

КОНФОРМНЫЕ КАЛИБРОВКИ ГЕОМЕТРИИ БЕРВАЛЬДА-МООРА И ИНДУЦИРОВАННЫЕ ИМИ НЕЛИНЕЙНЫЕ СИММЕТРИИ

Д. Г. Павлов, С. С. Кокарев

*Институт гиперкомплексных систем в геометрии и физике, Москва,
РНОЦ "Логос", Ярославль
logos-distant@mail.ru*

Обсуждаются инвариантные геометрические структуры финслерова пространства Бервальда-Моора \mathcal{H}_4 . Установлен факт нетривиального "взаимодействия" конформных симметрий и изометрий \mathcal{H}_4 , позволяющего реализовать различные нелинейные представления группы изометрий и конформных симметрий геометрии Бервальда-Моора в виде изометрий некоторых двухточечных метрик. Построены общие выражения таких нелинейных представлений и общий вид двухточечных функциональных инвариантов.

1 Введение

Геометрическое описание законов природы почти неизбежно приводит к вопросу о выборе конформной калибровки физической метрики, в которой все геометрические величины соответствовали бы наблюдаемым. В скалярно-тензорных теориях типа Бранса-Дикке произвол в выборе конформной калибровки привел к плодотворной дискуссии о физическом смысле конформных преобразований, о системах единиц и предпочтительных с той или другой точки зрения калибровках [1, 2]. В теориях типа 5-мерной Калуцы-Клейна было обнаружено, что различный выбор конформного фактора, связанного с геометрическим 4-мерным скалярным полем $\varphi = \sqrt{-g_{55}}$, соответствует физически различным ситуациям в 4-мерных сечениях 5-мерного многообразия [3]. Аппарат конформных преобразований позволяет связывать между собой на первый взгляд совершенно различные геометрические модели: с нелинейным скалярным полем, с высшими по кривизне неэйнштейновскими теориями гравитации, с неметричностью вейлевского типа и т. д. [4]. При этом решения одной модели можно "превращать" в решения другой модели простым конформным преобразованием без решения уравнений поля. В ряде работ по общим вопросам теории относительности конформные преобразования использовались для компактификации и построения конформных диаграмм многообразий [5]. Все эти факты свидетельствуют о принципиальной важности изучения конформно-соответствующих физико-геометрических систем в рамках любой геометрической теории.

Настоящая статья посвящена исследованию свойств конформной симметрии однородной финслеровой метрики Бервальда-Моора 4-ой степени. Эта метрика возникает как естественное обобщение модуля комплексного числа в рамках ассоциативно-коммутативной алгебры \mathcal{H}_4 [4, 7]. Как известно, на всяком линейном пространстве над полем вещественных или комплексных чисел можно ввести структуру гладкого многообразия \mathcal{H}_4 . Для удобства изучения непрерывных симметрий геометрии Бервальда-Моора мы в настоящей статье отвлекаемся от ее алгебраической природы и рассматриваем ее с общих позиций теории гладких многообразий. При этом, разумеется, мы имеем дело с многообразием очень специального вида, на котором глобально задано

ковариантное тензорное поле валентности 4, имеющее в специальных (т. н. *изотропных*) координатах вид:

$$G = \hat{S}(dx^1 \otimes dx^2 \otimes dx^3 \otimes dx^4), \quad (1)$$

где \hat{S} — оператор симметризации (без числового множителя). Для избежания излишнего усложнения, связанного с глобальными топологическими свойствами многообразия, не имеющими прямого отношения к основной задаче настоящей статьи, все рассуждения будут проводиться для $\mathcal{H}_4 \sim R^4$. При этом большая часть результатов будет справедлива (локально) и для многообразий с глобальной топологией, отличной от R^4 .

В соответствии с вышесказанным, в тех местах, где речь идет об аффинных конструкциях и конструкциях конечной геометрии мы будем использовать термин "пространство Бервальда-Моора", а в местах, где речь идет о дифференциально-геометрических свойствах метрики (2), мы используем термин "многообразие Бервальда-Моора".

2 Сигнатурное разложение пространства Бервальда-Моора

Ограничение метрики (2) на любую из координатных плоскостей π_i ($i = 1, 2, 3, 4$), на которой $x^i = \text{const}$, очевидно приводит к равенству: $G|_{\pi_i} = 0$. Это означает, что семейство координатных плоскостей представляет собой семейство *нулевых* поверхностей геометрии Бервальда-Моора, которые мы будем называть \mathcal{C} -поверхностями. Через каждую точку многообразия (в силу однородности в качестве типичной можно рассматривать, например, точку O с координатами $(0; 0; 0; 0)$) проходит ровно 4 \mathcal{C} -поверхности, пересекающихся в этой точке и образующих *нулевой 4-листник* \mathcal{C}_O с вершиной в этой точке. Рассмотрим вектор X в точке O с координатами $\{X^1, X^2, X^3, X^4\}$. Если одну из его координат (пусть это будет для определенности координата X^1) положить равной нулю, вектор X будет \mathcal{C} -вектором, т. е. вектором с нулевой финслеровой нормой, ввиду его принадлежности в этом случае соответствующей \mathcal{C} -плоскости. Пусть теперь все остальные координаты не равны нулю. Рассмотрим пару векторов X^\pm с координатами $\{\pm\epsilon, X^2, X^3, X^4\}$ соответственно, где ϵ — положительный вещественный параметр. Эти векторы, очевидно, уже не являются \mathcal{C} -векторами и их финслеровы скалярные 4-кубы по соображениям непрерывности обязательно имеют противоположные знаки:

$$G(X^+, X^+, X^+, X^+) \cdot G(X^-, X^-, X^-, X^-) < 0.$$

Таким образом, все пространство¹ \mathcal{H}_4 разбивается на компоненты с положительными и отрицательными значениями финслеровой четвертой степени радиус-векторов. Эти компоненты можно классифицировать по знакам изотропных координат: например, $\mathcal{H}_4^{(+,+,+,+)}$ — множество точек с радиус-векторами, все координаты которых положительны, $\mathcal{H}_4^{(-,+,+,+)}$ — множество точек с радиус-векторами, все первые координаты которых отрицательны, а остальные положительны и т. д. Всего будет $2^4 = 16$ таких компонент, чередующихся около начала в "4-мерном шахматном" порядке. Отметим, что такая классификация точек пространства Бервальда-Моора инвариантна, то есть не зависит от выбора системы координат.

Имеет место следующее сигнатурное разложение многообразия \mathcal{H}_4 около точки O :

$$\mathcal{H}_4 = \mathcal{C}_O \bigcup_{\sigma} \mathcal{H}_4^{\sigma}, \quad (2)$$

¹ Напомним, что в R^4 (и вообще в любом линейном пространстве) касательное к любой его точке пространство можно отождествить с самим R^4 (самим линейным пространством) посредством стандартной конструкции радиус-вектора.

где индекс σ обозначает двоичный 4-х разрядный код соответствующей компоненты. Для каждого кода σ определим сигнатуру этого кода $|\sigma|$ как сумму $+1$ и -1 , соответствующих знаку каждого разряда, выполненную по всем разрядам кода. Например $|(+, +, +, +)| = 4$, $|(+, -, -, +)| = 0$ и т. д. С помощью сигнатуры кода можно ввести более "грубое" разложение многообразия \mathcal{H}_4 , аналогичное причинному разложению пространства Минковского. Именно, на множестве сигнатурных компонент \mathcal{H}_4^σ введем эквивалентность \sim по правилу: $\mathcal{H}_4^{\sigma_1} \sim \mathcal{H}_4^{\sigma_2}$, если $|\sigma_1| = |\sigma_2| \pmod{4}$. Нетрудно убедиться, что введенная таким образом эквивалентность отождествляет те сигнатурные компоненты, у которых коды отличаются в четном числе разрядов. Переходя к классам эквивалентных компонент — их будет всего два: \mathcal{H}_4^+ и \mathcal{H}_4^- — получаем разложение:

$$\mathcal{H}_4 = \mathcal{C}_O \cup \mathcal{H}_4^+ \cup \mathcal{H}_4^-, \quad (3)$$

аналогичное разложению пространства Минковского на световой конус, его внутренность и внешность. При этом точки компоненты \mathcal{H}_4^+ имеют положительные скалярные 4-кубы (финслеров аналог причинно-связанной с точкой O области пространства-времени Минковского), а точки компоненты \mathcal{H}_4^- — отрицательные (финслеров аналог причинно-несвязанной с точкой O области пространства-времени Минковского). Отметим, что разложение (2), специфическое для метрики Бервальда-Моора, типично отражает более тонкий характер классификации направлений в пространстве финслеровой геометрии, чем традиционной квадратичной. Обсуждение некоторых физических аспектов разложений (2) и (3) было дано в работах [8, 9].

Рассмотрим уравнение финслеровой сферы в пространстве Бервальда-Моора. Ввиду однородности и изотропии достаточно ограничиться случаем единичной сферы с вещественным радиусом:

$$G(X, X, X, X) = 16X^1X^2X^3X^4 = 1. \quad (4)$$

Это — некомпактное несвязное подмногообразие многообразия \mathcal{H}_4 , компоненты которого симметрично располагаются в компонентах \mathcal{H}_4 из класса \mathcal{H}_4^+ — всего 8 несвязных компонент. Конструкция финслеровой сферы может быть использована для чисто геометрического определения понятия 3-мерного расстояния в пространстве с метрикой Бервальда-Моора [10].

При общем невырожденном линейном преобразовании изотропных координат вся описанная выше конструкция испытывает аффинную деформацию, при которой, вообще говоря, нарушается координатная симметрия между отдельными компонентами \mathcal{H}_4^σ и симметрия компонент сферы. По этой причине изотропные координаты, в которых метрика Бервальда-Моора имеет вид (2), в определенном смысле выделены, поскольку в максимальной степени отражают ее дискретную симметрию (относительно перестановок и инверсий координат).

3 Конформные симметрии метрики Бервальда-Моора

Перейдем к исследованию непрерывных симметрий метрики Бервальда-Моора. Для этого, в соответствии с общими принципами дифференциально-геометрического подхода к непрерывным симметриям геометрических объектов, определенных на гладком многообразии [11], запишем конформные уравнения Киллинга для метрики G :

$$L_Y G = \varphi G, \quad (5)$$

где φ — некоторое скалярное поле, подлежащее определению, L_Y — оператор производной Ли вдоль векторного поля Y . При этом поле Y , удовлетворяющее уравнениям

(5), выступает как поле скорости некоторой однопараметрической подгруппы группы конформных симметрий метрики G . При $\varphi = 0$ мы имеем дело группой изометрий этой метрики. Учитывая, что метрика G является ковариантным симметричным тензором валентности 4 и пользуясь выражением для производной Ли ковариантного тензора в координатах:

$$L_Y(T)_{\alpha_1 \dots \alpha_n} = Y^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} T_{\alpha_1 \dots \alpha_n} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial Y^\beta}{\partial x^{\alpha_i}} T_{\alpha_1 \dots \beta \dots \alpha_n},$$

получим следующую систему уравнений на поля Y и φ :

$$\frac{\partial Y^1}{\partial x^1} + \frac{\partial Y^2}{\partial x^2} + \frac{\partial Y^3}{\partial x^3} + \frac{\partial Y^4}{\partial x^4} = \varphi; \quad \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} = 0 \quad \text{при } i \neq j. \quad (6)$$

В силу недиагональной части системы уравнений полагаем $Y^i = Y^i(x^i)$ ($i = 1, 2, 3, 4$), так что оставшееся диагональное уравнение по-существу определяет функцию φ при произвольно заданных $Y^i(x^i)$. Для прояснения геометрического смысла найденных полей, составим дифференциальные уравнения для потоков однопараметрических подгрупп:

$$\frac{dx^i}{dt} = Y^i(x^i) \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (7)$$

Ее решение:

$$t = F^i(x^i) \equiv \int_{x_0^i}^{x^i} \frac{dx^i}{Y(x^i)} \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad (8)$$

неявно определяет гладкое преобразование многообразия \mathcal{H}_4 — поток специального вида на этом многообразии:

$$x^i = f^i(t, x_0^i), \quad (9)$$

с начальными условиями $f^i(0, x_0^i) = x_0^i$, который оставляет метрику Бервальда-Моора конформно-инвариантной. Здесь f^i — это функции, обратные к F^i в (13). В силу произвольности компонент Y^i эти функции можно также рассматривать как произвольные (гладкие).

Конформная инвариантность метрики Бервальда-Моора относительно этих (и только этих!) преобразований очевидна и без вычислений по следующим соображениям. Конформная инвариантность метрики обеспечивается в точности теми преобразованиями многообразия, которые оставляют инвариантным множество нулевых 4-листников. Как мы видели выше, уравнения нулевого 4-листника в изотропных координатах имеет вид: $x^i = \text{const}$. Общие преобразования вида (9) сдвигают точки координатной плоскости $x^i = \text{const}$ в точки $x^i = \text{const}'$, так что нулевые направления переходят в нулевые направления. Явная подстановка преобразований вида (9) показывает, что метрика Бервальда-Моора умножается при такой подстановке на общий конформный множитель, как и должно быть для преобразований конформной симметрии. Отметим, что полученная группа конформных симметрий является абелевой и бесконечномерной, т. к. зависит от набора 4-произвольных функций.

Для выделения из группы конформных симметрий группы изометрий метрики Бервальда-Моора, положим в уравнении (4) $\varphi = 0$. В этом случае общее решение оставшегося диагонального уравнения имеет вид:

$$Y^i(x^i) = A^i + B^i x^i, \quad \sum_{i=1}^4 B^i = 0, \quad (10)$$

где A^i и B^i — константы интегрирования. Как видим, группа изометрий метрики Бервальда-Моора является 7-параметрической (неабелевой!). Полагая поочередно все константы кроме одной из A^i равными нулю, получим множество постоянных полей вида $Y^i = A^i = \text{const}$, которым, как обычно, соответствуют трансляции многообразия \mathcal{H}_4 на постоянные векторы смещения. Факт изометричности всех таких преобразований очевиден из факта однородности метрики Бервальда-Моора в изотропных координатах. Интегрируя уравнения потока для векторного поля Y из (10) при $A^i = 0$, получим следующий явный вид другой подгруппы изометрий:

$$x^i(t) = x_0^i e^{B^i t}, \quad \sum_{i=1}^4 B^i = 0. \quad (11)$$

В совокупности эти преобразования представляют собой унимодулярно согласованные дилатации координатных осей. Физическая интерпретация этих преобразований исследовалась в работе [10].

4 Экстремали метрики Бервальда-Моора

Рассмотрим свойства экстремальных кривых метрики Бервальда-Моора. Варьируя функционал финслеровой длины:

$$S[x(t)] = \int_0^t L dt \equiv \int_0^t (G(\dot{x}, \dot{x}, \dot{x}, \dot{x}))^{1/4} dt$$

посредством цепочки стандартных вычислений с учетом исчезновения вариаций на концах, приходим к уравнениям сохранения финслерова 4-импульса:

$$p_i = C_i = \text{const}, \quad (12)$$

где

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = \frac{1}{4} \frac{G_{iklm} \dot{x}^k \dot{x}^l \dot{x}^m}{(G(\dot{x}, \dot{x}, \dot{x}, \dot{x}))^{3/4}}. \quad (13)$$

С учетом конкретного вида (2) метрики Бервальда-Моора, уравнения экстремалей (12) принимают вид:

$$C_1 = \frac{3}{2} \frac{\dot{x}^2 \dot{x}^3 \dot{x}^4}{G(\dot{x}, \dot{x}, \dot{x}, \dot{x})^{3/4}}; \quad C_2 = \frac{3}{2} \frac{\dot{x}^1 \dot{x}^3 \dot{x}^4}{G(\dot{x}, \dot{x}, \dot{x}, \dot{x})^{3/4}};$$

$$C_3 = \frac{3}{2} \frac{\dot{x}^1 \dot{x}^2 \dot{x}^4}{G(\dot{x}, \dot{x}, \dot{x}, \dot{x})^{3/4}}; \quad C_4 = \frac{3}{2} \frac{\dot{x}^1 \dot{x}^2 \dot{x}^3}{G(\dot{x}, \dot{x}, \dot{x}, \dot{x})^{3/4}}.$$

Из этой системы следует, что для геодезических, не являющихся \mathcal{C} -кривыми², все C_i отличны от нуля. Домножая каждое уравнение, содержащее константу C_i , на соответствующее \dot{x}^i приходим к системе равенств:

$$C_1 \dot{x}^1 = C_2 \dot{x}^2 = C_3 \dot{x}^3 = C_4 \dot{x}^4.$$

Отсюда вытекает пропорциональность всех компонент скоростей друг другу. Полагая $\dot{x}^4 = \xi(t) \neq 0$, находим 4-вектор скорости экстремали:

$$\dot{x} = \xi(t)(C_4/C_1; C_4/C_2; C_4/C_3; 1).$$

² т. е. такими кривыми, у которых касательный вектор в каждой точке кривой является \mathcal{C} -вектором.

На самом деле не все постоянные и отличные от нуля компоненты импульсов C_i независимы. Чтобы получить связь между ними, домножим уравнение (12) на компоненту скорости \dot{x}^i и просуммируем по всем i . С учетом вида 4-импульса (13) и вида метрики (2), приходим к условию связи:

$$16C_1C_2C_3C_4 = 1, \quad (14)$$

которое в соответствии с формулой (4) в точности означает принадлежность компонент финслерова 4-импульса 3-мерной единичной финслеровой сфере. Это соотношение является аналогом соотношения релятивистской связи энергии и импульса в СТО.

Если ввести теперь новый параметр времени по формуле: $\tau = C_4^{-1} \int \xi(t) dt$, то интегрирование компонент скорости по времени приводит к следующему параметрическому представлению экстремальной кривой:

$$x^1(\tau) = C_1^{-1}\tau + x_0^1; \quad x^2(\tau) = C_2^{-1}\tau + x_0^2; \quad x^3(\tau) = C_3^{-1}\tau + x_0^3; \quad x^4(\tau) = C_4^{-1}\tau + x_0^4 \quad (15)$$

с условием связи (14). В такой параметризации очевидно, что экстремали пространства Бервальда-Моора — прямые. Этот факт, на самом деле, не зависит от выбора параметризации. Отметим, что факт прямолинейности экстремальных кривых в силу аналогичных выкладок без труда распространяется на пространства Бервальда-Моора высших размерностей, метрика которых в многомерных изотропных координатах задается формулой:

$$G = \hat{S}(dx^1 \otimes \dots \otimes dx^n), \quad (16)$$

где $n = \dim \mathcal{H}_4$.

Семейство экстремалей многообразия \mathcal{M} будем далее обозначать $\text{Extr}(\mathcal{M})$. Напримр семейство прямых (15) с условием (14) — это $\text{Extr}(\mathcal{H}_4)$.

5 Конформная калибровка метрики Бервальда-Моора и нелинейные группы симметрий

С точки зрения общей теории многообразий действие конформной группы на многообразии Бервальда-Моора, сводящееся к диффеоморфизмам очень специального вида (9), представляет собой обычное изменение системы "координатных меток" на осях изотропной системы координат, которое приводит в общем случае к "нелинейному закону арифметизации" каждого из изотропных направлений. Однако одновременное рассмотрение группы изометрий метрики Бервальда-Моора и конформной группы приводит к их своеобразному "взаимодействию", которое позволяет реализовать группу изометрий метрики Бервальда-Моора как нелинейную группу симметрии 4-мерных геометрий с квадратичными интервалами (например, интервалом пространства Минковского), интервалами произвольной степени однородности или ряда других метрик общего (нелинейного) вида.

Для общей формулировки рецепта построения таких нелинейных представлений введем некоторые полезные для дальнейшего обозначения, определения и понятия. Группы конформной симметрии и изометрии метрики Бервальда-Моора будем в дальнейшем обозначать \mathcal{CN}_4 и \mathcal{IN}_4 соответственно. Согласно формулам³ (9) группа кон-

³ Для перехода от потоков к более привычным для геометрии преобразованиям координат, например, в формулах (9) необходимо x_0^i считать исходными ("нештрихованными") координатами, x^i — преобразованными ("штрихованными") координатами, а параметру t во всех формулах придать произвольное, но фиксированное значение. Получающиеся формулы будут в этом случае описывать не процесс конформной деформации многообразия, а его конечный результат. Аналогично можно получить представление конечного действия потока и в формуле (11).

формных симметрий имеет структуру прямого произведения четырех множеств вещественных дифференцируемых и дифференцируемо-обратимых функций:

$$\mathcal{CN}_4 = C^1 \times C^1 \times C^1 \times C^1,$$

так что каждый элемент $f \in \mathcal{CN}_4$ однозначно представляется набором своих компонент: $f = (f^1, f^2, f^3, f^4)$, а его покомпонентное действие на точки многообразия Бервальда-Моора описывается в координатах формулами: $y^i = f^i(x^i)$. Иногда, когда это не будет приводить к путанице, мы будем для краткости употреблять сокращенную символическую запись такого действия: $y = f(x)$. Действие группы изометрии на точки многообразия Бервальда-Моора будем символически обозначать $\iota(x)$, где ι — элемент группы \mathcal{IH}_4 . В компонентах такое действие для $\iota = (\lambda^1, \lambda^2, \lambda^3, \lambda^4, c^1, c^2, c^3, c^4)$ описывается системой соотношений:

$$(x')^i = \lambda^i x^i + c^i, \quad (i = 1, 2, 3, 4),$$

при этом параметры трансляций — произвольны, а параметры λ^i , как следует из формул⁴ (11), удовлетворяют соотношению:

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 = 1. \quad (17)$$

Нетрудно убедиться, что группа \mathcal{IH}_4 представляет собой полупрямое произведение подгруппы трансляций $\mathcal{I}_0\mathcal{H}_4$ — это нормальный делитель группы \mathcal{IH}_4 — и подгруппы унимодулярно согласованных дилатаций $\mathcal{I}_D\mathcal{H}_4$, что принято записывать так:

$$\mathcal{IH}_4 = \mathcal{I}_0\mathcal{H}_4 \rtimes \mathcal{I}_D\mathcal{H}_4.$$

Подействуем некоторым элементом f группы конформной симметрии на многообразии Бервальда-Моора. В результате мы придем к многообразию Бервальда-Моора \mathcal{H}_4^f в некоторой *специальной конформной калибровке*. Преобразования многообразия \mathcal{H}_4 группы \mathcal{IH}_4 соответствуют теперь преобразования многообразия \mathcal{H}_4^f группы $(\mathcal{IH}_4)^f < \mathcal{CN}_4^f$, элементы ι^f которой определяются формулой:

$$\iota^f \equiv f \circ \iota \circ f^{-1}. \quad (18)$$

Тот факт, что эта формула действительно определяет действие группы $(\mathcal{IH}_4)^f$ сразу же следует из ассоциативности композиции отображений:

$$\iota_1^f * \iota_2^f = (f \circ \iota_1 \circ f^{-1}) * (f \circ \iota_2 \circ f^{-1}) = f \circ \iota_1 \circ (f^{-1} \circ f) \circ \iota_2 \circ f^{-1} = (f \circ (\iota_1 * \iota_2) \circ f^{-1}),$$

где $*$ обозначает групповую композицию, а \circ — композицию отображений. Таким образом, группа $(\mathcal{IH}_4)^f$ является образом вложения группы \mathcal{IH}_4 в группу \mathcal{CN}_4^f . Как мы убедимся далее на конкретных примерах, действие группы $(\mathcal{IH}_4)^f$ в пространстве координат многообразия \mathcal{H}_4^f описывается в общем случае нелинейными функциями, поэтому эту группу мы будем называть *нелинейным f -представлением группы \mathcal{IH}_4* . Диаграмма (19) наглядно иллюстрирует происхождение формулы (18): именно такое определение нелинейного представления обеспечивает коммутативность этой диаграммы.

$$\begin{array}{ccc} f(\mathcal{H}_4) & \xrightarrow{\iota^f} & f(\mathcal{H}_4) \\ f \uparrow & & \uparrow f \\ \mathcal{H}_4 & \xrightarrow{\iota} & \mathcal{H}_4 \end{array} \quad (19)$$

⁴ Связь потоковых и конечных параметров дается формулой: $\lambda^i = e^{B_i t}$.

В общем случае мы не можем отождествить группу $(\mathcal{I}\mathcal{H}_4)^f$ с группой изометрий $\mathcal{I}\mathcal{H}_4^f$. Однако, как будет показано ниже, группу $(\mathcal{I}\mathcal{H}_4)^f$ всегда можно рассматривать как группу (вообще говоря, нелинейных) изометрий $\mathcal{I}\mathcal{H}_4^f$ некоторого многообразия \mathcal{H}_4^f , которое отличается от \mathcal{H}_4^f только своей метрикой. Вид этой метрики зависит от вида калибровочной функции f .

Рассмотрим несколько примеров применения этой общей конструкции.

5.1 Нелинейное представление группы $\mathcal{I}_D\mathcal{H}_4$ в центро-аффинном пространстве Минковского

Рассмотрим конформную калибровку метрики Бервальда-Моора с компонентами калибровочной функции вида:

$$y^i = f^i(x^i) \equiv \sqrt{\epsilon_i \ln x^i}, \quad (\text{суммирование по } i \text{ нет!}) \quad (20)$$

где $\epsilon_i = -1$ для $i = 1, 2, 3$, $\epsilon_4 = 1$. Тогда формула (18) приводит к следующим законам преобразования координат y на $f(\mathcal{H}_4)$ при действии на них элемента группы $(\mathcal{I}_D\mathcal{H}_4)^f$:

$$(y')^i = \sqrt{\epsilon_i \ln(\lambda^i x^i)}.$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что комбинация:

$$s^2 = (y^4)^2 - (y^1)^2 - (y^2)^2 - (y^3)^2 \quad (21)$$

остаётся инвариантной под действием такого преобразования в силу условия (17). В терминах переменных y действие унимодулярно согласованных дилатаций принимает вид нелинейных преобразований:

$$(y')^i = \sqrt{(y^i)^2 + \epsilon_i \ln \lambda^i}. \quad (22)$$

Подчеркнем, что группа Лоренца является полной линейной однородной группой симметрии интервала (21), в то время как обсуждаемая нами группа $(\mathcal{I}_D\mathcal{H}_4)^f$ является (относительно не полной) нелинейной группой симметрии этого интервала. Отметим также, что рассматриваемые нами нелинейные преобразования действуют именно в центро-аффинном пространстве Минковского, поскольку эти преобразования не содержат трансляций. Непосредственной проверкой можно убедиться, что подгруппа $(\mathcal{I}_0\mathcal{H}_4)^f$ в рассматриваемой калибровке действует на координаты y по формулам:

$$(y')^i = \sqrt{\epsilon_i \ln(c^i + e^{\epsilon_i (y^i)^2})}. \quad (23)$$

При этом, как нетрудно видеть, 4-мерный интервал (21) преобразуется по следующему нелинейному закону:

$$(s')^2 = \ln \prod_{i=1}^4 (c^i + e^{\epsilon_i (y^i)^2}) = s^2 + \ln \prod_{i=1}^4 (1 + c^i e^{-\epsilon_i (y^i)^2}).$$

Непосредственной проверкой нетрудно убедиться, что трансляции многообразия \mathcal{H}_4^f : $y \rightarrow y + \bar{c}$ порождаются преобразованиями конформной группы $\mathcal{C}\mathcal{H}_4$ специального вида:

$$(x')^i = e^{\epsilon_i (\bar{c}^i)^2} x^i e^{2\epsilon_i \bar{c}^i \sqrt{\epsilon_i \ln x^i}}. \quad (24)$$

Таким образом, можно определить f -представление и для самой группы конформных преобразований. Будем обозначать его по аналогии с нелинейным представлением группы изометрий $(\mathcal{C}\mathcal{H}_4)^f$. Любой элемент $g \in \mathcal{C}\mathcal{H}_4$ порождает элемент $g^f \in (\mathcal{C}\mathcal{H}_4)^f$ по формуле: $g^f = f \circ g \circ f^{-1}$.

Рассмотренный пример наглядно иллюстрирует то обстоятельство, что группа изометрий и группа конформных симметрий метрики Бервальда-Моора могут нетривиальным образом взаимодействовать друг с другом, приводя к нелинейным симметриям известных геометрий.

5.2 Нелинейное представление группы $\mathcal{I}_D\mathcal{H}_4$ в центрo-аффинном финслеровом обобщенном пространстве Минковского

Конструкция предыдущего примера легко обобщается на нелинейные симметрии интервалов вида:

$$s^n = \sum_{i=1}^4 \epsilon_i (y^i)^n, \quad (25)$$

где $\epsilon_i = \pm 1$ с произвольной расстановкой. При этом калибровочная функция f задается компонентами вида:

$$y^i = [\epsilon_i \ln x^i]^{1/n}, \quad (26)$$

а сами нелинейные преобразования координат на \mathcal{H}_4^f задаются соотношениями:

$$(y')^i = [(y^i)^n + \epsilon_i \ln \lambda^i]^{1/n}. \quad (27)$$

Формулы (25), (26), (27) обобщают соответствующие им формулы (21), (20) и (22). Нетрудно сообразить, что рассматривая группу $\mathcal{I}_D\mathcal{H}_4$ для метрик Бервальда-Моора высших измерений вида (16), можно получить нелинейные группы симметрий интервала вида (25) с любым числом координат.

5.3 Нелинейное представление группы $\mathcal{I}_0\mathcal{H}_4$ в компактном пространстве

Рассмотрим конформную калибровку метрики Бервальда-Моора, задаваемую функцией: $y^i(x^i) = \tanh x^i$ ($i = 1, 2, 3, 4$) и рассмотрим представление группы трансляций $\mathcal{I}_0\mathcal{H}_4$ в этой калибровке. Используя известные формулы гиперболической тригонометрии, получаем следующий вид этого представления:

$$(y')^i = \frac{y^i + \sigma^i}{1 + \sigma^i y^i}, \quad \sigma^i = \tanh c^i, \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (28)$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что элементарная комбинация координат, инвариантная относительно такого преобразования, определяется координатами пары точек $P_1(y_1^1, y_1^2, y_1^3, y_1^4) \in \mathcal{H}_4^f$ и $P_2(y_2^1, y_2^2, y_2^3, y_2^4) \in \mathcal{H}_4^f$ по формуле:

$$\varphi_{12}^i \equiv \frac{y_2^i - y_1^i}{1 - y_1^i y_2^i} = \text{inv}, \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (29)$$

Общая инвариантная относительно действия группы $\mathcal{I}_0\mathcal{H}_4^f$ комбинация дается произвольной функцией от элементарных инвариантных функций:

$$F(\varphi_{12}^1, \varphi_{12}^2, \varphi_{12}^3, \varphi_{12}^4) = \text{inv}. \quad (30)$$

Действие группы унимодулярных дилатаций представляется в этой калибровке формулами:

$$(y')^i = \tanh(\lambda^i \operatorname{arctanh} y^i), \quad (31)$$

а действие настоящей группы трансляций в \mathcal{H}_4^f : $y^i \rightarrow y^i + \bar{c}^i$ порождается конформным преобразованием \mathcal{H}_4 вида:

$$(x')^i = \operatorname{arctanh}(\tanh x^i + \bar{c}^i). \quad (32)$$

Отметим, что многообразие \mathcal{H}_4^f является компактным.

5.4 Общий вид нелинейного представления группы \mathcal{IH}_4

Все предыдущие конструкции этого параграфа являются частным случаем общего описания нелинейного представления группы \mathcal{IH}_4 , которое можно получить следующим образом. Зафиксируем некоторую калибровку f и запишем в неявном символическом виде результат действия группы \mathcal{IH}_4 в координатах многообразия \mathcal{H}_4^f :

$$y = f(x); \quad y' = f(\lambda x + c).$$

Выражая из второго уравнения x :

$$x = \frac{1}{\lambda}(f^{-1}(y') - c)$$

и подставляя его в первое уравнение, приходим к выражению:

$$y = f\left(\frac{1}{\lambda}(f^{-1}(y') - c)\right), \quad (33)$$

откуда обращением находим общий вид нелинейного f -представления $(\mathcal{IH}_4)^f$:

$$y' = f(\lambda f^{-1}(y) + c). \quad (34)$$

Формулы (22), (23), (27), (28) и (31) являются частными случаями общей формулы (34). Нетрудно сообразить, что выражения для преобразований конформной симметрии многообразия \mathcal{H}_4 , индуцирующие в \mathcal{H}_4^f дилатации и сдвиги, получается из общей формулы (34) заменами $y \rightarrow x$ и $f \leftrightarrow f^{-1}$:

$$x' = f^{-1}(\bar{\lambda}f(x) + \bar{c}), \quad (35)$$

при этом $y' = \bar{\lambda}y + \bar{c}$. Формулы (24) и (32) являются частными случаями общей формулы (35).

5.5 Общий вид инварианта нелинейной симметрии в $f(\mathcal{H}_4)$

Выведем общий вид инварианта нелинейного представления $(\mathcal{IH}_4)^f$. Для этой цели применим к обеим частям уравнения (33) обратную функцию f^{-1} . В результате придем к уравнению:

$$f^{-1}(y') = \lambda f^{-1}(y) + c. \quad (36)$$

Для вывода инварианта необходимо исключить из этой формулы параметры преобразований. Для исключения параметров c необходимо рассмотреть пару точек в $f(\mathcal{H}_4)$ с собирательными координатами y_1 и y_2 и вычесть два уравнения вида (36) покомпонентно друг из друга. В результате приходим к соотношению в компонентах, не содержащему параметров трансляции:

$$f^{-1}((y')_2^i) - f^{-1}((y')_1^i) = \lambda^i(f^{-1}(y_2^i) - f^{-1}(y_1^i)), \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (37)$$

Далее, для исключения параметров дилатаций перемножим все уравнения (37) и учтем соотношение (17). В результате приходим к искомой элементарной инвариантной комбинации:

$$\prod_{i=1}^4 (f_i^{-1}((y')_2^i) - f_i^{-1}((y')_1^i)) = \text{inv.}$$

Общая инвариантная комбинация может выражаться как произвольная функция F от элементарной:

$$F\left(\prod_{i=1}^4(f_i^{-1}((y')_2^i) - f_i^{-1}((y')_1^i))\right) = \text{inv}. \quad (38)$$

Здесь и далее F — произвольная дифференцируемая функция своих аргументов.

Отметим, что ограничение группы \mathcal{IH}_4 до ее подгрупп $\mathcal{I}_0\mathcal{H}_4$ и $\mathcal{I}_D\mathcal{H}_4$ расширяет класс инвариантных комбинаций. Так, общая инвариантная комбинация для подгруппы $(\mathcal{I}_D\mathcal{H}_4)^f$ представляется выражением:

$$F\left(\prod_{i=1}^4(f_i^{-1}((y')^i))\right) = \text{inv}, \quad (39)$$

которое обобщает формулы (21) и (25), а общая инвариантная комбинация для подгруппы $(\mathcal{I}_0\mathcal{H}_4)^f$ представляется выражением:

$$F(f_1^{-1}(y_2^1) - f_1^{-1}(y_1^1), f_2^{-1}(y_2^2) - f_2^{-1}(y_1^2), f_3^{-1}(y_2^3) - f_3^{-1}(y_1^3), f_4^{-1}(y_2^4) - f_4^{-1}(y_1^4)) = \text{inv}, \quad (40)$$

которое обобщает формулы (29) и (30). В дальнейшем метрику на многообразии \mathcal{H}_4^f , группа изометрий которой совпадает с какой-нибудь из нетривиальных подгрупп группы $(\mathcal{IH}_4)^f$, будем называть f -метрикой.

В качестве примера приведем общий вид инварианта для калибровки раздела 5.1, в которой возникает интервал Минковского. Вид (21) получается из общей формулы (39), если функцию f взять из (20), а $F(w) = \ln(w)$. Интервал, инвариантный в этой калибровке относительно полной группы $(\mathcal{IH}_4)^f$, можно взять в соответствие с общей формулой (38) в виде:

$$s^2 = \ln \left[(e^{-(y_1^1)^2} - e^{-(y_2^1)^2})(e^{-(y_1^2)^2} - e^{-(y_2^2)^2})(e^{-(y_1^3)^2} - e^{-(y_2^3)^2})(e^{(y_1^4)^2} - e^{(y_2^4)^2}) \right] = \\ (y_1^4)^2 - (y_1^1)^2 - (y_1^2)^2 - (y_1^3)^2 + \ln \left[(1 - e^{(y_1^1)^2 - (y_2^1)^2})(1 - e^{(y_1^2)^2 - (y_2^2)^2})(1 - e^{(y_1^3)^2 - (y_2^3)^2})(1 - e^{(y_2^4)^2 - (y_1^4)^2}) \right].$$

Центро-аффинный интервал Минковского (21) получается из этой формулы в области: $y_2^i \gg y_1^i$ для $i = 1, 2, 3$ и $y_2^4 \ll y_1^4$ (точка 2 удалена на "пространственную бесконечность", а точка 1 — на "временную").

6 Отображение экстремалей

В силу специфичности группы конформных преобразований (перепараметризация координат), семейства экстремалей многообразий \mathcal{H}_4 и \mathcal{H}_4^f совпадают (это семейства прямых с единичным 4-импульсом). При этом, как нетрудно убедиться на простых примерах $(\text{Extr}(\mathcal{H}_4))^f \not\subset \text{Extr}(\mathcal{H}_4^f)$ и $(\text{Extr}(\mathcal{H}_4))^f \not\subset \text{Extr}(\mathcal{H}_4^f)$, хотя указанные семейства и могут иметь ненулевые пересечения. Таким образом, конформная калибровка в общем случае не является геодезическим отображением ни по отношению к метрике Бервальда-Моора на \mathcal{H}_4^f , ни по отношению к соответствующей f -метрике. Это означает, что в терминах экстремалей группа конформных симметрий осуществляет переходы между физически неэквивалентными ситуациями: например, от "свободного" движения к "вынужденному" и наоборот. В качестве примера на рис. 1 приведены проекции образов прямых на гиперплоскость (y^0, y^1, y^2) в калибровках, рассмотренных в предыдущих разделах.

Отметим, что после задания динамической части теории (конкретных принципов финслеровой динамики), преобразования конформной симметрии \mathcal{CH}_4 позволяют, в

принципе, связывать между собой различные задачи финслеровой динамики, аналогично тому как это делается для плоских задач классической механики Ньютона в рамках ТФКП [12].

Литература

- [1] С. Н. Brans, R. Н. Dicke, *Phys. Rev. D* **124**, 925 (1961)
- [2] V. Faraoni, E. Gunzig, P. Nardone, *Conformal transformations in classical gravitational theories and in cosmology*, arXiv: gr-qc/9811047v1
- [3] Yu. S. Vladimirov, S. S. Kokarev, *GRG* **29**, 141 (1997)
- [4] L. Querella, *Variational Principles and Cosmological Models in Higher-Order Gravity*, Doct. diss., arXiv: gr-qc/9902044v1
- [5] R. Penrose, *Phys. Rev. Lett.*, **10** p. 66 (1963).
- [6] Д. Г. Павлов, *ГКЧГФ*, **1** 5 (2004)
- [7] Г. И. Гарасько, Д. Г. Павлов, *ГКЧГФ*, **4** 3 (2007)
- [8] Д. Г. Павлов, *ГКЧГФ*, **1** 20 (2004)
- [9] Д. Г. Павлов, *ГКЧГФ*, **1** 33 (2004)
- [10] Д. Г. Павлов, Г. И. Гарасько, *ГКЧГФ*, **3** 3 (2005)
- [11] Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко, *Современная геометрия*, М., Наука, 1979
- [12] С. С. Кокарев, *Изв. вузов (физика)*, 11, 36 (2000).

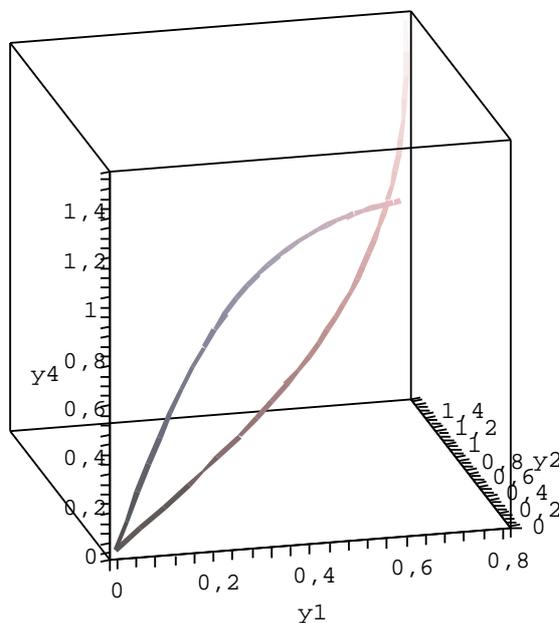


Рис. 1. Кривая, соединяющая два угла координатного куба, описывается параметрическими уравнениями: $y^4 = \sqrt{\ln(1+t)}$, $y^1 = y^2 = \sqrt{-\ln(1-t)}$ и соответствует калибровке (20). Вторая кривая описывается параметрическими уравнениями: $y^4 = \tanh t$, $y^1 = \tanh 2t$, $y^0 = \tanh 3t$ и соответствует калибровке раздела 5.3. Ни одна из кривых не является экстремалью ни для метрики Бервальда-Моора в \mathcal{H}_4^f , ни для соответствующих f -метрик.