

# Современные проблемы ОТО – физика и геометрия

С.В. Сипаров

## Предисловие

Предлагаемый материал является вспомогательным и представляет собой основу лекций для слушателей Школы по Финслеровой геометрии, т.е. студентов старших курсов математических (реже физических) специальностей университетов. Предполагается, что читатель, как и эти студенты, обладает определенной математической подготовкой, т.е. знаком с формальной стороной вопроса, но, возможно, не обсуждал в подробностях, как и с какой целью некоторые понятия и принципы использовались в естествознании и теоретической физике, а также к каким проблемам это может привести или уже привело. Целью этого изложения является привлечение заинтересованной молодежи в область, где на современном этапе развития науки наблюдается кризис, и обсуждение некоторых возможных путей его преодоления. Это требует по возможности ясного понимания основ теории, одним из которых уже полтора столетия, а другим – почти сто лет, и которым будет уделено определенное внимание.

## Введение: взаимоотношение математики и физики

### 1. Наука от Пифагора до Кеплера и Ньютона

Две основные концепции современного естествознания – квантовая механика и теория относительности – формализованы чрезвычайно глубоко. И эта глубина носит не технический, т.е. просто математически сложный, но мировоззренческий, философский характер. Не уделяя внимания этому обстоятельству, невозможно выйти за пределы конкретных задач, какими бы важными они ни были, невозможно предположить, в чем может состоять фундаментальное заблуждение, если вдруг целый класс задач оказывается не решаемым или целый пласт наблюдений начинает противоречить существующей теории. И выдающиеся деятели науки этому обстоятельству внимание уделяли всегда. Странность некоторых математических идей и понятий прорывалась в мир наблюдений и измерений, а результаты последних заставляли строить неведомые дотоле умоглядные конструкции.

Если считать Пифагора одним из родоначальников науки, то можно вспомнить, как от простого «египетского» треугольника он сделал шаг к половине разрезанного по диагонали квадрата и обнаружил, что для измерения этой диагонали не находится *числа* в привычном тогда понимании этого слова. Это открытие так потрясло его, что за разглашение этой тайны, вывод ее за пределы круга соратников-«пифагорейцев» человек подлежал смертной казни. Утверждение «все есть число», приписываемое Пифагору, имеет глубокий смысл. Различные *числоподобные объекты* (числа натуральные, рациональные, иррациональные, комплексные, двойные, кватернионы и другие) образуют различные *алгебры*, на которых могут быть построены различные *геометрии*, а от геометрии до *мира*, в котором происходят наблюдаемые и измеряемые *события*, один шаг. И хотя живем мы именно в

мире, в основе мироздания оказывается число или иной абстрактный математический объект, например, такой, как сфера – самая совершенная математическая фигура.

Вот и в небе, окружающем Землю, оказываются сферы – у каждой планеты, вращающейся вокруг Земли, своя, а самая большая, всеобъемлющая (между прочим, седьмая, поскольку планет было тогда известно четыре, да еще Солнце с Луной) сфера – это сфера, на которой расположены звезды, образующие не меняющиеся со временем созвездия. Это – абсолют, это – гармония, и никакое наблюдаемое явление не должно поколебать идеал – геометрическое место точек, равноудаленных от одной. Но как быть с наблюдаемым попятным движением планет, перемещающихся среди неизменных рисунков созвездий? Не могут же сферы вращаться не равномерно! И Птолемею приходится помимо «дифферентов» – окружностей, по которым планеты двигаются вокруг Земли, вводить еще «эпициклы» – маленькие окружности, по которым планеты двигаются вокруг точек, как раз и двигающихся по «дифферентам». А когда были выполнены более точные измерения, потребовалось и все плоскости «дифферентов» и «эпициклов» наклонить под разными углами. Расчет положения планет превратился в зубодробительное упражнение, которое все-таки позволяло найти ответ наиболее упорным исследователям. Лишь через несколько столетий проявилась систематическая ошибка, которая постепенно нарастала со временем.

Однако, когда Коперник «вывернул наизнанку» геоцентрическую систему Птолемея и поместил в центр Солнце, а Земля, как и другие планеты, стала двигаться по круговой орбите, вращаясь вокруг собственной оси, расчет положения планет по этой упрощившейся модели, совсем не требовавшей эпициклов, стал давать еще более плохой результат, чем сложная модель Птолемея. Поэтому революция Коперника еще долго оставалась просто остроумной гипотезой, вызывающей ободрающие улыбки, но вряд ли имеющей отношение к действительности.

В свою очередь Кеплер, анализирувавший результаты двадцатилетних измерений положения планет, выполненных Тихо Браге и им самим (для повышения точности гороскопов), тоже был уверен в мировой гармонии, основанной на математике. Он надеялся, что те окружности, по которым планеты, вероятно, двигаются вокруг Солнца, имеют радиусы, соответствующие концентрическим сферам, в которые последовательно вписаны правильные Платоновы многогранники. И когда он обнаружил, что это не так, а планеты вообще двигаются по эллипсам, то пережил культурный шок, от которого долго не мог оправиться. Но зато эллипсы, измеренные Кеплером, блестяще подошли к расчетам, основанным на гипотезе Коперника, устранили имевшиеся расхождения, и мир, наконец, стал гелиоцентрическим. Закон, связывающий радиусы орбит и периоды обращения планет, обнаруженный Кеплером в результате наблюдений и измерений, впоследствии привел Ньютона к закону гравитации в том виде, в котором мы сейчас его знаем.

С Ньютона началась новая эра в развитии естествознания. Он отказался следовать априорным математическим утверждениям, основанным на «наивном» стремлении к гармонии, сделал своим девизом «гипотез не измышляю» и прочно внедрил в науку метод индукции. И когда измерения Кеплера и полученный им закон, использованные Ньютоном при определении отношений ускорений планет, привели к мысли о существовании дальнедействующего притяжения планет к Солнцу по закону обратных квадратов, Ньютон на двадцать лет положил в стол свой результат, поскольку такая «гипотеза» казалась ему неприемлемой. «Мысль о том, чтобы способность возбуждать тяготение могла быть

неотъемлемым, внутренне-присущим свойством материи, и чтобы одно тело могло воздействовать на другое через пустоту на расстоянии, без участия чего-то такого, что переносило бы действие и силу от одного к другому – представляется мне столь нелепой, что нет, как я полагаю, человека, способного мыслить философски, кому она пришла бы в голову,» - писал Ньютон в письме к Беркли. И когда, скрепя сердце, он все же дал себе труд ознакомить общественность со своими достижениями, у него не было никаких оснований допустить, что это «воздействие через пустоту» передается не мгновенно, а сама пустота, т.е. то «вместилище», где все это происходит, не описывается Евклидовой геометрией.

Таким образом, вплоть до XVIII века математика и естествознание, «попеременно лидируя», участвовали в разработке все более точной картины мира, позволяющей предсказывать будущее. Время было в этой картине той четвертой координатой, взглянуть на различные значения которой с помощью только органов чувств не представлялось возможным. Необходим был инструмент, и им была математика, как и любой инструмент, искажающая картину по не всегда известным правилам.

## 2. Кривизна, силы, поля

В конце XVIII века К.Гаусс стал первым, кто конструктивно подошел к вопросу о применимости геометрии Евклида для описания мира и непосредственно измерил на местности сумму внутренних углов треугольника. Вершины треугольника располагались на вершинах близлежащих гор. Гаусс не обнаружил отклонения геометрии мира от Евклидовой в пределах точности своих измерений.

В начале XIX века Н.Лобачевский принял во внимание и оценил принципиальные возможности астрономических наблюдений, что с неизбежностью привело его к созданию первой неевклидовой геометрии, применимость которой на астрономических масштабах не могла быть исключена.

Во второй половине XIX века Риман разработал дифференциальную геометрию, теорию поверхностей, в которой использовались такие понятия, как кривизна (пропорциональная второй производной смещения по безразмерному параметру) и метрика (связанная со скалярным произведением).

В физике в это время изучались силы Кулона, Лоренца и Ампера, которые, как и гравитация, считались мгновенно дальнедействующими. Электромагнитные явления были описаны Максвеллом на основании нового подхода – перехода от Ньютонской теории действующих сил и соответствующих уравнений динамики к теории поля, т.е. к связям между локальными характеристиками среды, к соотношениям, связывающим между собой напряженности и потенциалы сил в точках. Эта формулировка (этот формализм) позволила Максвеллу теоретически предсказать, а затем Герцу экспериментально обнаружить электромагнитные волны, которые на основании опытов Фарадея оказалось возможным отождествить со световыми волнами.

В середине XIX века В. Клиффорд уже последовательно защищал свою мысль о том, что «все проявления физического мира экспериментально неотличимы от соответствующих изменений геометрической кривизны мира». Простейший пример – разумный червь, способный перемещаться внутри замкнутого одномерного канала, в котором он и живет. Если канал имеет постоянную кривизну (имеет форму окружности), то органы чувств червя

ничего не сообщают червю при его движении. Если же кривизна переменна, то в местах ее изменений форма червя при его движении будет меняться, и его органы чувств испытают воздействие. Таким образом, было установлено, что связь математики (геометрии) и физики, хотя и не носит трансцендентного характера, как было до Ньютона, отказавшегося измышлять гипотезы, но все же является, с одной стороны, взаимной и тесной (неотличимость кривизны и «физических» феноменов), а с другой – достаточно произвольной, зависящей от уровня и глубины наших знаний в настоящий момент. Действительно, Евклидова геометрия пригодна для описания происходящего на Земле, но, как показал Лобачевский, на существенно больших масштабах, не доступных непосредственному наблюдению и исследованию, оснований для выбора именно ее пока нет.

Следуя этим идеям, А.Эйнштейн в начале XX века свел общее, но качественное утверждение Клиффорда к утверждению более узкому, но зато поддающемуся количественному анализу. Основываясь на требовании общей ковариантности физических законов (и постулировав постоянство скорости света и принцип эквивалентности инертной и гравитационной масс), он разработал теорию, утверждающую, что неустранимая в нашем мире гравитация неотличима от проявлений геометрических свойств пространства-времени. Считая, что пространство-время описывается геометрией Римана-Минковского, Эйнштейн в своей основополагающей работе привел пример наблюдаемых эффектов, которые должны иметь место в этом случае и дал их расчет. Опыты показали хорошее соответствие с расчетом, и новая геометрия полноправно вошла в физическую теорию. На макроуровне это позволило, например, уточнить результаты теории гравитации Ньютона в применении к Солнечной системе. На микроуровне в квантовую механику вошла теория Дирака. На мегауровне в космологию вошла теория расширяющейся Вселенной и сопутствующих обстоятельств.

Говоря о данных наблюдений, с которыми должна согласовываться теория, следует указывать масштаб рассмотрения. В астрофизике таких масштабов можно указать три: Солнечная система (окрестность точечной массы), галактика ( $10^{11}$  точечных масс, удаленных от остальных) и метagalactika (т.е. вся наблюдаемая Вселенная, состоящая из галактик). Известные достижения общей теории относительности (ОТО), связанные с введением новой геометрии (Римана), позволили связать лабораторную физику и первый из упомянутых масштабов. К концу XX века были накоплены астрофизические данные, которые на уровне современных представлений не удастся объяснить без включения в теорию довольно загадочных новых понятий, например, темной материи или темной энергии, предположительно заключающих в себе 95% всей массы Вселенной, или без пересмотра основ самой теории, включая и геометрию пространства-времени.

### **3. Выводы**

1. Принципиальная возможность применения умозрительных математических конструкций для описания мира, воспринимаемого с помощью органов чувств, неочевидна и является постулатом. Каждая из этих процедур – построение конструкций и описание мира – является самодостаточной. Указанная возможность содержит произвол.

2. С одной стороны, известна «непостижимая эффективность математики в естествознании». С другой стороны, систематизированные данные наблюдений указывают направления нетривиальных математических исследований. Именно эти обстоятельства являются одновременно мотивацией и регулятором деятельности, известной как теоретическая физика.
3. Иногда для эквивалентного описания одних и тех же явлений может быть использовано несколько математических подходов. Как правило, сообществом признается лишь первый из них, все остальные отсекаются «бритвой Оккама».
4. Направления поиска новой теории определяются затруднениями старой.
5. Никакой новой теории, какой бы красивой она ни была и как бы успешно ни справилась с затруднениями старой, не удастся заместить предыдущую физическую теорию, пока не состоятся наблюдения, соответствующие предсказанным ей специфическим результатам.

Дальнейшее изложение построено так. Для того, чтобы понять происхождение проблем ОТО, возникших в настоящее время, и предложить возможные пути их преодоления, проследим за построением классической ОТО, касаясь не столько формальной стороны дела, сколько обсуждения принципов, положенных в ее основание и вытекающих из этого следствий. Затем опишем сами проблемы и обсудим возможные изменения теории, которые можно совершить для объяснения наблюдаемых явлений. Наконец, следует указать и дать расчет явлений, специфических для возможной модификации основ теории.

## 1. Некоторые геометрические аспекты общей теории относительности Эйнштейна

Общая теория относительности Эйнштейна (ОТО) в оригинальной статье называлась «обобщенная теория относительности и гравитации». В предшествовавшей работе Эйнштейн фактически проанализировал понятие «измерение» и пришел к выводу, что, пока мы используем световые лучи для проведения измерений с линейками и часами, следует полагать, что

- скорость света равна одной и той же величине, из какой бы (инерциальной) системы отсчета (ИСО) она ни была измерена. (A1)

Этот вывод, известный как постулат Эйнштейна о постоянстве скорости света, позволил дать глубокую физическую интерпретацию следующему математическому обстоятельству. В псевдоевклидовом пространстве Минковского, где квадрат расстояния между точками определяется как

$$ds^2 = dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2 - dx_4^2, \quad (1.1)$$

кривую можно задать с помощью так называемого естественного параметра  $t$ , который можно связать с координатами с помощью размерного переводного коэффициента. Выбирая в качестве этого параметра «время», т.е. переводным постоянным коэффициентом будет некоторая «фундаментальная скорость», и сопоставляя этой «скорости» значение скорости света, постоянное при любых физических измерениях, мы получим возможность интерпретировать окружающий мир как пространственно-временной континуум, в котором могут проявиться математические свойства, характерные для геометрического пространства Минковского. Причина, по которой было выбрано именно пространство Минковского, состояла в интуитивном (привычном) стремлении вычислять расстояние между точками с помощью разностей их координат, используя теорему Пифагора, и сопоставлять его произведению «фундаментальной скорости» на «естественный параметр». И если считать постулат А1 выполненным, то во всех ИСО *интервал*, т.е. разность (1.1) между указанными двумя величинами будет одной и той же, и принцип относительности Галилея превращается в принцип относительности Эйнштейна, и уже не только механическими, но

- никакими опытами невозможно различить покой и равномерное прямолинейное движение системы отсчета. (А2)

Таким образом, физика проникла в геометрию, которая в этой связи перестала быть Евклидовой. А геометрия и сопутствующий математический аппарат приобрели широкие возможности для разнообразных физических интерпретаций. Именно в этой связи преобразования Галилея уступили место преобразованиям Лоренца, а опыт Майкельсона-Морли получил наиболее фундаментальное обоснование из всех, встречавшихся в науке до этого – длительность временного промежутка стала различаться при измерениях в системах отсчета, движущихся относительно друг друга.

Когда впоследствии Эйнштейн перешел к обобщению своих результатов на ускоренные системы отсчета и отождествил инерцию и гравитацию, поскольку не видел способа различить характеризующие их коэффициенты (инертную и гравитационную массы), скорость света или фундаментальная скорость, естественно, осталась постоянной (и конечной), что позволило все глубже увязывать между собой математику и физику. При этом и в этой области обнаружилась «непостижимая эффективность математики в естествознании» (Вебер). Позже Дж.Уилер с полным основанием назвал ОТО геометродинамикой.

## 1. Тензоры

Напомним некоторые понятия, важные для дальнейшего. Основной математический объект ОТО – тензор. Свойства тензора:

- Существует (в виде математического определения, т.е. описания набора свойств)
- Не наблюдаем (как таковой в физическом мире)
- Имеет представителей (компоненты), которые иногда могут быть сопоставлены наблюдаемым и измеряемым величинам
- При изменении локальной системы координат эти компоненты должны изменяться по строго определенным правилам (ко- или контравариантно изменениям ортов

базиса), что при анализе измерений и может указывать на существование и присутствие в ситуации тензора

- Использование тензоров для записи законов физики позволяет сформулировать их способом, не зависящим от выбора системы координат, – **ковариантным** образом.

Именно это последнее обстоятельство и привлекает внимание, поскольку у нас нет возможности узнать, движется ли и как та система отсчета, в которой мы работаем и пытаемся предсказать поведение исследуемых объектов.

### **Фундаментальный тензор**

Существует так называемый фундаментальный тензор  $g_{ik}$  (дважды ковариантный, т.е. матрица второго ранга), позволяющий «переходить» от  $i$ -той контравариантной компоненты тензора к  $k$ -той ковариантной компоненте тензора («опускать значок»). Фундаментальный тензор строится из пар единичных векторов канонического базиса  $\vec{e}_i \vec{e}_k = g_{ik}$ . Манипулируя с этой матрицей можно построить и дважды контравариантный фундаментальный тензор, осуществляющий обратный переход («подъем значка»). Подчеркнем, что ко- и контравариантность являются именно теми фундаментальными свойствами компонент тензора, которые и позволяют осуществить их интерпретацию как величин, наблюдаемых в физическом мире.

### **Норма, метрика, геометрия**

Тензоры обладают численной характеристикой – нормой, – значение которой можно сопоставлять с вводимым определением метрики пространства, т.е. с определением скалярного произведения, иными словами, с выбором геометрии.

Для вычисления нормы вектора в ОТО используется квадратичная метрика, получаемая с помощью фундаментального тензора

$$\|x\|^2 = g_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta \quad (1.2)$$

Выбор метрики для вычисления нормы определяет выбор геометрии. См. некоторые подробности в Приложении 1.

### **Построение тензоров**

Тензоры можно конструировать друг из друга по определенным правилам. Например:

$\varphi$  – скаляр  $\Rightarrow A_\mu = \frac{\partial \varphi}{\partial x^\mu}$  – ковариантный четырехмерный вектор  $\Rightarrow$

$A_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} - \Gamma^\sigma_{\mu\nu} A_\sigma$  – ковариантный тензор второго ранга (ковариантная производная), где

$\Gamma^\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\tau\alpha} \left\{ \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} \right\}$  – так называемые коэффициенты связности (символы

Кристоффеля). Можно убедиться, что сами коэффициенты связности тензорами не являются, т.е. их компоненты при изменении системы координат, хотя и изменяются, но не ковариантным, ни контравариантным образом. Следует иметь в виду, что при использовании тензорного математического аппарата для построения физической теории необходимо следить за тем, какой из рассматриваемых объектов является тензором, а какой нет. В частности,  $\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} A_{\sigma}$  - уже тензор.

## 2. «Тождества Максвелла» и уравнения Максвелла

Убедимся в «непостижимой эффективности математики в естествознании», упомянутой выше. Выполним формальные построения

**2-1)** Пусть  $\varphi_{\nu}$  - компоненты ковариантного 4-вектора. Построим тензор

$$F_{\rho\sigma} = \frac{\partial\varphi_{\rho}}{\partial x^{\sigma}} - \frac{\partial\varphi_{\sigma}}{\partial x^{\rho}}.$$

Тогда тождественно выполняется

$$\frac{\partial F_{\rho\sigma}}{\partial x^{\tau}} + \frac{\partial F_{\sigma\tau}}{\partial x^{\rho}} + \frac{\partial F_{\tau\rho}}{\partial x^{\sigma}} = 0,$$

где левая часть – антисимметричный тензор 3-го ранга, имеющий 6 независимых компонент. Поэтому можно переписать в явном виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{23}}{\partial x^4} + \frac{\partial F_{34}}{\partial x^2} + \frac{\partial F_{42}}{\partial x^3} &= 0 \\ \frac{\partial F_{34}}{\partial x^1} + \frac{\partial F_{41}}{\partial x^3} + \frac{\partial F_{13}}{\partial x^4} &= 0 \\ \frac{\partial F_{41}}{\partial x^2} + \frac{\partial F_{12}}{\partial x^4} + \frac{\partial F_{24}}{\partial x^1} &= 0 \\ \frac{\partial F_{12}}{\partial x^3} + \frac{\partial F_{23}}{\partial x^1} + \frac{\partial F_{31}}{\partial x^2} &= 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Введем формально новые обозначения

$$\begin{aligned} F_{23} &\equiv B_x; F_{14} \equiv E_x \\ F_{31} &\equiv B_y; F_{24} \equiv E_y \\ F_{12} &\equiv B_z; F_{34} \equiv E_z \end{aligned} \quad (2.2)$$

Подставляя (2.2) в (2.1), получаем в привычных обозначениях векторного анализа тождества, следующие из введенных определений геометрических объектов

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \text{rot} \vec{E} &= 0 \\ \text{div} \vec{B} &= 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

2-2) Пусть  $I^\alpha$  - контравариантный вектор. Как и ранее, построим соответствующий ему контравариантный 6-вектор  $F^{\alpha\beta}$  и вычислим его дивергенцию  $I^\alpha = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial(\sqrt{-g} F^{\alpha\beta})}{\partial x^\beta}$ , где  $g = \det g_{\alpha\beta}$ . Если  $\sqrt{-g} = 1$ , то получим

$$I^\alpha = \frac{\partial F^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} \quad (2.4)$$

Вновь введем формально новые обозначения

$$\begin{aligned} F^{23} &\equiv B_x; F^{14} \equiv -E_x \\ F^{31} &\equiv B_y; F^{24} \equiv -E_y \\ F^{12} &\equiv B_z; F^{34} \equiv -E_z \end{aligned} \quad (2.5)$$

к которым добавим еще и такие

$$I^1 \equiv j_x; I^2 \equiv j_y; I^3 \equiv j_z; I^4 \equiv \rho \quad (2.6)$$

Подставляя (2.5-2.6) в (2.4), получим в привычных обозначениях векторного анализа

$$\begin{aligned} \text{rot} \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= \vec{j} \\ \text{div} \vec{E} &= \rho \end{aligned} \quad (2.7)$$

Формальные уравнения (2.3) и (2.7), фактически, – геометрические тождества – отличаются от физических уравнений Максвелла, обобщающих *опытные данные электродинамики*, только тем, что введенным величинам был приписан некоторый физический смысл (сопоставлены данные измерений) и введены размерные постоянные множители. Можно отметить, что во времена Максвелла (середина XIX в.) обсуждение математических (алгебраических) основ физики было весьма популярно, в частности, введенные Гамильтоном кватернионы были «на слуху» у теоретиков, и Максвелл в своем «Трактате об электричестве» неоднократно подчеркивал смысл и особенности введенных им привычных нам *векторов* – столбцов соответствующих матриц.

### 3. Вариационный принцип, простейший скаляр, геодезическая, принцип эквивалентности

В некоторых частных случаях при перемножении контравариантного и ковариантного векторов (или других соответствующих тензоров одинакового ранга) полученное произведение является скаляром, т.е. объектом, не зависящим от выбора системы координат в связи с определениями ко- и контравариантности (см. также Приложение 1). Вообще говоря, и другие геометрические объекты – вектор, тензор и т.п. – сами по себе не зависят от выбора системы координат, но вот их представители (компоненты) – зависят. Скаляр в этом смысле занимает особое место, и поэтому именно он используется при формулировке так называемого вариационного принципа. В математике вариационный принцип есть основное положение вариационного исчисления – раздела, в котором исследуются свойства экстремалей, а в физике он представляет собой некоторый формальный постулат, оказавшийся чрезвычайно плодотворным. Выбор скаляра для

проведения соответствующих манипуляций может быть объектом обсуждения. Эйнштейн полагал, что скаляр должен быть выбран в «простейшей» форме, однако указать критерий необходимой простоты такой, что используемый скаляр приведет к содержательным результатам, затруднительно.

Вариационный принцип устанавливает соответствие между геометрическими объектами и их физическими аналогами по следующей схеме.

**Геометрия:** кривая, являющаяся экстремалью функционала длины, называется геодезической.

Замечание 1: В Евклидовом пространстве длина определяется функционалом

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt$$

Замечание 2: Экстремаль функционала  $S = b \int_{t_1}^{t_2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) dt$  совпадает с экстремалью функционала  $l$ .

**Физика:** выбор  $b = m/2$ , где  $m$  – масса, доставляет выражению  $\frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$  физический смысл.

### **Принцип наименьшего действия (Гамильтон):**

Принцип наименьшего действия представляет собой постулат, согласно которому

- движения (механической) системы совпадают с экстремалью функционала

«действия»  $S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt$ , где  $L$  есть разность кинетической и потенциальной

энергий системы.

**Следствие:** варьирование функционала действия приводит к уравнениям Эйлера-Лагранжа, которые представляют собой уравнения динамики

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

Более подробно принцип наименьшего действия, его связь с так называемыми «законами физики» и соответствующими уравнениями обсуждаются в Приложении 2.

### **Принцип эквивалентности**

Приступая к исследованию проблемы гравитации, Эйнштейн намеревался исследовать точку зрения Маха на происхождение и природу инертной массы. Мах полагал, что инерция обусловлена влиянием (гравитационным притяжением) «удаленных звезд». Однако, обнаружив впечатляющее сходство уравнения геодезической с уравнением движения в гравитационном поле, Эйнштейн отошел от обсуждения вопроса о природе массы, поскольку оказалось, что он может и не иметь большого значения, если положить

инертную и гравитационную массу эквивалентными и равными по величине. С точки зрения физики это означало, что не существует такого опыта, с помощью которого можно обнаружить различие инертной и гравитационной масс. Иными словами,

- ускорение системы отсчета и гравитационное поле эквивалентны. (А3)

Здесь стоит вспомнить знаменитый «лифт Эйнштейна» – закрытое помещение без окон, о движении которого наблюдатель, находящийся внутри, может судить, только выполняя некоторые эксперименты. Так, если лифт движется равноускоренно с ускорением  $g = 9,82 \text{ м/с}^2$ , то результаты любых опытов не позволят установить, движется ли этот лифт, либо покоится, – но в однородном поле тяжести (вблизи поверхности Земли). Попытки обнаружить различие величин инертной и гравитационной масс начались опытами Этвеша, впоследствии усложнялись и даже включали в себя опыты на специально запущенном спутнике в рамках программы STEP. В настоящее время можно утверждать, что эти величины равны с точностью не ниже, чем  $10^{-12}$ . Тем не менее, этот вопрос является принципиальным и должен быть решен принципиально, например, путем введения постулата об их точном равенстве.

После введения этого постулата для построения теории с проверяемыми следствиями необходимо поступать так:

- Выберем геометрию для описания рассматриваемого пространства, т.е., в частности, дадим определение метрики. Обратим внимание на то, что в этом пункте присутствует выбор, и у него должны быть основания, что не всегда осознается и обсуждается.
- Введем функционал действия, получим и решим уравнения Эйлера-Лагранжа, соответствующие, с одной стороны, геодезической геометрического пространства, а с другой (в связи с принципом эквивалентности) – уравнению движения частицы в неустранимом гравитационном поле в физическом пространстве.
- Выберем геометрический скаляр, соответствующий функционалу действия. Этот выбор осознается чаще, причем говорят даже об *искусстве* выбора скаляра. Это связано с упоминавшейся проблемой «простоты».
- Найдем (каким-то образом!) уравнения поля и исследуем частные случаи (предскажем и рассчитаем проверяемые эффекты).

#### 4. Пример: построение основ ОТО Эйнштейна (1916)

Проследим теперь, как был реализован этот алгоритм в классической работе Эйнштейна.

- В связи со стремлением опираться на постулат А1 о постоянстве скорости света во всех системах отсчета, что дает возможность содержательной физической интерпретации геометрических результатов, можно обобщить понятия геометрии Минковского и перейти к геометрии Римана, учитывающей зависимость метрики от координат рассматриваемой точки. Тогда квадрат элемента длины будет равен  $ds^2 = g_{ik}(x)dx^i dx^k$ . При этом, выбор функции  $g(x)$  все еще содержит произвол, и

естественное ее обобщение может предусматривать зависимость  $g(x, \dot{x})$ , т.е. от производной координаты точки по естественному параметру, – т.е. от направления. Это – путь к геометрии Финслера. Но Эйнштейн рассмотрел случай Римановой геометрии.

- Геодезическая имеет вид  $\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{kl} \frac{dx^k}{ds} \frac{dx^l}{ds} = 0$ . Следовательно, уравнение движения можно записать  $\frac{d^2 x^i}{ds^2} = -\Gamma^i_{kl} \frac{dx^k}{ds} \frac{dx^l}{ds}$ , т.е. производные метрического тензора, входящие в символы Кристоффеля, могут представлять собой компоненты напряженности гравитационного поля

- Выбор скаляра:

1. С учетом принципа Гамильтона (см. Приложение 2) хотелось бы варьировать энергию, и чтобы при этом она сохранялась. Последнее требование означает, что надо, чтобы обращалась в ноль дивергенция  $\frac{\partial T^{ik}}{\partial x^k} = 0$ , где  $T^{ik}$  – *некоторый* тензор энергии-импульса, определяемый как

$$T^k_i = \sum_l q^{(l)}_{,i} \frac{\partial \Lambda}{\partial q^{(l)}_{,k}} - \delta^k_i \Lambda, \quad (4.1)$$

где  $S = \int \Lambda(q, \frac{\partial q}{\partial x^i}) dV dt$  - действие,  $\Lambda$  – плотность лагранжиана,  $q$  – обобщенные координаты,  $\delta^k_i$  – символ Кронекера. Из требования равенства нулю дивергенции следует, что сохраняется некоторый вектор (4-импульса)  $P_i = const \int T^{ik} dS_k$  где интегрирование – по гиперповерхности, охватывающей 3-мерное пространство. Из формулы (4.1) видно, что  $T^{00} = \dot{q} \frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{q}} - \Lambda$ , т.е.  $T^{00}$  – плотность энергии, а величины

$T^{0\alpha} = T^{\alpha 0}$  - компоненты плотности импульса,  $T^{\alpha\beta} = \sigma^{\alpha\beta}$  – компоненты тензора напряжений и связаны с силой, действующей на площадку.

2. Например, для пылевидной материи  $T^{ij} = \rho_0 u^i u^j$ , при этом  $T^{00} = \rho c^2$  - плотность энергии,  $T^{0\alpha} = \rho c v^\alpha$  - компоненты плотности импульса,  $T^{\alpha\beta} = \rho v^\alpha v^\beta$  - поток  $\alpha$ -компоненты импульса в направлении  $\beta$ .
3. Теперь нужно составить соответствующий геометрический скаляр, т.е. такой, что и дивергенция его – ноль, и число его независимых компонент – такое же, как у  $T^{ik}$ , т.е. 10.
4. Только из  $g_{ik}$  и  $\Gamma^i_{kl}$ , входящих в геодезическую, скаляра не составить (см. замечание выше о тензорном характере используемых величин).
5. Может быть, подойдет скалярная кривизна  $R = g^{ik} R_{ik} = g^{il} g^{km} R_{iklm}$ , где

$$R^i_{klm} = \frac{\partial \Gamma^i_{km}}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma^i_{kl}}{\partial x^m} + \Gamma^i_{nl} \Gamma^n_{km} - \Gamma^i_{nm} \Gamma^n_{kl} - \text{тензор кривизны?}$$

6. Но у  $R$  имеется 20 независимых компонент (вместо нужных 10) и нет такой комбинации производных, чтобы потом получить (ср. с задачей в Приложении 3 ☺) уравнение Пуассона в предельном Ньютонском случае..
7. Тогда, может быть, использовать тензор Риччи  $R_{ik}$ ? Он симметричен, т.е. у него как раз 10 независимых компонент!
8. Составим выражение, содержащее  $R_{ik}$ , и воспользуемся теоремой Гаусса, чтобы получить такое выражение, что его дивергенция равна нулю, как и дивергенция тензора энергии-импульса:  $G^{ik} = R^{ik} - \frac{1}{2} g^{ik} R$ . Можно проверить, что  $\frac{\partial G^{ik}}{\partial x^k} = 0$ , т.к.

$$\text{дивергенция } \frac{\partial g^{ik}}{\partial x^k} = 0.$$

- Теперь постулируем «уравнение гравитационного поля» в виде  $R^{ik} - \frac{1}{2} g^{ik} R = -\kappa T^{ik}$  (или, что то же,  $R^{ik} = -\kappa(T^{ik} - \frac{1}{2} g^{ik} T)$ ). Это уравнение называется уравнением Эйнштейна. Решая его, найдем компоненты  $g_{ik}$  и  $\Gamma^i_{kl}$ , подставим их в уравнение для геодезической и получим уравнения динамики, пригодные для описания движения тел.

## 5. Закон гравитации Ньютона как приближенное решение уравнений ОТО

Построив теорию, следует убедиться, что она включает в себя ранее полученные и работоспособные результаты или их аналоги, которые не хуже старых. В частности, закон тяготения Ньютона в масштабах Солнечной системы вполне применим, за исключением описания весьма тонких эффектов типа смещения перигелия орбиты Меркурия, измеренного Леверье и составляющего доли угловой секунды за столетие. Поэтому надо убедиться, что полученная геометрическая теория дает тот же результат.

Выберем сигнатуру метрики Минковского так, как это делал Эйнштейн,  $\gamma_{ik} = \{-1, -1, -1, 1\}$ , где временная компонента соответствует  $g_{44}$ , и рассмотрим слабое поле с метрикой  $g_{ik} = \gamma_{ik} + \varepsilon_{ik}$ ,  $\varepsilon_{ik} \ll 1$ , которая стремится к  $\gamma_{ik}$  на бесконечности. Используем следующие приближения:

(1) Во-первых, пренебрежем малыми величинами порядков, более высоких, чем величина  $\varepsilon_{ik}$ . Движение описывается уравнением геодезической

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} = -\Gamma^i_{kl} \frac{dx^k}{ds} \frac{dx^l}{ds} \quad (5.1)$$

(2) Во-вторых, будем считать, что движение медленное по сравнению со скоростью света, которую положим равной  $c = 1$ , т.е.

$$\frac{dx^1}{ds}, \frac{dx^2}{ds}, \frac{dx^3}{ds} \ll 1; \frac{dx^4}{ds} \approx 1 \quad (5.2)$$

Из предположения (1) следует, что  $\Gamma^i_{kl} \ll 1$ , тогда в уравнение геодезической (5.1) входят только  $k = l = 4$ , т.е.

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = -\Gamma^i_{44} \quad (5.3)$$

где было использовано  $ds = dx_4 = dt$ .

Тогда, учитывая, что гравитационное поле квазистатично (5.2), пренебрежем в (5.3) производными по времени по сравнению с производными по координатам, т.е.

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = -\frac{1}{2} \frac{\partial g_{44}}{\partial x^i}; i = 1, 2, 3 \quad (5.4)$$

Таким образом, видим, что  $g_{44}/2$  действительно может быть сопоставлено гравитационному потенциалу, градиент которого пропорционален ускорению (т.е. силе согласно закону динамики Ньютона).

«Уравнение поля» Эйнштейна будет иметь вид

$$\frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta} \Gamma^{\beta}_{\nu\alpha} = -\kappa (T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T) \quad (5.5)$$

В нашем приближении в правой части останется только  $T_{44} = \rho = T$ , а в левой – только первое слагаемое, которое примет вид  $\frac{\partial}{\partial x^1} \Gamma^1_{\mu\nu} + \frac{\partial}{\partial x^2} \Gamma^2_{\mu\nu} + \frac{\partial}{\partial x^3} \Gamma^3_{\mu\nu} - \frac{\partial}{\partial x^4} \Gamma^4_{\mu\nu}$ .

Полагая  $\mu = \nu = 4$  и отбрасывая производные по времени, получим

$$-\frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 g_{44}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 g_{44}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 g_{44}}{\partial x_3^2} \right) = -\frac{1}{2} \Delta g_{44}.$$

Тогда уравнение (5.5) дает уравнение Пуассона

$$\Delta g_{44} = \kappa \rho, \quad (5.6)$$

которое вместе с (5.4) эквивалентно закону гравитации Ньютона. Зная решение уравнения Пуассона, получаем, таким образом,

$$g_{44} = 1 - \frac{a}{r} \quad (5.7)$$

где  $a = \frac{\kappa M}{4\pi}$ ,  $\kappa = 1,87 \cdot 10^{-27}$ ;  $r = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}$ .

Окончательно, видим, что в низшем приближении ОТО дает требуемый закон гравитации Ньютона. Теперь следует убедиться, что ОТО дает что-то еще, чего не предсказывает старая теория и что можно проверить измерениями.

## 6. Классические тесты ОТО (красное смещение, отклонение луча, прецессия орбиты)

Геометрический подход к динамике позволяет сделать утверждения, некоторые из которых можно проверить.

### 1. Геометрия.

Определитель фундаментального тензора  $g = -I$ . Непосредственной проверкой можно получить

$$\begin{aligned}
g_{\rho\sigma} &= -\delta_{\rho\sigma} - \alpha \frac{x^\rho x^\sigma}{r^3}; \rho, \sigma = 1, 2, 3 \\
g_{\rho 4} &= g_{4\rho} = 0; \rho, \sigma = 1, 2, 3 \\
g_{44} &= 1 - \frac{\alpha}{r}; r = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}
\end{aligned} \tag{6.1}$$

Тогда для единичного отрезка, расположенного параллельно оси  $Ox$ , вдоль которой действует гравитационное поле, выполняется

$$ds^2 = -1; dx^2 = dx^3 = dx^4 = 0 \Rightarrow -1 = g_{11}(dx^1)^2$$

А если отрезок находится непосредственно на оси  $Ox$ , то с учетом (6.1)  $g_{11} = -1 - \frac{\alpha}{r}$  и

получим  $dx = 1 - \frac{\alpha}{2r}$ , что соответствует сокращению длины. Если же отрезок расположен в поперечном направлении, то

$$ds^2 = -1; dx^1 = dx^3 = dx^4 = 0; x^1 = r; x^2 = x^3 = 0 \Rightarrow -1 = g_{22}(dx^2)^2 = -(dx^2)^2$$

и сокращения нет.

Таким образом, в гравитационном поле геометрия не является Евклидовой, (но, поскольку  $\kappa \ll 1$ , проверить это непосредственно довольно трудно)

## 2. Течение времени.

Пусть часы, измеряющие единичный интервал времени, расположены вблизи источника гравитационного поля

$$ds = 1; dx^1 = 0; dx^2 = 0; dx^3 = 0.$$

Тогда из условия  $1 = g_{44}(dx^4)^2 \Rightarrow$

$$dx^4 = \frac{1}{\sqrt{g_{44}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (g_{44} - 1)}} = 1 - \frac{g_{44} - 1}{2} > 1$$

т.е. часы идут медленнее, следовательно, в спектральных линиях света звезд должно быть гравитационное красное смещение.

Это предсказание подтверждается наблюдениями

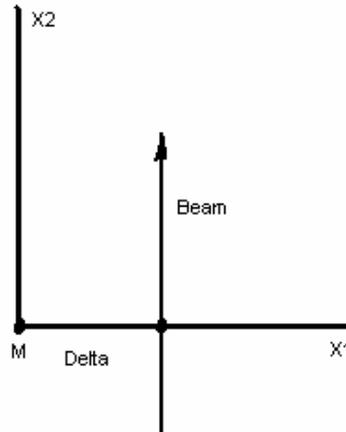
## 3. Отклонение луча света

Можно показать, что при прохождении луча света рядом с источником гравитационного поля имеет место отклонение луча.

Пусть дано направление распространения луча, т.е. отношения  $dx^1 : dx^2 : dx^3$ , тогда из  $ds^2 = g_{ik}(x)dx^i dx^k$  следует выражение для трехмерной скорости в виде

$$\gamma = \sqrt{\left(\frac{dx^1}{dx^4}\right)^2 + \left(\frac{dx^2}{dx^4}\right)^2 + \left(\frac{dx^3}{dx^4}\right)^2}$$

Если  $n$  – направление, перпендикулярное направлению распространения луча, то луч света, рассматриваемый в плоскости  $(\gamma, n)$ , обладает кривизной  $(-\frac{\partial \gamma}{\partial n})$



Общее искривление луча

$$B = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \gamma}{\partial x^1} dx^2 = \frac{2\alpha}{\Delta}$$

Для Солнца  $B = 1,7$  угловой секунды – это проверено измерениями Эддингтона во время специальной экспедиция в Бразилию 1919 года для наблюдения полного Солнечного затмения и соответствующих измерений координат звезд. Следует отметить, что Эддингтон, бывший признанным авторитетом в науке того времени, скептически относился к теории Эйнштейна. Однако, выполнив эти измерения признал ее состоятельность и правоту, что является редким случаем.

#### 4. Прецессия орбиты Меркурия

Расчет орбитального движения этой планеты на основе ОТО привел к отклонению от закона Кеплера, вполне удовлетворительно соответствующему наблюдаемой прецессии орбиты Меркурия.

Таким образом, теория Эйнштейна дала описание известных явлений (гравитация Ньютона), справилась с затруднением старой теории (прецессия орбиты Меркурия) и дала специфические предсказания (отклонение луча и гравитационное красное смещение), которые были обнаружены при наблюдениях.

#### 7. Точное решение Шварцшильда (1916)

Решение уравнений ОТО и выражение для метрики, полученные Эйнштейном, носят приближенный характер. Между тем, представляет несомненный интерес и задача аналитического определения вида метрики, входящей в определение линейного элемента

$$ds = \sqrt{\sum g_{ik}(x) dx^i dx^k}, \text{ из уравнений поля Эйнштейна } \sum_{\alpha} \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} + \sum_{\alpha, \beta} \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta} \Gamma^{\beta}_{\nu\alpha} = 0 \text{ для}$$

сферически симметричного случая, соответствующего области около отдельной звезды, и выполнения условия на определитель  $g = -1$ .

Сформулируем дополнительные условия такой задачи, использованные Шварцшильдом:

1. Все компоненты метрики не должны зависеть от времени  $x^4$  – стационарность.
2. На бесконечности должны обращаться в ноль все компоненты метрики, кроме диагональных, которые соответствуют метрике Минковского (плоское пространство)

Решение задачи:

в сферических координатах метрика, удовлетворяющая указанным условиям, имеет вид

$$ds^2 = (1 - r_s / r)c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - r_s / r} - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

где  $r_s = \frac{2GM}{c^2}$ . Примечательным обстоятельством полученного решения является то, что его

сингулярность находится не в нуле, а на некотором расстоянии от него, зависящем от массы гравитирующего объекта и известном как «радиус Шварцшильда». У этого радиуса имеется

прозрачный физический смысл:  $r_s = \frac{2GM}{c^2}$  -- радиус массивного тела (звезды, планеты), для

которого 2-я космическая скорость равна скорости света  $v_{II} = \sqrt{\frac{2GM}{r_s}} = c$ . То есть

материальному телу улететь от планеты с такими параметрами (радиусом и массой) невозможно.

## 8. ОТО и космология

Приложения ОТО к космологии с самого начала оказались эффектными и интригующими, хотя В.А.Фок еще в 30-е годы предупреждал, что на этом пути могут встретиться затруднения. В первой четверти XX века Вселенная еще считалась стационарной, и Эйнштейн пытался устранить возникающие при этом парадоксы. Для построения космологии, т.е. модели Вселенной в целом, можно принять, что скорость движения звезд мала по сравнению со скоростью света. Тогда при формулировке теории надо выбрать между такими условиями:

а) считать, что на бесконечности должны обращаться в ноль все компоненты метрики, кроме диагональных;

б) не устанавливать для пространственной бесконечности никаких всегда справедливых граничных условий.

Основной недостаток условия а) состоит в том, что имеющаяся аналогия с газом соответствует тому, что условие нулевой плотности на бесконечности влечет нулевую плотность в центре.

Пусть пространство бесконечно и все же заполнено веществом с некоторой постоянной плотностью  $\rho_0$ . Тогда вместо обычного уравнения Пуассона запишем уравнение

$$\Delta\varphi - \lambda\varphi = 4\pi K\rho,$$

решение которого имеет вид

$$\varphi = -\frac{4\pi K}{\lambda} \rho_0,$$

где  $\lambda$  – некоторая универсальная константа. А гравитационное поле Ньютона создается неравномерностью распределения масс.

Тогда  $\lambda$  войдет и в уравнения поля Эйнштейна, и они примут вид

$$G_{\mu\nu} - \lambda g_{\mu\nu} = -\kappa(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T)$$

В этом случае  $\lambda$  называется космологической константой.

Это уравнение выполнено, если

$$\rho = \rho_0 + \rho_1; \lambda = \frac{\kappa\rho_0}{2}; \lambda = \frac{1}{R^2},$$

мир – цилиндрический (т.е. 3-мерное пространство имеет постоянную кривизну) и существует некоторая «мировая масса», связанная с  $\rho_0$ . Линейный элемент в такой теории можно выбрать в следующем виде

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dr^2 - R^2 \sin^2 \frac{r}{R} [d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2]$$

Де Ситтер (1917) показал, что если принять

$$\rho_0 = 0; \lambda = \frac{3}{R^2},$$

то уравнения также удовлетворены, мир – сферический (с постоянной кривизной 4-мерного пространства), и линейный элемент при этом имеет вид

$$ds^2 = c^2 \cos^2 \frac{r}{R} dt^2 - dr^2 - R^2 \sin^2 \frac{r}{R} [d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2]$$

В 1922 году А.Фридман отказался от ограничения, связанного со стационарностью Вселенной и допустил возможность изменения постоянной пространственной кривизны со временем. При этом миры Эйнштейна и де Ситтера стали частными случаями полученного им общего решения. Однако идея нестационарности Вселенной была чуждой тогдашнему мировоззрению, и Эйнштейн не сразу и весьма неохотно признал, что решение Фридмана было верным, но счел его абстрактной математикой.

Но в 1929 году Э.Хаббл пронаблюдал красное смещение в спектрах удаленных галактик и интерпретировал его как результат эффекта Доплера – все галактики удалялись от Солнечной системы, причем, чем дальше они находились, тем больше было красное смещение, что соответствовало большей скорости удаления. Этот наблюдательный результат перевернул существовавшее мировоззрение, теория Фридмана получила мощное экспериментальное обоснование, и Вселенная была признана расширяющейся. Эйнштейн в этой связи впоследствии упоминал о введении в уравнения космологической постоянной как о самой большой своей ошибке. Поскольку оказалось, что красное смещение наблюдалось в галактиках, расположенных на всех сторонах небосвода, был сделан вывод о существовании в прошлом события Большого Взрыва, которое дало начало нашей Вселенной, до этого существовавшей в состоянии сингулярности. По величине красного смещения, (позволяющей оценить скорость), и оценкам расстояний до галактик был оценен и возраст Вселенной – время, прошедшее после Большого Взрыва. Представление об этом загадочном событии (и еще более загадочном предшествующем состоянии) позволило

разработать целый ряд остроумных теорий о стадиях и характере развития Вселенной, некоторые из которых допускали экспериментальную проверку. В частности, Гамов предсказал существование реликтового излучения, и оно было обнаружено.

Впоследствии были получены разнообразные выражения для нестационарных метрик пространства-времени. Так Леметр (1938) для устранения особенности в точке  $r = r_s$  решения Шварцшильда выбрал

$$c\tau = ct + \int \frac{f(r)dr}{1 - \frac{r_s}{r}}; R = ct + \int \frac{dr}{(1 - \frac{r_s}{r})f(r)}; f(r) = \sqrt{\frac{r_s}{r}}$$

Тогда нестационарная метрика

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 - \frac{dR^2}{[\frac{3}{2r_s}(R - c\tau)]^{2/3}} - [\frac{3}{2}(R - c\tau)]^2 r_s^{2/3} (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

не имеет особенности на  $r_s$ . Она стала первой из нестационарных метрик, имеющих указанное свойство и известных сейчас как метрики Фридмана-Робертсона-Уолкера. Они являются общепризнанными в современной космологии.

## 9. Наблюдательные проблемы и «темные» понятия

Наряду с успехами теории, предсказания которой подтверждались одними наблюдениями, стали выявляться и ее проблемы, связанные с другими наблюдениями. Так Ф.Цвике еще в 1933 году обнаружил, что наблюдаемая (видимая) масса кластеров галактик слишком мала, чтобы обеспечить гравитационную связанность этих кластеров. Уже тогда он предположил, что какая-то часть материи, входящей в галактики, не видна. Впоследствии эта точка зрения находила все больше подтверждений и сторонников, и в настоящее время убеждение в существовании «темной материи» является распространенным, хотя и не всеобщим.

В десятилетие, следующее за 1998 годом, на основании наблюдении сверхновых типа Ia и соотнесении их результатов с общепринятой теорией расширяющейся Вселенной пришли к выводу, что на современном этапе своего развития Вселенная расширяется ускоренно. Это означает, что на космологическом масштабе имеется неизвестное в настоящее время взаимодействие отталкивания (антигравитация?). При этом оценки величины энергии этого взаимодействия – «темной энергии» – на основе ОТО показывают, что она превосходит наблюдаемую имеющуюся массу вместе с темной материей в 3-4 раза.

При обсуждении ускорения расширения Вселенной и соответствующей ему темной энергии можно ввести много дополнительных подробностей, оставляющих большой простор для теоретических разработок. Так, первое, что вспоминается при описании данной проблемы, это космологическая постоянная, обсуждавшаяся в свое время Эйнштейном. Теперь она должна не удерживать материю Вселенной, а приводить к ее отталкиванию. Такой константе придают своеобразный геометро-физический смысл, а именно – смысл энергии, связанной с самим понятием пространства, что, хотя и не находится в прямом противоречии с идеями геометродинамики, пока еще недостаточно привычно. Далее, вспоминая, что компоненты тензора напряжений, связаны с силой, действующей на

площадку, и принимая закон Паскаля  $\sigma_{\alpha\beta} df_{\beta} = p df_{\alpha}$ , т.е.  $\sigma_{\alpha\beta} = p \delta_{\alpha\beta}$  для космологических приложений (для галактик), получим для системы покоя элемента объема

$$T^{ik} = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix},$$

т.е. для произвольной системы

$$T^{ik} = (p + \varepsilon)u^i u^k - p g^{ik}; T_i^k = (p + \varepsilon)u_i u^k - p \delta_i^k.$$

Тогда плотность энергии будет складываться из плотности собственно энергии  $\varepsilon = \rho c^2$  и давления

$$T_i^i \equiv \varepsilon_G = \varepsilon + 3p$$

Положительное давление соответствует сжатию, отрицательное давление – расширению. Тогда, вводя параметр

$$w = \frac{p}{\varepsilon}; p = w\varepsilon,$$

можно рассмотреть следующие возможные ситуации и связанные с ними космологические режимы:

1.  $w < -1$ . «Фантомная энергия». Мощная «антигравитация», средняя плотность энергии увеличивается со временем, явление «разрыва».
2.  $w = -1$ . Вакуум, обладающий постоянной плотностью энергии (космологическая константа  $\lambda = \frac{8\pi G}{c^4} \varepsilon$ ). Согласно современным измерениям, доля энергии, приходящаяся на вакуум, составляет  $\Omega_{\lambda} = 0.72$  от критического значения для плотности  $\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}$ , соответствующей переходу от отрицательной к положительной кривизне (т.е. плоской Евклидовой геометрии).
3.  $-1 < w < -1/3$ . Для такого интервала значений этого параметра применимо понятие «квинтэссенции» гипотетического динамического скалярного поля. «Антигравитация» при этом оказывается слабее, чем у вакуума.
4.  $w = -1/3$ . Нет ни гравитации, ни антигравитации.
5.  $-1/3 < w < 0$ . Слабая гравитация (меньше, чем у пыли).
6.  $w = 0$  ( $p = 0$ ). Барионная пыль и «темная материя»  
 $\Omega_b = 0.046; \Omega_c = 0.033 \Rightarrow \Omega_m = 0.28$
7.  $0 < w < 1/3$ . Гравитация (больше, чем у пыли).
8.  $w = 1/3$ . Гравитация, ультрарелятивистская среда (излучение, фотоны).
9.  $w > 1/3$ . Гравитация сильнее, чем у излучения.

Имеется обширная литература, посвященная обсуждению соответствующих весьма интересных проблем и их расчету.

Обсудим подробнее некоторые наблюдения, говорящие в пользу существования темной материи. Известен эффект гравитационного линзирования, состоящий в том, что массивные кластеры галактик, расположенные на луче зрения, направленном на более

удаленные объекты, отклоняют световые лучи подобно обычной линзе, и возникают симметричные изображения двойников этих удаленных объектов (рис.1). Качественно



Рис.1

этот эффект объясняется ОТО, но количественно те оценки масс, которые используются в астрономии, оказываются в несколько раз меньше, чем значения, необходимые для обеспечения наблюдаемого эффекта.

На рис.2 представлены результаты наблюдений космической обсерватории «Чандра» (2006) столкновения кластеров галактик. Слева на оптическом изображении

2

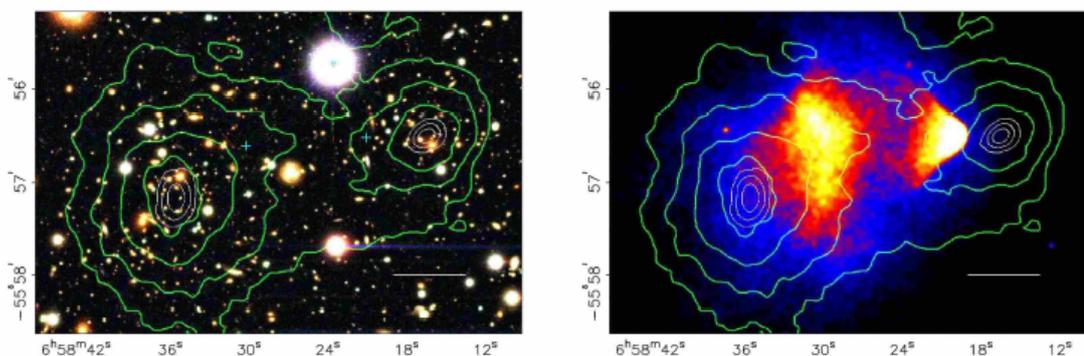


FIG. 1.— Shown above in the top panel is a color image from the Magellan images of the merging cluster 1E0657–558, with the white bar indicating 200 kpc at the distance of the cluster. In the bottom panel is a 500 ks Chandra image of the cluster. Shown in green contours in both panels are the weak lensing  $\kappa$  reconstruction with the outer contour level at  $\kappa = 0.16$  and increasing in steps of 0.07. The white contours show the errors on the positions of the  $\kappa$  peaks and correspond to 68.3%, 95.5%, and 99.7% confidence levels. The blue +s show the location of the centers used to measure the masses of the plasma clouds in Table 2.

Рис.2

проведены линии, соответствующие равным гравитационным потенциалам. Видно, что они окружают центры двух галактических кластеров, расположенных поблизости друг от друга. Обратим внимание на масштаб явления – это центры кластеров галактик. На правом рисунке представлено изображение того же участка в рентгеновском диапазоне, что позволяет наблюдать за распределением барионной плазмы в межгалактическом пространстве. Видно, что гравитационные центры плазмы (как полагают, области ударных волн, возникших при прохождении кластеров друг сквозь друга) не совпадают с центрами масс, определенными по результатам линзирования и совпадающими с оптическими центрами кластеров. Расчеты масс, необходимых для наблюдаемого линзирования, дают, что 1-2% массы приходится собственно на видимые звезды галактик, 5-10% массы приходится на межгалактическую барионную плазму, испускающую рентгеновское излучение, но кроме того необходима еще и темная материя, на которую приходится

оставшиеся 88% массы. В стационарном случае центры масс всех трех составляющих совпадают, но на фотографии мы видим, что это не так. Из этого делается вывод о том, что необходимая темная материя, по-видимому, связана с галактиками и является бесстолкновительной.

Приписывание эффектов со столь значительными относительными масштабами ненаблюдаемым «темным» понятиям указывает на глубину научного кризиса, имеющегося в настоящее время. Прежде, чем перейти к обсуждению попыток его преодоления, укажем еще один важный ряд наблюдательных данных.

Наиболее известными, подробными и количественными являются данные, связанные с измерением кривых вращения спиральных галактик – зависимостей орбитальных скоростей (чаще говорят о квадратах скоростей) звезд от их расстояний до центра галактики. На рис.3 представлены соответствующие экспериментальные графики.

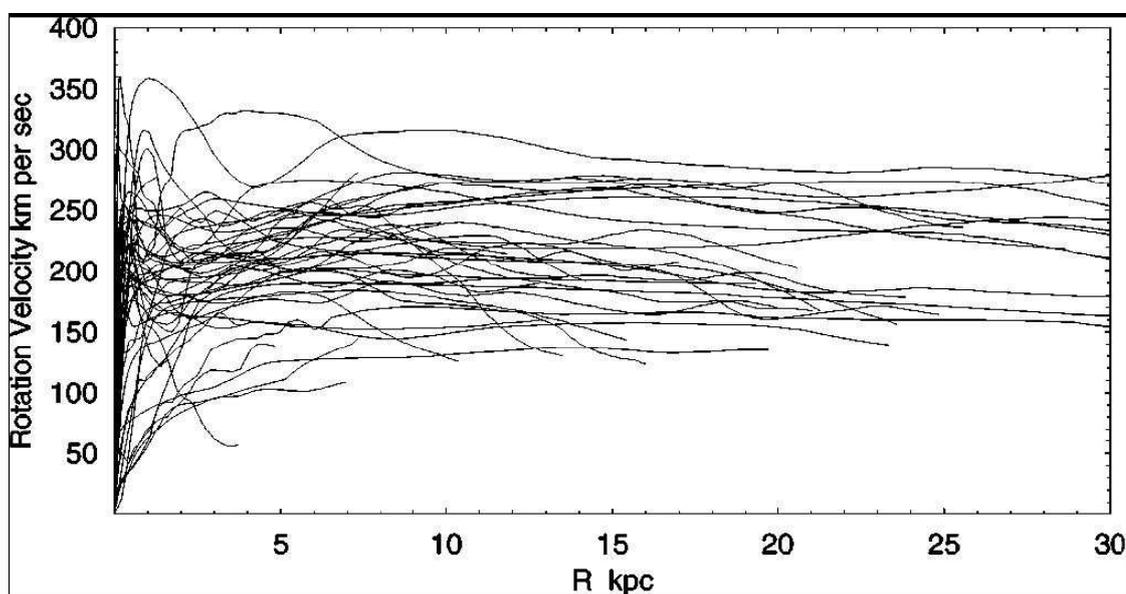


Рис.3

Известно, что все они описываются эмпирической зависимостью следующего вида

$$v^2 = \frac{\beta^* c^2 N^*}{R} + \frac{\gamma^* c^2 N^* R}{2} + \frac{\gamma_0 c^2 R}{2} \quad (9.1)$$

где  $R$  – расстояние до центра галактики,  $c$  – скорость света,  $N^*$  - число звезд в галактике (что придает соответствующему члену в выражении для квадрата скорости пропорциональность массе),  $\beta^*, \gamma^*, \gamma_0$  - параметры. В формуле (9.1) наряду с первым слагаемым, соответствующим теории Ньютона-Эйнштейна-Шварцшильда, имеются и два других, прямо пропорциональных расстоянию до центра галактики, что категорически не соответствует имеющимся теоретическим представлениям.

Для того, чтобы обеспечить получаемый вид кривых вращения, предполагают, что существует сферически симметричное облако темной материи, окружающее галактику (гало), обладающее следующими свойствами:

1) частицы облака не взаимодействуют с электромагнитным излучением, не поглощают его и не испускают. Предполагают, что ими могут являться бозоны Хиггса –

носители свойства массивности. Имеется надежда на обнаружение этих частиц в экспериментах на Большом адронном коллайдере в ЦЕРНе;

2) масса облака должна быть в 3-4 раза больше, чем наблюдаемая барионная масса галактики (звезды + межзвездный газ);

3) размер облака должен превышать линейный размер галактики примерно в 4-5 раз;

4) облако имеет сферическую симметрию. Это приводит к проблеме различия наблюдаемого гравитационного потенциала в плоскости галактики (для обеспечения наблюдаемых кривых вращения) и перпендикулярно ей (3D-проблема). Так, наблюдаемые глобулярные кластеры – сфероидальные скопления звезд, принадлежащих галактике, но лежащих вне ее плоскости, движутся в соответствии с обычной теорией. С ними, однако, связана другая проблема: из статистических соображений они должны большую часть времени находиться на периферии своих орбит, однако там их оказывается значительно меньше, чем в областях более близких к центру галактики;

5) параметры необходимого сферического распределения темной материи подбираются по наблюдательным данным о кривых вращения, поэтому рассчитать сами эти кривые по данным только о светимости галактики невозможно. Это лишает обсуждаемую гипотезу внутренней самосогласованности.

Облако темной материи с перечисленными свойствами должно существовать для того, чтобы классическая ОТО была справедлива на галактическом масштабе и не требовала модификации. Похожая ситуация уже встречалась в истории науки, когда в движении Урана были обнаружены незначительные отклонения от предсказаний теории, основанной на законе гравитации Ньютона. Тогда высказывалось мнение, что так далеко от Солнца теория Ньютона не работает. Но Лавуазье и Адамс, не желая так просто отказываться от взглядов Ньютона, предположили существование неизвестной планеты, и вскоре Галле, следуя указаниям Лавуазье, действительно обнаружил Нептун. Видно, однако, что относительные масштабы поправок, требуемых тогда и теперь, несоизмеримы (см. рис.4).

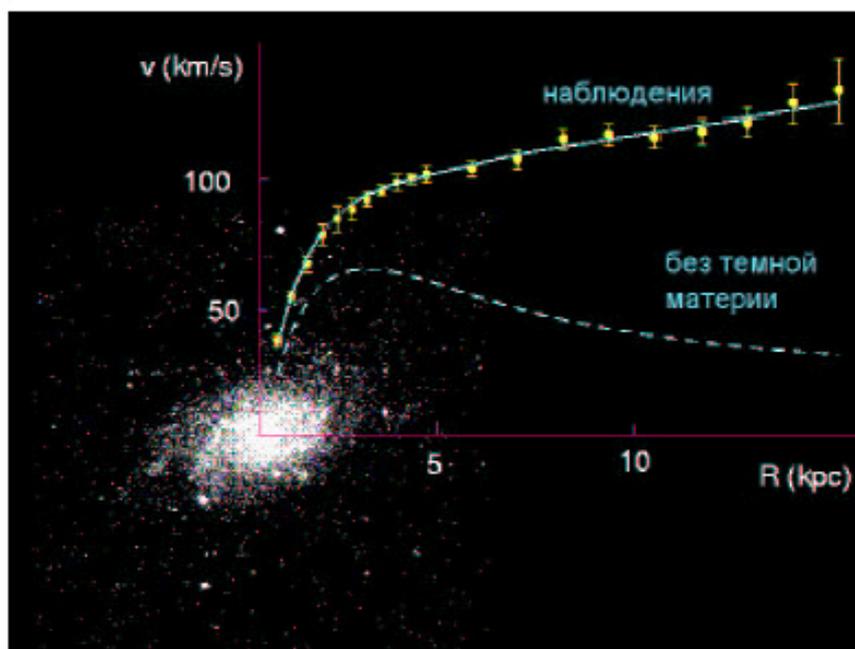


Рис.4

При этом, если бозоны Хиггса будут обнаружены, сам этот факт не будет достаточным обоснованием для утверждения гипотезы темной материи как космологической причины наблюдаемых эффектов.

Упомянем, наконец, менее вызывающий, но оттого не менее интересный установленный экспериментальный факт, состоящий в том, что светимость галактики пропорциональна четвертой степени орбитальной скорости звезд, находящихся на ее периферии

$$L_{lum} \sim v_{orb}^4 \quad (9.2)$$

Это соотношение известно как закон Талли-Фишера, и в рамках ОТО оно не имеет удовлетворительного объяснения в настоящее время.

## 10. Попытки модификации ОТО – классический (геометрический) подход

Перечислим некоторые подходы, имеющие целью модифицировать основы ОТО с тем, чтобы удовлетворить данным наблюдений на космологических масштабах, не ставя задачу дать исчерпывающий обзор достигнутых результатов.

I. Наиболее прямолинейным подходом является последовательное усложнение известного квадратичного выражения Эйнштейна-Гильберта для действия

$$S_{EH} = -\frac{c^3}{16\pi G} \int d^4x (-g)^{1/2} R^\alpha_\alpha \quad (10.1)$$

за счет введения чисто метрических членов следующих порядков. Например, Де Витт ввел следующие (квадратичные) поправки

$$S_{W_1} = -\frac{c^3}{16\pi G} \int d^4x (-g)^{1/2} (R^\alpha_\alpha)^2 \quad (10.2-1)$$

или

$$S_{W_2} = -\frac{c^3}{16\pi G} \int d^4x (-g)^{1/2} R_{\alpha\beta}{}^{\alpha\beta} \quad (10.2-2)$$

которые должны давать пренебрежимо малый вклад в решение Шварцшильда. Развитие этого подхода привело к так называемым  $f(R)$ -теориям, где скаляр представлял собой разложение по соответствующим степеням.

II. Следующим естественным ходом может быть введение дополнительного аддитивного скаляра, соответствующего макроскопическому гравитационному полю. Например, Бранс и Дике предложили следующее выражение для действия

$$S_{BD} = -\frac{c^3}{16\pi G} \int d^4x (-g)^{1/2} (SR^\alpha_\alpha - w \frac{S_{;\mu} S^{;\mu}}{S}) \quad (10.3)$$

где  $w$  – константа.

III. Третьим направлением является увеличение числа измерений пространства-времени с последующим выходом измерений высших порядков на Планковский масштаб длин. Соответствующие работы, начавшись с работы Калуцы, привели к развитым в математическом смысле современным теориям струн, а затем и бран. Следует, однако,

отметить, что при всей эстетической привлекательности этих теорий, заметных физических результатов на их основе к настоящему времени добиться не удалось.

Перечислим теперь подходы, подразумевающие не столько уточнение деталей существующих структур, предположительно позволяющие получить решение, более соответствующее наблюдениям, сколько подходы, предусматривающие пересмотр самих структур, предположительно позволяющие сделать то же.

IV. Ревизии подверглись и классические основы. Анализ кривых вращения навел Мильгрема на мысль, что поправки следует искать глубже. Им был предложен феноменологический подход, известный как МОНД – МОдифицированная Ньютоновская Динамика, в котором изменению подвергается либо классическое уравнение динамики Ньютона

$$\mu\left(\frac{a}{a_0}\right)\vec{a} = \vec{f}, \quad (10.4-1)$$

либо классическое уравнение гравитации Ньютона

$$\vec{a} = \nu\left(\frac{f}{a_0}\right)\vec{f} \quad (10.4-2)$$

и вводится новая мировая константа, имеющая размерность ускорения. Предлагается так подобрать функции  $\mu(x)$  или  $\nu(x)$  и величину  $a_0$ , чтобы в масштабах Солнечной системы получать классический результат, а в масштабе галактики – результат, соответствующий эмпирической формуле для кривых вращения. Введенные Мильгремом наиболее известные выражения для функций МОНД имеют вид:

$$\mu(x) = \frac{1}{1+x}; \nu(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \quad (10.5)$$

Этот подход, естественно, позволяет вполне удовлетворительно описать наблюдаемые кривые вращения галактик, однако произвол в выборе соответствующих функций не позволяет приписать физический (или геометрический, как в ОТО) смысл предлагаемой модификации.

V. Г.Вейль еще в 1918 году отступил от использованной Эйнштейном геометрии Римана в целях объединения гравитации и электромагнетизма с помощью введения новой метрики. Он предложил использовать преобразования следующего вида

$$g_{\mu\nu}(x) \rightarrow e^{2\alpha(x)} g_{\mu\nu}(x) \quad (10.6-1)$$

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) - e\partial_\mu\alpha(x) \quad (10.6-2)$$

в которых гравитацию и электромагнетизм объединяет общая функция  $\alpha(x)$ . Это привело к созданию новой – Вейлевой – геометрии. Получающиеся далее уравнения не сводятся к уравнениям Эйнштейна, но содержат решения Швардшильдовского типа для масштабов Солнечной системы. Преобразование (10.6-1) Вейль назвал калибровочным, т.е. зависящим от масштаба, однако в дальнейшем этот термин стал использоваться в других областях

физики и преимущественно для случая, когда показатель экспоненты является мнимым. В применении к гравитации такие преобразования обычно называют «конформными».

VI. Дальнейшее развитие подобных идей привело к теориям конформной гравитации, в которых метрика лишь наделяется дополнительной симметрией, соответствующей (10.6-1), электромагнитные переменные не вовлекаются, а, значит, геометрия остается Римановой. Формально этот подход оказывается аналогичным подходу I, но уже со специфическим выбором коэффициентов при (10.2-1) и (10.2-2). Уравнения Эйнштейна, получающиеся у Манхейма и Казанаса, имеют вид

$$4\alpha_g W^{\mu\nu} = 4\alpha_g (2C^{\mu\lambda\nu\kappa}{}_{;\lambda;\kappa} - C^{\mu\lambda\nu\kappa} R_{\lambda\kappa}) = T^{\mu\nu} \quad (10.7)$$

где  $\alpha_g$  – безразмерная константа,  $C^{\mu\lambda\nu\kappa}$  – так называемый тензор Вейля, не изменяющийся при преобразованиях (10.6-1). После замены

$$\begin{aligned} W^{\mu\nu}(x) &\rightarrow e^{-6\alpha(x)} W^{\mu\nu}(x) \\ T^{\mu\nu}(x) &\rightarrow e^{-6\alpha(x)} T^{\mu\nu}(x), \end{aligned}$$

преобразования координат с использованием некоторой функции  $B(r)$  и введения функции источника в виде  $f(r)$  уравнение (10.7) в стационарном случае приводится к уравнению Пуассона, но не второго порядка, как в обычном случае, а четвертого

$$\nabla^4 B(r) = f(r) \quad (10.8)$$

При наличии сферической симметрии уравнение (10.8) имеет точное решение. При этом оно не только содержит слагаемое, соответствующее решению Ньютона-Шварцшильда, но и слагаемые того же вида, что и эмпирическое уравнение (9.1) для кривых вращения

$$\begin{aligned} B(r > R) = -g_{00} &= 1 - \frac{2\beta}{r} + \gamma r \\ 2\beta &= \frac{1}{6} \int_0^R dr' r'^4 f(r'); \gamma = \frac{1}{2} \int_0^R dr' r'^2 f(r') \end{aligned} \quad (10.9)$$

Описанный подход не требует введения дополнительной (темной) материи, т.е. дополнительного скалярного поля. Вместо этого он использует другой выбор скалярной функции при формулировке вариационного принципа. Это сохраняет геометрию пространства-времени, но приводит к уравнению Эйнштейна вида (10.7), которое, в частности, в пустом пространстве не имеет структуры волнового уравнения. Таким образом, нет оснований говорить о каких-либо гравитационных волнах. Но тогда возникают проблемы с интерпретацией эффекта Хюлса-Тэйлора, наблюдавших изменение периода обращения двойного пульсара с течением времени, которое оказалось согласующимся с предсказанием ОТО, основанном на испускании гравитационных волн, с точностью до долей процента.

## 11. Анизотропная геометродинамика – наводящие соображения и первые шаги

Рассмотрим другую возможность геометрического подхода к решению возникших проблем. Те преобразования простейшего скаляра или выбор нового, изменение физического закона или выбор другой геометрии, которые были упомянуты выше, носили произвольный и не всегда обоснованный характер. Между тем, можно предложить путь

обобщения, который выглядит довольно естественным. Речь идет об отказе от постулируемой изотропии пространства. Наводящим соображением служит плоский характер многих галактик, а естественность состоит в том, что, полагая метрику анизотропной, мы будем неизбежно получать и обобщенный «простейший скаляр», поскольку метрический тензор участвует в его построении. При этом следует не пытаться угадать нужный вид метрики, а задать его в общем виде и попытаться уточнить, когда дело дойдет до конкретных результатов, узнав тем самым характеристики анизотропии физического пространства.

Анизотропия означает, что метрика в каждой точке будет зависеть от некоторого направления. Является ли возможная анизотропия глобальной, локальной или смешанной, сразу сказать невозможно. Поэтому прежде, чем модифицировать теорию, представляется естественным понять, какого сорта проблемы мы намерены решить. Если начинать с тех, которые были описаны выше, и не ставить радикальный отход от классической геометродинамики в качестве самостоятельной задачи, то следует осознать, как теперь следует воспринимать основные постулаты ОТО и, в частности, принцип эквивалентности. Он утверждает, что мы не можем различить эффекты, связанные с ускорением системы отсчета, и эффекты, связанные с действием гравитационного поля. Но если ускорение системы отсчета не является прямолинейным, то инерциальные силы, действующие на тело, зависят от скорости его движения (например, сила Кориолиса). Тогда в силу принятого принципа эквивалентности то, что принято называть гравитационным воздействием, также должно зависеть от скорости движения тел. Иными словами, измеряя действие гравитационных сил, мы никогда не знаем, в какой мере в наблюдениях учитывается кинематика. С математической точки зрения это будет означать, что пространство является локально анизотропным.

Наглядно можно представить себе это как переход от прямолинейно ускоряющегося «лифта Эйнштейна» к некоторой комнате, находящейся на вращающейся «карусели» так, что радиус, проведенный от центра вращения к ободу, перпендикулярен полу и потолку. Падающий шарик будет отклоняться от этого радиуса, другие движения будут также зависеть от начальной скорости тела. И, если о движении карусели ничего не известно, то наблюдаемая «гравитация» будет зависеть от скоростей как самого тела, контролируемой наблюдателем, так и от скорости вращения, о которой он может и не подозревать.

В отличие от классической ОТО и в свете возникших проблем, может оказаться более естественным начать построение теории для тех масштабов, которые характеризуют большую часть Вселенной, и лишь затем убедиться, что и в частном случае, например, для планетной системы, теория остается работоспособной. Тогда то, что сейчас является необъяснимой проблемой, станет своего рода исходной посылкой, которая в пределе не должна противоречить представлениям Ньютона-Эйнштейна-Шварцшильда о гравитации для точечной массы.

Учет зависимости метрики не только от координаты, но и от направления (от «скорости») в каждой точке, между прочим, приводит и к тому, что касательное пространство к основному многообразию становится восьмимерным *фазовым* пространством, имеющим в физике наглядный смысл.

Опишем вкратце первые результаты, возникающие на этом пути. Рассмотрим анизотропное пространство с деформированной метрикой простейшего вида

$$y^i = \frac{dx^i}{ds}$$

где  $\gamma = \text{diag}\{1, -1, -1, -1\}$  метрика Минковского, не зависящая от  $y$ , а  $\varepsilon_{ik}(x, y)$  - малое анизотропное возмущение. Такая метрика является обобщенной Лагранжевой метрикой, и  $y$ -переменные должны играть точно такую же роль, как и  $x$ -переменные, поэтому имеет место соотношение  $y^i = \frac{1}{H} \frac{dx^i}{dt} = \frac{1}{H} v^i$ , где  $H$  - некоторая константа с размерностью (секунда)<sup>-1</sup>. Будем считать  $\varepsilon(x, y)$  достаточно малым для того, чтобы использовать линейное приближение и сделаем следующие упрощающие предположения, полностью соответствующие исходным предположениям Эйнштейна, рассмотренным в разделе 5:

1. Скорости рассматриваемых объектов значительно меньше, чем фундаментальная скорость. Это означает, что компонентами  $y^2$ ,  $y^3$  и  $y^4$  можно пренебречь по сравнению с компонентой  $y^1$ , которая равна единице с точностью до второго порядка;
2. Поскольку скорости малы, производной метрики по времени  $\frac{\partial \varepsilon_{hj}}{\partial x^1}$  можно пренебречь по сравнению с производными по пространственным координатам  $\frac{\partial \varepsilon_{hj}}{\partial x^\alpha}$ ;  $\alpha = 2, 3, 4$ ;
3. Последнее будем считать верным и для соответствующих ускорений, т.е. на  $y$ -подпространстве фазового пространства производной по  $y^1$  можно пренебречь по сравнению с производными по  $y^2$ ,  $y^3$  и  $y^4$ .

### Геодезическая

Поскольку метрика теперь зависит от  $y$ , уравнения Эйлера-Лагранжа получаются при варьировании следующего (Финслеровского) выражения для квадрата расстояния

$$F^2 = (\gamma_{ik} + \varepsilon_{ik}(x, y)) y^i y^k$$

В этом случае уравнение получающейся обобщенной геодезической принимает вид:

$$\frac{dy^i}{ds} + (\Gamma^i{}_{lk} + \frac{1}{2} \gamma^{il} \frac{\partial^2 \varepsilon_{kl}}{\partial x^j \partial y^i} y^j) y^k y^l = 0$$

Здесь  $\Gamma^i{}_{jk} = \frac{1}{2} \gamma^{ih} \left\{ \frac{\partial \varepsilon_{hj}}{\partial x^k} + \frac{\partial \varepsilon_{hk}}{\partial x^j} - \frac{\partial \varepsilon_{jk}}{\partial x^h} \right\}$  представляет собой символ Кристоффеля, но зависящий и от направления, т.е. от  $y$ .

Полученная геодезическая представляет собой геометрические уравнения, которые следует использовать для описания динамики частицы в гравитационном поле, соответствующем анизотропной метрике. Как и в работе Эйнштейна, упомянутой в разделе 5, используем сделанные предположения для того, чтобы сохранить только члены с  $k = l = 1$ . Тогда из всех  $\varepsilon_{ik}$ , имеющих в уравнении, останется только  $\varepsilon_{11}$ , как и в классической работе, при этом  $y^k = y^l = 1$ . Введем новые обозначения

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial y^i} \equiv A_i$$

соответствующие компонентам тензора Картана. Тогда получим

$$\frac{dy^i}{ds} + \Gamma^i{}_{11} + \gamma^{ii} \frac{\partial A_i}{\partial x^j} y^j = 0$$

Добавим и вычтем одну и ту же величину  $\gamma^{ii} \frac{\partial A_j}{\partial x^i} y^j$  и получим

$$\frac{dy^i}{ds} + \Gamma^i_{11} + \gamma^{ii} \left[ \left( \frac{\partial A_i}{\partial x^j} - \frac{\partial A_j}{\partial x^i} \right) + \frac{\partial A_j}{\partial x^i} \right] y^j = 0$$

где  $\left( \frac{\partial A_i}{\partial x^j} - \frac{\partial A_j}{\partial x^i} \right)$  могут рассматриваться как компоненты антисимметричного тензора  $F_{ji}$

точно такого же, как и в электродинамике. Выражения  $\left( \frac{\partial A_i}{\partial x^j} - \frac{\partial A_j}{\partial x^i} \right)$  представляют собой компоненты ротора вектора  $A$ . Тогда для геодезической получим

$$\frac{dy^i}{ds} + \Gamma^i_{11} - \gamma^{ii} F_{ij} y^j + \gamma^{ii} \frac{\partial A_j}{\partial x^i} y^j = 0$$

### ***Снова «тождества Максвелла»***

Формально введенный тензор  $F_{ij}$  обладает полезными чисто геометрическими свойствами. А именно, он удовлетворяет тому же самому тождеству,

$$\frac{\partial F_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial F_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial F_{ki}}{\partial x^j} = 0$$

которое было рассмотрено в разделе 2. Повторяя ту же схему рассуждений, введем формальное обозначение

$$F_{12} = E_x^{(g)}; F_{13} = E_y^{(g)}; F_{14} = E_z^{(g)}; F_{23} = -B_z^{(g)}; F_{24} = B_y^{(g)}; F_{34} = -B_x^{(g)}$$

и немедленно получим ту же пару «тождеств Максвелла», которые в электродинамике известны как уравнения Максвелла

$$\frac{\overrightarrow{\partial B^{(g)}}}{\partial t} + \text{rot} \overrightarrow{E^{(g)}} = 0$$

$$\text{div} \overrightarrow{B^{(g)}} = 0$$

Следуя геометрическому рецепту, как и в разделе 2, перейдем к контравариантному тензору  $F^{ij} = \gamma^{ik} \gamma^{jm} F_{mk}$  (для поднятия значков можно использовать  $\gamma^{ii}$  поскольку  $A_i$  уже содержит  $\epsilon$ ), и введем новый 4-вектор  $I^i$  следующим образом

$$I^i = \frac{\partial F^{ij}}{\partial x^j}$$

Тогда аналогично может быть получена и вторая пара «тождеств Максвелла»

$$\text{rot} \overrightarrow{B} - \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t} = \vec{j}$$

$$\text{div} \overrightarrow{E} = \rho$$

где мы формально обозначили

$$I^1 \equiv j_x; I^2 \equiv j_y; I^3 \equiv j_z; I^4 \equiv \rho$$

Физическая интерпретация полученных геометрических результатов теперь не может включать никаких полей, кроме гравитационных. Смысл функций в полученных уравнениях не такой, как в уравнениях Максвелла в электромагнетизме. Вектора  $E^{(g)}$  и  $B^{(g)} = \text{rot}_{(x)}A$  описывают пространство-время с анизотропной метрикой и, таким образом, характеризуют гравитацию, зависящую от «скорости». Если интерпретировать  $A$  как вектор-потенциал гравитационного поля,  $\rho^{(m)}$  - как плотность массы источника гравитации, и  $j^{(m)} = \rho^{(m)}v$  - как плотность потока массы, или массовый ток, соответствующий собственному движению источника и его частей, мы получим впечатляющую аналогию с электромагнетизмом, и весь соответствующий ему формализм может быть использован при расчетах.

Ранее в теории встречалось исследование влияния вращения (точечного) источника на гравитационные эффекты. Вероятно, наиболее известным является эффект Лензе-Тирринга, в котором рассчитывается прецессия гироскопа (например, планеты) в поле вращающейся массы (например, звезды). Стоит обратить внимание на то, что исходной целью авторов было исследование принципа Маха о происхождении инерции. Известны и другие гравитомангнитные эффекты, рассчитанные в рамках релятивистского подхода: разница показаний часов, совершивших оборот по и против вращения центрального тела в его экваториальной плоскости (используется метрика Керра); эффект Саньяка; вращающаяся черная дыра и другие, включая расщепление спектральных линий, аналогичное эффекту Штерна-Герлаха. Во времена их первых расчетов все эти эффекты были слишком малыми для экспериментальной проверки, но с тех пор техника эксперимента существенно продвинулась. Существование гравитомангнитных явлений подтверждается измерениями так называемой прецессии Де Ситтера для системы Земля-Луна, совпадающими с расчетом с точностью до 1%, и для гироскопа, установленного на космическом аппарате Gravity Probe B, где достигнутая точность была еще выше. Однако в рамках гравитомангнитного подхода никогда не рассматривалась метрика анизотропного пространства в общем виде, а масштаб гравитомангнитных явлений, обсуждавшихся в литературе, никогда не превышал масштаб планетной системы, оставаясь малой поправкой к решениям Ньютона-Шварцшильда для сферически симметричного точечного источника.

### ***Гравитационная сила и ее компоненты***

Возвращаясь к уравнению геодезической с учетом тождеств Максвелла, получим

$$\frac{dy^i}{ds} = -\Gamma^i_{11} + \gamma^{it} F_{ij} y^j - \gamma^{it} \frac{\partial A_j}{\partial x^t} y^j$$

и увидим, что гравитационное ускорение теперь представляет собой сумму трех членов.

Первый из них связан с  $\Gamma^i_{11}$  и приводит к появлению классического выражения  $-\frac{1}{2}\nabla_{(x)}\varepsilon_{11}$ ,

приводящего к гравитации Ньютона  $F_N^{(g)}$ , появление двух остальных связано с анизотропией метрики. Второй член представляет собой гравитационный аналог силы Лоренца  $F_L^{(g)}$ , пропорциональный

$$F_L^{(g)} \sim (E^{(g)} + [y, B^{(g)}])$$

где

$$E^{(g)} = -\frac{1}{2} \nabla_{(x)} \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial y^1}; B^{(g)} \equiv \text{rot}_{(x)} A; A = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial y^2}, \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial y^3}, \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial y^4} \right)$$

С учетом третьего предположения слагаемым  $E^{(g)}$  в уравнении можно пренебречь. Третье слагаемое в геодезической можно сначала преобразовать с учетом второго предположения

$$-\gamma^{\alpha} \frac{\partial A_j}{\partial x^t} y^j = -(-\delta^{\alpha t}) \left[ \frac{\partial}{\partial x^t} (A_j y^j) - \frac{\partial y^j}{\partial x^t} \right] = (\nabla_{(x)} (A_j y^j))^{\alpha} = (\nabla_{(x)} (A, y))^{\alpha}$$

где  $\frac{\partial y^j}{\partial x^t}$  исчезает, поскольку  $x$  и  $y$  - независимые переменные. Вспоминая, что правая часть уравнения геодезической вначале была умножена на  $y^l y^l$ , и  $y^l = 1$  единиц длины, учтем теперь влияние размерных множителей ( $c$  и  $H$ ) и сделанного для удобства выбора констант ( $c = H = 1$ ) непосредственно

$$H \frac{dy}{c^2 dt} = \frac{1}{2} \left\{ -\nabla_{(x)} \varepsilon_{11} + [y, \text{rot}_{(x)} \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial y}] + \nabla_{(x)} \left( \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial y}, y \right) \right\} \cdot \left( \frac{H}{c} y^1 \right)^2$$

Поскольку  $y = \frac{1}{H} v; v^1 = c$ , выражение для гравитационной силы, действующей на частицу массы  $m$ , имеет вид

$$m \frac{dv}{dt} = F^{(g)} = \frac{mc^2}{2} \left\{ -\nabla_{(x)} \varepsilon_{11} + [v, \text{rot}_{(x)} \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial v}] + \nabla_{(x)} \left( \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial v}, v \right) \right\}$$

Первый член в скобках соответствует выражению для обычной гравитационной силы  $F_N^{(g)}$ , действующей на частицу с массой  $m$  со стороны источника с массой  $M$  и направленной по радиусу к центру распределения масс источника. Решение уравнения

Пуассона для стационарного гравитационного поля дает  $\varepsilon_{11} \sim \frac{1}{r}$  где  $r$  - расстояние от

частицы до центра, и выбор  $\varepsilon_{11} = \frac{2GM}{c^2} \frac{1}{r}$  для точечного источника на достаточных расстояниях приводит к закону Ньютона

$$F_N^{(g)} = G \frac{Mm}{r^2}.$$

Величина  $r_s = \frac{2GM}{c^2}$  соответствует радиусу Шварцшильда, упоминавшемуся в разделе

7.

Третий член в скобках является новым. Полное ускорение частицы теперь зависит не только от распределения масс, но и от их собственного движения и от скорости частицы. Компонента гравитационной силы  $F_3^{(g)}$  соответствует воздействию, оказываемому на движущуюся частицу расширением или сжатием (распределенного) источника. Расширение

гравитирующего источника приводит к дополнительной силе притяжения частицы, двигающейся по радиусу к центру.

Выражение для второй компоненты гравитационной силы  $F_L^{(g)}$  требует рассмотреть взаимодействие между движущейся частицей и движущимся распределением масс. И если система отсчета связана с последним, и его ускорение не прямолинейно, а, например, соответствует движению по окружности, принцип эквивалентности неизбежно требует появления компоненты гравитации типа силы Кориолиса. В простейшем случае источник может представлять собой массу  $M$ , близкую к точечной, вращающуюся с угловой скоростью

$$\Omega = \frac{c^2}{4H} \text{rot}_{(x)} \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial y}$$

Тогда второе слагаемое принимает точный вид «грави-Кориолисовой силы»

$$F_L^{(g)} = 2m[v, \Omega] \equiv F_C^{(g)},$$

создаваемой вращающейся массой, и непосредственно демонстрирует отмеченный выше общий характер связи между инерцией и гравитацией. На плоскости, проходящей через  $M$  перпендикулярно  $\Omega$ , можно получить траектории частиц, двигающихся в различных направлениях с различными скоростями. Таким образом, можно проследить различные действия силы  $F_L^{(g)}$ : притяжение, отталкивание и тангенциальное воздействие, зависящие от угла между  $v$  и  $V = [R_{eff}, \Omega]$ , где  $R_{eff}$  – радиус-вектор в направлении частицы, длина которого есть эффективный радиус вращающегося источника.

Из этих определений следует, что компоненты скорости, перпендикулярные плоскости, не испытывают действия силы  $F_L^{(g)}$ , что снимает 3D-проблему различия наблюдаемого гравитационного потенциала в разных направлениях упомянутую в разделе 9. Очевидно, что аналогия с электромагнетизмом может быть весьма полезна при расчетах.

Важно отметить, что в соответствии с последней формулой в анизотропной геометродинамике гравитационное взаимодействие уже не является только притяжением, как раньше, а вклад той или иной компоненты в наблюдаемые явления зависит от параметров системы.

### ***Кривые вращения и закон Талли-Фишера***

Рассмотрим сначала упрощенный пример. Пусть источник гравитации представляет собой двойную звезду с характерным расстоянием  $r_0$ , массой  $M$  и периодом  $T$ . Пусть планета  $m$  движется вокруг звезд по орбите с характерным радиусом  $r$ ,  $r > r_0$ , которая принадлежит плоскости движения звезд. Можно сказать, что движение массивных звезд представляет собой круговой массовый ток  $J^{(m)}(r_0)$  такой, что соответствующая величина  $B^{(g)}(r)$  может быть рассчитана по закону Био-Савара. Компонента  $B^{(g)}(r)$ , перпендикулярная плоскости, пропорциональна  $B_z^{(g)}(r) \sim J^{(m)}(r)/r$ . (Заметим, что она направлена «вверх» и «вниз» снаружи и внутри контура, достигая максимума в его центре). Центробежная сила

$m \frac{v_{orb}^2}{r}$ , действующая на обращающуюся планету, равна сумме обычного Ньютоновского притяжения  $F_N^{(g)} = \frac{mC_1}{r^2}$ , и «грави-Лоренцевой» силы  $F_L^{(g)} = \frac{mv_{orb}C_2(r_0)}{r}$ , где  $C_1, C_2(r_0)$  - константы. Таким образом, квадрат орбитальной скорости планеты  $v_{orb}^2$ , будет равен

$$v_{orb}^2 = \frac{C_1}{r} + v_{orb}C_2(r_0)$$

Нетрудно видеть, что у этого уравнения два корня, и при  $r \rightarrow \infty$  первый из них дает Ньютоновский вклад  $v_{orb} = 0$ , а второй соответствует

$$v_{orb} \Big|_{r \rightarrow \infty} = C_2(r_0),$$

что приводит к плоской кривой вращения.

Для более сложной системы, например, для спиральной галактики, следует обобщить понятие  $r_0$  и найти эффективный радиус  $R_e$ . Это можно сделать, например, так

$$I_{eff} \sum I_n = MR_e^2 \Rightarrow R_e^2 = \sqrt{\frac{I_{eff}}{M}}$$

где  $I_{eff}$  - момент инерции системы с общей массой  $M$ . Таким образом, рассматривая теория дает наблюдаемые плоские кривые вращения, причем  $R_e$  характеризует конкретную галактику, а эффективная угловая скорость  $\Omega_e$  может быть найдена из условия  $I_{eff}\Omega_e = L_{eff} = \sum L_n$ , где  $L_n$  - моменты импульсов тел составляющих систему. Таким образом, получаем

$$\Omega_e = \frac{L_{eff}}{I_{eff}}$$

Внутри окружности радиуса  $R_e$  компонента  $B_z^{(g)}(r)$  меняет знак и  $F_L^{(g)}$  становится отталкивающей силой, действующей от центра распределения вращающихся масс. Это означает, что областью устойчивости является некоторое характерное расстояние, которое не является микроскопическим для масштаба рассмотрения, как радиус Шварцшильда. Поэтому можно рассмотреть в этой связи и проблему глобулярных кластеров, упомянутую в разделе 9.

Оценим величину  $C_2(R_e) \sim J^{(m)}(R_e)$ . Массовый ток  $J^{(m)}(R_e) \sim \frac{M}{T}$ , где масса  $M$  пропорциональна площади спиральной галактики  $R_e^2$ , а период  $T \sim R_e^{3/2}$  в соответствии с законом Кеплера. Это дает  $J^{(m)}(R_e) \sim \sqrt{R_e}$ . Поскольку светимость  $L_{lum}$  также пропорциональна площади галактики, получим  $R_e \sim \sqrt{L_{lum}}$ . Поэтому второй корень выражения для квадрата орбитальной скорости дает

$$v_{orb} \Big|_{r \rightarrow \infty} \sim L_{lum}^{1/4},$$

что соответствует закону Талли-Фишера (9.2).

Для того, чтобы найти дополнительное ускорение  $a_L = 2[v, \Omega]$ , где  $\Omega$  определена выше, удобно воспользоваться электромагнитной аналогией и выбрать

$$\text{rot}_{(x)} \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial y} = B^{(g)}; B_z^{(g)}(R_e) \sim \frac{J^{(m)}(R_e)}{r}$$

для данного распределения движущихся масс. Если выбрать приближение в виде кругового массового тока  $J^{(m)}$  с радиусом  $R_e$  и скоростью движения масс  $V$ , то

$$\Omega \sim \frac{G}{c^2 r} \frac{MV}{R_e}$$

и дополнительное ускорение тела пропорционально

$$a_L \sim v \frac{GMV}{c^2 r R_e}$$

Отношение этого ускорения к Ньютоновскому ускорению  $a_N = \frac{GM}{r^2}$  равно

$$\frac{a_L}{a_N} \sim \frac{vV}{c^2} \frac{r}{R_e} = \frac{vr}{c^2} \Omega$$

и можно определить области, где специфика анизотропии пространства становится существенной. Для заданной частицы, двигающейся со скоростью  $v$  на расстоянии  $r$  от центра, это отношение дает

$$\frac{a_L}{a_N} \sim \frac{vr}{c^2} \frac{L_{eff}}{I_{eff}},$$

где  $L_{eff}$  и  $I_{eff}$  характеризуют распределенный источник гравитации.

## 12. Интерпретация известных наблюдений, космологические следствия и специфический эффект

Как следует из полученных выражений, предложенная анизотропная модификация теории естественным образом обеспечивает плоский характер кривых вращения и выполнение закона Талли-Фишера. Проблема, связанная с различием гравитационного взаимодействия в плоскости галактики и вне ее также теряет остроту, поскольку движение, перпендикулярное галактической плоскости, не испытывает воздействия дополнительных сил, зависящих от скоростей, и таким образом, соответствующие «законы гравитации» действительно различаются. Проблема глобулярных кластеров может оказаться связанной с существованием характерного радиуса устойчивости, в окрестности которого сила меняет знак.

На данном этапе развития модели анизотропной геометродинамики количественные расчеты всех этих эффектов еще не получены. Но нетрудно видеть, что предложенная модификация теории гравитации приводит к дополнительному взаимодействию, обусловленному собственными движениями как галактик в кластере, так и в самих галактиках. Это может позволить обойтись и без введения темной материи для объяснения астрофизических эффектов, хотя и не будет противоречить самой возможности существования таких объектов, как бозоны Хиггса.

Как уже упоминалось, идея расширяющейся Вселенной утвердилась в связи с измеренным Хабблом красным смещением спектральных линий удаленных галактик, которое принято объяснять с помощью эффекта Доплера, и в настоящее время общепринятыми являются космологические модели расширяющейся Вселенной с метриками типа Фридмана-Робертсона-Уолкера, соответствующие классической геометродинамике. Именно с этих позиций трактуется и обнаруженное «ускорение расширения», потребовавшее учета в теории  $\lambda$ -члена, соответствующего взаимодействию отталкивания. Но теперь можно предположить, что красное смещение является *гравитационным* красным смещением, обусловленным тангенциальными движениями далеко удаленных объектов. Эта идея находит подтверждение в наблюдениях тангенциального движения квазаров, которое, как показывают наблюдения, происходит при удивительно высоких скоростях (рис.5), и точка зрения Маха о влиянии «удаленных звезд» на инерцию/гравитацию приобретает новый смысл.

MacMillan D.S. Qasar Apparent Proper Motion Observed by Geodetic VLBI Networks.  
NVI, Inc., NASA Goddard Space Flight Center, Grenbelt. arXiv: astro-ph/0309826

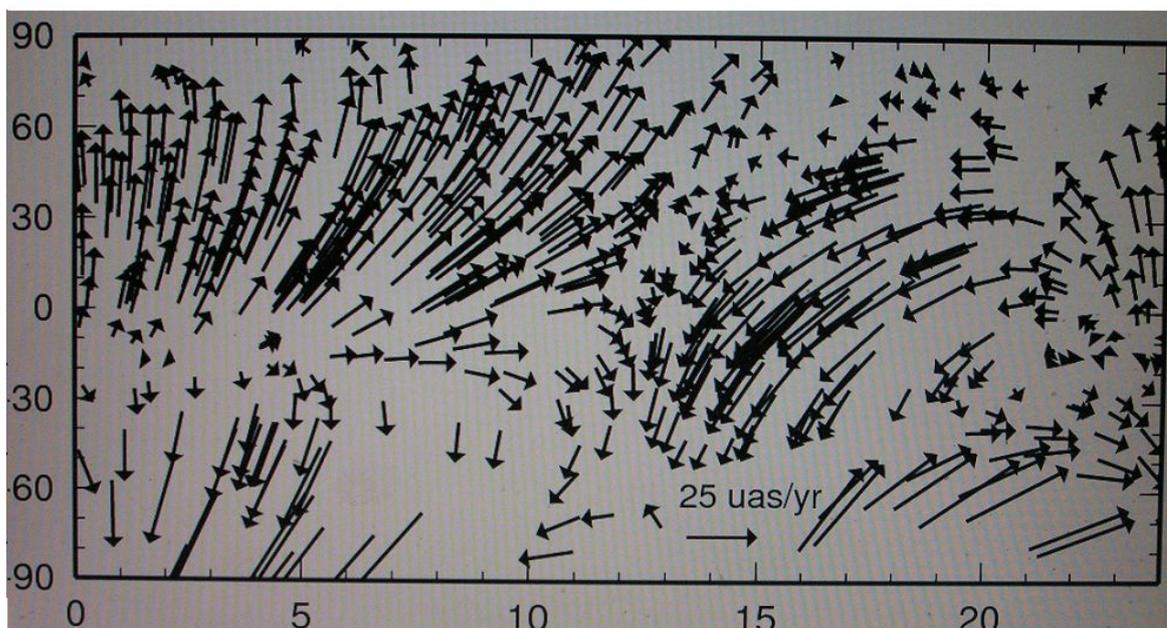


Рис.5

Таким образом, оказывается, что в рамках анизотропной геометродинамики наблюдаемые эффекты могут найти объяснение и без предположения о радиальном расширении Вселенной, требующем введения темной энергии, или наряду с ним, но при учете тангенциального движения объектов, вызывающего анизотропию метрики. Это означает, что в астрофизике и космологии повышается роль гидродинамики, поскольку любые скопления масс, такие, как галактики, кластеры галактик и сама Вселенная, можно интерпретировать как турбулентные вихри с присущими им свойствами взаимодействия, проявляющимися на соответствующих масштабах.

В каких случаях и в какой степени можно пренебречь эффектами крупномасштабных движений, следует каждый раз решать отдельно, ориентируясь на последнее из полученных соотношений, которое устанавливает количественный критерий для учета анизотропии. Заметим также, что при сопоставлении теории с измерениями на больших масштабах

необходимо модифицировать как уравнение Эйнштейна, так и электромагнитное волновое уравнение с учетом анизотропной метрики.

Уже эти первые результаты носят слишком фундаментальный характер для того, чтобы можно было их безоговорочно принять. Как указывалось во Введении, любая новая теория должна не только включать в себя все результаты старой и решать некоторые ее проблемы, но и предсказывать специфический проверяемый эффект. Ясно, что эффекты типа классических тестов ОТО здесь не годятся, поскольку масштаб рассмотрения существенно иной. Следует предложить и рассчитать эксперимент, как минимум, в масштабах галактики. Удачным обстоятельством является то, что наша галактика – Млечный путь – является плоской спиральной галактикой, и эффекты анизотропии, если она имеется, должны проявляться и в ней. Поэтому экспериментом, который может позволить исследовать геометрические свойства физического пространства, являются наблюдения гравитационно-волнового эффекта нового типа, так называемого оптико-метрического параметрического резонанса (ОМПР).

Суть его состоит в том, что при выполнении набора определенных условий на астрофизическую систему гравитационные волны (ГВ), испускаемые периодическим источником, например, тесной двойной звездной системой или пульсаром, начинают взаимодействовать с монохроматическим электромагнитным излучением космического мазера резонансным образом. В отличие от всех (18-ти!) известных эффектов, пригодных для детектирования ГВ, этот эффект в силу своего резонансного характера имеет не первый, но нулевой порядок по чрезвычайно малой амплитуде ГВ и может наблюдаться с помощью уже имеющейся аппаратуры (см. Приложение 4). При построении соответствующей модели, подлежащей расчету, используется выражение для метрики пространства, поэтому такой эксперимент подходит для заявленной цели – исследования геометрии пространства в масштабах галактики. Выполненный расчет указывает, что при различных ориентациях системы (источник ГВ)-(мазер)-(Земля) относительно плоскости галактики условия ОМПР будут различаться, что позволит судить о наличии анизотропии с помощью измерений и, возможно, оценить ее параметры. В настоящее время соответствующие исследования ведутся в Пущинской РАО РАН.

Заключая изложение, подчеркнем следующее. Проблемы, стоящие в настоящее время перед ОТО, представляются слишком серьезными, чтобы можно было справиться с ними, вводя поправки, не выводящие за пределы ее основ, и наращивая сложность вычислений. Следует обратиться к глубоким физическим и математическим идеям, лежащим в ее основе, и проанализировать именно их применимость к описанию физической реальности с учетом данных наблюдений. Рассмотренная здесь возможная локальная анизотропия пространства является лишь одним из возможных подходов, с помощью которого наука может выйти на следующий виток своего развития.

## **Приложение 1**

### **Метрический тензор и метризация**

Исследуем пару, состоящую из единичных векторов линейного пространства  $E_1$ , связанного с отображением, т.е. из ортов канонического базиса. Изменяя систему координат, получим

$$(\vec{e}_i, \vec{e}_k) = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} (\vec{e}_{i'}, \vec{e}_{k'})$$

Элементов, стоящих справа в идее множителя, получится  $n^2$  штук, и говорят, что рассматриваемая пара преобразуется как дважды ковариантный тензор, который обозначим

$$(\vec{e}_i, \vec{e}_k) = g_{ik}$$

Этот тензор немедленно появится, когда мы рассмотрим пару векторов

$$(V^i \vec{e}_i, W^k \vec{e}_k) = V^i W^k g_{ik}$$

Здесь каждый элемент введенного тензора, сконструированного из ортов канонического базиса, умножен на соответствующее число. Существует и его аналог, связанный с сопряженным базисом. Действительно,

$$(\underline{e}^i, \underline{e}^k) = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} (\underline{e}^{i'}, \underline{e}^{k'})$$

и говорят, что такая пара представляет собой контравариантный тензор второго ранга, т.е.

$$(\underline{e}^i, \underline{e}^k) = g^{ik}$$

Коэффициенты, возникающие при преобразовании координат, представляют собой компоненты матрицы Якоби (якобиан). Поэтому можно найти, как связаны между собой эти два тензора. Фактически, можно сказать, что тензор – один и тот же, а рассматриваются то его ковариантные компоненты, то контравариантные, относятся же они к одному и тому же объекту.

Исследуем свойства тензора  $g_{ik}$ . Представим один из уже упомянутых векторов в виде разложения по сопряженному базису

$$\vec{V} = V_i \underline{e}^i$$

Тогда ту же пару можно записать так

$$(V_i \underline{e}^i, W^k \vec{e}_k) = V_i W^k \underline{e}^i \vec{e}_k = V_i W^k \delta^i_k = V_k W^k$$

Откуда

$$g_{ik} V^i = V_k$$

Таким образом, тензор  $g_{ik}$  представляет собой оператор перехода от одной из контравариантных компонент вектора к его ковариантной компоненте с другим значком (эффективно это выглядит как опускание значка) путем суммирования всех контравариантных компонент с соответствующими коэффициентами. Такая возможность является фундаментальной для тензоров, и сам тензор  $g_{ik}$  называется фундаментальным.

Аналогично

$$(V_i \underline{e}^i, W_k \underline{e}^k) = V_i W_k \underline{e}^i \underline{e}^k = V_i W_k g^{ik}$$

и

$$(V_i \underline{e}^i, W^k \vec{e}_k) = V_i W^k \underline{e}^i \vec{e}_k = V_i W^k \delta^i_k = V_i W^i$$

Откуда

$$g^{ik} W_k = W^i$$

т.е. дважды контравариантный тензор  $g^{ik}$  выполняет обратный переход от ковариантной компоненты вектора к его контравариантной компоненте с другим значком. Прямое вычисление дает

$$g_{ik} g^{kj} = \vec{e}_i \vec{e}_k \underline{e^k} \underline{e^j} = \vec{e}_i \underline{e^j} = \delta^j_i$$

Компоненты дважды контравариантного тензора  $g^{ik}$  могут быть найдены как алгебраические дополнения к матричным элементам дважды ковариантного тензора

$$g^{ik} = \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial g_{ik}}$$

где  $g$  – определитель матрицы.

Введем еще одну характеристику геометрических объектов. Сопоставим каждому тензору число, не зависящее от выбора координат, которое будем называть нормой. Для тензора нулевого ранга – скаляра – это будет сам скаляр. Для тензора первого ранга – вектора – рассмотрим сначала выражение

$$\|\vec{V}\|^2 \equiv V^i V^k g_{ik} \quad (1)$$

Непосредственной проверкой нетрудно убедиться, что это число, представляющее собой сумму произведений контравариантных компонент вектора на соответствующие компоненты фундаментального тензора, не зависит от выбора координат. Это же число может быть получено и иначе

$$\|\vec{V}\|^2 \equiv V^i V^k g_{ik} = V_i V_k g^{ik} = V_i V^i \quad (2)$$

В отличие от выражения (1) здесь могут использоваться ковариантные компоненты вектора пространства, связанные только с сопряженным базисом, и контравариантный фундаментальный тензор, элементами которого являются комбинации ортов сопряженного базиса. Это дает возможность говорить о свойствах пространства и его векторов, не требуя введения какого-либо отображения непосредственно. Традиционно в качестве нормы выбирается корень квадратный из введенного выражения. Также эта величина называется длиной или модулем вектора.

Введем бинарную операцию. Как и ранее, рассмотрим два вектора, у которых определены нормы (длины)

$$\|\vec{V}\| = \sqrt{V^i V^k g_{ik}}$$

$$\|\vec{W}\| = \sqrt{W^i W^k g_{ik}}$$

Введем скалярное 2-произведение

$$\vec{V} \cdot \vec{W} = g_{ik} V^i W^k \equiv \|V\| \cdot \|W\| \cos(\vec{V}, \vec{W}), \quad (3)$$

с помощью которого каждым двум векторам сопоставляется *угол*, представляющий собой обратную тригонометрическую функцию от выражения

$$\cos(\vec{V}, \vec{W}) = \frac{\vec{V} \cdot \vec{W}}{\|V\| \cdot \|W\|} = \frac{g_{ik} V^i W^k}{\sqrt{g_{lm} V^l V^m} \sqrt{g_{jn} W^j W^n}} \quad (4)$$

Таким образом, фундаментальный тензор  $g_{ik}$  позволяет ввести привычные понятия длины вектора и угла между векторами на основе бинарной операции (скалярного 2-произведения), и понятия нормы. По этой причине в данном случае этот тензор называют также метрическим тензором, т.е. таким объектом, который позволяет ввести меру для

векторов. Одновременно он, а точнее, его контравариантный аналог характеризует свойства пространства, в котором заданы вектора.

**Замечание:** метрический тензор может и не совпадать с фундаментальным тензором.

Рассмотрим операции более высоких порядков. Так, вводя норму иначе, получим

$$\begin{aligned}\|\vec{V}\|^3 &\equiv V^i V^j V^k \vec{e}_i \vec{e}_j \vec{e}_k = V^i V^j V^k g_{ijk} \\ \|\vec{V}\| &= \sqrt[3]{V^i V^j V^k g_{ijk}}\end{aligned}\quad (5)$$

где  $g_{ijk}$  – некоторый трижды ковариантный (метрический) тензор, составленный из ортов канонического базиса. Такое выражение также является числом, не зависящим от координат. Если ассоциативность не предполагается, то скалярное 3-произведение и 3-угол определяются следующим образом

$$\begin{aligned}\vec{V} \cdot \vec{U} \cdot \vec{W} &= g_{ijk} V^i U^j W^k \equiv \|V\| \cdot \|U\| \cdot \|W\| \cos(\vec{V}, \vec{U}, \vec{W}) \\ \cos(\vec{V}, \vec{U}, \vec{W}) &= \frac{g_{ijk} V^i U^j W^k}{\sqrt[3]{V^i V^j V^k g_{ijk}} \sqrt[3]{U^i U^j U^k g_{ijk}} \sqrt[3]{W^i W^j W^k g_{ijk}}}\end{aligned}\quad (6)$$

Если же ассоциативность имеет место, то, представив вектора  $\vec{V}, \vec{U}, \vec{W}$  в виде их разложений по каноническому базису, как в формуле (5), нетрудно убедиться, что  $\cos(\vec{V}, \vec{U}, \vec{W})$  будет представлять собой вектор. Этот объект не будет изменяться при изменении координат, но действия с ним будут отличаться от действий с обычными тригонометрическими функциями.

Продолжая увеличивать число компонент, участвующих в определении нормы, получим

$$\begin{aligned}\|\vec{V}\|^4 &\equiv V^i V^j V^k V^l \vec{e}_i \vec{e}_j \vec{e}_k \vec{e}_l = V^i V^j V^k V^l g_{ijkl} \\ \|\vec{V}\| &= \sqrt[4]{V^i V^j V^k V^l g_{ijkl}}\end{aligned}\quad (7)$$

где  $g_{ijkl}$  – ковариантные компоненты некоторого (метрического) тензора четвертого ранга. Если для операций с единичными векторами канонического базиса имеет место ассоциативность, то этот метрический тензор может быть выражен через фундаментальный тензор

$$\begin{aligned}\|\vec{V}\|^4 &\equiv V^i V^j V^k V^l \vec{e}_i \vec{e}_j \vec{e}_k \vec{e}_l = V^i V^j g_{ij} V^k V^l g_{kl} = V^i V_i V^k V_k \\ \|\vec{V}\| &= \sqrt[4]{V^i V^j V^k V^l g_{ij} g_{kl}} = \sqrt[4]{V^i V_i V^k V_k}\end{aligned}\quad (8)$$

и норма (8) совпадает с обычной нормой (1) – той, которая определяется с помощью бинарной операции. При этом и углы сохраняют свой привычный смысл. Если ассоциативность не предполагается, то скалярное 4-произведение и 4-угол будут иметь вид

$$\begin{aligned}\vec{V} \cdot \vec{U} \cdot \vec{W} \cdot \vec{Z} &= g_{ijkl} V^i U^j W^k Z^l \equiv \|V\| \cdot \|U\| \cdot \|W\| \cdot \|Z\| \cos(\vec{V}, \vec{U}, \vec{W}, \vec{Z}) \\ \cos(\vec{V}, \vec{U}, \vec{W}, \vec{Z}) &= \frac{g_{ijkl} V^i U^j W^k Z^l}{\sqrt[4]{V^i V^j V^k V^l g_{ijkl}} \sqrt[4]{U^i U^j U^k U^l g_{ijkl}} \sqrt[4]{W^i W^j W^k W^l g_{ijkl}} \sqrt[4]{Z^i Z^j Z^k Z^l g_{ijkl}}}\end{aligned}\quad (9)$$

Здесь  $\cos(\vec{V}, \vec{U}, \vec{W}, \vec{Z})$  представляет собой ковариантные компоненты тензора 4-го ранга, структура которого совпадает со структурой метрического тензора. В выражениях для

углов (6) и (9) суммирование по повторяющимся индексам проводится только внутри каждого из входящих в них сомножителей по отдельности.

## **Приложение 2**

### **Принцип наименьшего действия**

#### **Постулаты, определения, законы**

Введем понятие сигнала – информационной единицы, выделяемой из окружающего мира и способной обладать различными свойствами. Физическая природа сигнала также может быть различной, и каждый раз должна быть оговорена отдельно. Например, она может быть механической, акустической, электромагнитной... Рассмотрим два события: испускание сигнала, природу которого пока не оговариваем, в точке 1 и прием его в точке 2 в соответствующие моменты времени. Таким образом, можно сказать, что между событиями испускания-приема имеется причинно-следственная связь (физика) или отношение порядка (математика). Примем два исходных постулата. Один из них известен как первый закон (динамики) Ньютона

- Существуют такие системы отсчета, называемые инерциальными (ИСО), в которых тела сохраняют состояния покоя или равномерного прямолинейного движения пока и поскольку сумма всех сил, действующих на них, равна нулю.

Второй постулат представляет собой так называемый принцип относительности Галилея, состоящий в том, что

- Все законы физики (механики) одинаковы во всех инерциальных системах отсчета.

Особенностями этих постулатов является то, что первый из них в строгом (физическом) смысле никогда не верен (невозможно исключить влияние тела отсчета, с которым связана система отсчета), а второй – невозможно проверить (как в силу своего исчерпывающего характера, так и в силу указанного отсутствия инерциальных систем).

Введем две идентично устроенные ИСО, и будем пока считать оси координат ортогональными. Располагая эталоном, наблюдатель мог бы попытаться непосредственно измерить расстояние между точками 1 и 2, находясь в любой из ИСО, (и для дальнейших рассуждений уже потребовался бы постулат о неизменности свойств самого эталона при переходе из системы в систему). Однако, как правило, эталон используют для градуировки осей систем координат, (что, вообще говоря, требует такого же или аналогичных постулатов), после чего вводят определение меры удаленности двух точек друг от друга, т.е. расстояния  $R$ , которое может быть вычислено по некоторым определенным правилам, которые, вообще говоря, могут быть различными.

При определении расстояния между точками 1 и 2 в качестве экспериментальной основы измерений координат используем свет. Тогда необходимо установить соответствие между абстрактными (геометрическими) прямыми, используемыми при расчете, и траекториями распространения света, используемыми при измерениях. Исторически это соответствие описывалось с помощью одного из двух постулатов:

- свет распространяется по кратчайшему пути (т.е. в мире, геометрия которого евклидова, световые лучи есть прямые линии – геометрическая оптика),
- свет распространяется по пути, требующим кратчайшего времени (принцип Ферма). Для однородного евклидова пространства этот постулат сводится к предыдущему, а для неоднородного – например, состоящего из двух полупространств, – позволяет получить законы отражения и преломления без ссылок на природу света и характер его взаимодействия с веществом, заполняющим пространство.

Могут существовать поля, влияющие на движение исследуемого сигнала (в том числе, в частности, и светового), которое может быть и неинерциальным. Будем считать, что, судя по измерениям, физический сигнал движется из точки 1 в точку 2 с переменной (не меняющей знака, конечной) скоростью по некоторой траектории, длина которой может отличаться от расстояния между точками. Длину  $l$  этой траектории можно найти, если известна (измерена, вычислена) зависимость скорости сигнала от естественного параметра – времени – в данной ИСО

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt \quad (9)$$

Это обстоятельство позволяет при необходимости переходить от одного естественного параметра – времени, к другому, не менее естественному, – пройденному пути.

Кроме того, надо уточнить, с помощью какого эффекта измеряется скорость и положение сигнала. По-видимому, на современном этапе развития науки естественно и здесь опираться на распространение света.

Для абстрактного (математического) описания движения «сигнала» во внешних полях потребуются так называемые «законы физики» – абстрактные математические структуры (уравнения), вид которых был получен или выбран на основании интуитивных соображений. Последние могут носить как дедуктивный характер, так и индуктивный, основанный на логическом анализе наблюдений природы. Для того чтобы результаты, получаемые с помощью математических уравнений, можно было использовать, потребуется постулат о выборе той или иной геометрии для описания физического (измеряемого) мира и последующая проверка соответствия модели и мира. Этот выбор геометрии естественно связать с основным физическим эффектом, используемым при измерениях, т.е. геометрию удобно выбрать такой, что «закон физики», описывающий эффект, применяемый для измерений, наиболее просто использовать в максимально возможном числе случаев.

Так, если использовать измерения, основанные на световых сигналах, и считать свет электромагнитной волной, то геометрию следует выбрать такой, чтобы уравнения Максвелла сохраняли свой вид («наиболее просто использовать») во всех ИСО («в максимально возможном числе случаев»). Фактически, это и было сделано Лоренцем, а затем Эйнштейном при построении специальной теории относительности (СТО). Соответствующая геометрия оказалась римановой и включала одновременно и пространство, и время, что требовалось преобразованиями Лоренца, обеспечивающими инвариантность уравнений Максвелла при переходе из одной ИСО в другую. Естественным параметром решений уравнений движения и траекторий стало уже не время или соответствующий ему пройденный путь (как в евклидовом пространстве), а интервал.

Время же стало лишь одной из координат четырехмерного пространства-времени, не слишком отличающейся от трех остальных.

Рассмотрим более подробно движение физического сигнала в силовом поле. Наиболее последовательным представляется дедуктивный аксиоматический подход Гамильтона-Лагранжа, хотя следует отметить, что эти последние его качества вторичны и имеют в основе индуктивные эмпирические законы. Поэтому сделаем несколько предварительных замечаний.

Пусть теперь физический сигнал представляет собой тело, характеризуемое двумя измеряемыми числовыми коэффициентами, называемыми *массой*  $m$  и *электрическим зарядом*  $e$ . Масса характеризует инертность тела, т.е. его «стремление» сохранять состояние покоя или равномерного прямолинейного движения, заряд – способность участвовать в электромагнитном взаимодействии. Тело перемещается из точки 1 в точку 2 и находится во внешнем электромагнитном поле. О наличии поля можно узнать, наблюдая движение различных заряженных (наблюдателем) и незаряженных тел в рассматриваемой области пространства. Электромагнитное поле характеризуется т.н. *скалярным потенциалом*  $\varphi(q, t)$  и *векторным потенциалом*  $\vec{A}(q, t)$ , где  $q$  – радиус-векторы точек пространства. Измерения, выполненные с учетом системы единиц, показывают, что движение заряженного тела в электромагнитном поле согласуется с некоторыми уравнениями, известными как «законы физики».

Так, уравнение

$$\frac{dp}{dt} = F \quad (10)$$
$$p \equiv mv$$

называется основным уравнением динамики или законом Ньютона. Здесь  $p$  – вектор импульса или количества движения,  $F$  – сила, мера воздействия на тело со стороны внешних тел или полей, приводящего к появлению ускорения. Фактически, выражение (10) есть наиболее конструктивное определение понятия силы. Нетрудно увидеть его место в ряду следующих исторически встречавшихся определений: сила есть мера воздействия на тело со стороны внешних тел, приводящего к появлению *смещения* или деформации тела (например, закон упругости Гука  $F = -kx$ ); сила есть мера воздействия на тело со стороны внешних тел, приводящего к появлению у тела *скорости*, – в том числе и постоянной (так ее определял не учитывавший трения Галилей на основании опытов с тележкой). Ньютон же обнаружил, что, прикладывая различно сжатую пружину к одному и тому же телу, получим  $\frac{a_1}{a_2} = \frac{F_1}{F_2}$ , где  $a$  – ускорение, а, прикладывая одинаково сжатую пружину к

различным телам, получим  $\frac{a_1}{a_2} = \frac{m_2}{m_1}$ , где  $m$  пропорционально количеству вещества.

Уравнение (10) служит одновременно обобщением этих экспериментальных фактов, определением *понятия* силы и основой для выбора системы единиц измерения. Словом *сила* называют также и воздействия различной природы (сила упругости, сила тяжести). Определяя зависимости природных сил от различных параметров и подставляя эти зависимости в уравнение (10), можно, пользуясь математическими методами, найти его решение. С точки зрения физики это означает возможность предсказать положение тела в

различные моменты времени, найти траекторию его движения, сравнить полученные результаты с экспериментальными измерениями и при необходимости уточнить использованные зависимости для сил. В этом состоит научный метод Ньютона, используемый до сих пор.

В рассматриваемом случае сила  $F$  действует на заряженную частицу со стороны электромагнитного поля. При этом она удовлетворительно описывается выражением, известным как формула силы Лоренца

$$F = eE + \frac{e}{c}[vH] \quad (11)$$

где  $E$  – напряженность электрического поля,  $H$  – напряженность магнитного поля,  $c$  – скорость света, Возвращаясь к упомянутым ранее характеристикам поля, получим

$$E \equiv -\frac{1}{c} \frac{\partial A}{\partial t} - \text{grad} \varphi; H \equiv \text{rot} A \quad (12)$$

Воспользовавшись соотношением

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + (v \cdot \nabla)A$$

и подставляя (12) в (11), а затем в (10), получим уравнение движения сигнала в виде

$$\frac{d}{dt} \left( p + \frac{e}{c} A \right) = \frac{e}{c} (v \cdot \nabla) A + \frac{e}{c} [v \times \text{rot} A] - e \text{grad} \varphi \quad (13)$$

Сравнивая вид получившегося уравнения с видом основного уравнения динамики (10), можно (например, из эстетических соображений) ввести новое определение импульса для данной конкретной ситуации  $P = p + \frac{e}{c} A$ . Но можно этого и не делать. Уравнение (13) является примером «закона физики», упоминавшегося в начале этого раздела.

Не будем теперь конкретизировать природу внешнего поля, но допустим лишь, что зависимость силы, действующей на тело, от параметров такова, что при описании ей может быть сопоставлен градиент некоторой функции, называемой потенциалом поля, т.е.

$$F = -\frac{\partial U}{\partial q} \quad (14)$$

и уравнение движения тела, согласующееся с измерениями, по-прежнему имеет вид

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial q} \quad (15)$$

Тогда с математической точки зрения у этого дифференциального уравнения существует так называемый *интеграл движения*, имеющий простой вид

$$E = \frac{mv^2}{2} + U \equiv T + U \quad (16)$$

В физике он носит название полной механической энергии (излучение здесь пока не рассматриваем) и состоит из двух частей, каждой из которых обычно придают физический смысл. Первое слагаемое называется кинетической энергией и характеризует только свойство самого тела. Второе слагаемое называется потенциальной энергией и характеризует взаимодействие тела и физического поля, в котором тело движется. Закон сохранения полной механической энергии (физика), таким образом, эквивалентен наличию интеграла движения у дифференциального уравнения динамики (математика). Иными

словами, если считать, что математика применима для описания физического мира, то измеряемая величина «полная механическая энергия» не может не сохраняться. Если же при использовании выбранной математической модели измеряемая энергия сохраняться не будет, то это укажет на наличие физических полей, не учтенных в модели. У уравнений динамики существуют и другие интегралы движения, также находящие применение в физике.

Проверяемая гипотеза о сохранении энергии, которая в данном случае просто следует из свойств математических структур, наводит на мысль сформулировать постулат, аналогичный принципу Ферма, для описания произвольных физических процессов. Помимо того, что он сообщит законченность теории, он позволит также рассмотреть пригодность той или иной геометрии для описания реального мира, используя не только световые, но и прочие явления.

### Принцип наименьшего действия и канонические уравнения

Рассмотрим векторное пространство  $q = \{q^i\}$ , в котором задана скалярная функция  $L(q, \dot{q}, t)$ , зависящая от параметра  $t$ , и связанный с ней функционал, имеющий вид

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt \quad (17)$$

Вариационное исчисление позволяет найти уравнения кривых, доставляющих этому функционалу экстремум. Заметим при этом, что свойство математической кривой быть экстремалью функционала не зависит от выбора системы координат (декартовой, полярной и т.д.). Но что еще более важно, – скаляр, стоящий под интегралом, есть объект, не зависящий от изменения выбранной системы координат.

Элементом этого (абстрактного) векторного пространства можно сопоставить некоторые обобщенные координаты, характеризующие движение системы, и соответствующие обобщенные скорости. Вначале, однако, для простоты сопоставим им радиус-вектора физических объектов, измеряемые в ИСО. При этом параметру  $t$  можно также сопоставить измеряемую физическую величину – время. Будем считать, что каждую физическую систему можно охарактеризовать некоторой определенной скалярной функцией  $L(q, \dot{q}, t)$ . Будем, как и ранее, следить за движением физического сигнала, который пока считаем точечной массой, в некоторой ИСО. Пусть в моменты времени  $t_1$  и  $t_2$  измерения показывают, что сигнал занимает определенные положения, характеризуемые двумя наборами координат  $q^{(1)}$  и  $q^{(2)}$ . Функционал (17) будем называть *действием*.

Постулируем принцип наименьшего действия (ПНД):

- любая физическая система движется таким образом, что действие, вычисленное для нее, имеет минимально возможное значение.

Из этого принципа можно с помощью варьирования функционала

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) dt = 0 \quad (18)$$

получить так называемое уравнение Эйлера-Лагранжа (или уравнение Лагранжа) для функции  $L(q, \dot{q}, t)$ ,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \quad (19)$$

которое фактически должно приводить к соответствующим экспериментально проверяемым уравнениям движения, иначе ПНД останется формальным математическим утверждением. Функция  $L(q, \dot{q}, t)$ , удовлетворяющая уравнению Лагранжа (19), называется функцией Лагранжа или лагранжианом. Таким образом, придерживаясь данного формализма, следует позаботиться о таком выборе функции  $L(q, \dot{q}, t)$ , что принятый постулат будет недвусмысленно согласован с известными законами физики. Если это удастся сделать, то для теоретического исследования физических процессов можно будет использовать мощный аппарат вариационного исчисления. Сделаем важное

**Замечание 1:**

- В чем бы ни состояли требования к функции Лагранжа, и каким бы ни был ее вид, в ее выборе неизбежно имеется произвол. Функциями Лагранжа всегда окажется целый класс функций, отличающихся друг от друга на полную производную по времени от произвольной функции координат и времени  $f(q, t)$ . Выберем

$$L'(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t) + \frac{d}{dt} f(q, t) \quad (20) \text{ Подставляя}$$

(20) в (18), видим, что при варьировании дополнительный член пропадает. Это означает, что уравнения движения, получаемые с помощью новой функции Лагранжа и пригодные для описания измеряемого движения сигнала, останутся теми же, что и раньше. Иными словами, аддитивная составляющая *функции Лагранжа*, которая может быть представлена в виде полной производной по времени, не будет соответствовать никакой наблюдаемой или измеряемой величине. Естественно, что к аддитивной составляющей в виде константы это тоже относится.

Сложившаяся (вероятно, благодаря известному курсу физики) традиция предлагает в качестве эффективного базисного допущения при дедуктивном выборе  $L(q, \dot{q}, t)$  учесть однородность пространства и времени (независимость  $L$  от  $q$  и  $t$ ) и изотропность пространства (независимость  $L$  от  $v$ ). Эта традиция как таковая удовлетворительной не является ни с точки зрения рассматриваемых здесь вопросов, ни с учетом существования движений, описываемых не дифференцируемыми функциями, ни в связи с приписыванием физическим пространству и времени субстанциональных свойств. Апеллировать к возможности подобного дедуктивного выбора тем более не стоит, если обратить внимание на (столь же традиционный) способ выбора функции Лагранжа в случаях, не ограниченных механикой. Гораздо более важно учесть следующее обстоятельство, которое зачастую обсуждается в курсах физики недостаточно.

Исследуя экспериментально измеряемые величины и сопоставляя им математические объекты, например вектора, следует внимательно следить за адекватностью таких сопоставлений, имея в виду последующие операции с этими объектами. В частности, измеряемые компоненты вектора скорости можно сопоставлять только какому-то одному классу геометрических объектов, например, контравариантным компонентам вектора. Но, как известно из дифференциальной геометрии, для получения скаляра из

(контравариантного) вектора понадобится так называемая 1-форма (ковариантный вектор). Ее компоненты могут быть получены из компонент имеющегося (контравариантного) вектора с помощью фундаментального (метрического) тензора.

*Таким образом, при построении скаляра (функции Лагранжа) с помощью объектов, связанных с измеряемыми величинами, в получаемое выражение должен с необходимостью входить метрический тензор в явном виде. Он будет характеризовать геометрию (математического) пространства, которое используется для моделирования физической реальности. Этот момент является принципиально важным для построения фундаментальной теории.*

Вернемся пока к построению функции Лагранжа. Постулируя, что для «свободной частицы» движение сигнала является равномерным и прямолинейным, и, убеждаясь, что это не противоречит соответствующим наблюдениям, запишем уравнение такого движения

$$q = q_1 + vt \quad (21)$$

Выберем функцию Лагранжа в виде

$$L = bv^2 = b\dot{q}^2; b = const \quad (22)$$

где квадраты вектора скорости представляют собой скалярные произведения этого вектора самого на себя. При этом квадраты соответствующих норм вектора равны

$$v^2 = (v, v) = v_i v^i = \|v\|^2; \dot{q}^2 = (\dot{q}, \dot{q}) = \dot{q}_i \dot{q}^i = \|\dot{q}\|^2 \quad (23)$$

Можно было бы записать функцию Лагранжа и так

$$L = bv^2 = (v^i)(bv_i). \quad (22-a)$$

Подстановка (22) в (19) даст то уравнение движение, которое требуется:

$$\ddot{q} = 0 \Rightarrow q = q_1 + vt \quad (24)$$

Привнесем физический смысл в рассматриваемые формальные математические структуры. С этой целью

- Выберем константу  $b$  из математического уравнения (22) в виде, имеющем физический смысл и соответствующую размерность:  $b \equiv \frac{m}{2}$ .

Тогда функция Лагранжа свободной частицы (движущейся равномерно и прямолинейно в трехмерном евклидовом пространстве) будет иметь вид

$$L = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = T \quad (25)$$

что совпадает с выражением для кинетической энергии. Если же частица находится в поле сил, как в случае, соответствующем формуле (14), и движется неравномерно, то, выбирая функцию Лагранжа в виде

$$L = T - U \quad (26)$$

и подставляя это выражение в формулу (19), немедленно получим

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial q} \quad (27)$$

Сравнивая уравнения (27), (19) и (10), можно с помощью функции Лагранжа системы дать определения

- обобщенного импульса  $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \quad (28)$

- обобщенной силы 
$$F = \frac{\partial L}{\partial q} \quad (29)$$

Оказалось, что «подправить внешний вид» уравнения (13) можно и с точки зрения требований формализма. Полученное в рамках рассматриваемого вариационного формализма уравнение (27) – то же самое проверяемое дифференциальное уравнение движения, что и (15), с интегралом движения  $E = T + U$ .

Именно такую формулировку ПНД дал Гамильтон:

- движения механической системы совпадают с экстремалиями функционала (17), где  $L$  есть разность кинетической и потенциальной энергий системы.

Уравнение Лагранжа – дифференциальное уравнение второго порядка для координаты. В этой связи оно эквивалентно системе уравнений первого порядка, в которой вторая независимая переменная – компонента скорости. Но Гамильтон предложил перейти от одного набора независимых переменных к другому – использовать преобразования Лежандра, состоящие в переходе от функций на данном линейном пространстве к функциям на сопряженном пространстве, и ввести определения обобщенных импульсов и обобщенных координат. В этом случае от (некоторой) функции Лагранжа следует перейти к (соответствующей) функции Гамильтона по формуле

$$H(p, q, t) = p\dot{q} - L(q, \dot{q}, t) \quad (30)$$

которая и представляет собой преобразование Лежандра от функции Лагранжа, рассматриваемой как функция  $\dot{q}$ . Заметим, что преобразованием Лежандра от функции Гамильтона будет исходная функция Лагранжа. Тогда вместо системы уравнений Лагранжа, следует использовать уравнения Гамильтона или так называемые канонические уравнения

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \quad (31)$$

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \quad (32)$$

Если  $q(t)$  удовлетворяет уравнениям Лагранжа, то  $(p(t), q(t))$  удовлетворяют уравнениям Гамильтона и наоборот. Нетрудно убедиться, что функция Гамильтона (или гамильтониан) есть полная энергия

$$H = T + U \quad (33)$$

В терминах гамильтониана физический закон сохранения энергии следует из математического формализма особенно просто. Поскольку

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}, \quad (34)$$

то, если функция Гамильтона явно не зависит от времени, величина полной энергии является постоянной. Другие физические законы сохранения также коррелируют с математическими особенностями. Так, если координата  $q_i$  не входит в гамильтониан явно (при этом она называется циклической), то соответствующий ей импульс  $p_i$  является интегралом движения («закон сохранения импульса»).

Существует развитая теория канонических уравнений, играющая значительную роль в теоретической и математической физике. Можно сказать, что, построив функцию

Гамильтона для описания некоторой физической системы, сопоставимую с наблюдаемыми и измеряемыми процессами, мы полностью решаем задачу предсказания поведения системы в различных условиях.

Введенная в начале данного раздела величина действия  $S = \int_{t_1}^{t_2} L dt$  тесно связана с каноническими уравнениями. Если фиксировать только начальную точку движения, но по-прежнему требовать, чтобы оно происходило по физической траектории, т.е. удовлетворяло уравнениям Лагранжа, и учитывать определение обобщенного импульса  $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$ , то получим соотношение

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q^i} \quad (35)$$

где  $i$  нумерует (обобщенную) координату или степень свободы.

При движении системы вдоль наблюдаемой траектории полная производная по времени равна

$$\frac{dS}{dt} = L \quad (36)$$

по определению. С другой стороны

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial S}{\partial q^i} \dot{q}^i = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_i p_i \dot{q}^i \quad (37)$$

Поэтому

$$\frac{\partial S}{\partial t} = L - \sum_i p_i \dot{q}^i \quad (38)$$

Откуда

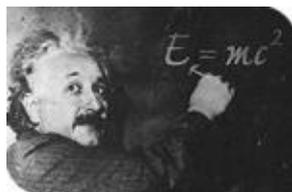
$$H = -\frac{\partial S}{\partial t} \quad (39)$$

Формулы (35) и (39) и дают искомую связь действия и канонических уравнений. Отметим разные знаки в правых частях указанных формул.

## Приложение 3

### Задача Эйнштейна

Считается, что именно он составил ее и предположил, что лишь 2% решающих смогут ее осилить. Нетрудно убедиться, что характер «обработки данных» весьма похож на тот одновременный учет многих обстоятельств, одни из которых принимаются во внимание прямо сейчас, а другие возникнут на следующем шаге, который возникает при построении теории.



Есть пять домов, каждый своего цвета. В 5 домах живет 5 человек 5 разных национальностей. Национальности не повторяются. Каждый жилец пьет только 1 напиток, курит только 1 сорт сигарет и имеет 1 домашнее животное. Напитки, марки сигарет и животные не повторяются.

**Условия:**

1. Англичанин живёт в красном доме.
2. Швед держит собаку.
3. Датчанин пьёт чай.
4. Зелёный дом стоит слева от белого.
5. Жилец зеленого дома пьет кофе.
6. Тот, кто курит Pall Mall, имеет птицу.
7. Жилец жёлтого дома курит Dan Hill.
8. Обитатель среднего дома пьёт молоко.
9. Любитель Malbogo живёт около человека, который владеет кошкой.
10. Первый дом - норвежца.
11. Тот, кто курит Malbogo, живет по соседству с мужчиной, который пьёт воду.
12. Счастливый обладатель лошади живёт возле курильщика сигарет Dan Hill.
13. Тот, кто портит себе здоровье Vinfield'ом, ещё и пиво пьёт.
14. Норвежец живёт возле голубого дома.
15. Немец курит Rottmanns.

**Вопрос:** КОМУ ПРИНАДЛЕЖИТ РЫБА??? (это одно из домашних животных)

Система условий полная, что предполагает одно ЕДИНСТВЕННОЕ правильное решение. При этом в предъявленном решении необходимо продемонстрировать выполнение всех указанных условий.

## Приложение 4

### Опико-метрический параметрический резонанс как инструмент исследования геометрических свойств пространства-времени

Эффект ОМПР является частным случаем явления опико-механического параметрического резонанса. Оно состоит в том, что, если компонента скорости атома, параллельная волновому вектору поля, по какой-либо причине меняется с определенной частотой, то на определенной частоте, близкой к частоте атомного перехода будет происходить периодическое усиление и ослабление сигнала с частотой колебаний атома. Это явление связано с перераспределением энергии по частотам в результате параметрического резонанса. В обычных условиях такой сигнал наблюдаться не будет из-за

усреднения по времени, но его можно выделить с помощью специальной обработки. Оказывается, что величина такого сигнала сопоставима с величиной пика обычного сигнала, характеризующего взаимодействие атома и резонансного поля.

Воспользуемся хорошо известной в теоретической спектроскопии полуклассической моделью взаимодействия атома с электромагнитным полем для исследования воздействия ГВ на атом космического мазера.

Сначала рассмотрим двухуровневый атом в монохроматическом квазирезонансном сильном поле с частотой  $\Omega$ , близкой к атомной частоте  $\omega$ . «Сильное» поле означает, что доминируют вынужденные переходы. Такая система, с одной стороны, описывается в терминах матрицы плотности, а с другой – поле представляется классической волной. В результате получаем систему уравнений Блоха для компонент матрицы плотности в виде

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \rho_{22} &= -\gamma \rho_{22} + 2i\alpha_1 \cos(\Omega t - k_1 y) (\rho_{21} - \rho_{12}) \\ \left[ \frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial y} \right] \rho_{12} &= -(\gamma_{12} + i\omega) \rho_{12} - 2i\alpha_1 \cos(\Omega t - k_1 y) (\rho_{22} - \rho_{11}) \\ \rho_{22} + \rho_{11} &= 1 \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь  $\rho_{22}$ ,  $\rho_{11}$  – населенности уровней;  $\rho_{12}$ ,  $\rho_{21}$  – поляризационные члены;  $\gamma$ ,  $\gamma_{12}$  – продольная и поперечная постоянные распада (считая нижний уровень основным, получаем  $\gamma_{12} = \gamma/2$ );  $\alpha_1 = \frac{\mu E}{\hbar}$  – параметр (частота) Раби, пропорциональный интенсивности электромагнитной волны (ЭМВ);  $\mu$  – дипольный момент;  $E$  – электрическая напряженность;  $\hbar = 1.05 \cdot 10^{-27}$  эрг·с – постоянная Планка;  $k_1$  – волновой вектор ЭМВ;  $v$  – скорость атома вдоль оси  $Oy$ ;  $\gamma \ll \alpha_1$  – условие сильного поля.

Переходя к исследованию астрофизической системы, заметим, что в космическом пространстве известны источники монохроматического электромагнитного излучения. Это – космические мазеры, атомы которых находятся в основных состояниях, а переходы осуществляются с метастабильных уровней, т.е. двухуровневая модель атома в данном случае вполне пригодна. Насыщенные космические мазеры полностью реализуют условия сильного поля. С другой стороны, можно предположить, что имеется причина, по которой расстояние, а, значит, и скорость заданного атома мазера в направлении на детектор сигнала на Земле будет периодически меняться. Это – периодическое воздействие ГВ, испускаемое источником, расположенным, как показано на Рис.6.

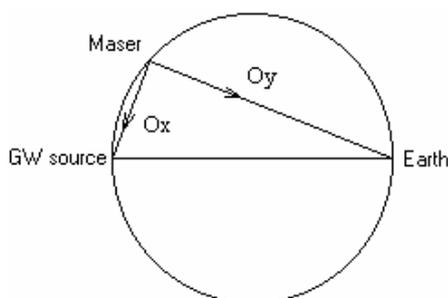


Рис.6

Воздействие ГВ сказывается на расположении уровней атома, на ЭМВ мазера и на положении атома. Можно показать, что первый эффект пренебрежимо мал по

сравнению с двумя остальными. Влияние ГВ на монохроматическую ЭМВ учитывается в результате решения уравнения для эйконала

$$g^{ik} \frac{\partial \psi}{\partial y^i} \frac{\partial \psi}{\partial y^k} = 0 \quad (15)$$

Закон движения атома должен быть получен из уравнения геодезической

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{kl} \frac{dx^k}{ds} \frac{dx^l}{ds} = 0, \quad (16)$$

(а не из уравнения геодезического отклонения, как в соответствующих расчетах относительного смещения частей лабораторных установок). Уравнения (14-16) описывают поведение двухуровневого атома насыщенного космического лазера в поле ГВ. Решая их и налагая требования параметрического резонанса, можно рассчитать соответствующий сигнал. При этом обсуждаемый эффект имеет нулевой порядок, и оказывается, что его детектирование на Земле возможно с помощью уже существующих радиотелескопов, позволяющих наблюдать сигнал космического лазера.

### Изотропное возмущение метрики Минковского

Будем считать геометрию Римановой и пользоваться обычными уравнениями Эйнштейна в приближении слабого поля вдали от масс  $g^{ik} = g^{(0)ik} + h^{ik}$ . Поправки к метрическому тензору плоского пространства-времени удовлетворяют волновому уравнению. В простейшем случае плоских волн оно имеет вид

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) h^k{}_i = 0 \quad (17)$$

В качестве решений естественно рассмотреть выражения

$$h^k{}_i = \text{Re}[A^k{}_i \exp(ik_\alpha x^\alpha)] \quad (17.1)$$

которые удовлетворяют уравнению, если  $k_\alpha k^\alpha = 0$ , т.е.  $k^\alpha$  - светоподобный вектор. Поэтому сам метрический тензор можно записать

$$g^{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 + h \cos \frac{D}{c}(x^0 - x^1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 - h \cos \frac{D}{c}(x^0 - x^1) \end{pmatrix} \quad (18)$$

где  $h$  – безразмерная амплитуда ГВ ( $h \ll 1$ ),  $D$  – частота ГВ.

Решение уравнения (15) с учетом (18) показывает, что воздействие ГВ приводит к фазовой модуляции ЭМВ. В силу малости  $h$  последняя может быть представлена в виде суперпозиции

$$E(t) = E \cos(\Omega t - ky) + E \frac{\omega}{4D} h [\cos((\Omega - D)t - ky) - \cos((\Omega + D)t - ky)] \quad (19)$$

Решение уравнения (16) с учетом (18) дает

$$y(t) \sim h \frac{c}{D} \sin(Dt + k_g x) \quad (20)$$

где  $k_g$  – волновой вектор ГВ. Зависимость (20) позволяет записать выражение для компоненты скорости атома, направленной в сторону Земли

$$\begin{aligned} v &= v_0 + v_1 \cos Dt \\ v_1 &= hc \end{aligned} \quad (21)$$

Подставляя (21) и (19) в (14), получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \rho_{22} &= -\gamma \rho_{22} + 2i[\alpha_1 \cos(\Omega t - ky) + \alpha_2 \cos((\Omega - D)t - ky) - \alpha_2 \cos((\Omega + D)t - ky)](\rho_{21} - \rho_{12}) \\ \frac{d}{dt} \rho_{12} &= -(\gamma_{12} + i\omega)\rho_{12} - 2i[\alpha_1 \cos(\Omega t - k_1 y) + \alpha_2 \cos((\Omega - D)t - ky) - \alpha_2 \cos((\Omega + D)t - ky)](\rho_{22} - \rho_{11}) \\ \rho_{22} + \rho_{11} &= 1 \end{aligned} \quad (22)$$

где  $\alpha_2 = \frac{\omega h}{4D} \alpha_1$ , а соотношение (21) было учтено в выражении для полной производной

$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + kv$ . Решение системы уравнений (22) проводится методом асимптотического разложения. При этом в случае выполнения определенных условий на параметры задачи можно говорить об оптико-метрическом параметрическом резонансе – ОМПР. Эти условия имеют вид:

- ЭМВ является спектроскопически сильной

$$\frac{\gamma}{\alpha_1} = \Gamma \varepsilon; \Gamma = O(1); \varepsilon \ll 1 \quad (22.1)$$

- Амплитудное условие ОМПР, связанное с трихроматическим полем

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{\omega h}{4D} = a \varepsilon; a = O(1); \varepsilon \ll 1 \quad (22.2)$$

- Амплитудное условие ОМПР, связанное с периодическим изменением скорости атома

$$\frac{kv_1}{\alpha_1} = \frac{\omega h}{\alpha_1} = \kappa \varepsilon; \kappa = O(1); \varepsilon \ll 1 \quad (22.3)$$

- Частотное условие ОМПР

$$(\omega - \Omega + kv_0)^2 + 4\alpha_1^2 = D^2 + O(\varepsilon) \Rightarrow D \sim 2\alpha_1 \quad (22.4)$$

Если условия (22.1-22.4) выполнены, то в результате решения (22) методом асимптотического разложения по малому параметру  $\varepsilon$  получим главный член разложения для  $\text{Im}(\rho_{21})$  – величины, характеризующей поток энергии рассеянного излучения. На частоте, смещенной на  $D$  от центрального пика, он пропорционален  $\varepsilon^0$ , и имеет вид

$$\text{Im}(\rho_{21}) \sim \frac{\alpha_1}{D} \cos 2Dt + O(\varepsilon) \quad (23)$$

Отрицательные значения соответствуют усилению, положительные – ослаблению потока энергии на указанной частоте, происходящему из-за перераспределения энергии излучения мазера в условиях ОМПР.

Может, однако, случиться так, что сигнал в предлагаемом эксперименте не будет обнаружен, или будет отличаться от приведенного расчета, или будет различаться для разных точек наблюдения. Это будет указывать на неучтенные, но существенные факторы. В том числе и на геометрические свойства пространства-времени.

## Анизотропное возмущение метрики Минковского

Известные рассуждения и выкладки, приводящие к уравнению (17), можно повторить, считая, что выражение для метрики можно записать следующим образом

$$g_{ij}(x) \rightarrow g_{ij}(x, \dot{x}) = \eta_{ij}(x) + h_{ij}(x, \dot{x}) \quad (24)$$

где

$$\eta_{ij}(x) = \eta^{(0)}_{ij}(x) \quad (25)$$

- метрика Минковского для плоского пространства,  $h_{ij}(x, \dot{x})$  - малая поправка, такая, что  $h^k{}_i(x, \dot{x}) = \eta^{(0)kj} h_{ij}(x, \dot{x})$ . Структура уравнений Эйнштейна при этом принципиально не изменится, и поправка  $h^k{}_i(x, \dot{x})$  будет по-прежнему удовлетворять волновому уравнению типа (17). Но выражение (17.1) будет выглядеть, например, так

$$h^k{}_i(x, \dot{x}) = \text{Re}[A^k{}_i(\dot{x}) \exp(ik_\alpha x^\alpha)] \quad (26)$$

Это означает, что амплитуда ГВ будет различаться в различных направлениях их распространения. С точки зрения наблюдений, основанных на методе ОМПР, эту разницу невозможно заметить непосредственно, поскольку используемый эффект – нулевого порядка. Но она будет проявлять себя косвенно, например, выполнением условий ОМПР на различных расстояниях в различных направлениях от одного источника ГВ. Так, условия (22.2) и (22.3) теперь станут такими

- Амплитудное условие ОМПР, связанное с трихроматическим полем

$$\frac{\alpha_2 \zeta_1(\dot{x})}{\alpha_1} = \zeta_1(\dot{x}) \frac{\omega h}{4D} = a \zeta_1(\dot{x}) \varepsilon; a = O(1); \varepsilon \ll 1 \quad (27)$$

- Амплитудное условие ОМПР, связанное с периодическим изменением скорости атома

$$\frac{k v_1 \zeta_2(\dot{x})}{\alpha_1} = \zeta_2(\dot{x}) \frac{\omega h}{\alpha_1} = \kappa \zeta_2(\dot{x}) \varepsilon; \kappa = O(1); \varepsilon \ll 1 \quad (28)$$

где функции  $\zeta_1(\dot{x}), \zeta_2(\dot{x})$  связаны с выражениями для амплитуд ГВ  $A^k{}_i(\dot{x})$ .

Этот эксперимент можно использовать для определения геометрических свойств пространства-времени следующим образом. Теоретические выражения, которые следует сравнивать с результатами эксперимента, естественно, следует получать при различных предположениях о геометрии пространства-времени. То из предположений, которое приведет к наиболее близкому соответствию с экспериментом, и будет соответствовать геометрическим свойствам пространства-времени.