РИМАНОВЫ МЕТРИКИ, СОПРИКАСАЮЩИЕСЯ С 3-МЕРНОЙ ФИНСЛЕРОВОЙ МЕТРИКОЙ БЕРВАЛЬДА-МООРА

Д. Г. Павлов, С. С. Кокарев

Институт гиперкомплексных систем в геометрии и физике, Москва,
РНОЦ "Логос", Ярославль

geom2004@mail.ru, logos-distant@mail.ru

Рассматривается общая конструкция соприкосновения финслеровой и римановой метрик и ее приложения к геометрии $\mathcal{H}_3$. Показано, что соприкасающаяся риманова метрика в определенном смысле наследует симметрии исходной финслеровой метрики и, в частности, обладает богатой конформной группой. Доказывается, что среди 3-мерных римановых метрик, соприкасающихся вдоль полей симметрий метрики Бервальда-Моора в $\mathcal{H}_3$, не существует евклидовой метрики.

1 Введение

Стандартную метрику на римановом многообразии $\mathcal{M}$ можно рассматривать как функцию $g:\ \mathcal{M}\times T\mathcal{M}\times T\mathcal{M}\to R$ на касательном расслоении, которая каждой тройке (p, X_p, Y_p) (p — точка $\mathcal{M}$, X_p, Y_p — векторы из касательного пространства $T_p\mathcal{M}$) ставит в соответствие число: $g(X_p, Y_p)$, называемое скалярным произведением векторов X_p и Y_p в точке p. При этом риманова метрика — это функция очень специального вида: от координат базы она зависит произвольным гладким образом, а от координат слоя — линейно по каждому аргументу и симметрично по паре аргументов. Такое "определение" метрики оказывается согласованным с линейным законом преобразованием координат слоя (т. е. координатных компонент векторов) при произвольных координатных диффеоморфизмах многообразия. Аналогичная точка зрения может быть распространена и на ковариантные тензоры любого ранга, заданные на многообразии $\mathcal{M}$.

Приняв эту точку зрения, не составляет труда перейти к обобщению римановой метрики (и ковариантных тензоров), при котором "метрика" рассматривается как общая функция $G:\mathcal{M}\times T\mathcal{M}\times\cdots\times T\mathcal{M}\to R$. При такой общей "метризации" многообразия его метрические свойства будут довольно расплывчатыми, а введение привычных и важных понятий, типа длин, углов, площадей и объемов, связности и кривизны и т. п. весьма проблематичным. Для получения более конкретной и содержательной теории на метрику G необходимо наложить определенные ограничения. В традиционной финслеровой геометрии [7] рассматриваются метрики вида:

$$G:(p, X_p, Y_p, Z_p)\mapsto R, \tag{1}$$

при этом относительно Y_p и Z_p отображение G линейно, относительно X_p отображение G является произвольной однородной функцией нулевого порядка, а относительно аргумента p отображение G — произвольное (гладкое). Традиционная финслерова геометрия позволяет таким образом ввести на фундаментальном геометрическом уровне локальную анизотропию пространства, а развитие дифференциальной версии этой теории приводит к интересным (хотя и довольно громоздким) обобщениям римановой геометрии и ее физических приложений [2].

Отметим, что финслеровы метрики вида (1) естественным образом ассоциируются с понятием "скалярного произведения пары векторов, зависящего от направления третьего вектора". Таким образом, в традиционной финслеровой геометрии выделяется билинейная структура скалярного произведения в обобщенном анизотропном варианте[1].

Существует интересный класс обобщенных метрических пространств, в которых метрика в общем случае, с одной стороны, не является римановой, с другой — не относится к классу финслеровых метрик вида (1). Речь идет о пространствах Бервальда-Моора $\mathcal{H}_n$, в которых метрика определяется соотношением:

$$^nG = \hat{\mathcal{S}}(dx^1 \otimes dx^2 \cdots \otimes dx^n), \tag{2}$$

где $\hat{\mathcal{S}}$ — оператор симметризации (без числового множителя). Пространства с такой метрикой естественным образом возникают из рассмотрения ассоциативно-коммутативных алгебр H_n с обобщением модуля комплексного числа [6]. В отличие от финслеровых метрик вида (1), метрика (2) в общем случае ассоциируется с понятием скалярного n-произведения или полискалярного произведения [4]. Исключение составляют случаи $\mathcal{H}_2$ и $\mathcal{H}_3$. Пространство Бервальда-Моора $\mathcal{H}_2$ с геометрической точки зрения изоморфно псевдоевклидовой плоскости, а пространство $\mathcal{H}_3$, которому посвящена настоящая статья, формально можно рассматривать как частный случай финслеровой метрики (1). При этом следует заметить, что метрика:

$$^3G = \hat{\mathcal{S}}(dx^1 \otimes dx^2 \otimes dx^3) \tag{3}$$

не удовлетворяет условиям положительной определенности, которые требуются для вывода ряда общих свойств традиционной финслеровой геометрии и, с другой стороны, ввиду высокой степени симметрии, обладает рядом специфических свойств, которые "ускользают" в общем подходе, принятом в [7]. По этим причинам мы в последующем изложении не будем опираться на результаты общего подхода и все рассуждения и утверждения будем формулировать, опираясь непосредственно на свойства метрики (3).

В ряде работ [5,7] было показано, что метрики Бервальда-Моора (2) обладают группой изометрии $\mathcal{IH}_n$, представляющей собой полупрямое произведение n-параметрической абелевой группы трансляций $\mathcal{I}_0\mathcal{H}_n$ и $(n-1)$-параметрической абелевой группы унимодулярно согласованных дилатаций $\mathcal{I}_D\mathcal{H}_n$. Базис алгебры Ли группы $\mathcal{IH}_n$ можно задать набором векторных полей

$$T_j = \partial_j, \quad j = \overline{1,n} \text{ (трансляции)}; \quad D_j = x^j\partial_j - x^{j+1}\partial_{j+1}, \quad j = \overline{1,n-1} \text{ (дилатации)} \tag{4}$$

(суммирования по повторяющимся индексам нет!). При этом скобки Ли в таком базисе принимают вид:

$$[T_i, T_j] = [D_i, D_j] = 0; \qquad [T_i, D_j] = \delta_{i,j}T_i - \delta_{i,j+1}T_{j+1} \tag{5}$$

для всех i и j (суммирования по повторяющимся индексам нет!).

[1] На самом деле первичным объектом финслеровой геометрии, как правило, является фундаментальная или мировая функция $F(x,\dot{x})$ первой степени однородности по второму аргументу [7], задающая функционал длины на финслеровом многообразии. Анизотропная "билинейная метрика" вида (1) получается из нее по формуле: $G = \partial^2_{\dot{x}\dot{x}}F/2$. Таким образом, нелинейная по сути финслерова метрика намеренно сводится к (квази)квадратичному виду для того, чтобы максимально приблизить аппарат и язык финслеровой дифференциальной геометрии к языку и аппарату римановой.

Кроме группы изометрий, пространство $\mathcal{H}_n$ обладает бесконечномерной группой конформной симметрии $\mathcal{CH}_n$, общий элемент алгебры Ли которой имеет вид:

$$X = X^1(x^1)\partial_1 + X^2(x^2)\partial_2 + \cdots + X^n(x^n)\partial_n, \tag{6}$$

где $X^i(x^i)$ — произвольные гладкие функции. Скобка Ли двух полей такого вида описывается формулой:

$$[X, Y] = \Delta^i(X, Y)\partial_i, \tag{7}$$

где

$$\Delta^i(X, Y) \equiv \begin{vmatrix} X^i & Y^i \\ \dot{X}^i & \dot{Y}^i \end{vmatrix},$$

а точка обозначает дифференцирование функции по своему аргументу.

Имея в распоряжении метрику (2) и векторные поля из алгебр Ли групп $\mathcal{IH}_n$ и $\mathcal{CH}_n$, можно естественным образом получать из метрики (2) бесчисленное множество римановых метрик с помощью следующего общего приема. Рассмотрим "неполное" полискалярное произведение вида:

$$g = {}^nG(X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(n-2)}, \ , \ ),$$

где $X_{(j)}$ — элементы алгебр Ли групп $\mathcal{IH}_n$ и (или) $\mathcal{CH}_n$, для удобства перенумерованные индексами, отвечающими их местам как аргументам метрики Бервальда-Моора. Очевидно, что g — (псевдо)риманова метрика, зависящая от выбранных полей $X_{(j)}$. Описанный прием приводит к обобщению понятия "римановой метрики, соприкасающейся к данной финслеровой метрике", рассмотренного в [7], поскольку в общем случае такое "соприкосновение" в пространствах Бервальда-Моора $\mathcal{H}_n$ с $n > 3$ определяется не вдоль одного единственного векторного поля, а вдоль $n-2$ векторных полей. Мы сохраняем терминологию соприкосновения и поля $X_{(j)}$, вдоль которых риманова метрика соприкасается с метрикой Бервальда-Моора, будем как и в [7], называть *опорными*.

Отметим, что ввиду внутренней специфики геометрии Бервальда-Моора, конструкция соприкосновения не только естественна, но и, в определенном смысле, необходима. Действительно, попытка определить метрику Бервальда-Моора на подмногообразиях (координатных плоскостях) S_i: $x^i = \mathrm{const}$ с помощью стандартной дифференциально-геометрической операции сужения метрики: ${}^nG \to {}^nG|_{S_i}$ приводит к тривиальному результату: $G|_{S_i} = 0$. Между тем, последовательное проектирование метрики ${}^nG$ на базисные векторы трансляций T_j приводит к цепочке метрик Бервальда-Моора убывающей размерности:

$$ {}^nG \xrightarrow{\pi_1} {}^{n-1}G \xrightarrow{\pi_2} {}^{n-2}G \xrightarrow{\pi_3} \cdots \xrightarrow{\pi_{n-2}} {}^2G, \tag{8}$$

где π_i: ${}^nG(T_1, T_2, \ldots, T_{i-1}, \ , \ldots, \ ) \to {}^nG(T_1, T_2, \ldots, T_{i-1}, T_i, \ , \ldots, \ )$. Таким образом, конструкция соприкосновения в простейшей своей реализации осуществляет корректную и содержательную размерную редукцию пространств Бервальда-Моора.

Целью настоящей статьи является исследование геометрических и физических свойств римановых метрик, соприкасающихся с 3-метрикой пространства $\mathcal{H}_3$.

2 Некоторые частные случаи соприкосновения

2.1 Псевдоевклидовы пространства $\mathcal{M}_{(1,2)}$

Как следует из общей формулы (8), соприкосновение метрики ${}^3G$ с любым из базисных векторов трансляций T_j приводит к 2-мерной псевдоевклидовой метрике. Например, для $j = 3$ имеем:

$$g = {}^3G(\partial_3, \ , \ ) = \hat{\mathcal{S}}(dx^1 \otimes dx^2) = dx^1 \otimes dx^2 + dx^2 \otimes dx^1 \tag{9}$$

— псевдоевклидову метрику на плоскости (x^1, x^2) в изотропных (световых) координатах, которая превращает такую плоскость в пространство Минковского $\mathcal{M}_{(1,1)}$. С 3-мерной точки зрения такая метрика является вырожденной, поскольку

$$\det(g) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Переход к пространствам Минковского общего типа возможен, если рассмотреть соприкосновение метрики ${}^3G$ с полем трансляции общего типа:

$$T = \alpha\partial_1 + \beta\partial_2 + \gamma\partial_3. \tag{10}$$

Используя преобразования из подгруппы $\mathcal{I}_D\mathcal{H}$, можно, не нарушая общности, изменить масштабы координат таким образом, чтобы первые две компоненты векторного поля (10) стали равны единицам. Такая процедура аналогична специальному выбору декартовой системы координат, когда одна из осей ориентирована вдоль определенного заданного вектора. Таким образом, вместо поля (10) можно рассматривать в качестве опорного поле вида:

$$T = \partial_1 + \partial_2 + \delta\partial_3, \tag{11}$$

где δ — произвольный вещественный параметр. Риманова метрика, соприкасающаяся вдоль этого поля с ${}^3G$, будет иметь вид:

$$g = dx^2 \otimes dx^3 + dx^3 \otimes dx^2 + dx^1 \otimes dx^3 + dx^3 \otimes dx^1 + \delta(dx^1 \otimes dx^2 + dx^2 \otimes dx^1).$$

Матрица этой метрики

$$(g) = \begin{pmatrix} 0 & \delta & 1 \\ \delta & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{12}$$

вообще говоря невырождена. Для исследования алгебраического типа этой метрики поставим задачу на собственные векторы и собственные значения матрицы (g):

$$(g) \cdot v = \lambda v,$$

где точка обозначает матричное умножение, а вектор v понимается как матрица 3×1 (столбец). Подставляя в это уравнение (77), получаем следующее секулярное уравнение:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & \delta & 1 \\ \delta & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + (2 + \delta^2)\lambda + 2\delta = 0.$$

Его корни даются выражениями:

$$\lambda_1 = -\delta; \quad \lambda_2 = \frac{\delta + \sqrt{\delta^2 + 8}}{2}, \quad \lambda_3 = \frac{\delta - \sqrt{\delta^2 + 8}}{2}. \tag{13}$$

Нетрудно видеть, что при любом δ $\lambda_2 > 0$, $\lambda_3 < 0$, откуда следует что при любом $\delta \neq 0$ риманова метрика g определяет пространство Минковского типа $\mathcal{M}_{(1,2)}$. При $\delta = 0$ мы приходим к рассмотренному вначале случаю вырожденной псевдоевклидовой метрики (9). Как известно, группа изометрии пространства $\mathcal{M}_{(1,2)}$ — это полупрямое произведение 3-мерной группы трансляций и группы $O(1,2)$ вещественных 3-мерных псевдоортогональных матриц.

Параллельно с вышеизложенными результатами, мы можем сделать следующее наблюдение: *не существует такого постоянного векторного поля, соприкосновение вдоль которого приводило бы к евклидовой метрике, соприкасающейся с* ${}^3G$.

2.2 Риманова метрика, соприкасающаяся с $\mathcal{H}_3$ вдоль поля из алгебры Ли группы $\mathcal{I}_D\mathcal{H}$.

Рассмотрим теперь в качестве опорного векторного поля общий элемент алгебры Ли подгруппы унимодулярных дилатаций $\mathcal{I}_D\mathcal{H}_3$ полной группы $\mathcal{I}\mathcal{H}_3$, который имеет вид:

$$X = b_1D_1 + b_2D_2 = b_1x^1\partial_1 + (b_2 - b_1)x^2\partial_2 - b_2x^3\partial_3,$$

где b_1, b_2 — произвольные вещественные параметры. Соприкасающаяся вдоль этого поля риманова метрика имеет вид:

$$g = b_1x^1(dx^2\otimes dx^3+dx^3\otimes dx^2)+(b_2-b_1)x^2(dx^1\otimes dx^3+dx^3\otimes dx^1)-b_2x^3(dx^1\otimes dx^2+dx^2\otimes dx^1) \quad (14)$$

или в матричном представлении:

$$(g) = \begin{pmatrix} 0 & -b_2x^3 & (b_2-b_1)x^2 \\ -b_2x^3 & 0 & b_1x^1 \\ (b_2-b_1)x^2 & b_1x^1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Эта метрика, вообще говоря, неплоская. Ее определитель, задающий локальный элемент объема, дается выражением:

$$\det(g) = 2b_2b_1(b_2 - b_1)x^1x^2x^3.$$

Видно, что метрика (14) невырождена только при одновременном выполнении условий: $b_1 \neq 0$, $b_2 \neq 0$, $b_1 \neq b_2$.

Исследуем симметрии метрики (14). Для отыскания изометрий этой метрики запишем уравнения Киллинга: $L_Yg = 0$. С учетом явного вида метрики (14), эти уравнения принимают вид системы шести дифференциальных уравнений первого порядка относительно компонент Y^i:

$$-b_2x^3\partial_1Y^2 + (b_2 - b_1)x^2\partial_1Y^3 = 0; \quad (15)$$

$$-b_2Y^3 - b_2x^3\partial_1Y^1 + b_1x^1\partial_1Y^3 - b_2x^3\partial_2Y^2 + (b_2 - b_1)x^2\partial_2Y^3 = 0;$$

$$-b_2x^3\partial_2Y^1 + b_1x^1\partial_2Y^3 = 0;$$

$$(b_2 - b_1)Y^2 + (b_2 - b_1)x^2\partial_1Y^1 + b_1x^1\partial_1Y^2 - b_2x^3\partial_3Y^2 + (b_2 - b_1)x^2\partial_3Y^3 = 0;$$

$$b_1Y^1 + (b_2 - b_1)x^2\partial_2Y^1 + b_1x^1\partial_2Y^2 - b_2x^3\partial_3Y^1 + b_1x^1\partial_3Y^3 = 0;$$

$$(b_2 - b_1)x^2\partial_3Y^1 + b_1x^1\partial_3Y^2 = 0.$$

Ее решения:

$$Y_{(1)} = D_1; \quad Y_{(2)} = D_2;$$

$$Y_{(3)} = \ln\left[\left(\frac{x^1x^3}{x^2}\right)^{b_1}(x^1)^{-2b_2}\right]x^1\partial_1+\ln\left[\left(\frac{x^2x^3}{x^1}\right)^{b_1}\left(\frac{x^2}{x^1}\right)^{b_2}\right]x^2\partial_2+\ln\left[\left(\frac{x^1x^3}{x^2}\right)^{b_2}(x^3)^{-2b_1}\right]x^3\partial_3$$

образуют алгебру Ли симметрий метрики (14) с коммутационными соотношениями:

$$[Y_{(1)}, Y_{(2)}] = 0; \quad [Y_{(1)}, Y_{(3)}] = 2(b_1 - b_2)Y_{(1)} - 2b_2Y_{(2)}; \quad [Y_{(2)}, Y_{(3)}] = -2b_1Y_{(1)} + 2(b_2 - b_1)Y_{(2)}.$$

Из приведенных коммутационных соотношений следует, что полученная алгебра разрешима.

Оказывается, что конформные симметрии метрики (14) существенно богаче. Для отыскания конформных симметрий этой метрики необходимо решить конформные уравнения Киллинга: $L_Y g = \phi g$, где ϕ — некоторая скалярная функция, подлежащая определению. Подставляя в это уравнение явный вид метрики (14), приходим к системе уравнений, которая отличается от системы (15) дополнительными слагаемыми $-b_2 x^3 \phi$, $(b_2 - b_1)\phi x_2$ и $b_1 x^1 \phi$ в левых частях "длинных" уравнений соответственно их приведенному порядку. Решая соответствующую систему, приходим к следующей 10-мерной алгебре конформной симметрии:

$$Y_{(1)} = x^1\partial_1, \quad \phi_1 = 1; \quad Y_{(2)} = x^2\partial_2, \quad \phi_3 = 1; \quad Y_{(3)} = x^3\partial_3, \quad \phi_3 = 1 \quad \text{(растяжения осей)};$$

$$Y_{(4)} = x^1 \ln(x^1)^{-b_1/(b_2-b_1)}\partial_1 + x^2 \ln x^1 \partial_2 + x^3 \ln\left[(x^3)^{-2b_1/(b_2-b_1)}(x^1)^{b_2/(b_2-b_1)}\right]\partial_3\,,$$

$$\phi_4 = \ln\left[(x^1)^2 (x^3)^{-2b_1/(b_2-b_1)}\right]\;;$$

$$Y_{(5)} = \left(\ln^2 x^1 - \frac{b_1^2}{b_2(b_2-b_1)}\ln x^2 \ln x^3 + \left[\ln b_1 + \frac{2b_1}{b_2-b_1}\ln(b_2-b_1)\right]\ln x^1 + \right.$$

$$\left.\frac{b_1 \ln b_1}{b_2-b_1}\ln x^2 - \frac{b_1^2\ln(b_2-b_1)}{b_2(b_2-b_1)}\ln x^3\right) x_1\partial_1 + \frac{b_1}{b_2}\ln[(b_2-b_1)x^2]\ln x^3 \cdot x^2\partial_2 +$$

$$\left(\frac{b_1}{b_2}\ln^2 x^3 - \frac{b_1}{b_2-b_1}\ln x^2 \ln x^3 + \frac{b_2 \ln b_1}{b_2-b_1}\ln x^2 - \left[\ln b_1 - \frac{b_1\ln(b_2-b_1)}{b_2-b_1}\right]\ln x^3\right) x^3\partial_3\,,$$

$$\phi_5 = \ln^2 x^1 + \frac{b_1}{b_2}\ln^2 x^3 + \frac{2b_2}{b_2-b_1}\ln x^1 \ln x^2 + \frac{2b_1^2}{b_2(b_2-b_1)}\ln x^2 \ln x^3 +$$

$$\left(2 - \frac{2b_1\ln(b_2-b_1)}{b_2-b_1} - \ln b_1\right)\ln x^1 + \frac{(b_2+b_1)\ln b_1}{b_2-b_1}\ln x^2 + \left(\frac{2b_1}{b_2} - \ln b_1 + \frac{2b_1}{b_2}\ln(b_2-b_1)\right)\ln x^3\;;$$

$$Y_{(6)} = (b_2\ln^2 x^1 - b_1 \ln x^1 \ln(x^2x^3))x^1\partial_1 + (b_2-b_1)x^2 \ln x^1 \ln x^3 \partial_2 - (b_1 \ln^2 x^3 - b_2 \ln x^1 \ln(x^2 x^3))x^3\partial_3\,,$$

$$\phi_6 = b_2 \ln^2 x^1 - b_1 \ln^2 x^3 + 2(b_2-b_1)\ln x^1 \ln(x^2x^3) + \ln[(x^1)^{2b_2}(x^3)^{-2b_1}]\,;$$

$$Y_{(7)} = \ln[(x^1)^{2b_2}(x^3)^{-b_1}]x^1\partial_1 + (b_2-b_1)x^2\ln x^3\partial_2 + b_2 x^3 \ln x^3 \partial_3, \qquad \phi_7 = \ln[(x^1)^{2b_2}(x^3)^{2(b_2-b_1)}]\,;$$

$$Y_{(8)} = x^1 \ln x^1 \partial_1 + x^2 \ln x^2 \partial_2 + x^3 \ln x^3 \partial_3, \qquad \phi_8 = \ln(x^1x^2x^3)\,;$$

$$Y_{(9)} = \frac{b_1}{b_2}\left(\ln x^2 \ln x^3 + \ln(b_2-b_1)\ln x^3\right) x^1\partial_1 +$$

$$\left(\ln^2 x^2 - \frac{b_2-b_1}{b_2}\ln x^2 \ln x^3 - \frac{(b_2-b_1)\ln(b_2-b_1)}{b_2}\ln x^3\right) x^2\partial_2 -$$

$$\left(\frac{b_2-b_1}{b_2}\ln^2 x^3 - \ln x^2 \ln x^3 + \ln(b_2-b_1)\ln x^3\right) x^3\partial_3, \qquad \phi_9 = \ln^2 x^2 - \frac{b_2-b_1}{b_2}\ln^2 x^3 +$$

$$\frac{2b_1}{b_2}\ln x^2 \ln x^3 - 2\ln(b_2-b_1)\ln x^1 + \ln(x^2)^2 - \frac{2(b_2-b_1)}{b_2}(\ln(b_2-b_1)+1)\ln x^3\;;$$

$$Y_{(10)} = \ln[(x^1)^{(b_2-b_1)/b_2}(x^2)^{b_1/b_2}]x_1\partial_1 + \ln[x^2(x^3)^{(b_1-b_2)/b_2}]x^3\partial_3\,;$$

$$\phi_{10} = \ln[(x^1)^{(b_1-b_2)/b_2}(x^2)^{-(b_1+b_2)/b_2}(x^3)^{(b_2-b_1)/b_2}]\,.$$

2.3 Риманова метрика, соприкасающаяся вдоль общего поля конформных симметрий метрики Бервальда-Моора

Рассмотрим поле вида:

$$X = f^1(x^1)\partial_1 + f^2(x^2)\partial_2 + f^3(x^3)\partial_3,$$

где f^i — произвольные функции своих аргументов. Это поле описывает общий элемент бесконечномерной алгебры Ли группы конформных симметрий метрики Бервальда-Моора в $\mathcal{H}_3$. Риманова метрика, соприкасающаяся вдоль этого поля с метрикой G, имеет вид:

$$g = \hat{\mathcal{S}}(f^1(x^1)dx^2 \otimes dx^3 + f^2(x^2)dx^1 \otimes dx^3 + f^3(x^3)dx^2 \otimes dx^3)$$

или в матричном виде:

$$(g) = \begin{pmatrix} 0 & f^3 & f^2 \\ f^2 & 0 & f^1 \\ f^2 & f^1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Эта метрика, вообще говоря, неплоская. Отличные от нуля компоненты ее тензора кривизны имеют вид:

$$\mathcal{R}_{1212} = -\frac{f^3((f^1)' + (f^2)' - (f^3)')^2}{8f^1f^2}; \quad \mathcal{R}_{1313} = -\frac{f^2((f^1)' + (f^3)' - (f^2)')^2}{8f^1f^3};$$

$$\mathcal{R}_{2323} = -\frac{f^1((f^2)' + (f^3)' - (f^1)')^2}{8f^2f^3};$$

$$\mathcal{R}_{1213} = -\frac{4(f^1)''f^1 - 2(f^2)'(f^3)' + (f^3)'^2 - (f^1)'^2 + (f^2)'^2}{8f^1};$$

$$\mathcal{R}_{1232} = -\frac{4(f^2)''f^2 - 2(f^1)'(f^3)' + (f^1)'^2 - (f^2)'^2 + (f^3)'^2}{8f^2};$$

$$\mathcal{R}_{1323} = -\frac{4(f^3)''f^3 - 2(f^1)'(f^2)' + (f^1)'^2 + (f^2)'^2 - (f^3)'^2}{8f^3};$$

Сама метрика и компоненты кривизны инвариантны относительно группы подстановок координат: $x^1 \leftrightarrow x^2 \leftrightarrow x^3$.

Найдем векторные поля, соприкосновение вдоль которых приводит к плоской римановой метрике. Из равенства нулю компоненты $\mathcal{R}_{1212}$ следует, что f^i — линейные функции вида $b^ix^i + a^i$, при этом $b^2 + b^1 - b^3 = 0$. Аналогично из равенства нулю компонент $\mathcal{R}_{1313}$ и $\mathcal{R}_{2323}$ следуют равенства: $b^1 + b^3 - b^2 = 0$ и $b^3 + b^2 - b^1 = 0$. В совокупности это приводит к равенствам: $b^1 = b^2 = b^3 = 0$. Таким образом, *плоская риманова метрика реализуется только при соприкосновении вдоль постоянных полей.* В совокупности с утверждением в конце раздела 2.1 это приводит к заключению о том, что *среди множества римановых метрик, соприкасающихся с метрикой Бервальда-Моора вдоль полей ее конформной симметрии, не существует евклидовой метрики.* Это важное для физических приложений обстоятельство говорит о том, что кубическая метрика Бервальда-Моора "содержит" внутри себя именно локально лоренцевы, а не евклидовы, метрики, что означает ее изначальную приспособленность для описания релятивистских явлений.

3 Общие свойства симметрии римановых метрик, соприкасающихся с метрикой Бервальда-Моора

Пусть $X_{(j)}$ — элемент алгебры Ли группы $\mathcal{IH}_3$, а $\bar{X}_{(j)}$ — элемент алгебры Ли конформной группы $\mathcal{CH}_3$. При этом алгебра Ли группы $\mathcal{CH}_3$ включает в себя алгебру Ли группы $\mathcal{IH}_3$, при этом для каждого из элементов последней мы полагаем соответствующий конформный фактор ϕ_j в соответствующем конформном уравнении Киллинга:

$$L_{\bar{X}_{(j)}} G = \phi_j G$$

равным нулю. Введем следующие обозначения:

$$g_{(j)} \equiv G(X_{(j)},\ ,\ ); \qquad \bar{g}_{(j)} \equiv G(\bar{X}_{(j)},\ ,\ ).$$

Действуя производной Ли $L_{X_{(i)}}$ или $L_{\bar{X}_{(i)}}$ на $g_{(j)}$ и $\bar{g}_{(j)}$ соответственно и используя свойства производной Ли (правило Лейбница и коммутативность со сверткой), приходим к следующим цепочкам равенств:

$$L_{X_i} g_{(j)} = L_{X_{(i)}} G(X_{(j)},\ ,\ ) = G([X_{(i)}, X_{(j)}],\ ,\ ) = c^k_{ij} g_{(j)}\,, \tag{16}$$

$$L_{\bar{X}_i} \bar{g}_{(j)} = L_{\bar{X}_{(i)}} G(\bar{X}_{(j)},\ ,\ ) = \phi_i \bar{g}_{(j)} + \bar{c}^k_{ij} \bar{g}_{(k)} = (\phi_i \delta^k_j + \bar{c}^k_{ij}) \bar{g}_{(k)}, \tag{17}$$

где c^k_{ij} и $\bar{c}^k_{ij}$ — структурные константы или структурные функции алгебры Ли групп $\mathcal{IH}_3$ и $\mathcal{CH}_3$ соответственно. Таким образом, *семейства метрик $\{g_{(j)}\}$ и $\{\bar{g}_{(j)}\}$ образуют дифференциальные идеалы относительно их Ли-дифференцирования вдоль семейств полей $\{X_{(j)}\}$ и $\{\bar{X}_{(j)}\}$ соответственно.* Это свойство позволяет сформулировать ряд утверждений относительно симметрии римановых метрик $g_{(j)}$ и $\bar{g}_{(j)}$.

1. Пусть для некоторых фиксированных i и j $c^k_{ij} = 0$ для всех k. Другими словами, пусть поля $X_{(i)}$ и $X_{(j)}$ коммутируют. Тогда, как это следует из (1), *изометрия $X_{(j)}$ метрики Бервальда-Моора одновременно является изометрией римановой метрики $g_{(j)}$, соприкасающейся с ней вдоль $X_{(j)}$*. Эта ситуация наглядно иллюстрируется примерами разделов 2.1 и 2.2.
2. Рассмотрим векторное X поле в виде линейной комбинации полей из алгебры изометрий: $X = \alpha_s X_{(s)}$. Вычисляя производную Ли метрики $g_{(j)}$ вдоль X аналогично предыдущему пункту, приходим к равенству:

$$L_X g_{(j)} = \alpha_s c^k_{sj} g_{(k)}.$$

Отсюда следует, что выполнение системы равенств $\alpha_s c^k_{sj} = 0$ для некоторого набора коэффициентов $\{\alpha_s\}$ при некотором j и всех k является достаточным условием для того, чтобы X было изометрией. Таким образом, *если для некоторого j выполняется равенство:*

$$\det(c^k_{ij}) = 0 \tag{18}$$

(c^k_{ij} рассматривается как матрица по индексам k и i), *то для метрики $g_{(j)}$ существует изометрия, построенная в виде линейной комбинации изометрий метрики Бервальда-Моора: $X = \alpha_s X_{(s)}$*. В силу антисимметрии структурных констант справедливо и следующее утверждение: *если для некоторого j выполняется равенство (18), то существует набор констант α_s, таких, что поле $X_{(j)}$ будет изометрией римановой метрики $\alpha_s g_{(s)}$.*

3. Предположим, что поле Y лежит в алгебре конформной симметрии метрики Бервальда-Моора и его коммутатор с другим полем из той же алгебры удовлетворяет условию:
$$[Y, \bar{X}_{(j)}] = \psi \bar{X}_{(j)}, \tag{19}$$
где ψ — некоторая функция. По определению $L_Y G = \phi G$. В силу этого равенства и (19) получаем следующую цепочку равенств для производной Ли метрики $\bar{g}_{(j)}$:
$$L_Y \bar{g}_{(j)} = (L_Y G) G(\bar{X}_{(j)}, \ , \ ) + G([Y, X_{(j)}], \ , \ ) = (\phi + \psi)\bar{g}_{(j)}.$$
Таким образом, *при условии (19) поле Y конформной симметрии метрики Бервальда-Моора становится полем конформной симметрии для метрики $g_{(j)}$*. При дополнительном условии $\phi = -\psi$ это поле будет полем изометрии метрики $g_{(j)}$.
4. Вычисление производной Ли метрики $\bar{g}_{(j)}$ вдоль поля конформной симметрии вида $\alpha_s \bar{X}_{(s)}$ приводит к цепочке равенств:
$$L_{\alpha_s X_{(s)}} \bar{g}_{(j)} = \alpha_s \phi_s \bar{g}_{(j)} + \alpha_s \bar{c}^k_{sj} \bar{g}_{(s)} = \alpha_s(\phi_s \delta^k_j + \bar{c}^k_{sj}) g_{(k)}.$$
Отсюда следует: *если для некоторого набора функций $\{\alpha_s\}$ выполняется равенство*
$$\alpha_s(\phi_s \delta^k_j + \bar{c}^k_{sj}) g_{(k)} = \psi \bar{g}_{(j)},$$
то поле $\alpha_s \bar{X}_{(s)}$ является полем конформной симметрии метрики $\bar{g}_{(j)}$.
5. Вычисляя производную Ли вдоль поля Y конформной симметрии метрики $\bar{g}_{(j)}$, приходим к следующей цепочке равенств:
$$L_Y \bar{g}_{(j)} = (L_Y G)(\bar{X}_{(j)}, \ , \ ) + G([Y, \bar{X}_{(j)}], \ , \ ) = \phi G(\bar{X}_{(j)}, \ , \ ),$$
откуда получаем:
$$(L_Y G)(\bar{X}_{(j)}, \ , \ ) = G(\phi \bar{X}_{(j)} - [Y, \bar{X}_{(j)}], \ , \ ) \tag{20}$$
— *условие соприкасающейся конформной симметрии, записанное в терминах исходной метрики Бервальда-Моора,* обобщающее условие конформной симметрии (19).

4 Заключение

Обсуждаемый в настоящей статье формализм соприкосновения метрик является важным (хотя и неединственным) "мостиком", связывающим кубическую геометрию Бервальда-Моора с более привычными римановыми многообразиями с квадратичной метрикой. Поскольку поля симметрий метрики Бервальда-Моора однозначно определяются самой метрикой Бервальда-Моора, то в целом конструкция соприкосновения свободна от какого-либо произвола, который мог бы существовать в случае, если опорные поля выбирались бы произвольно. Наше рассмотрение обнаруживает, что риманова метрика, соприкасающаяся с метрикой Бервальда-Моора в некоторой степени наследует те симметрии, которые существовали в исходном пространстве $\mathcal{H}_3$. При этом (как правило) изометрии римановой метрики богаче изометрий метрики Бервальда-Моора, в то время как конформная группа группа первой метрики существенно беднее конформной группы второй, поскольку последняя вообще бесконечномерна.

Общие идеи подхода соприкосновения применимы и к высшим пространствам $\mathcal{H}_n$. В частности, соприкосновение римановой метрики в $\mathcal{H}_4$ потребует задания пары опорных векторных полей. Для пары постоянных векторных полей действие группы изометрий позволяет сократить число существенных параметров с 8 до 5. При этом, как показывают предварительные оценки, проведенные в рамках $\mathcal{H}_4$, за счет выбора этих параметров можно добиться, чтобы соприкасающаяся плоская метрика оказалась любого из известных классических типов с симметриями $O(4)$, $O(1,3)$, $O(2,2)$, $\mathrm{Sp}(2)$ и прямых сумм $\mathrm{Sp}(1)\oplus O(2)$ и $\mathrm{Sp}(1)\oplus O(1,1)$. С увеличением номера n число возможных соприкасающихся симметрий растет.

За пределами внимания настоящей статьи остался ряд интересных вопросов:

1) Каковы характерные математические и физические свойства римановых метрик, соприкасающихся с метриками Бервальда-Моора? Опираясь на исследования настоящей статьи, можно высказать предположение, что одним из таких свойств является *богатство группы конформных симметрий.*

2) Каковы связи между геометрическими объектами в $\mathcal{H}_3$ и соприкасающихся римановых метриках? В частности, как связаны структуры параллельного переноса или ковариантной производной?

3) Как зависят свойства римановой метрики от свойств опорных векторных полей?

Следует отметить аналогию между теорией погружения римановых многообразий и теорией соприкосновения римановых многообразий с финслеровыми пространствами и, в частности, с пространствами Бервальда-Моора. По всей видимости, в финслеровой геометрии последние играют роль, аналогичную плоским пространствам в римановой геометрии. Напомним, что изометричное погружение риманова многообразия V_m в риманово многообразие V_n $(m<n)$ определяется набором n функций от m координат, т. е. имеет ∞^{nm-m^2} степеней свободы, где мы учли, что задание погружения допускает произвольную параметризацию посредством m функций от m переменных на самом подмногообразии. Функции погружения определяют положение поверхности V_m в V_n и задают метрику на V_m посредством стандартной операции сужения метрики на подмногообразие. В случае конструкции соприкосновения мы имеем дело с многомерием иного рода: оно заключено в многомерности финслеровой метрической формы. При этом, каждая соприкасающаяся с $\mathcal{H}_n$ риманова метрика получается заданием $n-2$ опорных векторных полей, но остается n-мерной в обычном смысле этого слова, как и исходная метрика Бервальда-Моора (в обоих смыслах).

Отметим, наконец, что определив симметрию соприкасающейся римановой метрики, ее векторное поле можно использовать в качестве опорного и, таким образом, перейти к соприкасающейся римановой метрике второго поколения, у которой будут свои симметрии. Используя соответствующие им поля в качестве опорных, можно переходить к римановым метрикам третьего поколений и т. д. Вся эта иерархия поколений соприкасающихся метрик так же свободна от какого-либо произвола, как и исходная конструкция соприкосновения (первого поколения). На уровне физических приложений римановы метрики различных поколений в конструкции соприкосновения могут описывать различные аспекты одной и той же физической системы. Мы оставляем вопрос о физических приложениях римановых метрик высших поколений и об их свойствах симметрий для будущих исследований.

Литература

[1] Х. Рунд, *Дифференциальная геометрия финслеровых пространств,* М., Наука, 1981

[2] Г. Ю. Богословский, *Теория локально-анизотропного пространства-времени*, МГУ, 1992

[3] Г. С. Асанов, *Финслероидная геометрия,* М., физфак МГУ, 2006

[4] Д. Г. Павлов, ГКЧГФ, **1** 5 (2004)

[5] Г. И. Гарасько, Д. Г. Павлов, ГКЧГФ, **4** 3 (2007)

[6] Д. Г. Павлов, Г. И. Гарасько, ГКЧГФ, **3** 3 (2005)

[7] Д. Г. Павлов, С. С. Кокарев, *Конформные калибровки геометрии Бервальда-Моора и индуцированные ими нелинейные симметрии,* в настоящем номере ГКЧГФ.