении $f = f(w_1)$ имеем условие аддитивности в виде:

$$f(w_1) = f(3\alpha_1 + \alpha_2 w_1) + f\left(\frac{\alpha_1^2 w_1 + 3\alpha_2^2 w_3 + 2\alpha_1\alpha_2 w_2}{\Delta}\right),$$

откуда, дифференцируя, например, по w_2, приходим к равенству $f' = 0$ и $f = \text{const}$. Аддитивность будет выполняться, только при $f = 0$. Аналогично, предполагая $f = f(w_2)$, приходим к уравнению аддитивности:

$$f(w_2) = f(3\alpha_1^2 + \alpha_2^2 w_2 + 2\alpha_1\alpha_2 w_1) + f\left(\frac{\alpha_1 w_2 + 3\alpha_2 w_3}{\Delta}\right).$$

Переходя на подмногообразие $\alpha_1 w_2 + 3\alpha_2 w_3 = 0$, (задающее к примеру α_1), и дифференцируя уравнение по w_2, приходим, как и ранее, к $f' = 0$ и $f = 0$.

Наконец, если $f = f(w_3)$, то общее условие (42) приводит к уравнению

$$f(w_3) = f(\Delta) + f(w_3/\Delta),$$

которое имеет общее решение вида (29).

Сформулируем полученный результат в виде утверждения.

Утверждение 3. *Единственный (в аффинной версии) аддитивный бингл в $\mathcal{H}_3$ дается выражением:*

$$^3\varphi(\vec{a}, \vec{b}) = A \ln |w_3| = A \ln \left| \frac{^3G(\vec{b}, \vec{b}, \vec{b})}{^3G(\vec{a}, \vec{a}, \vec{a})} \right|. \tag{33}$$

Отметим, что выражение (33) является финслеровым аналогом угла φ_2 в (21). Также, как и в (псевдо)евклидовом случае, $^3\varphi$ аддитивен независимо от условия компланарности. Существенным результатом, вытекающим из утверждения 3, является отсутствие в $\mathcal{H}_3$ аффинного бингла, аналогичного φ_1 в (21).

4 Аддитивный бингл в $\mathcal{H}_3$: нелинейная версия.

Если отказаться от дополнительного условия компланарности векторов, для которых справедлив принцип аддитивности углов, то число возможных обобщений значительно расширяется.

4.1 Существование нетривиального аддитивного бингла в $\mathcal{H}_3$ в нелинейной версии

Для доказательства существования нетривиального аддитивного бингла достаточно привести один пример его реализации в явном виде.

Рассмотрим в качестве "обобщенного условия компланарности" следующую, вообще говоря, нелинейную связь промежуточного вектора $\vec{c}$ с векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$\vec{c} = \phi(w_1^{ab}, w_2^{ab}, w_3^{ab})\vec{a},$$

где ϕ — произвольная функция трех аргументов, w_i даются формулами (24), при этом, как и раньше, $\xi_i = b_i/a_i$.

Прямой проверкой можно убедиться, что функция

$$^3\varphi_{(A,B,C)}(\vec{a}, \vec{b}) \equiv \ln |(w_1^{ab})^A (w_2^{ab})^B (w_3^{ab})^C| - (A + B) \ln 3 \tag{34}$$

удовлетворяет условию аддитивности (26) и определяет конформно-инвариантный обобщенный угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, зависящий от произвольных вещественных параметров A, B, C. Отметим, что несмотря на некоторую искусственность примера (вектор $\vec{c}$ должен быть, фактически, коллинеарен первому из векторов), выражение для угла оказывается нетривиальным:

1. этот угол, вообще говоря, несимметричен:

$$^3\varphi_{(A,B,C)}(\vec{b},\vec{a}) = {}^3\varphi_{(B,A,-C-A-B)}(\vec{a},\vec{b});$$

   Симметрия угла имеет место только при условии $A = B = -C$;
2. угол между двумя равными векторами равен нулю:

$$^3\varphi(\vec{a},\vec{a}) = 0,$$

   а между коллинеарными векторами выражается через их коэффициент подобия:

$$^3\varphi(\vec{a},\vec{\lambda} a) = (A + 2B + 3C)\ln\lambda;$$

   Равенство нулю угла между коллинеарными векторами имеет место лишь при $A + 2B + 3C = 0$. В частности, это условие выполняется автоматически при выполнении условия симметрии угла.

Очевидно, что рассматриваемое нами 3-параметрическое семейство углов является нетривиальным финслеровым обобщением угла φ_2 евклидовой геометрии.

4.2 Аддитивный бингл в $\mathcal{H}_3$ с аддитивностью углов для 3-ортогональных векторов

В этом параграфе мы рассмотрим в качестве "обобщенного условия компланарности" условие 3-ортогональности вида:

$$^3G(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = 0, \tag{35}$$

которое является "внутренним" т. е. естественным для геометрии Бервальда-Моора в $\mathcal{H}_3$. Другими словами, мы будем искать функцию угла, аддитивную на любой тройке векторов, удовлетворяющей условию (35). Это условие в координатах имеет вид:

$$c_1(a_2b_3 + a_3b_2) + c_2(a_1b_3 + a_3b_1) + c_3(a_2b_1 + a_1b_2) = 0. \tag{36}$$

Выражение (36) имеет формальный вид обычного евклидова условия ортогональности вектора $\vec{c}$ и "вектора" $\vec{a}\bigcirc\vec{b}$ с компонентами: $(a_2b_3 + a_3b_2, a_1b_3 + a_3b_1, a_2b_1 + a_1b_2)$. В силу известных свойств векторного произведения общее выражение для вектора $\vec{c}$, удовлетворяющего условию 3-ортогональности, можно записать через произвольный вектор $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ и операцию евклидова векторного произведения:

$$\vec{c} = \vec{\alpha}\times(\vec{a}\bigcirc\vec{b}).$$

Представляя компоненты вектора $\vec{\alpha}$ в виде: $\alpha_i = k_i/a_i$, где k_i — безразмерные константы и вычисляя компоненты векторного произведения, находим явный общий вид компонент $\vec{c}$, автоматически удовлетворяющих условию 3-ортогональности с некоторыми заданными векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$c_1 = k_2(a_1\xi_2 + b_1) - k_3(a_1\xi_3 + b_1);\ c_2 = k_3(a_2\xi_3 + b_2) - k_1(a_2\xi_1 + b_2);\ c_3 = k_1(a_3\xi_1 + b_3) - k_2(a_3\xi_2 + b_3).$$

Вычисление с помощью этих формул конформных инвариантов, входящих в (26), приводит к следующим выражениям:

$$w_1^{ac} = k_1(\xi_3 - \xi_2) + k_2(\xi_1 - \xi_3) + k_3(\xi_2 - \xi_1);$$

$$w_2^{ac} = -k_1^2(\xi_1+\xi_2)(\xi_1+\xi_3) - k_2^2(\xi_1+\xi_2)(\xi_2+\xi_3) - k_3^2(\xi_2+\xi_3)(\xi_1+\xi_3)+$$
$$2k_1k_2(\xi_1+\xi_2)\xi_3 + 2k_1k_3(\xi_1+\xi_3)\xi_2 + 2k_2k_3(\xi_2+\xi_3)\xi_1;$$
$$w_3^{ac} = k_1k_2(\xi_1+\xi_2)^2(k_2(\xi_2+\xi_3)-k_1(\xi_1+\xi_3)) + k_1k_3(\xi_1+\xi_3)^2(k_1(\xi_1+\xi_2)-k_3(\xi_2+\xi_3))+$$
$$k_2k_3(\xi_2+\xi_3)^2(k_3(\xi_1+\xi_3)-k_2(\xi_1+\xi_2)).$$
$$w_1^{cb} = \frac{k_1\xi_1^2(\xi_2-\xi_3)+k_2\xi_2^2(\xi_3-\xi_1)+k_3\xi_3^2(\xi_1-\xi_2)}{\xi_1\xi_2\xi_3};$$
$$w_2^{cb} = \frac{2k_1k_2}{\xi_3}(\xi_1+\xi_2) + \frac{2k_1k_3}{\xi_2}(\xi_1+\xi_3) + \frac{2k_2k_3}{\xi_1}(\xi_2+\xi_3);$$
$$w_3^{cb} = \frac{k_1k_2}{\xi_1\xi_2\xi_3}(\xi_1+\xi_2)^2(k_2(\xi_2+\xi_3)-k_1(\xi_1+\xi_3)) + \frac{k_1k_3}{\xi_1\xi_2\xi_3}(\xi_1+\xi_3)^2(k_1(\xi_1+\xi_2)-k_3(\xi_2+\xi_3))+$$
$$\frac{k_2k_3}{\xi_1\xi_2\xi_3}(\xi_2+\xi_3)^2(k_3(\xi_1+\xi_3)-k_2(\xi_1+\xi_2)).$$

Условие аддитивности (26) после подстановки в него вычисленных инвариантов принимает громоздкий вид. Для его упрощения сразу перейдем на подмногообразие $k_1 = k_2 = k_3 = k$. При этом условие аддитивности в обозначениях раздела (3) принимает более симметричный вид:

$$f(w_1,w_2,w_3) = f(0,k^2(3w_2-w_1^2),-k^3w) + f\left(\frac{kw}{w_3}, \frac{2k^2(w_1w_2-3w_3)}{w_3}, \frac{-k^3w}{w_3}\right). \qquad (37)$$

где $w = (\xi_1-\xi_2)(\xi_2-\xi_3)(\xi_1-\xi_3)$. Далее, переходя в уравнении (37) на подмногообразие $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = \xi$, приходим к уравнению вида:

$$f(3\xi, 3\xi^2, \xi^3) = f(0,0,0) + f(0,12k^2,0), \qquad (38)$$

откуда следует, во-первых, что функция f не зависит от своего второго аргумента, и, во-вторых, а допустимая зависимость этой функции от оставшихся двух переменных имеет вид: $f(w_1,w_3) = \Phi(w_1^3/w_3)$.

Подставляя такое представление в исходное уравнение (37), мы приходим к более простому уравнению вида:

$$\Phi\left(\frac{w_1^3}{w_3}\right) = \Phi(0) + \Phi\left(-\frac{w^2}{w_3^2}\right). \qquad (39)$$

Поскольку w^2 — симметрический полином шестого порядка, он должен выражаться через полиномы w_1, w_2, w_3. Несложные, но несколько громоздкие вычисления приводят к следующему выражению для w^2:

$$w^2 = -4w_2^3 - 27w_3^2 + w_1^2w_2^2 - 4w_1^3w_3 + 18w_1w_2w_3.$$

Очевидно, что уравнение (39) не может иметь решения Φ для произвольных значений w_1, w_2, w_3, если только не ограничиться подмногообразием переменных вида $w_2 = w_2(w_1, w_3)$, поскольку левая часть не зависит от w_2, а правая существенно зависит. Из соображений однородности такую связь можно записать в виде:

$$w_2 = w_1^2\phi(w_1^3/w_3),$$

где ϕ — произвольная функция. Подставляя такое представление в предыдущее уравнение и затем результат в уравнение (39), приходи к уравнению аддитивности вида:

$$\Phi(4x^2\phi^3(x) - x^2\phi^2(x) - 18x\phi(x) + 4x + 27) = \Phi(x) - \Phi(0),$$

где $x = w_1^3/w_3$. Полагая $\phi(x)$ решением уравнения:

$$4x^2\phi^3(x) - x^2\phi^2(x) - 18x\phi(x) + 4x + 27 = \psi(x),$$

уравнение аддитивности можно привести к общему виду:

$$(\Phi \circ \psi)(x) = \Phi(x) - \Phi(0), \tag{40}$$

которое определяет, вообще говоря, нелинейный гомоморфизм дискретной подгруппы диффеоморфизмов $\psi^n\colon R \to R$ в группу трансляций в пространстве углов.

Рассмотрим две явных реализации этого гомоморфизма. Самый простой и естественный вид подмногообразия задается соотношением $w_2 = \xi_1\xi_2 + \xi_1\xi_3 + \xi_2\xi_3 = 0$. При этом уравнение (40) принимает вид:

$$\Phi(x) = \Phi(0) + \Phi(4x + 27),$$

где $x = w_1^3/w_3$. Решением этого уравнения является функция:

$$\Phi(x) = \ln\left(1 + \frac{x}{9}\right) - \ln 4.$$

Другое подмногообразие задается функцией $\phi(x)$, являющейся решением уравнения:

$$4x^2\phi^3(x) - x^2\phi^2(x) - 18x\phi(x) + 4x + 27 = \frac{d(1-bc)x - bd^2}{c(ad-1)x + ad^2}, \tag{41}$$

где a, b, c, d — произвольные вещественные числа. Прямой проверкой нетрудно показать, что гомоморфизм дробно-линейных преобразований в группу трансляций углов осуществляется решением Φ дробно-линейного вида:

$$\Phi(x) = \frac{ax + b}{cx + d}.$$

Сформулируем полученный результат в виде утверждения.

`Утверждение 4.` *Аддитивный бингл в $\mathcal{H}_3$ с "обобщенным условием компланарности" в форме условия 3-ортогональности существует при следующих (достаточных, но не необходимых!) условиях:*

1) пара векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ связана некоторым соотношением вида $w_2 = w_2(w_1, w_3)$.

2) промежуточный вектор $\vec{c}$ ортогонален (в евклидовом смысле!) вектору

$$\vec{a} \bigcirc \vec{b} = (a_2b_3 + a_3b_2, a_1b_3 + a_3b_1, a_2b_1 + a_1b_2)$$

и вектору $(\vec{a})^{-1} \equiv (1/a_1, 1/a_2, 1/a_3)$.

Для пары $\vec{a}$ и $\vec{b}$, удовлетворяющей условию 1, условие аддитивности бингла эквивалентно существованию гомоморфизма Φ дискретной подгруппы группы диффеоморфизмов вещественной прямой с определяющим уравнением (40). Для подмногообразия $w_2 = 0$ и подмногообразия вида $w_2 = w_1^2\phi(w_1^3/w_3)$, где функция ϕ определяется уравнением (41), выражения для бинглов соответственно имеют следующий вид:

$${}^3\varphi_1(\vec{a}, \vec{b}) = \ln\left(1 + \frac{w_1^3}{9w_3}\right) - \ln 4; \quad {}^3\varphi_2(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{aw_1^3 + bw_3}{cw_1^3 + dw_3}.$$

Особенностью полученных решений является то обстоятельство, что аддитивный бингл существует для пар векторов, подчиненных некоторому условию (5-мерная поверхность в 6-мерном пространстве или 2-мерная поверхность в 3-мерном проективном пространстве координат векторов) — в евклидовом пространстве аддитивный угол существует между любыми векторами; при этом аддитивность имеет место для однопараметрического семейства промежуточных векторов — в евклидовом пространстве семейство промежуточных векторов двухпараметрическое.

4.3 Нелинейное "условие компланарности" с заданным аддитивным бинглом

В этом разделе мы сформулируем задачу о нахождении аддитивного бингла в обратную сторону: требуя, чтобы некоторое конкретное выражение для бингла было аддитивным, мы найдем "условие компланарности", которое обеспечивает эту аддитивность. В такой формулировке задачи об аддитивном бингле проблема решения функциональных уравнений аддитивности полностью отсутствует.

Итак, пусть функция $f(w_1^{ab}, w_2^{ab}, w_3^{ab})$ бингла между парой векторов задана и пусть условие аддитивности бинглов с некоторым промежуточным вектором $\vec{c}$:

$$f(w_1^{ab}, w_2^{ab}, w_3^{ab}) = f(w_1^{ac}, w_2^{ac}, w_3^{ac}) + f(w_1^{cb}, w_2^{cb}, w_3^{cb}), \tag{42}$$

выполняется. Требуется найти зависимость $\vec{c} = \vec{c}(\vec{a}, \vec{b})$, которая бы обеспечивала равенство (42). В компонентах эта зависимость сводится к трем функциям от шести переменных. Если подходить к задаче совершенно формально, то она всегда имеет бесконечное множество решений. Действительно, задавая произвольно две функции c^i из трех, уравнение (42) можно рассматривать как уравнение на оставшуюся третью функцию, которое, за исключением вырожденных случаев, всегда имеет (возможно неявное) решение. Разумеется, интерес представляют "условия компланарности", обладающие определенным набором базовых свойств: однородность, ковариантность, симметричность и т. д. Примеры соотношений именно такого рода рассмотрены в предыдущих подразделах этого раздела.

В качестве нетривиального примера рассмотрим небольшое обобщение соотношения компланарности, описанного в разделе 4.1. Результат сформулируем в виде утверждения, справедливость которого проверяется непосредственной проверкой.

Утверждение 4. *Бингл вида*

$${}^3\varphi(\vec{a}, \vec{b}) = \ln[(w_1^{ab})^A (w_2^{ab})^B (w_3^{ab})^C] + \ln D, \tag{43}$$

где A, B, C, D — произвольные вещественные константы ($D > 0$), становится аддитивным при "условии компланарности", задаваемом системой уравнений:

$$w_1^{ac} w_1^{cb} = \gamma^B D^{-1/A} (w_1^{ab})^{1-\beta B/A} (w_2^{ab})^{\alpha} (w_3^{ab})^{-kB}; \quad w_2^{ac} w_2^{cb} = \gamma^{-A} (w_1^{ab})^{\beta} (w_2^{ab})^{1-\alpha A/B} (w_3^{ab})^{kA},$$

где α, β, γ — произвольные вещественные числа. При этом первое из "уравнений компланарности" следует игнорировать, если $A = 0$, второе — если $B = 0$, а в случае $A = B = 0$ следует игнорировать оба уравнения и бингл (43) будет аддитивным безусловно.

В случае $A \cdot B \neq 0$ многообразие допустимых промежуточных векторов одномерно, в случае когда $AB = 0$ и $A^2 + B^2 \neq 0$ — двумерно.

Рассмотрим в качестве примера случай: $A = 1$, $B = C = \alpha = 0$, $D = 1/3$. Условие компланарности в явном виде приобретает вид:

$$\left(\frac{c_1}{a_1} + \frac{c_2}{a_2} + \frac{c_3}{a_3}\right)\left(\frac{b_1}{c_1} + \frac{b_2}{c_2} + \frac{b_3}{c_3}\right) = 3\left(\frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2} + \frac{b_3}{a_3}\right)$$

или вводя обозначения $x_i = c_i/a_i$, $\xi_i = b_i/a_i$,

$$(x_1 + x_2 + x_3)\left(\frac{\xi_1}{x_1} + \frac{\xi_2}{x_2} + \frac{\xi_3}{x_3}\right) = 3(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3).$$

Последнее уравнение задает в области $x_i > 0$ коническую поверхность, которая получается некоторым вращением луча, исходящего из точки $x_i = 0$. Переходя с помощью параметрических уравнений

$$x_1 = \frac{1}{3} + u + v; \quad x_2 = \frac{1}{3} - u; \quad x_3 = \frac{1}{3} - v,$$

на плоскость $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, приходим к уравнению сечения полученной конической поверхности этой плоскостью:

$$\frac{(u+v)\xi_1}{1/3+u+v} + \frac{u\xi_2}{u-1/3} + \frac{v\xi_3}{v-1/3} = 0.$$

Полученная кривая имеет 4-ый порядок. Для случая $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3$ ее вид представлен на рис. 1.

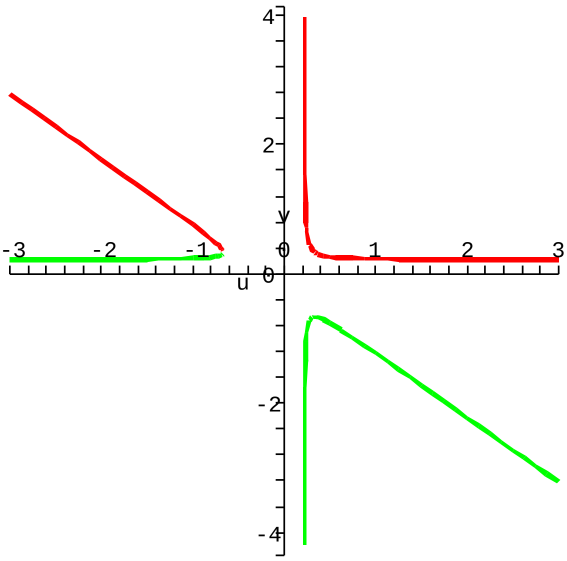

Рис. 1. Сечение поверхности компланарности плоскостью $x_1+x_2+x_3 = 1$. Начало системы координат (v, u) совпадает с точкой пересечения этой плоскости прямой $x_1 = x_2 = x_3$.

5 Аддитивные тринглы в $\mathcal{H}_3$.

Конформно-инвариантный аддитивный тригл $\varphi\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, построенный на трех векторах, может зависеть только от следующих 9 независимых конформных инвариантов:

$$w_1^{ab} = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3; \quad w_1^{ac} = \eta_1 + \eta_2 + \eta_3; \quad w_1^{bc} = \frac{\eta_1}{\xi_1} + \frac{\eta_2}{\xi_2} + \frac{\eta_3}{\xi_3};$$

$$w_2^{ab} = \xi_1\xi_2 + \xi_2\xi_3 + \xi_1\xi_3; \quad w_2^{ac} = \eta_1\eta_2 + \eta_2\eta_3 + \eta_1\eta_3; \quad w_2^{bc} = \frac{\eta_1\eta_2}{\xi_1\xi_2} + \frac{\eta_2\eta_3}{\xi_2\xi_3} + \frac{\eta_1\eta_3}{\xi_1\xi_3};$$

$$w_3^{ab} = \xi_1\xi_2\xi_3; \quad w_3^{ac} = \eta_1\eta_2\eta_3;$$

$$w_4^{abc} = \frac{{}^3G(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})}{{}^3G(\vec{a}, \vec{a}, \vec{a})} = \xi_2\eta_3 + \xi_3\eta_2 + \xi_1\eta_3 + \xi_3\eta_1 + \xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1.$$

Таким образом, в общем случае имеем:

$$\varphi(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = f(w_1^{ab}, w_1^{ac}, w_1^{bc}, w_2^{ab} w_2^{ac}, w_2^{bc}, w_3^{ab}, w_3^{ac}, w_4^{abc}).$$

Запись условия аддитивности для тригла уже не является столь очевидной, поскольку не имеет аналогов в евклидовой геометрии[1]. Не претендуя на исчерпывающую полноту, запишем несколько наиболее простых и симметричных вариантов условия аддитивности тринглов ($\vec{d}$ — промежуточный 4-ый вектор):

[1] Отметим, что геометрия телесных углов, по существу, сводится к геометрии плоских углов и потому не может рассматриваться как евклидов вариант геометрии тринглов.

1. $\varphi(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \varphi(\vec{d},\vec{b},\vec{c}) + \varphi(\vec{a},\vec{d},\vec{c}) + \varphi(\vec{a},\vec{b},\vec{d})$;
2. $\varphi(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \varphi(\vec{a},\vec{b},\vec{d}) + \varphi(\vec{b},\vec{c},\vec{d}) + \varphi(\vec{c},\vec{a},\vec{d})$;
3. $\varphi(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \sum\limits_{\nu}(-1)^{\sigma_\nu}\varphi(S_\nu(\widehat{\vec{a},\vec{b},\vec{c}},\vec{d}))$, где S_ν — всевозможные перестановки троек векторов, которые получаются из четверки $(\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d})$ отбрасыванием одного из первых трех векторов (шляпка $\widehat{\quad}$ и обозначает это отбрасывание), а четность σ_ν перестановки S_ν равна четности перестановки векторов в аргументе φ по отношению к исходной перестановке $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$, если вектор $\vec{d}$ заменить на недостающий третий вектор из исходной тройки в этом аргументе.
4. $\varphi(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \varphi(\vec{a},\vec{d},\vec{d}) + \varphi(\vec{d},\vec{b},\vec{d}) + \varphi(\vec{d},\vec{d},\vec{c})$.

Сразу можно отметить, что последний вариант условия аддитивности допускает простое обобщение безусловно-инвариантного бингла (33):

$$^3\varphi_{(A,B)}(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \ln[(w_3^{ab})^A(w_3^{ac})^B],$$

удовлетворяющему ряду свойств:

$$^3\varphi_{(A,B)}(\vec{a},\vec{a},\vec{a}) = 0; \quad ^3\varphi_{(A,B)}(\vec{a},\vec{a},\vec{c}) = B^3\varphi(\vec{a},\vec{c}); \quad ^3\varphi_{(A,B)}(\vec{a},\vec{c},\vec{b}) = {}^3\varphi_{(B,A)}(\vec{a},\vec{b},\vec{c});$$

$$^3\varphi_{(A,B)}(\vec{b},\vec{a},\vec{c}) = {}^3\varphi_{(-A-B,B)}(\vec{a},\vec{b},\vec{c}).$$

Глядя на приведенные выше соотношения аддитивности можно пойти дальше и назвать "обобщенной аддитивностью" свойство трингла выражаться некоторым образом через тринглы, построенные на других тройках векторов, согласованных или не согласованных с исходной тройкой. Речь идет о соотношениях вида:

$$\begin{gathered}^3\varphi(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = f(^3\varphi(\vec{s}_{11},{}^3\vec{s}_{12},\vec{s}_{13}),\ldots,{}^3\varphi(\vec{s}_{i1},\vec{s}_{i2},\vec{s}_{i3}),{}^3\ldots,{}^3\varphi(\vec{s}_{n1},\vec{s}_{n2},{}^3\vec{s}_{n3}),{}^2\varphi(\vec{t}_{11},{}^2\vec{t}_{12}),\ldots,\\ {}^2\varphi(\vec{t}_{j1},{}^2\vec{t}_{j2}),\ldots,{}^2\varphi(\vec{t}_{n1},\vec{t}_{n2})),\end{gathered} \tag{44}$$

где хотя бы один из векторов $\vec{s}_{ij}$ и $\vec{t}_{kl}$ при каждых i и k не является вектором из тройки $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$.

Ясно, что в такой постановке задача отыскания "аддитивных тринглов" имеет бесконечное множество решений, которые почти всегда будут иметь неявное определение посредством громоздких алгебраических выражений.

5.1 Безразмерные выражения для базисных конформных инвариантов

В настоящем разделе мы приведем для будущих справок полный перечень базисных конформных инвариантов в безразмерном виде. Как и в предыдущих разделах мы вводим следующие безразмерные обозначения:

$$\frac{b_i}{a_i} = \xi_i; \qquad \frac{c_i}{a_i} = \eta_i; \qquad \frac{d_i}{a_i} = \delta_i.$$

Кроме того, для сокращения размера формул мы примем следующие обозначения:

$$\Delta_p = p_1p_2p_3; \quad \Delta_1(p,q) = p_2q_3 + p_3q_2; \quad \Delta_2(p,q) = p_1q_3 + q_3p_1; \quad \Delta_3(p,q) = p_1q_2 + p_2q_1;$$

$$w_1(p) = p_1 + p_2 + p_3; \qquad w_2(p) = p_1p_2 + p_2p_3 + p_1p_3,$$

для всяких троек $\{p_1,p_2,p_3\}$, $\{q_1,q_2,q_3\}$. При этом $p/q \equiv \{p_1/q_1, p_2/q_2, p_3/q_3\}$. Вычисление базисных конформных инвариантов, перечисленных в начале раздела (5), для всевозможных комбинаций троек и двоек векторов из набора $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}\}$ приводит к следующей системе выражений:

$$6w_4^{abc} = \Delta_1(\xi,\eta) + \Delta_2(\xi,\eta) + \Delta_3(\xi,\eta); \quad 6w_4^{abd} = w_4^{adb} = \Delta_1(\xi,\delta) + \Delta_2(\xi,\delta) + \Delta_3(\xi,\delta);$$

$$6w_4^{acd} = 6w_4^{adc} = \Delta_1(\eta,\delta) + \Delta_2(\eta,\delta) + \Delta_3(\eta,\delta);$$

$$w_4^{bad} = w_4^{bda} = w_4^{abd}/\Delta_\xi; \quad w_4^{cad} = w_4^{cda} = w_4^{acd}/\Delta_\eta;$$

$$6w_4^{bcd} = 6w_4^{bdc} = \Delta_1(\eta/\xi,\delta/\xi) + \Delta_2(\eta/\xi,\delta/\xi) + \Delta_3(\eta/\xi,\delta/\xi);$$

$$6w_4^{cbd} = 6w_4^{cdb} = \Delta_1(\xi/\eta,\delta/\eta) + \Delta_2(\xi/\eta,\delta/\eta) + \Delta_3(\xi/\eta,\delta/\eta);$$

$$w_4^{dab} = w_4^{dba} = w_4^{abd}/\Delta_\delta; w_4^{dac} = w_4^{dca} = w_4^{acd}/\Delta_\delta;$$

$$6w_4^{dbc} = 6w_4^{dcb} = \Delta_1(\eta/\delta,\xi/\delta) + \Delta_2(\eta/\delta,\xi/\delta) + \Delta_3(\eta/\delta,\xi/\delta);$$

$$w_3^{ab} = \frac{1}{w_3^{ba}} = \Delta_\xi; \quad w_3^{ac} = \frac{1}{w_3^{ca}} = \Delta_\eta; \quad w_3^{ad} = \frac{1}{w_3^{da}} = \Delta_\delta;$$

$$w_3^{bc} = \frac{1}{w_3^{cb}} = \frac{\Delta_\eta}{\Delta_\xi}; \quad w_3^{bd} = \frac{1}{w_3^{db}} = \frac{\Delta_\delta}{\Delta_\xi}; \quad w_3^{cd} = \frac{1}{w_3^{dc}} = \frac{\Delta_\delta}{\Delta_\eta};$$

$$3w_2^{ab} = w_2(\xi); \quad 3w_2^{ac} = w_2(\eta); \quad 3w_2^{ad} = w_2(\delta);$$

$$3w_2^{ba} = w_1(\xi)/\Delta_\xi; \quad 3w_2^{ca} = w_1(\eta)/\Delta_\eta; \quad 3w_2^{da} = w_1(\delta)/\Delta_\delta;$$

$$3w_2^{bc} = w_2(\eta/\xi); \quad 3w_2^{cb} = w_2(\xi/\eta); \quad 3w_2^{bd} = w_2(\delta/\xi); \quad 3w_2^{db} = w_2(\xi/\delta);$$

$$3w_2^{cd} = w_2(\delta/\eta); \quad 3w_2^{dc} = w_2(\eta/\delta).$$

Из приведенных инвариантов функционально независимыми являются только двадцать один. Суть процедуры конструирования обобщенно-аддитивных тринглов заключается в выборе из двадцати одного независимого инварианта подмножество из инвариантов числа не меньшего 9, разрешимого относительно 9 переменных $\{\xi, \eta, \delta\}$. Подстановка разрешенных уравнений в любой другой независимый инвариант дает формулу вида (44).

5.2 Пример: обобщенно-аддитивный тригл

Рассмотрим следующие соотношения, вытекающие из уравнений для системы инвариантов предыдущего раздела:

$$w_1(\xi) = 3w_2^{ba}\Delta_\xi = 3w_2^{ba}\frac{w_4^{abd}}{w_4^{bad}}; \quad w_2(\xi) = 3w_2^{ab}; \quad \Delta_\xi = w_3^{ab}w_3^{ba};$$

$$w_1(\eta) = 3w_2^{ca}\Delta_\eta = 3w_2^{ca}\frac{w_4^{acd}}{w_4^{cad}}; \quad w_2(\eta) = 3w_2^{ac}; \quad \Delta_\eta = w_3^{ac}w_3^{ca};$$

$$w_1(\delta) = 3w_2^{da}\Delta_\delta = 3w_2^{da}\frac{w_4^{acd}}{w_4^{dca}}; \quad w_2(\delta) = 3w_2^{da}; \quad \Delta_\xi = w_3^{ad}w_3^{da}.$$

Записанные выражения представляют собой девять симметрических полиномов по переменным $\{\xi_i\}$, $\{\eta_i\}$ и $\{\delta_i\}$, выраженные через инварианты. Процедуру разрешения системы симметрических уравнений относительно этих переменных, ввиду известной связи симметрических полиномов с корнями алгебраических уравнений, можно свестись к нахождению троек вещественных решений тройки кубических уравнений следующего вида:

$$\xi^3 - 3w_2^{ba}\frac{w_4^{abd}}{w_4^{bad}}\xi^2 + 3w_2^{ab}\xi - w_3^{ab}w_3^{ba} = 0; \tag{45}$$

$$\eta^3 - 3w_2^{ca}\frac{w_4^{acd}}{w_4^{cad}}\eta^2 + 3w_2^{ac}\eta - w_3^{ac}w_3^{ca} = 0; \tag{46}$$

$$\delta^3 - 3w_2^{da}\frac{w_4^{acd}}{w_4^{dca}}\delta^2 + 3w_2^{da}\delta - w_3^{ad}w_3^{da} = 0.$$

Рассмотрим в качестве выражения для обобщенно аддитивного тригла инвариант w_4^{abc} или какую-то функцию от него. Условие обобщенной аддитивности будет иметь вид:

$$w_4^{abc} = \Delta_1(\xi,\eta) + \Delta_2(\xi,\eta) + \Delta_3(\xi,\eta)\Big|^{\xi_i=\bar\xi_i(w_2^{ba}w_4^{abd}/w_4^{bad},w_2^{ab},w_3^{ab}w_3^{ba})}_{\eta_i=\bar\eta_i(w_2^{ca}w_4^{acd}/w_4^{cad},w_2^{ac},w_3^{ad}w_3^{da})}$$

— довольно громоздкого алгебраического выражения, зависящего от указанных комбинаций конформных инвариантов. Здесь $\bar\xi_i$ и $\bar\eta_i$ — тройки корней кубических уравнений (45)–(46), выраженные через коэффициенты этих уравнений.

6 Экспоненциальные углы

Как обсуждалось в [1], гиперкомплексные числа из $\mathcal{H}_n$ допускают экспоненциальное представление. В этом параграфе мы выведем выражения для экспоненциальных углов и обсудим их связь с постановкой основной задачи статьи. Напомним основные сведения, необходимые нам для вывода формул экспоненциальных углов.

Гиперкомплексные числа как элементы алгебры $\mathcal{H}_n$ будем изображать линейными комбинациями:

$$a = a_1 i_1 + \dots a_n i_n,$$

где i_k — образующие алгебры $\mathcal{H}_n$, удовлетворяющие следующему закону умножения: $i_k \cdot i_l = i_k\delta_{lk}$ (изотропная система образующих). Нормой элемента a называется число $|a| = |a_1 \cdot \dots \cdot a_n|^{1/n}$. В силу закона умножения определены операции умножения и деления двух элементов $a = a_1 i_1 + \dots a_n i_n$, $b = b_1 i_1 + \dots b_n i_n$:

$$a \cdot b = a_1 b_1 i_1 + \dots + a_n b_n i_n; \quad a/b = (a_1/b_1)i_1 + \dots + (a_n/b_n)i_n,$$

причем деление возможно только на элементы с ненулевой нормой: $|b| \neq 0$.

Функцией гиперкомплексной переменной $f(a)$ будем называть гиперкомплексное число вида:

$$f(a) = f(a_1)i_1 + \dots f(a_n)i_n. \tag{47}$$

Если функция $f(x)$ — аналитическая для вещественных x, то наше определение выполняется автоматически в силу представления функции в виде формального степенного ряда и таблицы умножения алгебры $\mathcal{H}_n$.

Как показано в ([1]), любое гиперкомплексное число a со всеми $a_i > 0$ можно представить в экспоненциальной форме вида:

$$a = |a|\exp(\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_{n-1}e_{n-1}),$$

где $\{\alpha_i\}$ — экспоненциальные углы, $\{e_i\}$ — специальный базис, который может быть связан с изотропным базисом, например, соотношениями:

$$e_1 = i_1 - i_2; \quad e_2 = i_1 - i_3; \quad \dots e_{n-1} = i_1 - i_n.$$

Рассмотрим частный случай алгебры $\mathcal{H}_3$. В ней общие формулы для экспоненциального представления принимают следующий более конкретный вид:

$$a = a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3 = (a_1 a_2 a_3)^{1/3}\exp((\alpha_1 + \alpha_2)i_1 - \alpha_1 i_2 - \alpha_1 i_3).$$

Воспользовавшись в левой части формулой (47) и приравнивая компоненты гиперчисла слева и справа, находим выражение для углов через изотропные координаты:

$$\alpha_1 = \frac{1}{3}\ln\left[\frac{a_1 a_3}{a_2^2}\right]; \qquad \alpha_2 = \frac{1}{3}\ln\left[\frac{a_1 a_2}{a_3^2}\right]. \tag{48}$$

Углы $\phi_1(a,b)$ и $\phi_2(a,b)$ между векторами-гиперчислами a и b естественно определить с помощью формулы:

$$\frac{|a|}{|b|}\exp(\phi_1(a,b)(i_1 - i_2) + \phi_2(a,b)(i_1 - i_3)) = a/b.$$

Явные формулы для этих углов получаются из (48) заменой $a_i \to a_i/b_i$. Таким образом, получаем:

$$\phi_1(a,b) = \frac{1}{3}\ln\left[\frac{a_1 a_3 b_2^2}{b_1 b_3 a_2^2}\right]; \qquad \phi_2(a,b) = \frac{1}{3}\ln\left[\frac{a_1 a_2 b_3^2}{b_1 b_2 a_3^2}\right]. \tag{49}$$

Нетрудно видеть, что каждый из углов конформно-инвариантен, аддитивен в обычном смысле и на равных векторах-гиперчислах обращается в нуль. Тем не менее, эти углы (в нашей терминологии они являются бинглами) не попадают в круг исследуемых нами, поскольку они не выражаются через метрические инварианты, построенные исключительно на векторах-гиперчислах a, b. Действительно, нетрудно проверить, что представление (48) эквивалентно следующему, выраженному через метрические инварианты:

$$\phi_1(a,b) = \frac{1}{3}\ln\left[\frac{(a,a,i_2)(i_1,i_3,b)^2}{(b,b,i_2)(i_1,i_3,a)^2}\right]; \qquad \phi_2(a,b) = \frac{1}{3}\ln\left[\frac{(a,a,i_3)(i_1,i_2,b)^2}{(b,b,i_3)(i_1,i_2,a)^2}\right].$$

Мы видим, *что экспоненциальные углы между двумя векторами-гиперчислами (бинглы) определяются посредством третьих векторов — изотропного базиса в $\mathcal{H}_3$.* Эта ситуация кардинально отличается от постановки задачи, решаемой в настоящей статье, поскольку эта постановка заимствована из евклидовой геометрии. *Наличие фундаментальных инвариантных изотропных направлений в $\mathcal{H}_n$ делает возможным обобщить понятия и определения угла, таким образом, чтобы эти направления явно присутствовали в его определении.* Совершенно ясно, что ввиду отсутствия каких-бы то ни было инвариантных направлений в евклидовой геометрии, такие определения в ней принципиально невозможны!

Литература

[1] Г. И. Гарасько, Д. Г. Павлов, ГЧГФ, т. 4, №1, с. 3–37 (2007)