ОСНОВЫ ФИНСЛЕРОВОЙ ГЕОМЕТРИИ

(курс лекций для физиков) *

Г.И. Гарасько[†]

5 января 2009 г.

Содержание

---

[*] Основной файл - lecturesGIG.tex

[†] ГУП ВЭИ, Россия, 111250, Москва, ул. Красноказарменная 12, 0400, gri9z@mail.ru

1 Координатное пространство

Для применения математики в физических исследованиях и решении теоретических задач вначале необходимо перейти от физических понятий к математическим, например, ввести систему координат и описывать физическую систему геометрическими, алгебраическими или какими-либо иными математическими объектами в этом координатном пространстве. Будем считать, что самая трудная часть работы проделана, то есть для физической системы установлены система координат. Круг задач ограничен свойствами этого координатного пространства и свойствами тех объектов, которые это пространство содержит или которыми оно будет наполнено в результате построений. Важно подчеркнуть, что координаты могут иметь разные размерности.

Можно работать в некотором координатном пространстве, даже если не установлено взаимно однозначное соответствие между точками координатного пространства и событиями, но надо уметь ставить в соответствие теоретически получаемым результатам физически наблюдаемые и измеримые экспериментально величины, то есть действительные числа. Такую процедуру естественно назвать *интерпретацией*. Вполне бывает достаточно существование хотя бы частичной интерпретации. В таком подходе можно заниматься теоретическими и математическими исследованиями и лишь при получении некоторых результатов ставить вопрос о их интерпретации.

Все последующее будет развёртываться в непрерывном координатном пространстве n измерений, каждая точка $M \equiv M(x^1, x^2, ..., x^n)$ которого это упорядоченный набор значений n независимых действительных переменных $x^1, x^2, ..., x^n$. Такое пространство будем называть *основным координатным пространством*, или просто *основным пространством*. При этом взамен переменных $x^1, x^2, ..., x^n$ разрешается брать любые другие независимые переменные $x^{1'}, x^{2'}, ..., x^{n'}$, при условии, чтобы между ними имелось взаимно однозначное соответствие и чтобы новые переменные были достаточное число раз дифференцируемыми функциями старых, ровно как и старые переменные - такого же рода функциями новых. Функциональную зависимость между координатами одной и другой системы

$$x^{i'} = f_i(x^1, x^2, ..., x^n) \tag{1}$$

будем называть преобразованием координат. Скалярные функции f_1, $f_2, ..., f_n$ дифференцируемы достаточное число раз и обратимы, поэтому якобиан

$$\frac{D(f_1, f_2, ..., f_n)}{D(x^1, x^2, ..., x^n)} \neq 0,\ \pm\infty\,. \tag{2}$$

Каждому преобразованию координат (1) соответствует преобразование самого пространства

$$x^i \rightarrow f_i(x^1, x^2, ..., x^n)\,, \tag{3}$$

то есть взаимно однозначное отображение координатного пространства самого на себя.

Важно отметить, что как при пассивном взгляде на преобразования (1), точки пространства остаются на месте, а меняются только численное значение их координат, так и в активном подходе (3), каждой точке пространства ставится в соответствие, вообще говоря, другая точка того же пространства в тех же координатах, в физических задачах условие (2) часто не выполняется во всём пространстве, а лишь в некоторой его области или областях, или же во всём пространстве, но за исключением особых точек. Для краткости изложения мы не всегда будем это оговаривать, но всегда будем иметь это ввиду.

Рассмотрим какую-нибудь точку $M(x^1, x^2, ..., x^n)$ нашего координатного пространства. Будем говорить, что в этой точке задан вектор ξ, если в каждой системе координат $x^1, x^2, ..., x^n$ задана система действительных чисел $(\xi^1, \xi^2, ..., \xi^n)$, преобразующихся при переходе от одной системы координат к другой $x^{1'}, x^{2'}, ..., x^{n'}$ по закону

$$\xi^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\,\xi^i\,. \tag{4}$$

Совокупность всевозможных векторов ξ в данной точке M вместе с операциями покомпонентного сложения двух векторов и покомпонентного умножения вектора на действительное число образуют линейное пространство n измерений. Это пространство будем называть *касательным пространством* в точке M.

Пусть ε - бесконечно малая величина, не зависящая от выбора системы координат. Рассмотрим векторы ξ касательного пространства в точке M, умноженные на ε. Каждый такой вектор имеет бесконечно малые компоненты. Сопоставим вектору $\varepsilon\xi$ бесконечно малое смещение из точки $M(x^1, x^2, ..., x^n)$ в бесконечно близкую точку $M'(x^1 + dx^1, x^2 + dx^2, ..., x^n + dx^n)$ так, чтобы дифференциалы координат dx^i совпадали с координатами вектора $\varepsilon\xi$:

$$dx^i = \varepsilon\xi^i \,. \tag{5}$$

Смещение MM', построенное по закону (5), не зависит от выбора системы координат, так как закон преобразования дифференциалов dx^i в точности таков, как и закон преобразования (4) компонент вектора $\varepsilon\xi$ при переходе от одной системы координат к другой.

Геометрический смысл касательного пространства: бесконечно малые векторы касательного пространства в точке M реализуются как бесконечно малые смещения MM' в основном пространстве.

Всегда будем подразумевать, что основное координатное пространство в каждой точке снабжено касательным пространством.

Среди всех таких основных пространств для физиков на первом месте, конечно, стоит четырёхмерное пространство событий, то есть четырёхмерное пространство-время x^0, x^1, x^2, x^3.

2 Элемент длины

Пусть в каждой точке $M(x^1, x^2, ..., x^n)$ основного координатного пространства и для всех или некоторых бесконечно малых смещений dx из точки M в бесконечно близкую точку $M'(x+dx)$ определено бесконечно малое действительное неотрицательное число - элемент длины, то есть расстояние $dl = L(dx; x)$ от точки M до всех или только некоторых соседних бесконечно близких точек M'. Тогда такое пространство будем называть *метрическим пространством*, а функцию $L(dx; x)$ - *метрической функцией*. В общем случае метрическая функция содержит $2n$ действительных аргументов. Элемент длины может иметь свою размерность, не совпадающую с размерностью ни одной из координат, например, координата x^1 может иметь размерность времени [сек], координаты $x^2, ..., x^n$ - размерность длина [см], а величина l ("длина") может иметь размерность действия [эрг · сек].

Если в метрическом пространстве найдётся такая система координат $x^1, x^2, ..., x^n$, в которой элемент длины dl не зависит от точки пространства $dl = L(dx^i)$, то такое пространство называется *плоским метрическим пространством.*

Иногда удобно считать, что начала всех векторов касательного пространства, относящегося к точке M основного пространства, находятся в одной и той же точке, которую назовём центром, причём можно представлять, что центр совпадает с точкой M основного пространства. Такое касательное пространство $\mathcal{A}_n(M)$ называется *центроаффинным касательным пространством* в точке M, при этом векторы ξ в нём являются радиус-векторами, а их компоненты (координаты) $\xi^1, \xi^2, ..., \xi^n$ совпадают с координатами точек этого центроаффинного касательного пространства.

Используя метрическую функцию, запишем уравнение специальной гиперповерхности в соответствующем центроаффинном касательном пространстве

$$L(\xi; x) = l_1\,, \tag{6}$$

где l_1 - единица длины. Такую гиперповерхность будем называть *индикатрисой*, соответствующее уравнение (6) - уравнением индикатрисы, а удовлетворяющие уравнению (6) векторы ξ_{ind} - единичными векторами.

Геометрический смысл: индикатриса суть геометрическое место концов единичных радиус-векторов соответствующего центроаффинного касательного пространства.

Евклидовым пространством размерности n называется плоское метрическое пространство, для которого найдётся такая система координат $x^1, x^2, ..., x^n$, что элемент длины в ней вычисляется по формуле

$$dl = \sqrt{(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + ... + (dx^n)^2}\,. \tag{7}$$

Системы координат, в которых элемент длины в евклидовом пространстве имеет такой вид, называют декартовыми прямоугольными. Таким образом, евклидовое пространство - это такое метрическое пространство, для которого найдётся такая система координат, что все индикатрисы будут сферическими гиперповерхностями одного и того же радиуса.

В римановом пространстве $x^1, x^2, ..., x^n$ элемент длины выражается формулой

$$dl = \sqrt{g_{ij}(x^1, x^2, ..., x^n) dx^i dx^j}\,, \tag{8}$$

где $g_{ij}(x)$ - метрический тензор риманова пространства. Плоское риманово пространство является евклидовым. Все индикатрисы риманова пространства суть эллипсоиды, у которых параметры зависят от точки основного пространства. Фундаментальное свойство римановых и, в частности, евклидовых пространств состоит в том, что все индикатрисы в них это замкнутые выпуклые гладкие гиперповерхности, поэтому для бесконечно малого смещения по любому направлению определена длина.

В четырёхмерном пространстве-времени $x^0 \equiv ct, x^1, x^2, x^3$ классической СТО определена псевдоевклидова геометрия с элементом длины

$$dl = \sqrt{(dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2}\,. \tag{9}$$

Индикатрисы для такой геометрии - трехмерные двуполостные гиперболоиды, каждая односвязная область которых есть вогнутая гиперповерхность. Такое метрическое пространство принято называть пространством Минковского. Если потребовать, чтобы приращение временной координаты было всегда положительной величиной $dx^0 > 0$, то получившееся метрическое пространство будет иметь в каждой точке основного пространства индикатрису, состоящую только из одной полости двуполосного гиперболоида, расположенной в конусе будущего.

В четырёхмерном пространстве событий ОТО, которое является псевдоримановым пространством с сигнатурой $(1, -1, -1, -1)$, определен элемент длины

$$dl = \sqrt{g_{ij}(x^0, x^1, x^2, x^3)dx^i dx^j}\,, \tag{10}$$

с метрическим тензором $g_{ij}(x^0, x^1, x^2, x^3)$, компоненты которого зависят от точки пространства, причем для каждой точки всегда найдётся такая система координат $x^{0'}, x^{1'}, x^{2'}, x^{3'}$, в которой в данной точке

$$(g_{i'j'}) = diag(1, -1, -1, -1) \equiv (\overset{o}{g}_{i'j'})\,. \tag{11}$$

Индикатрисы в таком пространстве являются вогнутыми гиперповерхностями, трёхмерными двуполостными гиперболоидами, параметры которых зависят от точки пространства. Плоское четырёхмерное псевдориманово пространство с сигнатурой $(1, -1, -1, -1)$ суть пространство Минковского.

Метрические функции, стоящие справа в формулах (7) - (10), выражаются через квадратичные формы дифференциалов координат. Это отличительное свойство именно евклидовых, псевдоевклидовых, римановых и псевдоримановых пространств, которые кратко можно называть *квадратичными геометриями*, или *квадратичными пространствами*. Отказавшись от этого свойства, получим геометрии (пространства), которые естественно назвать *неквадратичными*.

Обратим внимание на то, что не для всякого бесконечно малого смещения в пространстве Минковского в частности, а в общем случае для любого псевдориманово пространства, элемент длины определён, то есть соответствующий вектор бесконечно малого смещения измерим. Подставим в правую часть формулы (9) бесконечно малое смещение

$$(dx^0, dx^1, dx^2, dx^3) = (1, 1, 1, 1) \cdot \varepsilon \,, \tag{12}$$

где $\varepsilon > 0$ - бесконечно малая действительная положительная величина. Так как элемент длины должен быть действительным неотрицательным числом, то элемент длины для такого бесконечно малого смещения для данной метрической функции не определен. В неквадратичных пространствах аналогичная ситуация также возможна.

Пусть два бесконечно малых смещения сонаправлены, то есть

$$\delta x^i = a dx^i \,, \tag{13}$$

где $a > 0$ - действительное положительное число. Тогда подставив эти смещения в метрические функции, стоящие справа в формулах (7) - (10), получим

$$L(\delta x^1, ..., \delta x^n; x^1, ..., x^n) = aL(dx^1, ..., dx^n; x^1, ..., x^n) \,, \tag{14}$$

то есть рассматриваемые метрические функции являются положительно однородными первой степени по первым n аргументам, и если смещение dx измеримо, то и смещение δx измеримо, и наоборот. Это свойство, которое мы сохраним при переходе к неквадратичным геометриям, можно сформулировать иначе: длина суммы двух сонаправленных бесконечно малых смещений есть сумма их длин. Таким образом, задание метрической функции в общем случае вырезает в пространстве первых n аргументов некий конус (или конусы) бесконечно малых смещений вместе со всеми им сонаправленными векторами, для которых элемент длины определен. В квадратичных пространствах без дополнительных ограничений направления измеримых векторов в касательных пространствах, как и во многих неквадратичных пространствах, граница таких конусов измеримых векторов состоит из векторов, имеющих нулевую длину и носящих название *изотропных векторов* или *изотропных направлений*, а сама граница в таких случаях называется *изотропным конусом.* В физике изотропные направления обычно связывают с направлениями распространения электромагнитных волн и направлениями мировых линий элементарных частиц, не имеющих массы покоя и движущихся со скоростью света.

Если вектор dx измерим, то $L(dx;x)$ - расстояние от точки $M(x^1, x^2, ..., x^n)$ до точки $M'(x^1 + dx^1, x^2 + dx^2, ..., x^n + dx^n)$, поэтому при обобщении вида метрических функций следует сохранить свойство:

$$L(0, 0, ...0; x^1, x^2, ..., x^n) = 0\,, \tag{15}$$

которое выполняется для приведённых выше метрических функций квадратичных пространств и которое означает, что индикатриса не может проходить через центр центроаффинного касательного пространства. Для неквадратичных пространств подстановка в метрическую функцию нулевого смещения может приводить к неопределенности, поэтому нулевое смещение следует понимать как смещение $(\delta x^1, ..., \delta x^n)$ (13) при $a \to 0$ и условии, что для бесконечно малого смещения $(dx^1, ..., dx^n)$ элемент длины определен.

Частные производные

$$p_i \equiv \frac{\partial L(\xi;x)}{\partial \xi^i} \tag{16}$$

метрической функции по первым n аргументам образуют ковариантный тензор, называемый обобщённым импульсом. Обязательно существует хотя бы одна функциональная зависимость

$$\Phi(p_1, p_2, ..., p_n; x^1, x^2, ..., x^n) = 0\,, \tag{17}$$

так как частные производные (16) являются однородными функциями ξ нулевой степени, то есть зависят не более, чем от $(n-1)$-ой независимой величины, например, от отношений компонент вектора ξ, а число самих компонент p_i равно n. Будем предполагать всегда, что такая функциональная зависимость только одна. Эту единственную функциональную зависимость принято называть *тангенциальным уравнением индикатрисы*, а функцию $\Phi(p;x)$ в таком уравнении - функцией Финслера.

Запишем тангенциальные уравнения индикатрисы для метрических пространств, рассмотренных выше.

Евклидово пространство.

Метрическая функция в декартовых прямоугольных координатах n-мерного евклидового пространства записана в правой части формулы (7),

$$L(dx) = \sqrt{(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + ... + (dx^n)^2}\,. \tag{18}$$

Тогда компоненты обобщённого импульса определяются по формулам:

$$p_i = \frac{dx^i}{\sqrt{(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + ... + (dx^n)^2}} \,. \tag{19}$$

Очевидно, что они функционально зависимы,

$$p_1^2 + p_2^2 + ... + p_n^2 - 1 = 0\,, \tag{20}$$

и эта функциональная зависимость единственная, хотя функция Финслера при этом может иметь разный вид, например:

$$\Phi'(p) = p_1^2 + ... + p_n^2 - 1\,, \qquad \Phi''(p) = \sqrt{p_1^2 + ... + p_n^2} - 1\,. \tag{21}$$

Обе эти функции Финслера относятся к одной и той же евклидовой геометрии с метрической функцией (18).

Риманово пространство.

Метрическая функция n-мерного риманова пространства в произвольных координатах записана в правой части формулы (8),

$$L(dx; x) = \sqrt{g_{ij}(x^1, x^2, ..., x^n) dx^i dx^j}\,. \tag{22}$$

Компоненты обобщённого импульса определяются по формулам:

$$p_i = \frac{g_{ij}(x) dx^j}{\sqrt{g_{kl}(x) dx^k dx^l}}\,. \tag{23}$$

Если $det(g_{ij}(x)) \neq 0$, то можно построить тензор с двумя верхними индексами $g^{ij}(x)$, при этом компоненты обобщённого импульса связаны единственной функциональной зависимостью

$$g^{ij}(x) p_i p_j - 1 = 0\,. \tag{24}$$

Функция Финслера при этом может иметь разный вид, например:

$$\Phi'(p) = g^{ij}(x) p_i p_j - 1\,, \qquad \Phi''(p) = \sqrt{g^{ij}(x) p_i p_j} - 1\,. \tag{25}$$

Обе эти функции Финслера относятся к одной и той же римановой геометрии с метрической функцией (22).

Пространство Минковского.

Метрическая функция в специальных координатах четырёхмерного пространства Минковского записана в правой части формулы (9),

$$L(dx) = \sqrt{(dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2} \equiv \sqrt{\overset{o}{g}_{ij}\; dx^i dx^j}\,. \tag{26}$$

Тогда компоненты обобщённого импульса определяются по формулам:

$$p_i = \frac{\overset{o}{g}_{ij}\ dx^j}{\sqrt{\overset{o}{g}_{kl}\ dx^k dx^l}}\,. \tag{27}$$

Компоненты обобщённого импульса функционально зависимы,

$$p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 - 1 = 0\,, \tag{28}$$

и эта функциональная зависимость единственная, хотя функция Финслера при этом может иметь разный вид, например:

$$\Phi'(p) = p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 - 1,\ \Phi''(p) = \sqrt{p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2} - 1\,. \tag{29}$$

Обе эти функции Финслера относятся к одной и той же геометрии Минковского с метрической функцией (26).

Рассмотрим метрическую функцию, лишь числовым множителем mc, где m - масса покоя материальной частицы, а c - скорость света, отличающуюся от метрической функции (26) пространства Минковского,

$$L(dx) = mc\sqrt{(dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2}\,. \tag{30}$$

Такая метрическая функция, взятая со знаком минус, совпадает с элементом действия для свободной релятивистской частицы массой m, то есть действием между двумя бесконечно близкими событиями [11]. Компоненты обобщённого импульса в этом случае определяются по формулам:

$$p_i = mc\,\frac{\overset{o}{g}_{ij}\ dx^j}{\sqrt{\overset{o}{g}_{kl}\ dx^k dx^l}}\,. \tag{31}$$

Они функционально зависимы,

$$p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 - m^2c^2 = 0\,, \tag{32}$$

и эта функциональная зависимость единственная. В качестве функции Финслера можно взять, например, одну из функций:

$$\Phi'(p) = p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 - m^2c^2,\ \Phi''(p) = \sqrt{p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2} - mc\,. \tag{33}$$

Обе эти функции Финслера относятся к одной и той же геометрии с метрической функцией (30).

Псевдориманово пространство.

Для псевдориманово n-мерного пространства формально справедливы все формулы (22) - (25), если метрический тензор $g_{ij}(x)$ невырожден, то есть $det(g_{ij}(x)) \neq 0$.

Метрическое пространство будем называть *финслеровым*, если метрическая функция $L(\xi^1, ..., \xi^n; x^1, ..., x^n) \geq 0$ является положительно однородной первой степени по первым n аргументам и если

$$rang\left(\frac{\partial^2 L(\xi; x)}{\partial\xi^i\partial\xi^j}\right) = n - 1\,. \tag{34}$$

Именно условие (34) гарантирует единственность функциональной зависимости между компонентами p_i обобщённого импульса. Приведём пример метрического пространства y^1, y^2, y^3, y^4, которое не является финслеровым, так как между компонентами обобщённого импульса в этом пространстве имеются две функциональные зависимости, а не одна, то есть условие (34) не выполняется.

Пусть в пространстве y^1, y^2, y^3, y^4 определена метрическая функция $L(dy)$ следующего вида:

$$L(dy) = \sqrt{(dy^1)^2 - (dy^2)^2} + \sqrt{(dy^3)^2 - (dy^4)^2}\,.$$

Тогда компоненты обобщённого импульса определяются формулами:

$$p_1 = \frac{dy^1}{\sqrt{(dy^1)^2 - (dy^2)^2}}\,, \quad p_2 = -\frac{dy^2}{\sqrt{(dy^1)^2 - (dy^2)^2}}\,,$$

$$p_3 = \frac{dy^3}{\sqrt{(dy^3)^2 - (dy^4)^2}}\,, \quad p_4 = -\frac{dy^4}{\sqrt{(dy^3)^2 - (dy^4)^2}}$$

- и между ними имеют место две функциональные зависимости:

$$p_1^2 - p_2^2 - 1 = 0\,, \qquad p_3^2 - p_4^2 - 1 = 0\,.$$

Таким образом, метрическое пространство y^1, y^2, y^3, y^4 не является финслеровым, так как условие (34) не выполняется.

Важно подчеркнуть, что центроаффинное пространство $\mathcal{A}_n(M)$ в любой фиксированной точке M финслерова пространства является плоским метрическим пространством. Расстояние l_{21} между двумя точками $R_{(1)}\left(\xi^1_{(1)}, \xi^2_{(1)}, ..., \xi^n_{(1)}\right)$ и $R_{(2)}\left(\xi^1_{(2)}, \xi^2_{(2)}, ..., \xi^n_{(2)}\right)$ в нём определяется метрической функцией основного метрического пространства, последние n аргументов которой суть координаты фиксированной точки M:

$$l_{21} = L(\xi^1_{(2)} - \xi^1_{(1)}, ..., \xi^n_{(2)} - \xi^n_{(1)}; x^1, ..., x^n)\,. \tag{35}$$

Длина $|\xi|$ вектора или радиус-вектора ξ вычисляется соответственно по формуле

$$|\xi| = L(\xi^1, ..., \xi^n; x^1, ..., x^n)\,. \tag{36}$$

Длину радиус-вектора, а значит и расстояние между двумя точками центроаффинного пространства можно вычислить, не зная метрической функции, если в центроаффинном пространстве построена (задана) индикатриса. Вектор ξ определяет луч, выходящий из центра, если такой луч индикатрису не пересекает, то будем считать, что длина данного вектора и всех ему сонаправленных не определена, то есть они неизмеримы. Пусть вектор ξ измерим. Найдём точку пересечения этого луча с индикатрисой, тем самым построим радиус-вектор $\xi_{(ind)}$, который имеет смысл вектора единичной длины в данном направлении. Этот вектор сонаправлен вектору ξ, то есть существует такое действительное неотрицательное число l, что

$$\xi^i = l \cdot \xi^i_{(ind)}\,, \tag{37}$$

тем самым длина вектора ξ определяется геометрией основного пространства и выражается формулой

$$|\xi|_{fins} = l\,. \tag{38}$$

Если представить, что пространство $\mathcal{A}_n(M)$ является евклидовым, а координаты $\xi^1, \xi^2, ..., \xi^n$ - декартовы прямоугольные, то из формулы (37) следует,

$$|\xi|_{fins} = \frac{|\xi|_{ev}}{|\xi_{ind}|_{ev}}\,, \tag{39}$$

где ξ_{ind} - единичный вектор, сонаправленный вектору ξ, а $|\xi|_{ev}$, $|\xi_{ind}|_{ev}$ - длины векторов ξ, ξ_{ind} в евклидовом смысле.

Итак, римановы и псевдоримановы пространства с метрическими тензорами, удовлетворяющими условию

$$det\,(g_{ij}) \neq 0\,,$$

являются финслеровыми пространствами.

Приведем несколько примеров финслеровых пространств, которые не являются квадратичными.

В четырёхмерном пространстве Галилея (t, x, y, z), где t - время, а x, y, z - пространственные декартовы прямоугольные координаты, с материальной частицей массы m в потенциальном поле $U(t, x, y, z)$ можно определить следующую метрическую функцию:

$$L(dt, dx, dy, dz; x, y, z) = mc^2 dt - m \cdot \frac{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}{2dt} + U dt\,. \quad (40)$$

Она является положительно однородной первой степени по первым четырём аргументам и определяет в пространстве (t, x, y, z) неквадратичную метрическую геометрию. Так как потенциал $U(t, x, y, z)$ может в общем случае принимать отрицательные значения, конус бесконечно малых смещений, для которых элемент длины определен, лучше задать двумя неравенствами:

$$mc^2 (dt)^2 - m \cdot \frac{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}{2} > 0\,, \quad (41)$$

$$(mc^2 + U)(dt)^2 - m \cdot \frac{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}{2dt} > 0\,, \quad (42)$$

что позволяет гарантированно "включать" и "выключать" потенциал $U(t, x, y, z)$. Такое финслерово пространство соответствует классической механике одной нерелятивистской частицы: скорость частицы всегда много меньше скорости света, а потенциальная энергия много меньше внутренней энергии mc^2. Из этих условий классической нерелятивистской механики автоматически следует выполнение неравенств (41), (42).

Остановимся более подробно на связи финслеровой геометрии с метрической функцией (40), и лагранжевым формализмом для описания движения нерелятивистской частицы в потенциальном поле [10]. Будем считать, что $dt > 0$, вынесем dt в левой части формулы (40) из метрической функции, а в правой части за скобки и сократим левую и правую части на dt, в результате получим:

$$L(1, v_x, v_y, v_z; x, y, z) = mc^2 - m \cdot \frac{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}{2} + U\,, \quad (43)$$

то есть связь между функцией Лагранжа $L'(v_x, v_y, v_z; x, y, z)$ и метрической функцией L (40) определяется формулой

$$L'(v_x, v_y, v_z; x, y, z) = mc^2 - L(1, v_x, v_y, v_z; x, y, z)\,. \quad (44)$$

Функцию Лагранжа можно умножить на любое действительное число, в данном случае это - (-1), и прибавить полную производную по времени любой функции времени и координат (в данном случае это $mc^2 \cdot t$), при этом уравнения движения остаются теми же, поэтому в качестве функции Лагранжа при описании движения нерелятивистской частицы в потенциальном поле можно использовать метрическую функцию L (40) со специально выбранными аргументами, а именно, $L(1, v_x, v_y, v_z; x, y, z)$.

В четырёхмерном пространстве событий в x^0, x^1, x^2, x^3 с метрическим тензором $g_{ij}(x)$, который, как считается в ОТО, описывает гравитационное поле, и электромагнитным полем, описываемым 4-потенциалом $A_i(x)$, а также с частицей (материальной точкой) массой m и зарядом e, определена метрическая функция вида

$$L(dx; x) = cm\sqrt{g_{ij}(x)dx^i dx^j} + \frac{e}{c}A_i dx^i + Mc\, dx^0\,, \tag{45}$$

где $M > 0$ достаточно большая постоянная. Такая метрическая функция является положительно однородной функцией первой степени по первым четырём аргументам. Конус измеримых бесконечно малых смещений при достаточно большом значении постоянной $M > 0$ определяется неравенствами:

$$g_{ij}dx^i dx^j > 0\,, \qquad dx^0 > 0\,. \tag{46}$$

Тем самым такое четырёхмерное пространство событий является неквадратичным финслеровым пространством.

Метрическая функция Бервальда - Моора

$$L(dx^1, dx^2, dx^3, dx^4) = \sqrt[4]{dx^1 dx^2 dx^3 dx^4} \tag{47}$$

определяет в четырёхмерном пространстве x^1, x^2, x^3, x^4, которое будем обозначать H_4, плоскую финслерову геометрию, не являющуюся квадратичной. Измеримые бесконечно малые смещения определяются неравенством

$$dx^1 dx^2 dx^3 dx^4 > 0 \tag{48}$$

и заполняют 8 несвязанных конусов. Индикатриса определяется уравнением

$$\xi^1 \xi^2 \xi^3 \xi^4 = 1 \tag{49}$$

и состоит из 8-ми несвязанных полостей гиперболоида 4-го порядка. Если конус измеримых направлений определить неравенствами

$$dx^1 > 0\,, \qquad dx^2 > 0\,, \qquad dx^3 > 0\,, \qquad dx^4 > 0\,, \tag{50}$$

то мы получим уже другую плоскую финслерову геометрию с индикатрисой, состоящей из одной полости гиперболоида 4-го порядка, расположенной в конусе будущего.

Все финслеровы пространства делятся на два класса:
1) основное координатное пространство не содержит ни в какой системе координат ни одной координаты, которую можно было бы назвать физическим временем или аналогом физического времени, обычно такие пространства имеют невогнутую индикатрису;
2) найдется такая система координат и в ней выделенная координата, которая обладает качествами физического времени, обычно такие пространства имеют вогнутую индикатрису или, хотя бы часть индикатрисы является вогнутой гиперповерхностью.

Наглядным представителем первого класса является евклидова геометрия, а второго - псевдоевклидова геометрия.

3 Классическая механика

Каждому понятию классической механики соответствует некоторое понятие финслеровой геометрии. С одной стороны эти понятия схожи, а с другой между такими понятиями существуют более или менее серьёзные различия. Обычно таким парным понятиям в классической механике и финслеровой геометрии присваивают разные термины, например, ***действие*** *между двумя событиями*, принадлежащих одной и той же мировой линии, в классической механике и ***длина*** *отрезка кривой* в финслеровой геометрии. Можно говорить, что каждое финслерово пространство наделено классической механикой, так как в каждом финслеровом пространстве определены и работают все понятия и методы классической механики при соответствующей их трансформации к понятиям и методам финслеровой геометрии.

Пусть в основном координатном финслеровом пространстве задана кривая

$$x^i = x^i(\tau)\,, \qquad \tau \in [\tau_1, \tau_2]\,, \tag{51}$$

где τ - монотонно возрастающий параметр вдоль кривой, то есть $d\tau > 0$, тогда длина отрезка кривой между точками $x^i(\tau_1)$ и $x^i(\tau_2)$ вычисляется следующим образом:

$$l_{21} = \int\limits_{M_1}^{M_2} L(dx^1, ..., dx^n; x^1, ..., x^n) = \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} L(\dot{x}^1, ..., \dot{x}^n; x^1, ..., x^n) d\tau\,, \tag{52}$$

если все смещения dx вдоль кривой измеримы, и где

$$\dot{x}^i = \frac{dx^i}{d\tau} \tag{53}$$

- компоненты вектора, касательного к кривой, или компоненты вектора скорости по параметру τ.

Если основное координатное пространство описывает физическую систему, то кривая (51) суть мировая линия, а величина l_{21} (длина отрезка мировой линии) может рассматриваться с точностью до постоянного множителя и аддитивной добавки под интегралом вида $df(x^1, x^2, ..., x^n)$, где f - произвольная функция координат, как действие. Кривые, имеющие экстремальную длину при фиксированных начальной и конечной точках, удовлетворяют системе уравнений Лагранжа - Эйлера:

$$\delta l_{12} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d}{d\tau}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} - \frac{\partial L}{\partial x^i} = 0 \tag{54}$$

- и называются *экстремалями.* Экстремали могут быть и мировыми линиями, и траекториями движения в n-мерном пространстве событий, и геодезическими. Геодезические, конечно, являются экстремалями, но обратное верно не всегда. В несколько расширенном смысле будем иногда называть экстремали "геодезическими". Параметр τ вдоль кривой естественно назвать параметром эволюции, если пространство содержит временные переменные.

Итак, мировая линия физической системы есть экстремаль основного финслерова пространства. Принципу наименьшего действия, или стационарного действия классической механики соответствует в финслеровой геометрии принцип экстремальности отрезка кривой.

Введем обозначения

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\,, \qquad F_i = \frac{\partial L}{\partial x^i}\,. \tag{55}$$

Заметим, что величины p_i мы определяли (16) как частные производные функции $L(dx;x)$ по первым n аргументам dx^i,

$$p_i = \frac{\partial L(dx;x)}{\partial(dx^i)}\,, \tag{56}$$

а в (55) определяем как частные производные функции $L(\dot{x};x)$ по первым n аргументам $\dot{x}^i$. Это не приводит ни к ошибкам, ни к путанице в силу того, что метрическая функция является положительно однородной первой степени по первым n аргументам и параметр эволюции, как мы условились выше, монотонно возрастает, то есть $d\tau > 0$. В новых обозначениях уравнения Лагранжа - Эйлера принимают ньютоновский вид:

$$\frac{d}{d\tau}p_i = F_i \tag{57}$$

- то есть величины p_i естественно называть компонентами обобщённого импульса, что мы и делали выше, а F_i - компонентами обобщённой силы. Из формул (54), (55) следует: если метрическая функция и параметр эволюции являются скалярами, то обобщённый импульс p и обобщённая сила F - ковариантные тензоры, а уравнения движения Лагранжа - Эйлера (54) и уравнения движения Ньютона (57) имеют явную ковариантную запись.

Так как метрическая функция является однородной первой степени по первым n аргументам, то, во-первых,

$$\frac{\partial L(dx;x)}{\partial(dx^i)}\,dx^i = L(dx;x) \qquad \Rightarrow \qquad L(dx;x) = p_i \cdot dx^i\,, \tag{58}$$

или

$$\frac{\partial L(\dot{x};x)}{\partial \dot{x}^i}\,\dot{x}^i = L(\dot{x};x) \quad \Rightarrow \quad L(\dot{x}^1,...,\dot{x}^n;x^1,...,x^n) = p_i \cdot \dot{x}^i\,, \tag{59}$$

а во-вторых, компоненты обобщённого импульса - однородные функции нулевой степени по первым n аргументам, то есть n функций зависит от $(n-1)$ или меньше независимых комплексов, а значит, как уже отмечалось выше, между ними существует хотя бы одна функциональная зависимость. Из требования (34) следует, что такая зависимость единственная, её принято записывать следующим образом:

$$\Phi(p_1, p_2, ..., p_n; x^1, x^2, ..., x^n) = 0\,. \tag{60}$$

В финслеровой геометрии такая зависимость называется тангенциальным уравнением индикатрисы, а функцию $\Phi(p; x)$ принято называть функцией Финслера. Зависимость (60) имеет тот же смысл, что связь между обобщённой энергией (функцией Гамильтона) и компонентами обобщённого импульса в классической механике. Если известна функция $\Phi(p; x)$, но не известна соответствующая ей метрическая функция, то метрическую функцию $L(\xi^1, ..., \xi^n; x^1, ..., x^n)$ можно попытаться найти как решение дифференциального уравнения в частных производных

$$\Phi\left(\frac{\partial L}{\partial \xi^1}, ..., \frac{\partial L}{\partial \xi^n}; x^1, x^2, ..., x^n\right) = 0\,. \tag{61}$$

Оказывается [1], что метрическую функцию можно всегда однозначно восстановить по известной функции Финслера, разрешая систему неявных функциональных уравнений, не прибегая к дифференциальному уравнению в частных производных (61).

Рассмотрим длину l_{12} некоторой экстремали как функцию точки верхнего предела интегрирования при фиксированной нижней точке. Обозначим эту величину $S(x^1, ..., x^n)$, в классической механике её принято называть действием как функцией координат. Обобщённые импульсы, отнесённые к текущей точке на экстремали, также будем считать функциями точки основного пространства $p_i(x^1, ..., x^n)$. Из формул (52) и (58) следует, что

$$S(x^1, ..., x^n) = \int\limits_{M_1}^{M(x^1,...,x^n)} p_i dx^i\,. \tag{62}$$

Траектории движения материальных частиц и траектории эволюции физической системы с конечным числом степеней свободы в классической механике обладают замечательным свойством [10]:

$$p_i(x) = \frac{\partial S(x)}{\partial x^i}\,. \tag{63}$$

В финслеровой геометрии это же свойство формулируется как принадлежность экстремалей материальных частиц и физических систем с конечным числом степеней свободы некоторой *нормальной конгруэнции* *экстремалей* [1]. Подставим выражения (63) в тангенциальное уравнение индикатрисы (60), получим нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка относительно одной неизвестной функции $S(x)$,

$$\Phi\left(\frac{\partial S}{\partial x^i}, \frac{\partial S}{\partial x^i}, ..., \frac{\partial S}{\partial x^i}; x^1, x^2, ..., x^n\right) = 0\,, \tag{64}$$

решением которого является функция $S(x^1, ..., x^n)$ (действие, как функция координат) и которое в классической механике называется уравнением Гамильтона - Якоби. В финслеровой геометрии всякая нормальная конгруэнция экстремалей определяется функцией $S(x)$, которая должна удовлетворять нелинейному дифференциальному уравнению в частных производных (64) [1].

Рассмотрим четырёхмерное финслерово пространство, которое соответствует одной нерелятивистской частице, движущейся в потенциальном поле $U(x, y, z)$, независящим от времени, с метрической функцией (40). Для удобства будем использовать в данной случае двойные обозначения t, $x^1 \equiv x$, $x^2 \equiv y$, $x^3 \equiv z$, которые позволяют обозначать через p_t компоненту импульса, соответствующую координате t (времени), а через $p_1 \equiv p_x$, $p_2 \equiv p_y$, $p_3 \equiv p_z$, компоненты импульса, соответствующие координатам x^1, x^2, x^3. Тогда, используя формулу (56), имеем:

$$p_t = mc^2 + m \cdot \frac{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}{2(dt)^2} + U(x, y, z)\,, \tag{65}$$

$$p_\alpha = -m \cdot \frac{dx^\alpha}{dt}\,. \tag{66}$$

Компонента импульса p_t - это полная энергия частицы в потенциальном поле вместе с её внутренней энергией mc^2. Компоненты импульса p_α отличаются от принятых в классической механике лишь знаком.

Выберем в качестве параметра эволюции время. Тогда в качестве функции Лагранжа можно использовать метрическую функцию $L(dt, dx, dy, dz; x, y, z)$, но с другими первыми четырьмя аргументами

$$L(1, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}; x, y, z) = mc^2 - m \cdot \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - \dot{z}^2}{2} + U(x, y, z)\,. \tag{67}$$

В этом случае уравнения движения Лагранжа классической механике запишутся следующим образом:

$$\frac{d}{dt}\, p_\alpha = \frac{\partial U}{\partial x^\alpha}\,, \tag{68}$$

или

$$m\ddot{x}^{\alpha} = -\frac{\partial U}{\partial x^{\alpha}}\,. \tag{69}$$

Это обычные уравнения движения Ньютона для частицы массой m в потенциальном поле $U(x, y, z)$.

Исключая из четырёх соотношений (65) и (66) компоненты скорости $\dot{x}^{\alpha}$, приходим к тангенциальному уравнению индикатрисы:

$$p_t - \left\{ mc^2 + \frac{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}{2m} + U \right\} = 0\,. \tag{70}$$

Функцию, стоящую в фигурных скобках, принято называть в классической механике функцией Гамильтона и обозначать

$$H(p_1, p_2, p_3; x^1, x^2, x^3) = mc^2 + \frac{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}{2m} + U\,. \tag{71}$$

Тогда тангенциальное уравнение индикатрисы запишется следующим образом:

$$p_t - H(p_1, p_2, p_3; x^1, x^2, x^3) = 0\,. \tag{72}$$

Для данной физической системы уравнение Гамильтона - Якоби имеет вид

$$\frac{\partial S}{\partial t} - \left\{ mc^2 + \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2 \right] + U \right\} = 0\,. \tag{73}$$

Так как тангенциальное уравнение (70) не зависит от времени явно, то не зависит и гамильтониан (71). Система консервативна, полная энергия сохраняется во времени, то есть $p_t = E = const$; поэтому зависимость действия от времени сводится к слагаемому $(E \cdot t)$:

$$S(t, x, y, z) = S_0(x, y, z) + E \cdot t\,. \tag{74}$$

Подставив это выражение для действия в (73), получим для укороченного действия $S_0(x, y, z)$ уравнение Гамильтона - Якоби в виде

$$mc^2 + \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S_0}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S_0}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S_0}{\partial z}\right)^2 \right] + U(x, y, z) = E\,. \tag{75}$$

Заметим, что формулы (73) и (74) отличаются от общепринятых [10] знаком между двумя аддитивными членами, это связано с тем, что в данном геометрическом подходе

$$\frac{\partial S}{\partial t} = E > 0\,, \tag{76}$$

где $E > 0$ - полная энергия системы.

4 Канонические уравнения

Для определения финслеровой геометрии в основном координатном пространстве $x^1, x^2, ..., x^n$ надо задать либо метрическую функцию $L(dx; x)$, либо тангенциальное уравнение индикатрисы:

$$\Phi(p_1, p_2, ..., p_n; x^1, x^2, ..., x^n) = 0\,. \tag{77}$$

Кривая (зададим её параметрически

$$x^i = x^i(\tau)\,, \qquad \tau \in [\tau_1, \tau_2]\,, \tag{78}$$

где τ - монотонно возрастающий параметр вдоль кривой) только тогда будет экстремалью, когда функциональная зависимость, зафиксированная в тангенциальном уравнении индикатрисы, не будет нарушаться, то есть

$$\frac{d}{d\tau}\,\Phi(p_1, p_2, ..., p_n; x^1, x^2, ..., x^n) = 0\,, \tag{79}$$

или

$$\frac{\partial\Phi}{\partial p_i}\,\dot{p}_i + \frac{\partial\Phi}{\partial x^i}\,\dot{x}^i = 0\,. \tag{80}$$

Если

$$\dot{x}^i = \frac{\partial\Phi}{\partial p_i}\cdot\lambda(p;x)\,, \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial\Phi}{\partial x^i}\cdot\lambda(p;x)\,, \tag{81}$$

где $\lambda(p;x) \neq 0, \pm\infty$ - произвольная функция p и x, то вдоль таких кривых выполняется условие (79), и всегда выполняется соотношение (77), если этому соотношению удовлетворяют начальные значения $x^i(\tau_1)$, $p_i(\tau_1)$.

Уравнения (81) можно получить математически строго, если задачу на экстремум функционала (52) сформулировать несколько иначе. Так как метрическая функция является однородной первой степени по первым n аргументам, то

$$L(\dot{x}; x) = p_i \dot{x}^i\,, \tag{82}$$

поэтому функционал (52) принимает вид

$$l_{12} = \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} p_i \dot{x}^i\, d\tau \tag{83}$$

при условии выполнения (77). То есть имеет место задача на условный экстремум функционала, для решения которой следует составить новый функционал [5], [8]

$$\check{l}_{12} = \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} \left[p_i \dot{x}^i - \check{\lambda}(p;x)\Phi(p;x) \right] \, d\tau \tag{84}$$

и именно для него решать задачу на экстремум для $2n$ неизвестных функций $x^i(\tau)$ и $p_i(\tau)$ при нулевых вариациях кривой (78) на концах отрезка, то есть

$$\delta x^i(\tau)\Big|_{\tau=\tau_1} = 0\,, \qquad \delta x^i(\tau)\Big|_{\tau=\tau_2} = 0\,, \tag{85}$$

причём функцию $\check{\lambda}(p;x)$ следует подобрать так, чтобы выполнялась функциональная зависимость (77). Из требования экстремальности функционала (84)

$$\delta \check{l}_{12} = 0$$

с учётом того, что

$$\delta \check{l}_{12} = p_1 \delta x^i \Bigg|_{\tau_1}^{\tau_2} + \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} \left[-\dot{p}_i - \frac{\partial(\check{\lambda}\Phi)}{\partial x^i} \right] \delta x^i \, d\tau + \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} \left[\dot{x}^i - \frac{\partial(\check{\lambda}\Phi)}{\partial p_i} \right] \delta p_i \, d\tau\,,$$

и учётом условий (85), получаем уравнения Эйлера - Лагранжа:

$$\dot{x}^i = \frac{\partial(\check{\lambda}\Phi)}{\partial p_i}\,, \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial(\check{\lambda}\Phi)}{\partial x^i}\,. \tag{86}$$

Выберем $\check{\lambda} \equiv \lambda$ и учтём условие (77), тогда полученные уравнения совпадают с уравнениями (81). Напомним: для выполнения функциональной зависимости (77) необходимо и достаточно, чтобы эта функциональная зависимость выполнялась только в начальной точке экстремали.

Итак, доказано, что уравнения (81) являются уравнениями для определения экстремалей в финслеровом пространстве.

Произвол в выборе функции $\lambda(p;x)$ связан лишь с возможностью различной параметризации экстремалей.

Уравнения (81) в классической механике называются *каноническими уравнениями* движения [10]. Можно утверждать, что функция Финслера $\Phi(p;x)$ играет ту же (аналогичную) роль в финслеровой геометрии, что и функция Гамильтона в классической механике. Если заменить $\Phi \to H$ и положить $\lambda(p;x) \equiv 1$, то уравнения (81) совпадают по виду с уравнениями Гамильтона классической механики, но в финслеровом подходе к классической механике время становится одной из координат, что приводит к возможности ковариантной записи уравнений движения.

В классической механике, если известна функция Лагранжа, функция Гамильтона получается однозначно. В финслеровой геометрии при заданной метрической функции тангенциальное уравнение индикатрисы можно записать во многих эквивалентных формах, что приводит к разным функциям Финслера. При этом экстремали останутся теми же, изменится лишь их параметризация, как если бы произошла замена параметра эволюции $\tau \to \tau'(\tau)$ своя для каждой мировой линии. Этот произвол аналогичен выбору функции $\lambda(p;x) \neq 0$ в канонических уравнениях (81), что также можно рассматривать как перепараметризацию экстремалей.

Если известно действие $S(x)$ как функция координат, то с учётом (63) нахождение экстремалей сводится к решению всего n дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\dot{x}^i = \left.\frac{\partial \Phi}{\partial p_i}\right|_{p_j=\frac{\partial S}{\partial x^j}} \cdot \lambda(x)\,, \tag{87}$$

где $\lambda(x) \neq 0, \pm\infty$ - некоторая функция. Если же исключить из этих уравнений параметр эволюции, то останется система из $(n{-}1)$-го дифференциального уравнения первого порядка. Для этого следует разделить все уравнения (87) с индексами $i = 1, 2, ..., n-1$ на первое с индексом $i = 0$, если x^0 - временна́я или аналогичная временно́й координата, и учесть, что

$$\frac{\dot{x}^\alpha}{\dot{x}^0} = \frac{dx^\alpha}{dx^0}, \qquad \alpha = 1, 2, ..., n-1. \tag{88}$$

Функция $\lambda(x)$ исчезает из системы уравнений так же, как и параметр эволюции:

$$\frac{dx^\alpha}{dx^0} = \left.\frac{\dfrac{\partial \Phi}{dp_\alpha}}{\dfrac{\partial \Phi}{dp_0}}\right|_{p_j=\frac{\partial S}{\partial x^j}}\,. \tag{89}$$

Пусть $f(p;x)$, $g(p;x)$, $h(p;x)$ - некоторые функции обобщённых импульсов p и обобщённых координат x. Найдём, как изменяются такие величины вдоль экстремалей, то есть найдем их производную по параметру эволюции:

$$\frac{df}{d\tau} = \frac{\partial f}{\partial p_i}\,\dot{p}_i + \frac{\partial f}{\partial x^i}\,\dot{x}^i\,. \tag{90}$$

Подставляя $\dot{p}_i$ и $\dot{x}^i$ из канонических уравнений (81), получим

$$\frac{df}{d\tau} = \left(-\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial \Phi}{\partial x^i} + \frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial \Phi}{\partial p_i}\right)\lambda(p;x)\,. \tag{91}$$

Скобками Пуассона $\{g, f\}$ произвольных функций $f(p;x)$, $g(p;x)$ называется выражение

$$\{g, f\} = \frac{\partial g}{\partial p_i}\frac{\partial f}{\partial x^i} - \frac{\partial g}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial p_i}\,. \tag{92}$$

Тогда с помощью скобок Пуассона производную $\dfrac{df}{d\tau}$ величины $f(p;x)$ по параметру эволюции τ можно записать следующим образом:

$$\frac{df}{d\tau} = \{\Phi, f\}\cdot\lambda(p;x)\,. \tag{93}$$

Функции координат и компонент обобщённого импульса, которые остаются постоянными при движении физической системы, называются *интегралами движения.*

Для того чтобы величина f была интегралом движения, необходимо и достаточно выполнение условия

$$\{\Phi, f\} = 0\,. \tag{94}$$

Это следует из формулы (93), так как $\lambda(p;x) \neq 0$.

Очевидно, что

$$\{f, f\} = 0\,,$$

в частности

$$\{\Phi, \Phi\} = 0\,,$$

то есть функция Финслера всегда является интегралом движения.

Перечислим ряд простейших свойств скобок Пуассона, которые следуют непосредственно из определения.

Если переставить функции в скобках Пуассона, то скобки меняют знак:

$$\{g, f\} = -\{f, g\}\,. \tag{95}$$

Если одна из величин в скобках Пуассона - число, например, a, то скобка равна нулю:

$$\{a, f\} = 0\,. \tag{96}$$

Скобки Пуассона обладают линейным свойством по каждому из аргументов; например, для первого аргумента имеем

$$\{ag + bh, f\} = a\{g, f\} + b\{h, f\}\,, \tag{97}$$

где a и b - числа.

Если один из аргументов скобок Пуассона является произведением двух функций, то имеет место следующая формула

$$\{hg, f\} = h\{g, f\} + \{h, f\}g\,. \tag{98}$$

Если одна из функций в скобках Пуассона совпадает с координатой или компонентой обобщённого импульса, то скобки сводятся к частной производной соответственно по импульсу или координате:

$$\{f, x^i\} = \frac{\partial f}{\partial p_i}\,, \qquad \{p_i, f\} = \frac{\partial f}{\partial x^i}\,. \tag{99}$$

Важное значение имеют скобки Пуассона, когда оба аргумента являются координатой или компонентой обобщённого импульса:

$$\{x^i, x^j\} = 0\,, \qquad \{p_i, p_j\} = 0\,, \qquad \{p_i, x^j\} = \delta_i^j\,. \tag{100}$$

Для скобок Пуассона справедливо тождество Якоби:

$$\{h, \{g, f\}\} + \{g, \{f, h\}\} + \{f, \{h, g\}\} = 0\,. \tag{101}$$

Пусть функции $f(p; x; u, ..., v)$ и $g(p; x; u, ..., v)$ зависят ещё и от некоторого числа независимых параметров $u, ..., v$, ни один из которых, конечно, не является параметром эволюции, обозначим через z любой аргумент этих функций: p_i, x^j или $u, ..., v$. Тогда справедлива следующая формула:

$$\frac{\partial}{\partial z}\{g, f\} = \left\{\frac{\partial g}{\partial z}, f\right\} + \left\{g, \frac{\partial f}{\partial z}\right\}\,. \tag{102}$$

Вычислим производную от $\{g, f\}$ по параметру эволюции. В этом случае формула (102) не применима, но согласно (93) имеем

$$\frac{d}{d\tau}\{g, f\} = \{\Phi, \{g, f\}\}\lambda\,. \tag{103}$$

Воспользуемся тождеством Якоби, тогда

$$\frac{d}{d\tau}\{g, f\} = \{\{\Phi, g\}, f\}\lambda + \{g, \{\Phi, f\}\}\lambda\,, \tag{104}$$

или

$$\frac{d}{d\tau}\{g,f\} = \left\{\frac{1}{\lambda}\frac{dg}{d\tau},\, f\right\}\lambda + \left\{g\,,\frac{1}{\lambda}\frac{df}{d\tau}\right\}\lambda\,. \tag{105}$$

Из формулы (105) следует теорема Пуассона.

***Теорема Пуассона*:** если $f(p;x)$ и $g(p;x)$ - два интеграла движения, то и их скобки Пуассона также являются интегралом движения, то есть вдоль мировой линии

$$\{g,f\} = const\,. \tag{106}$$

Скобки Пуассона от двух интегралов движения могут дать новый (функционально независимый от первых) интеграл движения, но далеко не всегда. Число функционально независимых интегралов движения не может быть больше $(2n-1)$. Если бы число функционально независимых интегралов движения оказалось равным $2n$, то, приравняв их к постоянным и разрешив относительно $p_1, p_2, ..., p_n$, $x^1, x^2, ..., x^n$, мы получили бы тривиальный результат: $p_i = const$, $x^j = const$; то есть любая функция $f(p;x)$ являлась бы интегралом движения и время в том числе.

В основном координатном пространстве можно переходить от одних координат к другим (1), и при этом мы остаёмся в том же самом координатном пространстве с той же самой финслеровой геометрией. Физическая система, которая описывается этим координатным пространством с метрической функцией в нём, также не изменяется. При этом уравнениями экстремалей являются уравнения Эйлера - Лагранжа (54) или каноническими уравнениями (81). В последние формально координаты и импульсы входят равноправно, хотя и разделяются на два подмножества, поэтому их принято называть *канонически сопряжёнными величинами*. При решении системы канонических уравнений (81) никто не запрещает вместо неизвестных функций $x^i(\tau)$ и $p_j(\tau)$ ввести другие неизвестные функции

$$X^i = X^i(x^1, ..., x^n; p_1, ..., p_n), \quad P_i = P_i(x^1, ..., x^n; p_1, ..., p_n), \tag{107}$$

но при этом совсем не обязательно, что $X^i(\tau)$ и $P_j(\tau)$ будут обобщёнными координатами и обобщёнными импульсами хоть какого-то финслерова пространства, пусть даже другого. В то же время наша физическая система не изменилась. Если всё же $X^i(\tau)$ и $P_j(\tau)$ будут обобщёнными координатами и обобщёнными импульсами какого-то финслерова пространства, то экстремали будут решениями системы канонических уравнений с заменой

$$x^i,\, p_i,\, \Phi(p;x),\, \lambda(p;x) \qquad \rightarrow \qquad X^i,\, P_i,\, \bar{\Phi}(P;X),\, \bar{\lambda}(X;P)\,. \tag{108}$$

Итак, если мы не хотим выходить за рамки множества финслеровых пространств необходимо (но не достаточно) ограничиться такими преобразованиями (107), которые переводят систему канонических уравнений в систему канонических уравнений. Естественно такие преобразования назвать каноническими.

Среди множества канонических преобразований существуют такие, которые переводят финслерово пространство с одной метрической функцией в другое финслерово пространство с другой метрической функцией, при этом физическая система остаётся той же. Таким образом, одной и той же физической системе соответствует, вообще говоря, много качественно различных финслеровых геометрий.

5 Мировая функция

Представим себе, что пространство событий x^0, x^1, x^2, x^3 (или его некоторая область) заполнено материальными точками, которые как-то взаимодействуют между собой, но не распадаются и не сливаются, не объединяются. Рассмотрим эволюцию такого пространства событий в бесконечно близкое состояние. В этом случае каждая точка (x^0, x^1, x^2, x^3) перейдёт в бесконечно близкую точку $(x^0 + dx^0, x^1 + dx^1, x^2 + dx^2, x^3 + dx^3)$, и всё пространство-время (или некоторая его область) будет зачерчено мировыми линиями, причём через каждую точку проходит одна и только одна мировая линия.

Если через каждую точку пространств (или некоторую его область) проходит одна и только одна мировая линия, говорят, что в пространстве (в этой области пространства) задана *конгруэнция мировых линий.*

Если известна конгруэнция мировых линий, то известно, по каким траекториям движутся все материальные объекты в пространстве-времени, а значит известно и поле скоростей в каждой точке. Следует сразу отметить два факта. Во-первых, конгруэнция мировых линий, соответствующая физическому Миру, не может быть произвольной, а должна удовлетворять некоторым требованиям. Во-вторых, для описания физического Мира не достаточно знания траекторий движения всех материальных точек, необходимо ещё знание хотя энергетических характеристик материальных объектов, то есть, например, поля обобщённых импульсов.

Пара векторных полей {поле скоростей; поле импульсов} может быть заменена на пару скалярных функций {функция Финслера; действие как функция координат} $\equiv \{\Phi(p;x); S(x)\}$, функция $S(x)$ при этом удовлетворяет дифференциальному уравнению (1.3.14) и в финслеровой геометрии имеет смысл длины отрезка мировой линии от некоторой фиксированной точки этой мировой линии до точки $M(x)$, принадлежащей той же мировой линии. Напомним, как поля $\{\dot{x}(x); p(x)\}$ выражаются через поля $\{\Phi(p;x); S(x)\}$:

$$\dot{x}^i = \left.\frac{\partial \Phi}{\partial p_i}\right|_{p_j=\frac{\partial S}{\partial x^j}} \cdot \lambda(x)\,, \qquad p_j = \frac{\partial S}{\partial x^j}\,. \tag{109}$$

Конгруэнция мировых линий является, конечно, конгруэнцией экстремалей.

Конгруэнции экстремалей, которые могут быть получены согласно формулам (109), называются *нормальными* [1].

Всегда будем предполагать, что конгруэнция мировых линий любой физической системы является нормальной в рассматриваемой области изменения координат.

Итак, пара полей $\{\dot{x}(x); p(x)\}$ определяет нам физический Мир в некоторой координатной области, если в этой области поле скоростей задаёт *нормальную* конгруэнцию мировых линий.

Если физический Мир известен, то функция $S(x)$ определяется с точностью до постоянной. Существует ли какой-нибудь произвол при этом в выборе финслеровой геометрии, или она определяется физическим Миром однозначно?

Покажем, что одному и тому же физическому Миру могут соответствовать больше, чем одна финслерова геометрия.

Рассмотрим две геометрии, первая из которых четырёхмерная риманова (8) или псевдориманова геометрия (10) ОТО. В таких геометриях тангенциальное уравнение индикатрисы имеет вид

$$g^{ij}(x)p_ip_j - 1 = 0\,. \tag{110}$$

В качестве второй геометрии рассмотрим геометрию, конформно связанную с геометрией (47), запишем её метрическую функцию ковариантно в изотропном базисе:

$$L(dx;x) = \kappa(x)\sqrt[4]{g_{ijkl}dx^idx^jdx^kdx^l}\,, \tag{111}$$

где $\kappa(x) > 0$ - некоторая скалярная функция, а числовой тензор

$$g_{ijkl} = \begin{cases} \dfrac{1}{24}\,, & \text{если все индексы разные}\,, \\ \\ 0\,, & \text{во всех остальных случаях}\,. \end{cases} \tag{112}$$

Тогда тангенциальное уравнение индикатрисы можно записать следующим образом:

$$g^{ijkl}p_ip_jp_kp_l - \left(\frac{\kappa}{4}\right)^4 = 0\,, \tag{113}$$

где числовой тензор

$$g^{ijkl} = \begin{cases} \dfrac{1}{24}\,, & \text{если все индексы разные}\,, \\ \\ 0\,, & \text{во всех остальных случаях}\,, \end{cases} \tag{114}$$

то есть в изотропном базисе

$$(g^{ijkl}) = (g_{ijkl})\,.$$

Пусть $S(x)$ - некоторая скалярная функция, удовлетворяющая условию

$$g^{ijkl}\frac{\partial S}{\partial x^i}\frac{\partial S}{\partial x^j}\frac{\partial S}{\partial x^k}\frac{\partial S}{\partial x^l} \equiv \frac{\partial S}{\partial x^1}\frac{\partial S}{\partial x^2}\frac{\partial S}{\partial x^3}\frac{\partial S}{\partial x^4} > 0\,. \tag{115}$$

Зададим коэффициент растяжения-сжатия формулой:

$$\kappa(x) \equiv 4\sqrt[4]{g^{ijkl}\frac{\partial S}{\partial x^i}\frac{\partial S}{\partial x^j}\frac{\partial S}{\partial x^k}\frac{\partial S}{\partial x^l}}\;. \tag{116}$$

В этом случае функция $S(x)$ автоматически удовлетворяет дифференциальному уравнению (1.3.14), записанному для финслеровой геометрии (111), и определяет нормальную конгруэнцию мировых линий (109):

$$\dot{x}^i = g^{ijkl}\frac{\partial S}{\partial x^j}\frac{\partial S}{\partial x^k}\frac{\partial S}{\partial x^l}\,\lambda(x)\,, \qquad p_j = \frac{\partial S}{\partial x^j}\,, \tag{117}$$

где $\lambda(x) \neq 0$ - некоторая функция.

Определим дважды контравариантный тензор $g^{ij}(x)$ следующей формулой:

$$g^{ij}(x) = g^{ijkl}\frac{\partial S}{\partial x^k}\frac{\partial S}{\partial x^l}\,. \tag{118}$$

Так как его определитель

$$det(g^{ij}(x)) = -\frac{3}{12^4}\left(\frac{\partial S}{\partial x^1}\frac{\partial S}{\partial x^2}\frac{\partial S}{\partial x^3}\frac{\partial S}{\partial x^4}\right)^2 \neq 0 \tag{119}$$

не равен нулю, в силу условия (115), то можно однозначно построить дважды ковариантный тензор $g_{ij}(x)$ и рассматривать его как метрический тензор риманова или псевдориманова пространства. Рассмотрим геометрию, конформно связанную с такой геометрией, то есть геометрию с элементом длины

$$ds = \left(\frac{\kappa(x)}{4}\right)^2\sqrt{g_{ij}(x)dx^i dx^j}\,, \tag{120}$$

где $\kappa(x)$ определяется формулой (116). Это риманова или псевдориманова геометрия с метрическим тензором

$$G_{ij} = \left(\frac{\kappa(x)}{4}\right)^4 g_{ij}(x)\,, \tag{121}$$

и элементом длины

$$ds' = \sqrt{G_{ij}(x)dx^i dx^j}\,.$$

В этой геометрии тангенциальное уравнение индикатрисы имеет вид

$$g^{ij}(x)p_i p_j - \left(\frac{\kappa(x)}{4}\right)^4 = 0\,. \tag{122}$$

Запишем в этой геометрии уравнение (64) для действия $\check{S}(x)$ как функции координат

$$g^{ij}(x)\frac{\partial \check{S}}{\partial x^i}\frac{\partial \check{S}}{\partial x^j} - \left(\frac{\kappa}{4}\right)^4 = 0\,, \tag{123}$$

или, учитывая (118), получим

$$g^{ijkl}(x)\frac{\partial \check{S}}{\partial x^i}\frac{\partial \check{S}}{\partial x^j}\frac{\partial S}{\partial x^k}\frac{\partial S}{\partial x^l} - \left(\frac{\kappa}{4}\right)^4 = 0\,. \tag{124}$$

Из (116) следует, что одним из решений этого уравнения является функция $\check{S}(x) \equiv S(x)$. Запишем уравнения для мировых линий в геометрии (120):

$$\dot{x}^i = g^{ij}(x)\frac{\partial S}{\partial x^j}\cdot\check{\lambda}(x)\,. \tag{125}$$

Учитывая (118), получим (117), если заменить $\check{\lambda}$ на λ.

Таким образом, в одной и той же координатной системе имеют место две качественно разные геометрии, которые описывают один и тот же физический Мир $\{\dot{x}(x); p(x)\}$.

Выше упоминалось, что конкретной физической системе соответствуют бесконечное множество качественно различных финслеровых геометрий, которые связаны между собой каноническими преобразованиями, то есть преобразованиями специального вида в фазовом пространстве p, x.

Теперь мы доказали более сильное утверждение: в одном и том же координатном пространстве существует класс финслеровых геометрий, которые имеют общую конгруэнцию мировых линий вместе с общим полем обобщённых импульсов.

Итак, одному и тому же физическому Миру соответствует не одна финслерова геометрия, а некоторый класс финслеровых геометрий.

Очевидно, что функция $S(x)$ наряду с требованиями типа (115) должна удовлетворять некому фундаментальному уравнению поля одному и тому же для всего класса финслеровых геометрий, которые соответствуют данному физическому Миру, или данной замкнутой физической системе. Такую функцию $S(x)$ будем называть *Мировой функцией* и обозначать $S_W(x)$.

Отметим также, что из выше изложенного просматривается связь между Мировой функцией $S_W(x)$ и коэффициентом растяжения сжатия $\kappa(x)$, который возникает при переходе от некого исходного финслерова пространства к конформно связанному с ним финслерову пространству.

6 Теория поля

Наиболее удобный способ получения уравнений поля как в классической теории [11], так и в теории квантованных полей [12] связан с понятиями лагранжиана, действия, а также с принципом стационарного (или наименьшего) действия, то есть с принципом экстремума действия. При этом однозначно устанавливается связь [7] между непрерывными преобразованиями, относительно которых инвариантно действие, и физическими законами сохранения, которые могут быть проверены экспериментально.

Если x^0, x^1, x^2, x^3 - координаты, $f(x) \equiv f(x^0, x^1, x^2, x^3)$ - скалярное поле в пространстве Минковского, а

$$\mathfrak{L} \equiv \mathfrak{L}\left(f(x); \frac{\partial f}{\partial x^0}, \frac{\partial f}{\partial x^1}, \frac{\partial f}{\partial x^2}, \frac{\partial f}{\partial x^3} \right) , \tag{126}$$

- лагранжиан, то интеграл от лагранжиана по некоторому четырехмерному объему V пространства-времени,

$$I[f] = \int\limits_V^4 \mathfrak{L}\ dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 \tag{127}$$

принято называть действием. Считая, что вариации функции поля δf равны нулю на границе объема интегрирования, и требуя экстремальности действия, то есть

$$\delta I[f] = 0\,, \tag{128}$$

с помощью известной математической процедуры получим уравнение Лагранжа - Эйлера, которое и есть уравнение поля:

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \left(\frac{\partial f}{\partial x^i} \right)} - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial f} = 0\,. \tag{129}$$

Обычно лагранжиан подбирают так, чтобы получить известные уравнения поля, или строят, обеспечивая заданную симметрию и выполнение некоторых дополнительных требований, например, чтобы получались линейные дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка. Построение качественно новых лагранжианов, описывающих новые (особенно нелинейные) физические процессы является, в известном смысле, искусством.

Функционалу (127) можно придать чисто геометрический смысл и считать его не интегралом в пространстве Минковского от лагранжиана $\mathfrak{L}$, а объемом, если $\mathfrak{L} > 0$, в некотором более сложном пространстве, в котором элемент объема имеет вид:

$$dV = \mathfrak{L}\ dx^0 dx^1 dx^2 dx^3\,. \tag{130}$$

Тогда уравнения поля получаются из требования экстремальности любого объёма в этом новом пространстве, которое будем считать финслеровым. Это утверждение относится и к полю Мировой функции $S_W(x)$.

Рассмотрим финслерово пространство $x^1, x^2, ..., x^n$ с метрической функцией

$$L(dx; x) \equiv L(dx^1, dx^2, ..., dx^n; x^1, x^2, ..., x^n)\,. \tag{131}$$

В таком пространстве элемент длины ds по определению есть

$$ds = L(dx^1, dx^2, ..., dx^n; x^1, x^2, ..., x^n)\,. \tag{132}$$

Более наглядно метрические свойства финслерова пространства можно описать с помощью понятия индикатрисы, которая определяется в каждой точке $M(x^1, x^2, ..., x^n)$ основного пространства в соответствующем касательном центроаффинном пространстве $\xi^1, \xi^2, ..., \xi^n$ как геометрическое место концом единичных радиус-векторов $\xi_{(ind)}$. Такая гиперповерхность описывается уравнением

$$L(\xi^1, \xi^2, ..., \xi^n; x^1, x^2, ..., x^n) = 1\,. \tag{133}$$

Задание системы индикатрис в каждой точке основного пространства, или, что тоже самое, задание множеств единичных векторов, полностью определяет финслерову геометрию. Для того, чтобы вычислить длину вектора $(dx^1, dx^2, ..., dx^n)$, надо найти сонаправленный вектору dx единичный вектор $\xi_{(ind)}$, тогда числовой коэффициент ds в формуле

$$dx^i = ds \cdot \xi^i_{(ind)} \tag{134}$$

и есть длина вектора dx. Из этой формулы следует, что элемент длины

$$ds = \frac{|dx|_{ev}}{|\xi_{(ind)}|_{ev}}\,, \tag{135}$$

где $|dx|_{ev}$, $|\xi|_{ev}$ - длины векторов $(dx^1, dx^2, ..., dx^n)$ и $(\xi^1, \xi^2, ..., \xi^n)$, вычисляемые так, как если бы касательное центроаффинное пространство было бы евклидовым, а система координат в нём - декартова прямоугольная.

Если при выполнении последних предположений можно вычислить *объем индикатрисы*, то есть n-мерный объем, который зачерчивает единичный вектор $\xi_{(ind)}$ в касательном пространстве $\xi^1, \xi^2, ..., \xi^n$, пробегая всю индикатрису, то в финслеровом пространстве можно аналогично (135) определить элемент объема dV по формуле [21]

$$dV = const \cdot \frac{dx^1 dx^2 ... dx^n}{(V_{ind})_{ev}}\,, \tag{136}$$

где $(V_{ind})_{ev}$ - объем индикатрисы, вычисленный в предположении, что касательное центроаффинное пространство евклидово, а координаты декартовы прямоугольные. Таким образом определенный элемент объема инвариантен относительно преобразования координат.

Докажем последнее утверждение. Для этого рассмотрим переход от произвольных криволинейных координат $x^{1'}, x^{2'}, ..., x^{n'}$ к другим произвольным криволинейным координатам $x^1, x^2, ..., x^n$. Тогда согласно известным формулам [9] преобразования элемента объема имеем

$$dx^{1'}dx^{2'}...dx^{n'} = \left| \frac{D(x^{1'}, x^{2'}, ..., x^{n'})}{D(x^1,\, x^2,\, ...\, ,\, x^n)} \right| dx^1dx^2...dx^n \, ,$$

где

$$\frac{D(x^{1'}, x^{2'}, ..., x^{n'})}{D(x^1,\, x^2,\, ...\, ,\, x^n)}$$

- якобиан. С другой стороны,

$$(V'_{ind})_{ev} = \int\limits_{ind}^{n} d\xi^{1'}d\xi^{2'}...d\xi^{n'} = \int\limits_{ind}^{n} \left| \frac{D(\xi^{1'}, \xi^{2'}, ..., \xi^{n'})}{D(\xi^1,\, \xi^2,\, ...\, ,\, \xi^n)} \right| d\xi^1d\xi^2...d\xi^n \, ,$$

но так как производные

$$\frac{\partial \xi^{i'}}{\partial \xi^j} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j} \, ,$$

не зависят от координат касательного пространства, что следует из правила их преобразования

$$\xi^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j} \, \xi^j \, ,$$

то и якобиан

$$\frac{D(\xi^{1'}, \xi^{2'}, ..., \xi^{n'})}{D(\xi^1,\, \xi^2,\, ...\, ,\, \xi^n)} = \frac{D(x^{1'}, x^{2'}, ..., x^{n'})}{D(x^1,\, x^2,\, ...\, ,\, x^n)}$$

также не зависит от координат касательного пространства, и поэтому

$$(V'_{ind})_{ev} = \left| \frac{D(x^{1'}, x^{2'}, ..., x^{n'})}{D(x^1,\, x^2,\, ...\, ,\, x^n)} \right| \int\limits_{ind}^{n} d\xi^1d\xi^2...d\xi^n \, ,$$

или

$$(V'_{ind})_{ev} = \left| \frac{D(x^{1'}, x^{2'}, ..., x^{n'})}{D(x^1,\, x^2,\, ...\, ,\, x^n)} \right| (V_{ind})_{ev} \; . \qquad (*)$$

Таким образом, при переходе к новой системе координат в правой части формулы (136) в числителе и знаменателе появляется один и тот же коэффициент - модуль якобиана перехода, сокращая в числителе и знаменателе этот коэффициент, получим

$$\frac{dx^{1'}dx^{2'}...dx^{n'}}{(V'_{ind})_{ev}} = \frac{dx^1dx^2...dx^n}{(V_{ind})_{ev}}\,.$$

Тем самым доказано, что при переходе от одних координат к другим формула (136) остаётся неизменной.

Если в формуле (136) положить $const$ равной единице, то при вычислении объёма его численное значение равно числу объёмов индикатрис, "уместившихся" в нём.

Рассмотрим n-мерное риманово пространство, метрическая функция в этом случае имеет вид

$$L(dx;x) = \sqrt{g_{ij}(x)dx^idx^j}\,, \tag{137}$$

а уравнение индикатрисы соответственно -

$$g_{ij}(x)\xi^i\xi^j = 1\,. \tag{138}$$

Это уравнение определяет гиперповерхность второго порядка, а именно, эллипсоид. Если считать пространство $\xi^1, \xi^2, ..., \xi^n$ евклидовым, то, как известно, объем такого эллипсоида есть

$$(V_{ind})_{ev} = \frac{const'}{\sqrt{det(g_{ij})}}\,. \tag{139}$$

Докажем это. С помощью некого линейного преобразования уравнение эллипсоида (138) в евклидовом пространстве всегда можно привести к виду

$$\frac{(\xi^{1'})^2}{R^2} + \frac{(\xi^{2'})^2}{R^2} + ... + \frac{(\xi^{n'})^2}{R^2} = 1\,,$$

то есть в этой специальной системе координат

$$det\,(g_{i'j'}(x')) = \frac{1}{R^{2n}}\,,$$

и формула (139) выполняется. Учитывая, что

$$g_{i'j'}(x') = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\,g_{ij}(x)$$

и

$$det\,(g_{i'j'}(x')) = \left[\frac{D(x^{1'}, x^{2'}, ..., x^{n'})}{D(x^1,\, x^2,\, ...\, ,\, x^n)}\right]^{-2} det\,(g_{ij}(x))\ , \qquad (**)$$

подставим $(*)$ и $(**)$ в выполняющуюся, как мы выше выяснили, для эллипсоида формулу в евклидовом пространстве в специальной системе координат

$$(V'_{ind})_{ev} = \frac{const'}{\sqrt{det(g_{i'j'})}}\ .$$

В результате получим формулу (139) в произвольной системе координат. Тем самым доказано выполнение формулы (139) в произвольной системе координат.

Подставляя выражение (139) в формулу (136), получим элемент объема в произвольном римановом пространстве

$$dV = const \cdot \sqrt{det(g_{ij})}\quad dx^1 dx^2 ... dx^n\ , \qquad (140)$$

что совпадает с обычным определением инвариантного элемента объема в римановом пространстве.

Для псевдоримановых пространств без специальных дополнительных условий на индикатрису

$$(V_{ind})_{ev} = \infty \qquad \Rightarrow \qquad dV = 0 \cdot dx^1 dx^2 ... dx^n\ , \qquad (141)$$

но можно провести цепочку рассуждений, которая позволяет и для псевдоримановых пространств предложить инвариантный элемент объема в виде формулы, аналогичной формуле (140). Точно такие же рассуждения приходится приводить и для получения инвариантного элемента объема в неквадратичных финслеровых пространствах, в которых имеет место проблема (141). При этом удобно исходить из некоторого плоского пространства, близкого к пространству, элемент объема которого мы хотим определить.

Проведем эти рассуждения для конкретного примера: псевдориманово пространства с сигнатурой $(+, -, -, -)$, то есть пространства Минковского x^0, x^1, x^2, x^3, в котором метрическая функция имеет вид

$$L(dx) = \sqrt{(dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2} \equiv \sqrt{\overset{o}{g}_{ij}\ dx^i dx^j}\ , \qquad (142)$$

а тангенциальное уравнение индикатрисы

$$(\xi^0)^2 - (\xi^1)^2 - (\xi^2)^2 - (\xi^3)^2 = 1 \qquad (143)$$

является уравнением второго порядка и определяет гиперповерхность, которая является двуполостным гиперболоидом, поэтому проблема определения объема индикатрисы имеет место. Так как и метрическая функция, и уравнение индикатрисы не зависят от точки пространства, то каким бы образом мы не регуляризовали соответствующий интеграл, мы получим действительное число, одно и то же во всех точках пространства. Обозначим это число $(V_{ind})_{ev}$. Для того, чтобы в пространстве Минковского получить инвариантный элемент объема по формуле (136) величину $(V_{ind})_{ev}$ следует записать в виде

$$(V_{ind})_{ev} = \frac{const'}{\sqrt{-det\left(\overset{o}{g}_{ij}\right)}}\,. \tag{144}$$

Перейдем от координат x^0, x^1, x^2, x^3 к некоторым криволинейным координатам $x^{0'}, x^{1'}, x^{2'}, x^{3'}$, тогда $\overset{o}{g}_{ij}$ перейдет в $g(x')_{i'j'}$, а значит элемент объема в пространстве Минковского в криволинейных координатах $x^{0'}$, $x^{1'}$, $x^{2'}$, $x^{3'}$ будет определяться формулой

$$dV = const \cdot \sqrt{-det\left(g(x')_{i'j'}\right)}\quad dx^{0'}dx^{1'}dx^{2'}dx^{3'}\,, \tag{145}$$

но все же пока мы остались в том же самом пространстве Минковского.

Рассмотрим псевдориманово пространство конформно связанное с пространством Минковского

$$ds = \kappa(x) \cdot \sqrt{\overset{o}{g}_{ij}\; dx^i dx^j}\,, \tag{146}$$

где $\kappa(x) > 0$, которое (пространство) никаким преобразованием координат не может быть переведено в пространство Минковского. Уравнение индикатрисы для такого псевдориманово пространства можно записать следующим образом:

$$(\xi^0)^2 - (\xi^1)^2 - (\xi^2)^2 - (\xi^3)^2 = \frac{1}{\kappa^2(x)}\,. \tag{147}$$

Сравнивая это уравнение с уравнением (143), видим, что гиперповерхность, определяемая уравнением (147), получается из гиперповерхности, определяемой (143), общим масштабным преобразованием с коэффициентом $\kappa^{-1}(x)$, поэтому если индикатрисе (143) мы приписывали объем (144), то индикатрисе (147) следует приписать объем

$$(V_{ind})_{ev} = \frac{const'}{\kappa^4(x)\sqrt{-det\left(\overset{o}{g}_{ij}\right)}} = \frac{const'}{\sqrt{-det\left(g(x)_{ij}\right)}}\,, \tag{148}$$

где

$$g(x)_{ij} \equiv \kappa^2(x)\ \overset{o}{g}_{ij}\ . \tag{149}$$

Из выше проведенных рассуждений следует, что псевдориманову пространству с метрическим тензором $g(x)_{ij}$ и сигнатурой $(+,-,-,-)$ можно приписать инвариантный элемент объема вида

$$dV = const \cdot \sqrt{-det\,(g(x)_{ij})}\quad dx^0 dx^1 dx^2 dx^3\,, \tag{150}$$

что и принято в ОТО.

К проблеме (141) в псевдоримановых пространствах можно подойти более строго, но при этом приходится рассматривать пространства более общие, чем псевдоримановы. Поясним это на примере пространства Минковского. Если вместо пространства Минковского с метрической функцией (142) взять финслерово пространство с метрической функцией

$$L(dx) = \sqrt{(dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2} + q_0 dx^0 \tag{151}$$

и условием $dx^0 \geq 0$, где $q_0 > 0$, то у такого пространства объем индикатрисы $(V_{ind})_{ev}$ конечное действительное число, зависящее от параметра q_0 и стремящееся к ∞, когда параметр q_0 стремится к 0. Выбирая параметр q_0 достаточно малым, но неравным нулю, получим $(V_{ind}(q_0))_{ev} < \infty$ - конечное действительное число, зависящее от параметра q_0, которое затем можно использовать для получения значений физических величин при $q_0 \to 0$.

Будем считать, что в любом финслеровом пространстве, в котором имеет место проблема (141), она может быть разрешена тем или иным способом, то есть может быть получен объём индикатрисы в каждой точке основного пространства, если считать касательное пространство евклидовым, а координаты декартовыми прямоугольными. Тогда можно утверждать, что из самой геометрии финслерова пространства, если метрическая функция содержит некоторые поля, автоматически получается лагранжиан [21]

$$\mathfrak{L} = \frac{const}{(V_{ind})_{ev}}\,, \tag{152}$$

а значит и уравнения поля, и законы сохранения [7]. Несомненно, это справедливо и для Мировой функции, то есть Мировая функция также должна являться решением некоторого уравнения поля.

Замечание. Постоянные, которые фигурируют в формулах (136), (139), ..., (152), можно опускать или выбирать из соображений размерности.

Все эти постоянные не входят в полевые уравнения, но наиболее правильно выбирать их так, чтобы при получении, например, закона сохранения энергии, получалось правильное значение энергии с учётом размерности.

Сформулируем кратко основные результаты.

Принцип самодостаточности финслеровой геометрии:

если метрическая функция финслерова пространства содержит неопределённые поля, то эти поля должны удовлетворять уравнениям поля, следующих из экстремальности любого объема финслерова пространства при отсутствии вариации полей на границе рассматриваемого объема.

Основные формулы.

Связь между элементом объёма dV финслерова пространства и полевым лагранжианом $\mathfrak{L}$ имеет вид

$$dV = const \ \mathfrak{L} \ dx^1 dx^2 ... dx^n \,,$$

а полевой лагранжиан выражается через объём индикатрисы по формуле

$$\mathfrak{L} = \frac{const}{(V_{ind})_{ev}} \,.$$

Рассмотрим несколько простейших примеров получения уравнений поля, решениями которых будет являться Мировая функция $S_W(x)$. Здесь же можно проследить связь между Мировой функцией и коэффициентом растяжения-сжатия $\kappa(x)$, с помощью которого метрическая функция одного финслерова пространства превращается в метрическую функцию другого финслерова пространства.

Пространство, конформно связанное с n-мерным евклидовым пространством, обладает элементом длины

$$ds = \kappa(x) \cdot \sqrt{(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + ... + (dx^n)^2} \,, \qquad (153)$$

где $\kappa(x) > 0$. Так как в этом случае

$$\sqrt{det(g_{ij})} = \kappa^n(x)\,, \tag{154}$$

лагранжиан имеет вид

$$\mathfrak{L} = \kappa^n(x)\,. \tag{155}$$

Для того, чтобы получить из такого лагранжиана уравнение поля, надо выразить скалярное поле $\kappa(x)$ через другое поле так, что лагранжиан уже будет содержать производные нового поля.

Обобщенные импульсы в пространстве (153) определяются формулой

$$p_i = \kappa(x)\frac{dx^i}{\sqrt{(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + ... + (dx^n)^2}}\,, \tag{156}$$

а тангенциальное уравнение индикатрисы можно записать следующим образом:

$$p_1^2 + p_2^2 + ... + p_n^2 - \kappa^2(x) = 0\,. \tag{157}$$

Скалярная функция $S(x)$, которая в пространстве $x^1, x^2, ..., x^n$ определяет нормальную конгруэнцию геодезических и которую в классической механике принято называть действием как функцией координат, должна удовлетворять уравнению Гамильтона - Якоби

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial x^2}\right)^2 + ... + \left(\frac{\partial S}{\partial x^n}\right)^2 = \kappa^2(x)\,, \tag{158}$$

но мы это уравнение будем рассматривать как соотношение для выражения поля $\kappa(x)$ через поле $S(x)$. Таким образом,

$$\mathfrak{L} = \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial x^2}\right)^2 + ... + \left(\frac{\partial S}{\partial x^n}\right)^2\right]^{\frac{n}{2}}\,, \tag{159}$$

а уравнение поля (129) принимает вид:

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\left\{\frac{\partial S}{\partial x^i}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial x^2}\right)^2 + ... + \left(\frac{\partial S}{\partial x^n}\right)^2\right]^{\frac{n}{2}-1}\right\} = 0\,. \tag{160}$$

Отметим, что для $n > 2$ это уравнение является нелинейным дифференциальным уравнением в частных производных второго порядка.

Запишем для пространства, конформно связанного с двумерной евклидовой плоскостью (x, y), уравнение (160),

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} = 0\,, \tag{161}$$

то есть функция $S(x,y)$ должна удовлетворять уравнению Лапласа, а значит она является компонентой аналитической функции комплексной переменной. Тогда

$$\kappa(x,y) = \sqrt{\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2} \tag{162}$$

- это коэффициент конформного преобразования элемента длины евклидового пространства, так как

$$ds' = \sqrt{(x')^2 + (y')^2} = \kappa(x,y)\sqrt{x^2+y^2} \tag{163}$$

при конформном преобразовании

$$x' = u(x,y)\,, \qquad y' = \pm v(x,y)\,, \tag{164}$$

когда функция S является одной из компонент аналитической функции $u + iv$ комплексной переменной $x + iy$.

Найдем решение уравнения (160) в предположении, что функция S зависит только от радиуса

$$r = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + ... + (x^n)^2}\,. \tag{165}$$

Это удобнее сделать, записав элемент объема в сферических координатах и проинтегрировав по всем углам,

$$dV_r = r^{n-1}\left|\frac{dS}{dr}\right|^n dr \qquad \Rightarrow \qquad \mathfrak{L}_r = r^{n-1}\left|\frac{dS}{dr}\right|^n\,. \tag{166}$$

Тогда уравнение поля запишется следующим образом:

$$\frac{d}{dr}\left[r^{n-1}\left|\frac{dS}{dr}\right|^{n-1}\right] = 0\,. \tag{167}$$

Интегрируя это уравнение, получим

$$\frac{dS}{dr} = \frac{C}{r}\,, \qquad S = C\ln\frac{r}{r_0} + C_0\,, \tag{168}$$

$C \neq 0$, C_0, $r_0 > 0$ - действительные числа, тогда

$$\kappa(x) = \left|\frac{dS}{dr}\right| = \frac{|C|}{r}\,. \tag{169}$$

Геодезические из нормальной конгруэнции геодезических, описываемой функцией $S(r)$ (168), в таком пространстве определяются уравнениями

$$\dot{x}^i = \frac{\partial S}{\partial x^i} \cdot \lambda(x)\,, \tag{170}$$

где $\lambda(x) \neq 0$ - некоторая функция, $\dot{x}^i$ - производная x^i по параметру τ вдоль геодезической. Выберем $\lambda(x) = \dfrac{r^2}{C}$, тогда из (170) следует, что

$$\dot{x}^i = x^i\,. \tag{171}$$

Пусть $j > 1$, тогда

$$\frac{dx^j}{dx^1} = \frac{x^j}{x^1} \qquad \Rightarrow \qquad x^j = C^j x^1\,, \tag{172}$$

то есть геодезические из нормальной конгруэнции геодезических, которая (конгруэнция) определяется Мировой функцией (168), в таком пространстве - это прямые линии, проходящие через начало координат с направляющим вектором $(1, C^2, C^3, ..., C^n)$. Так как в качестве параметра эволюции можно выбрать любую координату x^i, то направляющим вектором может быть любой вектор $(k^1, k^2, ..., k^n)$ нашего евклидового пространства.

Пространство, конформно связанное с псевдоевклидовым пространством с сигнатурой $(+, -, -, ..., -)$, обладает элементом длины

$$ds = \kappa(x) \cdot \sqrt{(dx^0)^2 - (dx^1)^2 - ... - (dx^{n-1})^2}\,, \tag{173}$$

где $\kappa(x) > 0$. Так как в этом случае

$$\sqrt{(-1)^{n-1} det\,(g_{ij})} = \kappa^n(x)\,, \tag{174}$$

лагранжиан имеет вид

$$\mathfrak{L} = \kappa^n(x)\,. \tag{175}$$

Для того, чтобы получить из такого лагранжиана уравнение поля, надо выразить скалярное поле $\kappa(x)$ через другое поле так, чтобы лагранжиан содержал производные нового поля.

Обобщенные импульсы в пространстве (173) определяются формулами

$$\left.\begin{aligned} p_0 &= \frac{\kappa(x)\ dx^0}{\sqrt{(dx^0)^2 - (dx^1)^2 - ... - (dx^{n-1})^2}}, \\ p_\mu &= \frac{\kappa(x)\ dx^\mu}{\sqrt{(dx^0)^2 - (dx^1)^2 - ... - (dx^{n-1})^2}}, \end{aligned}\right\} \qquad (176)$$

$\mu = 1, 2, ..., (n-1)$, а тангенциальное уравнение индикатрисы можно записать следующим образом:

$$p_0^2 - p_1^2 - ... - p_{n-1}^2 - \kappa^2(x) = 0\,. \qquad (177)$$

Скалярная функция $S(x)$, которая в пространстве $x^0, x^1, ..., x^{n-1}$ определяет нормальную конгруэнцию геодезических, должна удовлетворять уравнению Гамильтона - Якоби

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x^0}\right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial x^1}\right)^2 - ... - \left(\frac{\partial S}{\partial x^{n-1}}\right)^2 = \kappa^2(x)\,, \qquad (178)$$

но это уравнение можно рассматривать как связь между скалярными полями $\kappa(x)$ и $S(x)$. Таким образом,

$$\mathfrak{L} = \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x^0}\right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial x^1}\right)^2 - ... - \left(\frac{\partial S}{\partial x^{n-1}}\right)^2\right]^{\frac{n}{2}}\,, \qquad (179)$$

а уравнение поля (129) принимает вид:

$$\begin{gathered} \frac{\partial}{\partial x^0}\left\{\frac{\partial S}{\partial x^0}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x^0}\right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial x^1}\right)^2 - ... - \left(\frac{\partial S}{\partial x^{n-1}}\right)^2\right]^{\frac{n}{2}-1}\right\} - \\ - \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left\{\frac{\partial S}{\partial x^\mu}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x^0}\right)^1 - \left(\frac{\partial S}{\partial x^2}\right)^2 - ... - \left(\frac{\partial S}{\partial x^{n-1}}\right)^2\right]^{\frac{n}{2}-1}\right\} = 0\,. \end{gathered} \qquad (180)$$

Отметим, что для $n > 2$ это уравнение является нелинейным дифференциальным уравнением в частных производных второго порядка.

Для пространства, конформно связанного с двумерной псевдоевклидовой плоскостью (x, y), уравнение (180) даёт

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} = 0\,, \qquad (181)$$

то есть в двумерном случае уравнение поля (180) - это волновое уравнение, общее решение которого имеет вид:

$$S = f_1(x+y) + f_2(x-y)\,,$$

где f_1, f_2 произвольные дважды дифференцируемые функции одной действительной переменной.

Для пространства, конформно связанного с пространством Минковского $n = 4$, используя метрический тензор $\overset{o}{g}_{ij}$, получим: связь между функцией $S(x)$ и коэффициентом растяжения-сжатия $\kappa(x)$ -

$$\overset{o}{g}{}^{ij} \frac{\partial S}{\partial x^i}\frac{\partial S}{\partial x^j} = \kappa^2(x)\,, \tag{182}$$

лагранжиан -

$$\mathfrak{L} = \left(\overset{o}{g}{}^{ij} \frac{\partial S}{\partial x^i}\frac{\partial S}{\partial x^j}\right)^2\,, \tag{183}$$

уравнение поля -

$$\overset{o}{g}{}^{kl} \frac{\partial}{\partial x^k}\left[\frac{\partial S}{\partial x^l}\left(\overset{o}{g}{}^{ij} \frac{\partial S}{\partial x^i}\frac{\partial S}{\partial x^j}\right)\right] = 0\,. \tag{184}$$

Запишем уравнение поля для Мировой функции в финслеровом пространстве, которое является конформно связанным с пространством H_4, или с четырёхмерным пространством Бервальда - Моора. Метрическая функция такого пространства определяется формулой (111), тангенциальное уравнение можно записать в виде (113), а коэффициент растяжения-сжатия $\kappa(x)$ выражается через Мировую функцию $S_W(x)$ по формуле (116). Таким образом, лагранжиан для получения уравнения поля для Мировой функции в специальной изотропной системе координат запишется следующим образом:

$$\mathfrak{L} = const\ \frac{\partial S_W}{\partial x^1}\frac{\partial S_W}{\partial x^2}\frac{\partial S_W}{\partial x^3}\frac{\partial S_W}{\partial x^4}\,. \tag{185}$$

Уравнение Лагранжа - Эйлера (129), то есть уравнение поля принимает вид:

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\frac{\partial S_W}{\partial x^2}\frac{\partial S_W}{\partial x^3}\frac{\partial S_W}{\partial x^4}\right) + \frac{\partial}{\partial x^2}\left(\frac{\partial S_W}{\partial x^1}\frac{\partial S_W}{\partial x^3}\frac{\partial S_W}{\partial x^4}\right) + \\ + \frac{\partial}{\partial x^3}\left(\frac{\partial S_W}{\partial x^1}\frac{\partial S_W}{\partial x^2}\frac{\partial S_W}{\partial x^4}\right) + \frac{\partial}{\partial x^4}\left(\frac{\partial S_W}{\partial x^1}\frac{\partial S_W}{\partial x^2}\frac{\partial S_W}{\partial x^3}\right) = 0\,.\end{gathered} \tag{186}$$

Это нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка с дополнительным условием

$$\kappa(x) > 0\,. \tag{187}$$

В силу этого условия, мы исключаем, например, такие функции в качестве возможных решений, как:

$$f_1(x^1)\,, \quad \acute{f}_{34}(x^1, x^2)\,, \quad \bar{f}_1(x^2, x^3, x^4)\,, \tag{188}$$

где f_1, $\acute{f}_{34}$, $\bar{f}_1$ - произвольные функции одной, двух и соответственно трёх действительных переменных, так как, хотя они удовлетворяют уравнению (186), для них не выполняется условие (187).

Непосредственной подстановкой в уравнение (186) проверяется, что этому уравнению, например, удовлетворяет функция

$$S_W = \frac{1}{4}\left[f_1(x^1) + f_2(x^2) + f_3(x^3) + f_4(x^4)\right]\,, \tag{189}$$

где функции f_i должны удовлетворять условию

$$\frac{\partial f_1}{\partial x^1}\frac{\partial f_2}{\partial x^2}\frac{\partial f_3}{\partial x^3}\frac{\partial f_4}{\partial x^4} > 0\,, \tag{190}$$

а в остальном произвольны.

Ещё один пример решения задачи (186), (187). Будем искать решение в виде:

$$S_W(x) = u(x^1, x^2) + v(x^3, x^4)\,. \tag{191}$$

Тогда, подставляя (191) в (186), получим

$$\frac{\partial v}{\partial x^3}\frac{\partial v}{\partial x^4}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^1 \partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x^1}\frac{\partial u}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2 v}{\partial x^3 \partial x^4} = 0\,. \tag{192}$$

Это уравнение с частично разделяющимися переменными. Так как из (187) следует условие

$$\frac{\partial u}{\partial x^1}\frac{\partial u}{\partial x^2}\frac{\partial v}{\partial x^3}\frac{\partial v}{\partial x^4} > 0\,, \tag{193}$$

разделим левую и правую части уравнения (192) на

$$\frac{\partial u}{\partial x^1}\frac{\partial u}{\partial x^2}\frac{\partial v}{\partial x^3}\frac{\partial v}{\partial x^4}\,.$$

Получим в правой части уравнения два аддитивных члена, первый из которых зависит только от x^1, x^2, а второй - только от x^3, x^4, поэтому каждый из них есть постоянная, причём, если первый равен $(-\lambda)$, то второй должен быть равен λ:

$$\frac{\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^1 \partial x^2}}{\dfrac{\partial u}{\partial x^1}\dfrac{\partial u}{\partial x^2}} = -\lambda\,, \qquad \frac{\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^3 \partial x^4}}{\dfrac{\partial v}{\partial x^3}\dfrac{\partial v}{\partial x^4}} = \lambda\,. \tag{194}$$

Интегрируя эту систему уравнений, имеем

$$S_W = \frac{1}{\lambda} \ln \left| \frac{f_1(x^1) + f^2(x^2)}{f_3(x^3) + f_4(x^4)} \right| \,, \tag{195}$$

где функции f_i должны удовлетворять условию (187), то есть

$$\kappa^4(x) \equiv \frac{4^4}{\lambda^4} \frac{\dot{f}_1 \dot{f}_2 \dot{f}_3 \dot{f}_4}{(f_1 + f_2)^2 (f_3 + f_4)^2} > 0 \,, \tag{196}$$

или

$$\lambda^4 \neq 0, \pm\infty \,, \qquad f_1 + f_2,\, f_3 + f_4 \neq 0, \pm\infty \,, \qquad \dot{f}_1 \dot{f}_2 \dot{f}_3 \dot{f}_4 > 0 \,, \tag{197}$$

а в остальном произвольны.

Важно отметить, что решение S_W (195) не может быть представлено в виде (189).

7 Гиперкомплексные числа

Гиперкомплексная система чисел - это линейная алгебра с единицей. Более развёрнутое определение звучит следующим образом.

Линейное пространство над полем действительных чисел с бинарной операцией, линейной по каждому сомножителю, и единицей называется *гиперкомплексной алгеброй*, или *системой гиперкомплексных чисел* над полем действительных чисел.

Гиперкомплексные числа, кроме базисных элементов, обычно будем обозначать большими латинскими буквами A, B, C, ... ,X, Y, Z; действительные числа - в основном малыми латинскими и греческими буквами. Базисные (символьные) элементы системы гиперкомплексных чисел в основном будем обозначать e_1, e_2, ..., e_n, где n - размерность гиперкомплексного пространства.

Если базис e_1, e_2, ..., e_n фиксирован, то любое гиперкомплексное число однозначно представимо в виде линейной комбинации базисных элементов

$$X = x^1 e_1 + x^2 e_2 + ... + x^n e_n \,. \tag{198}$$

Умножение гиперкомплексного числа на действительное число и сложение гиперкомплексных чисел происходит покомпонентно по тем же законам, что и элементов линейного пространства [6], так как система гиперкомплексных чисел и есть линейное пространство. Бинарная операция полностью определяется законом умножения базисных элементов:

$$e_i \cdot e_j = p^l_{ij} \cdot e_l \,, \tag{199}$$

то есть числовым тензором p^l_{ij}, или *структурным тензором.* При этом бинарная операция *линейна* по каждому сомножителю:

$$(aA + bB)(cC + dD) = acAC + adAD + bcBC + bdBD \,. \tag{200}$$

Если представить, что начала всех векторов $X \in P_n$ находятся в одной фиксированной точке $\mathcal{O}$, то компоненты таких векторов (радиус-векторов) определяют нам n-мерное координатное пространство:

$$X = x^1 e_1 + x^2 e_2 + ... + x^n e_n \qquad \leftrightarrow \qquad (x^1, x^2, ...x^n) \tag{201}$$

с координатами $x^1, x^2, ...x^n$ и началом координат в точке $\mathcal{O}(0, 0, ..., 0)$. В этом координатном пространстве, как и в координатном пространстве свободных векторов (198), определена бинарная операция:

$$X \cdot Y = Z \,, \qquad\qquad x^i x^j p^l_{ij} = z^l \,. \tag{202}$$

Система гиперкомплексных чисел называется коммутативной, если для любых двух чисел X и Y

$$XY = YX \qquad \Leftrightarrow \qquad p^l_{ij} = p^l_{ji} \,, \tag{203}$$

и ассоциативной, если для любых трёх чисел X, Y, Z

$$(XY)Z = X(YZ) \qquad \Leftrightarrow \qquad p^l_{ij} p^s_{lr} = p^l_{jr} p^s_{il} \,. \tag{204}$$

Если система гиперкомплексных чисел и коммутативна, и ассоциативна, то имеют место и другие соотношения для тензора p^l_{ij}, например,

$$p^l_{ij} p^s_{lr} = p^l_{rj} p^s_{li} \,. \tag{205}$$

Пусть ϵ^i - коэффициенты разложения единицы в базисе e_1, e_2, $...e_n$, тогда справедливы следующие формулы:

$$\epsilon^i p^l_{ij} = \delta^l_j \,, \qquad \epsilon^j p^l_{ij} = \delta^l_i \,. \tag{206}$$

Если гиперкомплексная алгебра не содержит нильпотентных элементов, то есть таких чисел $N \neq 0$, что $N^m = 0$, где $m > 1$ - некоторое натуральное число, то будем называть такую алгебру гиперкомплексных чисел *невырожденной.*

Если для двух гиперкомплексных чисел $A \neq 0$ и $B \neq 0$ их произведение равно нулю $AB = 0$, то оба этих числа принято называть *делителями нуля.* В этом случае

$$a^i b^j p^l_{ij} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad det(b^j p^l_{ij}) = 0\,, \quad det(a^i p^l_{ij}) = 0\,.$$

Достижения, которые были получены в теории комплексных чисел и особенно теории функций комплексной переменной, заставляют нас стремиться к тому, чтобы и в других метрических пространствах, не только на евклидовой плоскости, сопоставить взаимно однозначно каждой точке пространства число, принадлежащее некоторой гиперкомплексной системе. Можно работать с некоммутативными и даже неассоциативными гиперкомплексными алгебрами, но при этом возникает ряд трудностей особенно в построении аналитических функций. Существует другой путь [18] - [20], которого будем придерживаться и мы: выделять самые удобные, самые "простые" числа, а именно невырожденные *ассоциативно-коммутативные гиперкомплексные числа*, или кратко - невырожденные *поличисла* P_n, и концентрировать усилия на их изучении и применении в физике.

***Теорема Фробениуса [3]*:** Любая ассоциативная алгебра с делением изоморфна одной из трех: алгебре действительных чисел, алгебре комплексных чисел или алгебре кватернионов.

Так как алгебра кватернионов не коммутативна, то из теоремы Фробениуса следует, что невырожденные поличисла P_n, размерности $n > 2$ всегда содержат делители нуля, то есть найдутся такие числа X, $Y \neq 0$, что

$$XY = YX = 0\,, \tag{207}$$

поэтому на множестве поличисел размерности больше двух нельзя определить классическое понятие нормы числа, но можно определить близкое понятие, которое следовало бы назвать *квазинормой* или каким-то другим термином, мы же будем использовать старый термин.

Если на некотором подмножестве D_n поличисел P_n для любого числа X из этого подмножества задано действительное число $|X|$, причем для любых X, $Y \in D_n$ выполняются следующие три требования:

1. $|X| \geq 0$;

2. если $a > 0$ - действительное число, то $|aX| = a|X|$;

3. если $XY \in D_n$, то $|XY| = |X||Y|$

- будем говорить, что на множестве поличисел P_n задана норма, а D_n - область ее определения.

Понятие функции F на гиперкомплексной алгебре $HC \ni X, dX$ общего вида с значениями в той же самой алгебре $F(X) \in HC$ определяется обычным образом.

Если e - базис, а x - координаты гиперкомплексного числа X (198) в этом базисе, то

$$F(X) = f^i(x^1, x^2, ..., x^n)\, e_i\,, \tag{208}$$

где f^i - n произвольных функций от n действительных переменных. Область определения функции $F(X)$ суть пересечение областей определения всех функций $f^1, f^2, ..., f^n$.

Пусть dX - произвольное бесконечно малое гиперкомплексное число, то есть

$$dX = dx^i\, e_i\,, \qquad dx^i \to 0\,. \tag{209}$$

Если

$$F(X + dX) - F(X) = F'(X)\, dX + o(dx^i)\,, \tag{210}$$

то $F(X)$ - называют *аналитической функцией гиперкомплексной переменной*, а $F'(X)$ - её *производной*.

Из определения следует, что, во-первых, для того, чтобы $F(X)$ была аналитической функцией необходимо, чтобы функции f^i были хотя бы гладкими функциями всех n действительных переменных. Во-вторых, если гиперкомплексная система некоммутативна, то возникаю серьёзные трудности с введением понятия аналитичности, ещё больше трудностей возникает при отсутствии ассоциативности. Это одна из причин, по которым в дальнейшем будут рассматриваться только ассоциативно-коммутативные гиперкомплексные числа, или кратко *поличисла.*

Для поличисел определение (210) является естественным и порождает естественный алгоритм построения, если не всех, то большого класса аналитических функций поличисловой переменной. Любая функция $F(X)$ поличисловой переменной, построенная как полином или сходящийся ряд, является аналитической функцией той же поличисловой переменной. Приведём два примера, аналитическими функциями поличисловой переменной являются:

$$F(X) = C\, X^2 + B\, X + C \tag{211}$$

и

$$e^{AX} = 1 + AX + \frac{1}{2!}(AX)^2 + \frac{1}{3!}(AX)^3 + ... + \frac{1}{m!}(AX)^m + ... \,, \qquad (212)$$

где A, B, C - поличисловые постоянные.

Все пространства невырожденных поличисел являются метрическими пространствами, а именно, финслеровыми пространствами, причём, если размерность пространства больше двух, то это метрические неквадратичные пространства.

Конечно, самым интересным вопросом для физиков является вопрос: какую поличисловую систему сопоставить пространству событий, то есть четырёхмерному пространству-времени? Одна из возможностей - это поличисла H_4 [18] - [20], которые изоморфны алгебре действительных квадратных диагональных матриц 4 × 4 и которые являются финслеровым пространством с метрической функцией Бервальда - Моора (47).

8 Поличисла H_3

В качестве примера невырожденных поличисел рассмотрим алгебру действительных квадратных диагональных матриц 3 × 3. Эта алгебра изоморфна невырожденным поличислам H_3.

Любой элемент $X \in H_3$ можно рассматривать как матрицу вида

$$X = \begin{pmatrix} a^1 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^3 \end{pmatrix} \equiv a^1 e_1 + a^2 e_2 + a^3 e_3 \,, \qquad (213)$$

где a^1, a^2, a^3 - действительные числа, а $e_1, e_2, e_3 \in H_3$ - так называемый, изотропный базис:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (214)$$

Роль единичного элемента выполняет единичная матрица, то есть сумма базисных элементов e_1, e_2 и e_3:

$$e_1 + e_2 + e_3 \equiv \hat{1} \,.$$

Так как для данных поличисел, если m - натуральное число, из

$$X^m = 0 \qquad \Rightarrow \qquad X = 0\,,$$

то поличисла H_3 являются невырожденными.

Для произвольной квадратной матрица A, как известно, определена функция

$$\exp(A) \equiv \hat{1} + A + \frac{1}{2!}A^2 + ... + \frac{1}{m!}A^m + ... \,. \tag{215}$$

Здесь $\hat{1}$ - единичная матрица. Тогда для X (213) имеем

$$\exp(X) = \begin{pmatrix} e^{a^1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{a^2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{a^3} \end{pmatrix}. \tag{216}$$

Рассмотрим ещё один базис $1, j, k$, который связан с изотропным базисом преобразованием

$$\begin{pmatrix} 1 \\ j \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} \tag{217}$$

и попытаемся представить поличисло X в экспоненциальной форме, то есть следующим образом:

$$X = x^0 1 + x^1 j + x^2 k = \varrho \cdot \exp(\alpha j + \beta k)\,, \tag{218}$$

где α, β - любые действительные числа, а действительное число $\varrho > 0$. Воспользовавшись формулой (216), получим

$$a^1 e_1 + a^2 e_2 + a^3 e_3 = \varrho e^{\alpha+\beta} e_1 + \varrho e^{-\alpha} e_2 + \varrho e^{-\beta} e_3\,. \tag{219}$$

Из этого соотношения следует: для того, чтобы поличисло X можно было представить в экспоненциальном виде, все a^i должны быть больше нуля, $a^i > 0$. При этом величины ϱ, α, β выражаются через координаты X в изотропном базисе по формулам:

$$\varrho = \sqrt[3]{a^1 a^2 a^3}\,, \qquad \alpha = -\ln\frac{a^2}{\varrho}\,, \qquad \beta = -\ln\frac{a^3}{\varrho}\,. \tag{220}$$

Если два числа $X, Y \in H_3$ представимы в экспоненциальном виде, то при их перемножении

$$X_1 X_2 = Z \quad \Rightarrow \quad Z = \varrho_1 \varrho_2 \cdot \exp\left[(\alpha_1 + \alpha_2)j + (\beta_1 + \beta_2)k\right] . \qquad (221)$$

Таким образом, для величины ϱ в экспоненциальном представлении выполняются все требования, сформулированные выше, для нормы поличисла, поэтому для $X \in H_3$

$$|X| = \sqrt[3]{a^1 a^2 a^3}\,, \qquad a^1, a^2, a^3 > 0\,. \qquad (222)$$

Норма поличисла неотъемлема от экспоненциального представления поличисла, поэтому область определения нормы задаётся именно тремя неравенствами $a^1 > 0$, $a^2 > 0$, $a^3 > 0$, а не одним неравенством $a^1 a^2 a^3 > 0$.

Пусть для числа $X \in H_3$ определена норма (222), умножим его на унимодулярное число $g \in H_3$, то есть число, которое представимо в экспоненциальном виде и которое имеет единичную норму $|g| = 1$. Тогда

$$|Xg| = |X|\,, \qquad (223)$$

а значит в пространстве H_3 имеется двухпараметрическая абелева группа Ли $G_1(H_3)$, сохраняющая норму поличисел, причём элементами этой группы являются унимодулярные поличисла H_3, а групповое умножение суть поличисловая бинарная операция.

Пространство H_3 является линейным пространством, но если мы будем считать векторы (213) радиус-векторами, то мы перейдём от аффинного к центроаффинному пространству и в этом случае координаты радиус-векторов являются точками координатного пространства (a^1, a^2, a^3). Если в этом пространстве мы захотим вычислить длину кривой, то нам необходим элемент длины ds, вид которого однозначно следует из полученной выше нормы поличисла:

$$ds = \sqrt[3]{da^1 da^2 da^3}\,, \qquad da^1 > 0,\ da^2 > 0,\ da^3 > 0\,. \qquad (224)$$

Тем самым пространство H_3 является неквадратичным финслеровым пространством с изометрической непрерывной группой симметрии $G_1(H_3)$.

Нельзя ли рассматриваемое пространство H_3, хотя бы в нулевом или первом приближении, считать пространством событий для физических задач, когда зависимость физических величин от какой-нибудь одной пространственной координаты отсутствует? Для положительного ответа на этот вопрос следует искать такой базис $1, J, K$,

$$X = x^0 \cdot 1 + x \cdot J + y \cdot K\,, \tag{225}$$

где $x^0 = ct$, c - скорость света, t - время, x, y - пространственные координаты, в котором (базисе) при нерелятивистских скоростях ($dx^0 \gg |dx|, |dy|$) с точностью до $\left|\frac{v}{c}\right|^2$ включительно элемент длины принимает вид:

$$ds = \sqrt[3]{da^1 da^2 da^3} \simeq dx^0 - \frac{dx^2 + dy^2}{2dx^0}\,. \tag{226}$$

При этом базисный элемент 1 менять не следует, а весь произвол в выборе нового базиса заключается в невырожденном линейном преобразовании базисных векторов j, k (четыре действительных параметра), что позволяет сохранит экспоненциальное представление в базисе $1, J, K$. Прежде всего перейдём к координатам x^0, x^1, x^2 в базисе $1, j, k$,

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ j \\ k \end{pmatrix}, \tag{227}$$

$$\begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}, \tag{228}$$

при тех же предположениях о малости скоростей $dx^0 \gg |dx^1|, |dx^2|$:

$$\begin{aligned} ds = \sqrt[3]{(x^0 + dx^1 + dx^2)(dx^0 - dx^1)(dx^0 - dx^2)} \simeq \\ \simeq dx^0 - \frac{(dx^1)^2 + dx^1 dx^2 + (dx^2)^2}{3\,dx^0}\,. \end{aligned} \tag{229}$$

Надо найти такое преобразование координат

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \tag{230}$$

a, b, c, d - искомые действительные числа, чтобы последняя правая дифференциальная форма (229) превратилась в последнюю правую дифференциальную форму (226). Потребовав это, получим систему трёх уравнений с четырьмя неизвестными:

$$\left.\begin{aligned} 2ab + ad + bc + 2cd = 0\,, \\ a^2 + ac + c^2 = \frac{3}{2}\,, \\ b^2 + bd + d^2 = \frac{3}{2}\,. \end{aligned}\right\} \tag{231}$$

Проще, однако, привести дифференциальную форму (229) к каноническому виду классическим способом: найти собственные векторы и собственные значения соответствующей билинейной формы, взять эти собственные векторы с некоторыми коэффициентами в качестве базисных векторов и учесть, что следует из формулы (226), неоднозначность выбора координат x, y, которые всегда можно повернуть на некоторый эллиптический угол φ. В результате получим

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \sqrt{\frac{3}{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\sqrt{\frac{3}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \tag{232}$$

или

$$\begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\sqrt{\frac{3}{2}} \\ 1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \sqrt{\frac{3}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x \\ y \end{pmatrix}. \tag{233}$$

Эти формулы не дают общего решения системы алгебраических уравнений (231), так как возможно, например, ещё поменять местами координаты x и y и/или независимо изменить знаки у этих координат, но главное получено: координатное пространство x^0, x, y можно считать трёхмерным пространством-временем, трёхмерным пространством событий.

Эллиптический поворот на угол φ в плоскости (x, y) можно выполнить дополнительно всегда, но хотелось бы иметь для матрицы преобразования (233) наиболее простое выражение, одно из таких выражений получается, если положить $\varphi = \frac{\pi}{4}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{\sqrt{3}-1}{2} & -\frac{\sqrt{3}+1}{2} \\ 1 & -\frac{\sqrt{3}+1}{2} & \frac{\sqrt{3}-1}{2} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \sqrt{2}\sin\frac{\pi}{12} & -\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12} \\ 1 & -\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12} & \sqrt{2}\sin\frac{\pi}{12} \end{pmatrix}. \tag{234}$$

Матрица (234) является симметрической.

Таким образом, непрерывные однопараметрические переходы в пространстве H_3 от одного физического базиса, в котором имеет место экспоненциальное представление поличисел и нерелятивистский переход к трёхмерному пространству Галилей, к другому физическому базису образуют группу $SO(2)$.

Итак, поличисловое пространство H_3 есть финслерово пространство с метрической функцией

$$L(da) = \sqrt[3]{da^1 da^2 da^3}\,. \tag{235}$$

Компоненты обобщённого импульса определяются формулами

$$p_i = \frac{1}{3}\frac{\sqrt[3]{da^1 da^2 da^3}}{da^i} \tag{236}$$

и связаны тангенциальным уравнением индикатрисы

$$p_1 p_2 p_3 - \frac{1}{3^3} = 0\,. \tag{237}$$

Пространство, конформно связанное с поличисловым пространством H_3, есть финслерово пространство с метрической функцией

$$\tilde{L}(da; a) = \kappa(a)\sqrt[3]{da^1 da^2 da^3}\,. \tag{238}$$

Компоненты обобщённого импульса в таком пространстве определяются формулами

$$\tilde{p}_i = \frac{\kappa(a)}{3}\frac{\sqrt[3]{da^1 da^2 da^3}}{da^i} \tag{239}$$

и связаны тангенциальным уравнением индикатрисы

$$\tilde{p}_1 \tilde{p}_2 \tilde{p}_3 - \frac{\kappa^3(a)}{3^3} = 0\,. \tag{240}$$

Откуда следует выражение коэффициента растяжения-сжатия $\kappa(a)$ через Мировую функцию $S_W(a)$

$$\kappa(a) = 3\sqrt[3]{\frac{\partial S_W}{\partial a^1}\frac{\partial S_W}{\partial a^2}\frac{\partial S_W}{\partial a^3}}\,, \quad \frac{\partial S_W}{\partial a^1}\frac{\partial S_W}{\partial a^2}\frac{\partial S_W}{\partial a^3} > 0 \tag{241}$$

и выражение для лагранжиана

$$\mathfrak{L} = const\ \frac{\partial S_W}{\partial a^1}\frac{\partial S_W}{\partial a^2}\frac{\partial S_W}{\partial a^3}\,. \tag{242}$$

Соответственно уравнение поля для Мировой функции запишется как

$$\frac{\partial}{\partial a^1}\left(\frac{\partial S_W}{\partial a^2}\frac{\partial S_W}{\partial a^3}\right)+\frac{\partial}{\partial a^2}\left(\frac{\partial S_W}{\partial a^1}\frac{\partial S_W}{\partial a^3}\right)+\frac{\partial}{\partial a^3}\left(\frac{\partial S_W}{\partial a^1}\frac{\partial S_W}{\partial a^2}\right)=0\,, \quad (243)$$

при дополнительном условии

$$\frac{\partial S_W}{\partial a^1}\frac{\partial S_W}{\partial a^2}\frac{\partial S_W}{\partial a^3}>0\,. \quad (244)$$

Построить некоторое множество простейших аналитических функций поличисловой H_3 переменной не составляет труда: это полиномы и сходящиеся ряды переменной $X \in H_3$, причём в качестве параметров можно использовать как действительные числа, так и поличисла H_3. Так как в изотропном базисе умножение чисел H_3 происходит покомпонентно, то все такие аналитические функции поличисловой переменной, если параметрами являются только действительные числа, в том же изотропном базисе имеют вид:

$$F(X)=f(a^1)e_1+f(a^2)e_2+f(a^3)e_3\,, \quad (245)$$

где f - гладкая функция одной действительной переменной. Учитывая это и непосредственно обратившись к определению аналитической функции гиперкомплексной переменной (210), получим, что для поличисел H_3 в изотропном базисе любая функция вида

$$F(X)=f^1(a^1)e_1+f^2(a^2)e_2+f^3(a^3)e_3\,, \quad (246)$$

где f^i - три, вообще говоря, разные гладкие функции одной действительной переменной, является аналитической. Аналитические функции вида (246) получаются, если брать полиномы или сходящиеся ряды поличисловой H_3 переменной с параметрами, которые также являются поличислами H_3.

Определим функцию $S_W(a)$ как произвольную линейную комбинацию компонент аналитической функции $F(X)$ (246) с действительными коэффициентами $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_2$, то есть

$$S_W(a)=\alpha_1\, f^1(a^1)+\alpha_2\, f^2(a^2)+\alpha_3\, f^3(a^3)\,. \quad (247)$$

Прямой подстановкой этой функции в уравнение (243), проверяем, что данная функция является решением уравнения (243). Условие (244) превращается в следующее неравенство:

$$\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3\,\frac{df^1}{da^2}\,\frac{df^2}{da^2}\,\frac{df^3}{da^3}\;>\;0\,. \qquad (248)$$

9 Полилинейные формы

Идеи обобщения понятия скалярного произведения до скалярного полипроизведения, то есть скалярного произведения с числом "сомножителей" (аргументов) более двух, и изучения пространств с полилинейной формой для дальнейшего применения в теоретической физике принадлежат Д.Г. Павлову [18]. Такие пространства при выполнении ряда условий являются финслеровыми пространствами. С другой стороны финслеровы пространства невырожденных поличисел размерности больше двух относятся именно к пространствам со скалярным полипроизведением.

Пусть $A \ni X, Y, Z, ...$ - некоторое линейное пространство над полем действительных чисел $R \ni x, y, z, a, b, c, ...$, то есть в этом пространстве определено сложение двух произвольных элементов и умножение произвольного элемента на любое действительное число, причем

$$(a+b)(xA+yB) = (ax)A + (bx)A + (ay)B + (by)B\,. \qquad (249)$$

Элементы линейного пространства будем называть векторами. Если для элементов $X, Y, ..., Z$ найдутся такие действительные числа $a, b, ..., c$, не все из которых равны нулю, что

$$aX + bY + ... + cZ = 0\,, \qquad (250)$$

то говорят, что элементы $X, Y, ..., Z$ пространства A *линейно зависимы.* Если таких чисел найти невозможно, то элементы $X, Y, ..., Z$ называются *линейно независимыми.*

Если в пространстве A имеется n линейно независимых элементов, а любые $(n+1)$ элементов всегда линейно зависимы, то пространство называют n-мерным. Такое пространство будем обозначать A_n. В n-мерном линейном пространстве всегда можно фиксировать n линейно независимых элементов $e_1, e_2, ..., e_n$, которые называются базисными, а сам такой набор - *базисом*, и выражать произвольный элемент X в виде линейной комбинации базисных элементов:

$$X = x^1 e_1 + x^2 e_2 + ... + x^n e_n \,, \tag{251}$$

где $x^1, x^2, ..., x^n$ - координаты элемента X в базисе $e_1, e_2, ..., e_n$. Такое разложение однозначно, поэтому вместо того, чтобы работать непосредственно с элементами самого линейного n-мерного пространства, можно работать с наборами n действительных чисел $(x^1, x^2, ..., x^n)$ - координатами элементов в данном базисе.

Будем говорить, что на пространстве A_n задана m-линейная $(m \geq 2)$ симметрическая форма, или *скалярное произведение* m векторов, если для любого набора m элементов $X_{(1)}, X_{(2)}, ..., X_{(m)}$ этого пространства определено действительное число $(X_{(1)}, X_{(2)}, ..., X_{(m)})$, которое обладает следующими двумя свойствами. Во-первых, при любой перестановке аргументов это число не меняется

$$(X_{(i_1)}, X_{(i_2)}, ..., X_{(i_m)}) = (X_{(1)}, X_{(2)}, ..., X_{(m)}) \,, \tag{252}$$

где $(i_1, i_2, ..., i_m)$ - подстановка $(1, 2, ..., m)$. Во-вторых, по каждому аргументу имеет место линейное свойство, например, по первому аргументу:

$$(aX + bX_{(1)}, X_{(2)}, ..., X_{(m)}) = a(X, X_{(2)}, ... \,) + b(X_{(1)}, X_{(2)}, ... \,) \,, \tag{253}$$

где a, b - произвольные действительные числа.

Если ненужно акцентировать внимание на числе аргументов m-линейной симметрической формы, то кратко такую форму будем называть полилинейной, подразумевая при этом, что она к тому же обязательно и симметрическая.

Если выбран некоторый базис $e_1, e_2, ..., e_n$, то в этом базисе полилинейная форма принимает вид

$$(X_{(1)}, X_{(2)}, ..., X_{(m)}) = \omega_{i_1 i_2 ... i_m} x^{i_1}_{(1)} x^{(i_2)}_{(2)} ... x^{i_m}_{(m)} \,, \tag{254}$$

где суммирование по дважды встречающимся индексам i_k в правой части идет от 1 до n, а

$$\omega_{i_1 i_2 ... i_m} = (e_{i_1}, e_{i_2}, ..., e_{i_m}) \,. \tag{255}$$

Из определения m-линейной симметрической формы в линейном пространстве A_n следует, что её значение не зависит от выбора базиса, то есть её значение является инвариантом, поэтому при переходе от одного базиса к другому компоненты $\omega_{i_1 i_2 ... i_m}$ формы преобразуются как компоненты m раз ковариантного тензора, так как компоненты векторов преобразуются как компоненты один раз контравариантных тензоров.

Из условия симметричности и формулы (255) следует, что при любой перестановке индексов у компонент $\omega_{i_1 i_2 \dots i_m}$ симметрической формы их значение не меняется, например:

$$\omega_{2,1,3,4,\dots,m} = \omega_{1,2,3,4,\dots,m}\,, \qquad \omega_{1,2,\dots,m-1,m} = \omega_{m,m-1,\dots,2,1}\,. \tag{256}$$

Если число аргументов полилинейной формы равно двум, форма называется билинейной.

Если число аргументов m-линейной формы равно размерности пространства ($m = n$), будем называть такую полилинейную форму *полиформой.*

Рассмотрим m-линейную форму от m одинаковых аргументов, то есть $(X, X, \dots, X)$. Формально будем обозначать такую форму $|X|^m$,

$$|X|^m = \omega_{i_1 i_2 \dots i_m} x^{i_1} x^{i_2} \dots x^{i_m}\,. \tag{257}$$

Таким образом, $|X|^m$ - это однородная форма (полином) m-го порядка от n действительных аргументов $x^1, x^2, \dots, x^n$, координат вектора X. Если существует базис, в котором форма $|X|^m$ имеет такой вид, что при перестановке двух любых координат $x^i \leftrightarrow x^j$ вектора X, значение формы не меняется, то форму $|X|^m$, как и исходную m-линейную симметрическую форму $(X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(m)})$ в этом базисе, будем называть *сверхсимметрической*, или сверхсимметрической записью исходной формы в специальном базисе.

В качестве примера рассмотрим в аффинном пространстве $A_4 \ni X(x^0, x^1, x^2, x^3)$ билинейную форму вида

$$(X, Y) = x^0 y^0 - x^1 y^1 - x^2 y^2 - x^3 y^3\,. \tag{258}$$

Очевидно, что она симметрическая

$$(Y, X) = (X, Y) \tag{259}$$

и линейная по каждому аргументу, так для первого аргумента справедлива следующая формула:

$$(aX_{(1)} + bX_{(2)}, Y) = a(X_{(1)}, Y) + b(X_{(2)}, Y)\,. \tag{260}$$

Форма (258) не является сверхсимметрической, так как

$$|X|^2 = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2\,, \tag{261}$$

и, например, при $x^0 \leftrightarrow x^1$ величина $|X|^2$, вообще говоря, меняет своё значение.

Выберем в качестве новых базисных векторов векторы:

$$\left.\begin{aligned} e_0 &= (\tfrac{3\pm\sqrt{3}}{2}, \tfrac{1\pm\sqrt{3}}{2}, \tfrac{1\pm\sqrt{3}}{2}, \tfrac{1\pm\sqrt{3}}{2})\,, \\ e_1 &= (\;1\;,\;1\;,\;0\;,\;0\;)\,, \\ e_2 &= (\;1\;,\;0\;,\;1\;,\;0\;)\,, \\ e_3 &= (\;1\;,\;0\;,\;0\;,\;1\;)\,. \end{aligned}\right\} \tag{262}$$

Так как

$$\begin{vmatrix} \frac{3\pm\sqrt{3}}{2} & \frac{1\pm\sqrt{3}}{2} & \frac{1\pm\sqrt{3}}{2} & \frac{1\pm\sqrt{3}}{2} \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \mp\sqrt{3}\,, \tag{263}$$

эти векторы линейно независимы, и их можно выбрать в качестве базисных. Векторы e_i обладают следующими свойствами:

$$(e_0, e_0) = 0\,, \quad (e_1, e_1) = 0\,, \quad (e_2, e_2) = 0\,, \quad (e_3, e_3) = 0\,, \tag{264}$$

$$(e_i, e_j) = 1\,, \quad \text{если } \; i \neq j\,. \tag{265}$$

Так как выполняются свойства (264), то векторы e_1, e_2, e_3, e_4 по определению являются изотропными, и базис, состоящий из таких векторов, естественно назвать изотропным.

Используя эти свойства базисных векторов и оставив для координат прежние обозначения, запишем форму (258) в новых координатах:

$$\begin{aligned} (X, Y) = x^0y^1 + x^0y^2 + x^0y^3 + x^1y^2 + x^1y^3 + x^2y^3 + \\ + x^1y^0 + x^2y^0 + x^3y^0 + x^2y^1 + x^3y^1 + x^3y^2\,. \end{aligned} \tag{266}$$

Форма (261) тогда принимает вид:

$$(X, X) = 2x^0x^1 + 2x^0x^2 + 2x^0x^3 + 2x^1x^2 + 2x^1x^3 + 2x^2x^3\,. \tag{267}$$

При любой перестановке $x^i \leftrightarrow x^j$ форма (267) не меняется по форме и по значению, поэтому данная форма и форма (266) по определению являются сверхсимметрическими, или можно сказать, что они являются сверхсимметрическими записями форм (258) и (261).

Если от системы координат, в которых билинейная форма (258) принимает сверхсимметрический вид (266), перейти к новой системе координат с помощью преобразований группы Лоренца, то опять получим систему координат в которых билинейная форма (258) имеет тот же сверхсимметрический вид (266). Новые базисные векторы $e_{0'}, e_{1'}, e_{2'}, e_{3'}$ будут обладать теми же свойствами (264) и (265), то есть, в частности, будут изотропными. Таким образом, существует шести параметрическое семейство базисов со свойствами (264) и (265).

Всякая ли m-линейная симметрическая форма допускает сверхсимметрическую запись? Автор не знает ответа на этот вопрос. Если да, то хорошо бы иметь алгоритм построения такого базиса, в котором это явно просматривается. Если не всякая, то необходимо иметь критерий, с помощью которого это было бы можно выяснить.

Полилинейные формы вида (266) и аналогичные для $m > 2$ представляют собой интересный объект для изучения, особенно интересны соответствующие полиформы ($m = n$), последние возникают при изучение гиперкомплексных чисел H_n. Пусть $e_1, e_2, ..., e_n$ - базис, а $x^1, x^2, ..., x^n$ - координаты, выпишем несколько таких полиформ:
$\mathbf{m = n = 2}$,

$$(X, Y) = \frac{1}{2}(x^1y^2 + x^2y^1)\,, \tag{268}$$

соответственно

$$(X, X) = x^1x^2\,; \tag{269}$$

$\mathbf{m = n = 3}$,

$$\begin{gathered}(X, Y, Z) = \frac{1}{6}\times\\ \times(x^1y^2z^3 + x^2y^3z^1 + x^3y^1z^2 + x^2y^1z^3 + x^3y^2z^1 + x^1y^3z^2)\,,\end{gathered} \tag{270}$$

соответственно

$$(X, X, X) = x^1x^2x^3\,; \tag{271}$$

$\mathbf{m = n = 4}$,

$$\begin{aligned}(X, Y, Z, U) = \frac{1}{24}\times\\ \times(x^1y^2z^3u^4 + x^2y^3z^4u^1 + x^3y^4z^1u^2 + x^4y^1z^2u^3+\\ +x^2y^1z^3u^4 + x^3y^2z^4u^1 + x^4y^3z^1u^2 + x^1y^4z^2u^3+\\ +x^3y^2z^1u^4 + x^4y^3z^2u^1 + x^1y^4z^3u^2 + x^2y^1z^4u^3+\\ +x^4y^2z^3u^1 + x^1y^3z^4u^2 + x^2y^4z^1u^3 + x^3y^1z^2u^4+\\ +x^1y^3z^2u^4 + x^2y^4z^3u^1 + x^3y^1z^4u^2 + x^4y^2z^1u^3+\\ +x^1y^2z^4u^3 + x^2y^3z^1u^4 + x^3y^4z^2u^1 + x^4y^1z^3u^2)\,,\end{aligned} \tag{272}$$

соответственно

$$(X, X, X, X) = x^1x^2x^3x^4\,; \tag{273}$$

$\mathbf{m = n}$,

$$(X_{(1)}, X_{(2)}, ..., X_{(n)}) = \frac{1}{n!}\sum_{(1,2,...,n)} x^{i_1}_{(1)}x^{i_2}_{(2)}...x^{i_n}_{(n)}\,, \tag{274}$$

где суммирование идёт по наборам индексов $(i_1, i_2, ..., i_n)$, которые являются всевозможными подстановками набора n натуральных чисел $(1, 2, ..., n)$, соответственно

$$|X|^n = x^1x^2...x^n\,. \tag{275}$$

Сверхсимметрические полиформы (274) при $n \geq 2$ будем называть h_n-формами, а компоненты этих форм в специальном базисе, в котором они имеют вид (274), будем обозначать $\chi_{i_1i_2...i_n}$. Из формулы (274) следует, что

$$\chi_{i_1i_2...i_n} = \begin{cases} \dfrac{1}{n!}\,, & \text{если все индексы разные}\,, \\ 0\,, & \text{во всех остальных случаях}\,. \end{cases} \tag{276}$$

Такой специальный базис будем называть *ψ-базисом*, или *изотропным базисом* и обозначать $\psi_1, \psi_2, ..., \psi_n$, или $e_1, e_2, ..., e_n$. Полиформы (274) связаны с поличислами H_n, именно по формуле (275) n-я степень нормы числа $X \ni H_n$, если у этого числа норма определена, выражается через координаты в изотропном базисе.

Если существует такой базис, в котором форма $|X|^m$ содержит не все координаты вектора X, то такую форму и соответствующую ей форму $(X, Y, ..., Z)$ будем называть *вырожденными.* В дальнейшем нас будут интересовать только *невырожденные полиформы.*

Среди всех полилинейных форм выделяются формы, которые обладают особым свойством, которое мы будем называть *свойством разрешимости.*

Будем говорить, что полилинейная форма (254) обладает *свойством разрешимости*, или *разрешима*, если существует такой тензор $\omega^{j_1 j_2 \cdots j_m}$, что

$$\begin{gathered}\omega^{j_1 j_2 \cdots j_m} \omega_{j_1 i_2 \dots i_m} x^{i_2} \dots x^{i_m} \omega_{j_2 k_2 \dots k_m} x^{k_2} \dots x^{k_m} \dots \omega_{j_m l_2 \dots l_m} x^{l_2} \dots x^{l_m} = \\ = \alpha \left(\omega_{i_1 i_2 \dots i_m} x^{i_1} x^{i_2} \dots x^{i_m}\right)^{m-1} ,\end{gathered} \tag{277}$$

где α - некоторое действительное число, причём в правой части вначале производится суммирование по индексам $i_1, i_2, ..., i_m,$ внутри круглых скобок, а затем полученная сумма возводится в $(m-1)$-ую степень.

Естественно, что при этом компоненты матрицы $(\omega^{j_1 j_2 \cdots j_m})$ выражаются неким образом через компоненты матрицы $(\omega_{i_1 i_2 \dots i_m})$ разрешимой формы. Если существует такой базис, в котором

$$(\omega^{j_1 j_2 \cdots j_m}) = \beta \cdot (\omega_{i_1 i_2 \dots i_m}) , \tag{278}$$

где β - некоторое действительное число, то будем называть такой базис *собственным базисом полилинейной формы.* О форме же будем говорить, что она имеет собственный базис.

Любая невырожденная билинейная форма является разрешимой. Полиформы (274), связанные с гиперкомплексными числами H_n, разрешимы, а базис, в котором эти формы имеют вид (274), есть собственный базис этих форм.

Для билинейной формы, если $det(\omega_{ij}) \neq 0$, всегда можно построить дважды контравариантный тензор ω^{ij}, компоненты которого образуют обратную матрицу к матрице (ω_{ij}), поэтому выполняется свойство разрешимости (277):

$$\omega^{j_1 j_2} \cdot \omega_{j_1 i_1} x^{i_1} \cdot \omega_{j_2 i_2} x^{i_2} = \omega_{i_1 i_2} x^{i_1} x^{i_2} . \tag{279}$$

Таким образом, невырожденные билинейные формы всегда разрешимы. Более того, для них всегда существует собственный базис, составленный из собственных векторов матрицы (ω_{ij}), делённых на $\sqrt{|\lambda_i|}$, где λ_i - собственное значение соответствующего собственного вектора. В таком базисе матрицы (ω_{ij}), (ω^{ij}) совпадают

$$(\omega^{ij}) = (\omega_{ij}) = diag(a_1, a_2, ..., a_n)\,, \tag{280}$$

где $a_i = \pm 1$.

10 Антиопределители

Если $n > 3$, вычислить значение h_n-формы даже в ψ-базисе (274) не просто. Для того чтобы это понять, достаточно взглянуть на формулу (272), по которой вычисляется h_4-форма. В данном параграфе мы опишем удобный алгоритм вычисления h_n-форм.

Имеет место некоторое формальное сходство формулы (274) с формулой вычисления определителя n-го порядка. Отличие состоит в присутствии в формуле (274) общего множителя $\dfrac{1}{n!}$ и отсутствии знаковых множителей перед аддитивными членами под знаком суммы. В силу этого представим h_n-форму в виде множителя $\dfrac{1}{n!}$ и некой величины, которую будем называть *антиопределителем*, или *перманентом* n-го порядка, то есть по определению:

$$(X_{(1)}, X_{(2)}, ..., X_{(n)}) = \frac{1}{n!}\begin{vmatrix} x^1_{(1)} & x^1_{(2)} & \cdots & x^1_{(n)} \\ x^2_{(1)} & x^2_{(2)} & \cdots & x^2_{(n)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x^n_{(1)} & x^n_{(2)} & \cdots & x^n_{(n)} \end{vmatrix}_+ \,, \tag{281}$$

$$adet(x^i_{(j)}) \equiv \begin{vmatrix} x^1_{(1)} & x^1_{(2)} & \cdots & x^1_{(n)} \\ x^2_{(1)} & x^2_{(2)} & \cdots & x^2_{(n)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x^n_{(1)} & x^n_{(2)} & \cdots & x^n_{(n)} \end{vmatrix}_+ \equiv \sum_{(1,2,...,n)} x^{i_1}_{(1)} x^{i_2}_{(2)} ... x^{i_n}_{(n)}\,, \tag{282}$$

где суммирование идёт по всевозможным подстановкам $(1, 2, ..., n)$.

Алгоритм вычисления антиопределителей и их свойства сформулируем аналогично алгоритму вычисления определителей. Словами определение (3.2.2) можно записать следующим образом.

1). Антиопределитель квадратной $n \times n$ матрицы $\hat{X} = (x_{ij})$ есть сумма $n!$ произведений элементов матрицы $\hat{X}$, причём в каждом таком произведении присутствует один и только один элемент из каждой строки и каждого столбца.

Из определения непосредственно следуют ряд свойств антиопределителей.

2). Антиопределитель от транспонированной матрица равен антиопределителю от исходной матрицы,

$$adet(\hat{X}^T) = adet(\hat{X})\,. \tag{283}$$

Это же свойство можно переформулировать по-другому.

3). Если какое-то утверждение или свойство справедливо для столбцов антиопределителя, то оно справедливо и для его строк, и наоборот.

Это позволяет формулировать многие утверждения или свойства только в одном экземпляре - только для столбцов, что мы и сделаем.

4). Если у матрицы имеется столбец состоящий из одних нулей, то антиопределитель этой матрицы равен нулю.

5). Если какой-нибудь столбец матрицы имеет общий множитель, то его можно вынести за знак антиопределителя.

6). Если какой-нибудь столбец с номером j матрицы $\hat{X}$ можно представить как сумму двух столбцов: столбца a и столбца b - то антиопределитель матрицы есть сумма двух антиопределителей:

$$adet(\hat{X}) = adet(\hat{X}_a) + adet(\hat{X}_b)\,, \tag{284}$$

где матрица $\hat{X}_a$ получается из матрицы $\hat{X}$ заменой j-го столбца на столбец a, а матрица $\hat{X}_b$ получается из матрицы $\hat{X}$ заменой j-го столбца на столбец b.

Из последних двух свойств следует более общее утверждение.

7). Пусть столбец с номером j матрицы $\hat{X}$ есть линейная комбинация любого количества столбцов:

$$x_i = \alpha \cdot a_i + \beta \cdot b_i + ... + \gamma \cdot c_i + ...\,, \tag{285}$$

где α, β, ..., γ, ... - числа. Тогда

$$adet(\hat{X}) = \alpha \cdot adet(\hat{X}_a) + \beta \cdot adet(\hat{X}_b) + ... + \gamma \cdot adet(\hat{X}_c) + ...\tag{286}$$

Матрицы $\hat{X}_a$, $\hat{X}_b$, ... , $\hat{X}_c$, ... получаются из матрицы $\hat{X}$ заменой j-го столбца на столбцы a, b, ... , c, ... соответственно.

Обратимся опять к определению антиопределителя:

$$adet(\hat{X}) \equiv \sum_{(1,2,...,n)} x_{i_1 1} x_{i_2 2} ... x_{i_n n} \, . \tag{287}$$

Выделим в сумме, стоящей справа, все слагаемые, содержащие некоторый элемент x_{ij} матрицы $\hat{X} = x_{ij}$, и вынесем его за скобки. В скобках останется сумма из $(n-1)!$ слагаемых, каждое из которых будет содержать по одному элементу из каждой строки, кроме строки i, и каждого столбца, кроме столбца j, матрицы $\hat{X}$, то есть это будет антиопределитель, обозначим его X_{ij}, матрицы $(n-1)\times(n-1)$, которая получается из матрицы $\hat{X}$ вычёркиванием i-ой строки и j-го столбца. Будем называть X_{ij} алгебраическим дополнением элемента x_{ij}. Проделаем описанную выше процедуру для каждого элемента некоторого выделенного столбца и получим алгоритм вычисления антиопределителя n-го порядка через антиопределители порядка $(n-1)$.

8). Формула разложения антиопределителя по фиксированному столбцу:

$$adet(\hat{X}) = x_{1j} X_{1j_-} + x_{2j} X_{2j_-} + ... + x_{nj} X_{nj_-} \, . \tag{288}$$

9). С помощью процедуры разложения антиопределителя по столбцу вычисление любого антиопределителя n-го порядка всегда можно свести к вычислению антиопределителей второго или третьего порядка, которые вычисляются аналогично тому, как вычисляются обыкновенные определители, но без знаков минус:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}_+ = ad + cb \, , \tag{289}$$

$$\begin{vmatrix} a & \alpha & d \\ \beta & b & \gamma \\ e & \delta & c \end{vmatrix}_+ = abc + \alpha\gamma e + \beta\delta d + ebd + \beta\alpha c + \delta\gamma a \, , \tag{290}$$

где $a, b, c, d, e, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ - действительные числа.

10). Антиопределитель от диагональной матрицы равен произведению её элементов на главной диагонали.

11). Антиопределитель от матрицы, у которой отличные от нуля элементы стоят на побочной диагонали, равен произведению этих элементов.

12). Антиопределитель от треугольной матрицы, то есть матрицы, у которой выше или ниже главной диагонали (или побочной диагонали) все элементы равны нулю, равен произведению элементов, стоящих на главной диагонали (или побочной диагонали).

13). Если у антиопределителя поменять местами два столбца, то антиопределитель не изменит своё значение.

Из этого свойства следует более общее правило.

14). При любой перестановке столбцов антиопределителя его значение не меняется.

15). Антиопределитель от матрицы $n \times n$, у которой все элементы равны единице, равен $n!$.

16). Антиопределитель от матрицы $n \times n$, у которой все столбцы одинаковые, равен произведению $n!$ на произведение всех элементов одного столбца.

17). Антиопределитель от матрицы $\hat{X}$ $(n \times n)$, которая состоит из $(n-1)$ одинаковых столбцов с элементами $x_1, x_2, ..., x_n$ и одного, вообще говоря, другого столбца с элементами $x'_1, x'_2, ..., x'_n$, вычисляется по формуле

$$adet(\hat{X}) = (n-1)! \cdot \left(x'_1 x_2 ... x_n + x_1 x'_2 ... x_n + ... + x_1 ... x_{n-1} x'_n \right), \qquad (291)$$

или, если все $x_i \neq 0$, эту формулу можно переписать следующим образом:

$$adet(\hat{X}) = (n-1)! \cdot x_1 x_2 ... x_n \left(\frac{x'_1}{x_1} + \frac{x'_2}{x_2} + ... + \frac{x'_n}{x_n} \right). \qquad (292)$$

18). Если n - нечётно, то антиопределитель от антисимметрической матрицы равен нулю.

19). Если матрица $\hat{X}$ является блочной матрицей, у которой на главной или побочной диагонали стоят матрицы $\hat{A}, \hat{B}, ..., \hat{C}$, а выше или ниже стоят нули, то антиопределитель матрицы $\hat{X}$ равен произведению антиопределителей матриц $\hat{A}, \hat{B}, ..., \hat{C}$:

$$adet\left(\hat{X}\right) = adet\left(\hat{A}\right) \cdot adet\left(\hat{B}\right) \cdot ... \cdot adet\left(\hat{C}\right). \qquad (293)$$

11 Линейные пространства со скалярным полипроизведением

Рассмотрим линейное пространство $A \ni X, Y, Z, ...$ над полем действительных чисел $R \ni x, y, z, a, b, c, ...$, в котором определена m-линейная симметрическая форма, то есть для любых m векторов определено скалярное полипроизведение $(X_1, X_2, ..., X_m)$. Термин "скалярное полипроизведение" подчёркивает, что число "сомножителей" (аргументов) в таком математическом объекте, вообще говоря, больше двух, но, конечно, обычное скалярное произведение с двумя аргументами является частным случаем скалярного полипроизведения.

Будем говорить, что вектор Y трансверсален ("ортогонален") вектору X, когда

$$(X, X, ..., X, Y) = 0\,. \tag{294}$$

Если не только вектор Y трансверсален вектору X, но X трансверсален вектору Y, то назовём такие векторы взаимно трансверсальными (взаимно "ортогональными").

Пусть имеется базис $e_1, e_2, ..., e_n$, состоящий из попарно взаимно трансверсальных векторов, причём

$$|e_i|^m \neq 0\,. \tag{295}$$

Будем называть такие базисы трансверсальными ("ортогональными"). Коэффициенты разложения произвольного вектора

$$X = x^1 e_1 + x^2 e_2 + ... + x^n e_n \tag{296}$$

в этом базисе вычисляются по формулам

$$x^1 = \frac{(e_1, ..., e_1, X)}{|e_1|^m}\,,\ ...\,,\ x^n = \frac{(e_n, ..., e_n, X)}{|e_n|^m}\,. \tag{297}$$

Если к тому же для всех базисных векторов

$$|e_i|^m = 1\,, \tag{298}$$

то будем называть такой базис "ортонормированным". Ниоткуда не следует, что такой базис, хотя бы один, существует в конкретном линейном пространстве со скалярным полипроизведением. Предположим, что в данном полилинейном пространстве такой базис $e_1, e_2, ..., e_n$ существует. Тогда коэффициенты разложения вектора X по базисным векторам e_i равны скалярным произведениям $(m-1)$-го вектора e_i и вектора X:

$$x^1 = (e_1, ..., e_1, X)\,,\ ...\,,\ x^n = (e_n, ..., e_n, X)\,. \tag{299}$$

Эти формулы являются аналогами (обобщениями) формул для вычисления коэффициентов разложения вектора в ортонормированном базисе евклидова пространства. Само разложение запишется при этом в нашем случае следующим образом:

$$X = (e_i, ..., e_i, X) \cdot e_i\,.$$

Для того, чтобы показать возможность существования подобных базисов в неквадратичных пространствах, рассмотрим в качестве примера линейное пространство с h_4-формой. Перейдём от базиса $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$, в котором скалярное произведение четырёх векторов X, Y, Z, U имеет вид (272) к базису $1, j, k, jk$ по формулам:

$$\left.\begin{aligned} 1 &= \psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \psi_4\,, \\ j &= \psi_1 + \psi_2 - \psi_3 - \psi_4\,, \\ k &= \psi_1 - \psi_2 + \psi_3 - \psi_4\,, \\ jk &= \psi_1 - \psi_2 - \psi_3 + \psi_4\,. \end{aligned}\right\} \tag{300}$$

Для того чтобы векторы $1, j, k, jk$ составляли базис, они должны быть линейно независимы. Это выполняется, так как

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -16 \neq 0\,. \tag{301}$$

Этот базис является "ортонормированным". Чтобы это проверить надо воспользоваться формулами (281), (282), (292) вычисления скалярных произведений в пространстве с h_4-формой через антиопределители. Всего при этом нам придётся вычислить 16 антиопределителей, например:

$$(e_2, e_2, e_2, e_2) = \frac{1}{24} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}_+ = 1\,, \tag{302}$$

$$(e_2, e_2, e_2, e_4) = \frac{1}{24} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}_+ = 0\,. \tag{303}$$

Результат: в пространстве поличисел H_4 базис $1, i, j, jk$ (300) является "ортонормированным", и в нём для каждого числа X имеет место разложение

$$X = (1, 1, 1, X) \cdot 1 + (i, i, i, X) \cdot i + (j, j, j, X) \cdot j + (jk, jk, jk, X) \cdot jk.$$

Если невырожденная полилинейная форма на некотором множестве векторов принимает положительные значения, то соответствующее полилинейное пространство является метрическим, а именно - финслеровым.

Рассмотрим m-линейную форму, определённую в данном полилинейном пространстве, от m одинаковых аргументов:

$$|X|^m \equiv (X, X, ..., X)\,. \tag{304}$$

Всё множество векторов представим себе как объединение четырёх непересекающихся подмножеств:

1) 0 - нулевой вектор;

2) множество изотропных векторов, это такие векторы $X \neq 0$, что

$$|X|^m = 0\,; \tag{305}$$

3) множество измеримых векторов, то есть таких векторов X, что

$$|X|^m > 0\,; \tag{306}$$

4) множество неизмеримых векторов, для которых

$$|X|^m < 0\,. \tag{307}$$

Естественно считать длины нулевого и изотропных векторов равными нулю, а длину l измеримого вектора X определить формулой

$$l = \sqrt[m]{(X, X, ..., X)}\,. \tag{308}$$

Будем считать наше линейное пространство центроаффинным, то есть существует некая точка O (центр), и начала всех радиус-векторов совпадают с этой точкой. Тогда мы получаем координатное пространство, у которого центроаффинные касательные пространства $\mathcal{A}_n(M)$ в каждой точке M основного пространства изоморфно исходному центроаффинному пространству. Элемент длины в основном пространстве определим формулой:

$$dl = \sqrt[m]{(dX, dX, ..., dX)} \tag{309}$$

или

$$dl = \sqrt[m]{\omega_{i_1 i_2 ... i_m} dx^{i_1} dx^{i_2} ... dx^{i_m}}\,. \tag{310}$$

Таким образом, центроаффинное полилинейное пространство с метрической функцией

$$L(dx) = \sqrt[m]{\omega_{i_1 i_2 ... i_m} dx^{i_1} dx^{i_2} ... dx^{i_m}} \tag{311}$$

является финслеровым пространством, если для m-линейной формы существуют измеримые векторы и если

$$rang\left(\frac{\partial^2 L(dx;x)}{\partial(dx^i)\partial(dx^j)}\right)=n-1\,. \tag{312}$$

Пространства со скалярным полипроизведением, у которых форма $|X|^m$ вырожденная, то есть в каком-то базисе содержит не все n координат векторной переменной X, не удовлетворяют условию (312).

То как была определена метрическая функция в линейном пространстве со скалярным полипроизведением, формула (311), и соответственно длина вектора (308), дает нам "максимальную" геометрию в том смысле, что все измеримые векторы (306) пространства остаются измеримыми векторами в определённой выше финслеровой геометрии. В общем случае можно построить и другие финслеровы геометрии на основе фиксированного линейного пространства с фиксированной m-линейной формой. Поясним это на примерах.

Рассмотрим пространство с билинейной формой (258). Измеримые векторы (x^0,x^1,x^2,x^3), в смысле (261), в этом случае это векторы, удовлетворяющие условию

$$(x^0)^2-(x^1)^2-(x^2)^2-(x^4)^2>0\,. \tag{313}$$

Если определена максимальная финслерова геометрия, то метрическая функция определена на всех измеримых, в смысле (261), векторах, то есть каждый измеримый вектор порождает луч, пересекающий индикатрису, уравнение которой есть

$$(x^0)^2-(x^1)^2-(x^2)^2-(x^4)^2=1\,. \tag{314}$$

Если вектор X_{ind} - это радиус-вектор с координатами какой-то произвольной точки индикатрисы, то множество векторов вида αX_{ind}, где $\alpha>0$ - произвольное положительное действительное число, совпадает с множеством измеримых векторов, в смысле (261). Индикатриса (269) - поверхность второго порядка, двуполостной гиперболоид - состоит из двух несвязанных поверхностей, одна из которых K_+ находится в конусе будущего (её можно выделить неравенством $x^0>0$), а другая K_- - в конусе прошлого (её можно выделить неравенством $x^0<0$). Если мы не хотим ограничивать непрерывную группу изометрической симметрии, свойственную билинейной форме, то на основе билинейной формы (258) можно определить три финслеровы геометрии:

1) максимальная финслерова геометрия, область определения метрической функции - $K_+ \bigcup K_-$;

2) финслерова геометрия с областью определения K_+, координата x^0 всех измеримых векторов при при этом удовлетворят условию $x^0 > 0$;

3) финслерова геометрия с областью определения K_-, координата x^0 всех измеримых векторов при при этом удовлетворят условию $x^0 < 0$.

В математическом плане финслеровы геометрии 2) и 3) не отличаются друг от друга, так как при преобразовании координат $x^0 \to -x^0$, переходят друг в друга, а финслерова геометрия 1) качественно отличается от геометрии 2) и геометрии 3).

Рассмотрим пространство с h_4-формой (272). Измеримые радиус-векторы (x^1, x^2, x^3, x^4) в смысле (306) в данном случае удовлетворяют условию:

$$x^1x^2x^3x^4 > 0\,. \tag{315}$$

Если в координатном пространстве (x^1, x^2, x^3, x^4) вводится максимальная геометрия, уравнение индикатрисы в касательном центроаффинном пространстве в каждой точке $(x_0^1, x_0^2, x_0^3, x_0^4)$ основного пространства будет иметь вид

$$(x^1 - x_0^1)(x^2 - x_0^2)(x^3 - x_0^3)(x^4 - x_0^4) = 1\,. \tag{316}$$

Индикатриса (316) - поверхность четвёртого порядка, восьмиполостный гиперболоид - состоит из восьми несвязанных поверхностей, одна из которых K_+ находится в конусе будущего (её можно выделить неравенствами $x^i - x_0^i > 0$), а другая K_- - в конусе прошлого (её можно выделить неравенством $x^i - x_0^i < 0$).

Если в линейном пространстве со скалярным полипроизведением размерности n возможно определить несколько качественно различных финслеровых геометрий, то обязательно будем выделять две из них: максимальную геометрию, которую будем обозначать $\mathfrak{F}_n^{\mathfrak{max}}$, и финслерову геометрию, у которой все измеримые векторы лежат в конусе будущего и которую будем обозначать $\mathfrak{F}_n^+$.

Если m-форма обладает свойством разрешимости (277), то для финслеровой геометрии с метрической функцией (311) можно легко найти тангенциальное уравнение индикатрисы. Так по определению

$$p_i = \frac{\omega_{ii_2\ldots i_m} dx^{i_2}\ldots dx^{i_m}}{(\omega_{j_1j_2\ldots j_m} dx^{i_1}dx^{i_2}\ldots dx^{i_m})^{\frac{m-1}{m}}}\,. \tag{317}$$

Используя формулу (277), получим тангенциальное уравнение индикатрисы:

$$\omega^{j_1 j_2 ... j_m} p_{j_1} p_{j_2} ... p_{j_m} - \alpha = 0\,. \tag{318}$$

12 Норма и группа симметрии поличисел

Непосредственно из теоремы Вейерштрасса следует, что любая система невырожденных поличисел P_n изоморфна алгебре квадратных диагональных матриц $(k+m) \times (k+m)$, у которых первые k элементов - произвольные действительные числа, а остальные m элементов - комплексные числа, причем алгебра P_n рассматривается над полем действительных чисел, то есть такие матрицы складываются и перемножаются обычным образом, а умножаются только на действительные числа. Размерность таких гиперкомплексных чисел равна

$$k + 2m = n\,. \tag{319}$$

В силу этого неизоморфные системы невырожденных поличисел однозначно определяются (классифицируются) парой действительных чисел, например, k и m, размерность пространства определяется формулой (319). Чтобы не изобретать новое обозначение для невырожденных поличисел предлагается использовать старое обозначение для поличисел, но записывать размерность пространства в виде формулы P_{k+2m}, например, $P_{3+2\cdot 4}$, где $k = 3$, $m = 4$, а размерность пространства $n = 11$.

Таким образом, для любой системы невырожденных поличисел существует базис e_1, e_2, $...e_n$, в котором:

$$p^l_{ij} = \begin{cases} 1, \ i = j = l = 1, 2, ..., k, k+1, k+3, ..., n-1, \\ 1, \ j = l = i+1 = k+2, k+4, ..., n\,, \\ 1, \ i = l = j+1 = k+2, k+4, ..., n\,, \\ -1, \ i = j = l+1 = k+2, k+4, ..., n\,, \\ 0, \ \text{во всех остальных случаях}\,. \end{cases} \tag{320}$$

Такой базис будем называть изотропным. При алгебраических вычислениях (преобразованиях) удобнее пользоваться именно этим базисом.

В матричном представлении на множестве квадратных действительных матриц $n \times n$ изотропный базис можно реализовать из матриц трёх видов: диагональных матриц, у которых на главной диагонали имеется единственный отличный от нуля элемент, равный единице, а все остальные элементы равны нулю; а также блочных матриц двух видов, у которых на главной диагонали стоит одна из двух матриц

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

а все остальные элементы равны нулю.

Используя числовой тензор p^l_{ij}, можно построить много других числовых тензоров, например,

$$q_{ij} = p^l_{is} \cdot p^s_{lj} \,. \tag{321}$$

Для поличисел тензор q_{ij} является симметрическим, так как

$$q_{ij} = q_{ji} \,. \tag{322}$$

Построим этот тензор в изотропном базисе (320):

$$(q_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & ... & 1 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & ... & 0 & 2 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & ... & 0 & 0 & -2 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 2 & ... & 0 \\ 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & -2 \end{pmatrix}, \tag{323}$$

то есть в этом базисе компоненты тензора q_{ij} образуют диагональную матрицу, у которой первые k элементов равны 1, а остальные $2m$ элементов заполняют главную диагональ парами $\{2, -2\}$, поэтому в изотропном базисе

$$det(q_{ij}) = (-4)^m \,.$$

Отсюда следует, что в любой системе координат для невырожденных поличисел $P_{k+2\cdot m}$ выполняется условие

$$det(q_{ij}) \neq 0 \,, \tag{324}$$

а значит можно построить дважды контравариантный тензор q^{ij} такой, что

$$q^{il} q_{lj} = q_{jl} q^{li} = \delta^i_j \,. \tag{325}$$

Невырожденные поличисла $P_{r+2\cdot 0}$ занимают особое положение среди всех невырожденных поличисел, поэтому введём для них специальное обозначение

$$H_r \equiv P_{r+2\cdot 0}\,. \tag{326}$$

Алгебра поличисел H_r изоморфна алгебре действительных квадратных диагональных матриц $r \times r$ над полем действительных чисел. Удобно также выделить поличисла $P_{0+2\cdot m} \equiv H_m^C$. Можно представить, что элементами такой алгебры являются комплексные квадратные диагональные матрицы $m \times m$, их можно складывать, перемножать и умножать на действительные числа, то есть это алгебра над полем действительных чисел. Тогда справедлива формула

$$P_{k+2m} = H_k \oplus H_m^C\,. \tag{327}$$

Очевидно, что норма на множестве поличисел P_{k+2m} в изотропном базисе определяется формулой

$$|X| = \sqrt[n]{x^1 ... x^k\,[(x^{k+1})^2 + (x^{k+2})^2]\,...\,[(x^{n-1})^2 + (x^n)^2]}\,, \tag{328}$$

а область, где норма определена, задается неравенствами

$$x^1 x^2 ... x^k \geq 0\,. \tag{329}$$

Все три требования, сформулированные в начале данного раздела, которым должна удовлетворять норма поличисел, выполняются.

Область

$$x^1 > 0\,,\ x^2 > 0\,,\ ...\,,\ x^k > 0\,,$$

будем называть конусом будущего. Если заменить неравенство (329) этим более сильным условием принадлежности поличисел конусу будущего, то тем более все три аксиомы в определении нормы поличисел выполняются.

В ковариантной форме норма поличисла (328) записывается следующим образом:

$$|X| = \sqrt[n]{g_{i_1 i_2 ... i_n} x^{i_1} x^{i_2} ... x^{i_n}}\,, \tag{330}$$

где $g_{i_1 i_2 ... i_n}$ - метрический тензор.

Учитывая, что в изотропном базисе тензор p^l_{ij} определяется формулой (320), получим в этом базисе

$$|X|^n = det(x^i p^l_{ij})\,, \tag{331}$$

но справа в этой формуле стоит величина, которая не изменяется при переходе от одного базиса к другому, поэтому формула (331) верна в любом базисе, то есть не зависит от выбора базиса. Формула (331) определяет норму числа X, если правая часть больше или равна нуля, $det(x^i p^l_{ij}) \geq 0$, второе и третье требования в определении нормы поличисла выполняются автоматически.

Группой симметрии $G_1(P_{k+2m})$ пространства P_{k+2m} будем называть непрерывную группу линейных преобразований координат векторов этого пространства в фиксированном базисе, которые (преобразования) не меняют норму любого числа, для которого норма существует. Индекс "1" имеет важный смысл, ниже будет показано, что группа симметрии изоморфна множеству унимодулярных поличисел с групповым умножением, совпадающим с поличисловым.

Непосредственно из формулы (328) следует, что группа $G_1(P_{k+2m})$ состоит из двух видов преобразований: эллиптических поворотов и гиперболических поворотов, под последними мы понимаем одновременное растяжение по одним координатам и обязательно сжатие по другим, при выполнении некоторого специального условия.

Эллиптические повороты осуществляются матрицами вида:

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & 1 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & ... & 0 & \cos\varphi_i & -\sin\varphi_i & 0 & ... & 0 \\ 0 & ... & 0 & \sin\varphi_i & \cos\varphi_i & 0 & ... & 0 \\ 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}. \qquad (332)$$

Здесь матрица поворота

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi_i & -\sin\varphi_i \\ \sin\varphi_i & \cos\varphi_i \end{pmatrix} \qquad (333)$$

осуществляет правый эллиптический поворот в плоскости (x^i, x^{i+1}), где $i = k+1, k+3, ..., n-1$, на действительный угол φ_i. Всего таких коммутирующих между собой поворотов равно m.

Гиперболические повороты осуществляются матрицами вида

$$\hat{B} = \begin{pmatrix} e^{\varepsilon_1} & ... & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & 0 & e^{\varepsilon_i} & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & ... & 0 & 0 & e^{\varepsilon_{i+1}} & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & 0 & 0 & 0 & e^{\varepsilon_{n-1}} & ... & 0 \\ 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & e^{\varepsilon_n} \end{pmatrix} . \qquad (334)$$

где ε_j - действительные числа, причем

$$\left. \begin{array}{c} \varepsilon_{k+1} = \varepsilon_{k+2}\,,\ \varepsilon_{k+3} = \varepsilon_{k+4}\,,\ \ldots,\ \varepsilon_{n-1} = \varepsilon_n\,, \\ \\ \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + ... + \varepsilon_k + \varepsilon_{k+1} + \varepsilon_{k+2} + ... + \varepsilon_{n-1} + \varepsilon_n = 0\,. \end{array} \right\} \qquad (335)$$

Число независимых гиперболических поворотов равно $(k + m - 1)$, все они коммутируют между собой и с эллиптическими поворотами (332).

Таким образом, непрерывная группа симметрии $G_1(P_{k+2m})$ является абелевой непрерывной $(n - 1)$ параметрической группой Ли, так как

$$m + (k + m - 1) = k + 2m - 1 = n - 1\,.$$

13 Длина отрезка кривой в пространстве $P_{k+2\cdot m}$

Зададим в координатном пространстве $P_{k+2\cdot m}$ в изотропном базисе $e_1, e_2, ..., e_n$ со структурным тензором (320) некоторую кривую

$$x^i = x^i(\tau), \qquad \tau \in [\tau_1, \tau_2]\,, \qquad (336)$$

при $\tau = \tau_1$ кривая проходит через точку A, а при $\tau = \tau_2$ - через точку B, причем все бесконечно малые векторы с координатами

$$dx^i = \dot{x}^i(\tau)d\tau \qquad (337)$$

измеримы, то есть для них определена норма. Тогда естественно определить длину отрезка кривой между двумя точками A и B как интеграл

$$l_{AB} = \int\limits_A^B \sqrt[n]{dx^1...dx^k\,[(dx^{k+1})^2 + (dx^{k+2})^2]\,...\,[(dx^{n-1})^2 + (dx^n)^2]}\,, \qquad (338)$$

или

$$l_{AB} = \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} \sqrt[n]{\dot{x}^1 ... \dot{x}^k \, [(\dot{x}^{k+1})^2 + (\dot{x}^{k+2})^2] \, ... \, [(\dot{x}^{n-1})^2 + (\dot{x}^n)^2]} \cdot d\tau \, . \qquad (339)$$

Таким образом, если $n = k + 2 \cdot m > 2$, то метрическое пространство $P_{k+2 \cdot m}$ не является ни евклидовым, ни псевдоевклидовым. Это плоское финслерово пространство с метрической функцией

$$L(dx) = \sqrt[n]{dx^1 ... dx^k \, [(dx^{k+1})^2 + (dx^{k+2})^2] \, ... \, [(dx^{n-1})^2 + (dx^n)^2]} \, , \qquad (340)$$

инвариантной относительно группы $G_1(P_{k+2 \cdot m})$. Компоненты p_i обобщенного импульса вычисляются следующим образом:

$$p_i = \frac{\partial L(dx)}{\partial (dx^i)} \equiv \frac{\partial L(\dot{x})}{\partial (\dot{x}^i)} \, . \qquad (341)$$

Эти величины связаны функциональным соотношением

$$\Phi(p_1, p_2, ..., p_n) = 0 \, , \qquad \text{или} \qquad \Phi(p) = 0 \, , \qquad (342)$$

которое принято называть тангенциальным уравнением индикатрисы. Для метрической функции (340) тангенциальное уравнение индикатрисы можно записать в виде:

$$p_1 p_2 ... p_k (p_{k+1}^2 + p_{k+2}^2)(p_{k+3}^2 + p_{k+4}^2) ... (p_{n-1}^2 + p_n^2) - \frac{4^m}{n^n} = 0 \, . \qquad (343)$$

Пусть в координатном пространстве $x^1, x^2, ..., x^n$ заданы две финслеровы геометрии, причём между метрическими функциями $L(dx; x)$ и $L'(dx; x)$ этих геометрий имеет место соотношение

$$L'(dx; x) = \kappa(x) \cdot L(dx; x) \, , \qquad (344)$$

где $\kappa(x) > 0$ - некоторая функция, зависящая только от точки основного пространства. Тогда такие геометрии называются *конформно связанными* [2].

Финслерова геометрия конформно связанная с геометрией (340) в каждой точке имеет касательное пространство изоморфное поличисловому пространству $P_{k+2 \cdot m}$, а тангенциальное уравнение индикатрисы в таком пространстве имеет вид:

$$p_1 p_2 ... p_k (p_{k+1}^2 + p_{k+2}^2)(p_{k+3}^2 + p_{k+4}^2) ... (p_{n-1}^2 + p_n^2) - \frac{4^m}{n^n} \kappa^n(x) = 0 \, . \qquad (345)$$

Напомним, что если известно тангенциальное уравнение индикатрисы

$$\Phi(p; x) = 0 \, , \qquad (346)$$

то каноническая система дифференциальных уравнений для определения экстремалей (геодезических, мировых линий) в финслеровом пространстве записывается следующим образом:

$$\dot{x}^i = \frac{\partial\Phi}{\partial p_i} \cdot \lambda(p;x)\,, \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial\Phi}{\partial x^i} \cdot \lambda(p;x)\,, \tag{347}$$

где $\lambda(p;x) > 0$ - произвольная скалярная функция.

Для финслерова пространства конформно связанного с пространством $P_{k+2\cdot m}$ с тангенциальным уравнением индикатрисы (345) частные производные функции $\Phi(p;x)$ определяются формулами:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial p_i} = \begin{cases} \dfrac{4^m}{n^n} \cdot \dfrac{\kappa^n}{p_i}\,, & i = 1, 2, ..., k\,, \\[2ex] \dfrac{4^m}{n^n} \cdot \kappa^n \dfrac{2p_i}{p_i^2 + p_{i+1}^2}\,, & i = k+1, k+3, ..., n-1\,, \\[2ex] \dfrac{4^m}{n^n} \cdot \kappa^n \dfrac{2p_i}{p_{i-1}^2 + p_i^2}\,, & i = k+2, k+2, ..., n\,; \end{cases} \tag{348}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x^i} = -\frac{4^m}{n^{n-1}} \cdot \kappa^{n-1} \frac{\partial\kappa}{\partial x^i}\,. \tag{349}$$

Подставив эти производные в уравнения (347), получим систему дифференциальных уравнений для определения экстремалей в пространстве, конформно связанным с пространством невырожденных поличисел $P_{k+2\cdot m}$.

14 Экспоненциальное представление невырожденных поличисел

Под экспоненциальной функцией $\exp(X)$ от поличисла $X \in P_{k+2\cdot m}$ будем понимать ряд

$$\exp(X) = 1 + X + \frac{1}{2!}X^2 + ... + \frac{1}{s!}X^s + ...\,, \tag{350}$$

а под *экспоненциальным представлением* числа $X \in P_{k+2\cdot m}$, если у этого числа имеется норма $|X|$, - однозначную запись этого числа в виде

$$X = |X| \cdot \exp(\varphi_2 E_2 + \varphi_3 E_3 + ... + \varphi_n E_n)\,, \tag{351}$$

где $\varphi_2, \varphi_3, ...\varphi_n$ - действительные числа, а $E_1 \equiv 1, E_2, E_3, ..., E_n$ - некий специальный базис, в котором такая однозначная запись возможна. Величина $\varphi_2, \varphi_3, ...\varphi_n$ будем называть угловыми переменными (эллиптическими или гиперболическими).

Говорить о экспоненциальной записи нулевого элемента в $P_{k+2\cdot m}$ или делителей нуля не имеет смысла, так как для них не существует однозначной записи (351).

Только в единственной алгебре невырожденных поличисел, алгебре комплексных чисел любое не равное нулю число $z = x + iy$ имеет однозначное экспоненциальное представление $z = e^{i\alpha}$. В общем случае для алгебры $P_{k+2\cdot m}$ экспоненциальное представление возможно только при выполнении некоторых условий, из которых обязательно должно следовать условие

$$(X, X, ..., X) > 0\,. \tag{352}$$

Докажем это утверждение, предположив, что мы уже построили такой базис, а затем явно его построим. Рассмотрим множество унимодулярных чисел, имеющих экспоненциальное представление, то есть чисел $A \in P_{k+2\cdot m}$, у которых $|A| = 1$ и которые можно записать как

$$A = \exp(\alpha_2 E_2 + \alpha_3 E_3 + ... + \alpha_n E_n)\,. \tag{353}$$

Тогда множество преобразований пространства $P_{k+2\cdot m}$ вида

$$X \to X'\,, \qquad X' = A \cdot X \tag{354}$$

образуют группу линейных преобразований пространства $P_{k+2\cdot m}$, сохраняющих модули всех чисел, у которых модуль определен, так как

$$|X'| = |A| \cdot |X| \qquad \Rightarrow \qquad |X'| = |X|\,. \tag{355}$$

Кроме того, эта группа - абелева $(n-1)$ параметрическая непрерывная группа Ли. Выше мы построили преобразования этой группы в координатном пространстве и обозначили ее символом $G_1(P_{k+2\cdot m})$. Таким образом, эта группа есть группа унимодулярных поличисел.

Все эти рассуждения дают нам алгоритм построения базисных элементов E_2, E_3, ... , E_n: они должны быть генераторами данной абелевой группы Ли. Это позволяет нам построить базис $E_1 \equiv 1, E_2, E_3, ..., E_n$ из изотропного базиса $e_1, e_2, ...e_n$ со структурным тензором (320), если $k \neq 0$, например, так:

$$\left.\begin{array}{l} E_1 = e_1 + e_2 + ... + e_k + e_{k+1} + e_{k+3} + ... + e_{n-1}\,, \\ E_2 = e_1 - e_2\,, \\ E_3 = e_1 - e_3\,, \\ \qquad . \quad . \quad . \\ E_k = e_1 - e_k\,, \\ E_{k+1} = 2e_1 - e_{k+1}\,, \\ E_{k+2} = e_{k+2}\,, \\ E_{k+3} = 2e_1 - e_{k+3}\,, \\ E_{k+4} = e_{k+4}\,, \\ \qquad . \quad . \quad . \\ E_{n-1} = 2e_1 - e_{n-1}\,, \\ E_{k+2} = e_n\,. \end{array}\right\} \tag{356}$$

Если $k = 0$, то, например, так:

$$\left.\begin{array}{l} E_1 = e_1 + e_3 + ... + e_{n-1}\,, \\ E_2 = e_2\,, \\ E_3 = e_1 - e_3\,, \\ E_4 = e_4\,, \\ \qquad . \quad . \quad . \\ E_{n-1} = e_1 - e_{n-1}\,, \\ E_n = e_n\,. \end{array}\right\} \tag{357}$$

Используя числа E_2, E_3, ... , E_n в качестве генераторов группы, получим все преобразования (332), (334).

Базис $E_1 \equiv 1, E_2, E_3, ..., E_n$ (356) или (357) не единственный, в котором имеет место экспоненциальное представление (351). Любой другой такой базис получается из базиса (356) или (357) произвольным линейным невырожденным преобразование базисных элементов $E_2, E_3, ..., E_n$.

Таким образом, при выборе базиса, который допускает экспоненциальное представление числа, имеется $(n-1)^2$ параметрический произвол, который можно использовать, например, чтобы сделать базис "ортонормированным" (если это возможно) или чтобы добиться выполнения какого-либо другого необходимого свойства.

Выясним, в каком случае поличисло X, имеющее координаты x^i в изотропном базисе $e_1, e_2, ..., e_n$,

$$X = x^1 e_1 + x^2 e_2 + ... + x^n e_n\,,$$

при выполнении условия (352) может быть представлено в экспоненциальном виде (351). Для этого внесём $|X|$ под экспоненту, тогда под экспонентой окажется некоторое поличисло Y. Запишем поличисло Y в изотропном базисе, координаты этого числа в изотропном базисе обозначим y^i. Тогда, используя свойства изотропного базиса, получим

$$\begin{aligned} X = \exp(Y) = & \\ & = \exp(y_1)e_1 + \exp(y_2)e_2 + ... + \exp(y_k)e_k + \\ & + \exp(y_{k+1})\cos(y_{k+2})e_{k+1} + \exp(y_{k+1})\sin(y_{k+2})e_{k+2} + ... \\ & + \exp(y_{n-1})\cos(y_n)e_{n-1} + \exp(y_{n-1})\sin(y_n)e_n \,. \end{aligned} \tag{358}$$

Таким образом, для того чтобы поличисло $X \in P_{k+2\cdot m}$, имело экспоненциальное представление, необходимо и достаточно, чтобы его координаты x^i в изотропном базисе удовлетворяли следующим условиям:

$$\left. \begin{array}{c} x^1 > 0, \;\; x^2 > 0, \;\; ..., \;\; x^k > 0, \\ \\ (x^{k+1})^2 + (x^{k+2})^2 \neq 0, \, ..., \, (x^{n-1})^2 + (x^n)^2 \neq 0 \,. \end{array} \right\} \tag{359}$$

Заметим, что при выполнении условий (359) поличисло $X \in P_{k+2\cdot m}$ находится в конусе будущего, а условие (352) выполняется автоматически.

Итак, для того, чтобы невырожденное поличисло $X \in P_{k+2\cdot m}$ имело экспоненциальное представление (351), оно должно лежать в конусе будущего.

15 Функции поличисловой переменной

Пусть пока $e_1, e_2, ..., e_n$ произвольный базис в пространстве $P_{k+2\cdot m}$. Функцией переменной $X = x^1 e_1 + ... + x^n e_n \in P_{k+2\cdot m}$ называется функция $F(X) \in P_{k+2\cdot m}$, такая, что

$$F(X) = f^1(x^1, ..., x^n)e_1 + f^2(x^1, ..., x^n)e_2 + ... + f^n(x^1, ..., x^n)e_n \,, \tag{360}$$

где $f^i(x) \in R$ - n произвольных функций (в дальнейшем мы будем считать их гладкими) от n действительных аргументов. Рассмотрим дифференциал

$$dF(X) \equiv F(X + dX) - F(X) \,,$$

где $dX \in P_{k+2\cdot m}$ - произвольное бесконечно малое поличисло в том смысле, что

$$dX = \varepsilon Y\,, \qquad Y \in P_{k+2\cdot m}\,, \qquad \varepsilon \to 0\,.$$

Тогда

$$dF(X) = \frac{\partial f^l}{\partial x^i} \cdot dx^i \cdot e_l\,. \tag{361}$$

Если дифференциал $dF(X)$ функции $F(X)$ можно представить в виде

$$dF(X) = F'(X) \cdot dX + o(dx^i)\,, \tag{362}$$

где $F'(X)$ некоторая функция переменной $P_{k+2\cdot m}$, то функцию $F(X)$ принято называть аналитической функций поличисловой $P_{k+2\cdot m}$ переменной, а $F'(X)$ - производной этой аналитической функции по той же переменной.

Из двух последних формул получим

$$\frac{\partial f^l}{\partial x^i} = p^l_{ji} f'^j\,. \tag{363}$$

Воспользуемся одним из соотношений (206), тогда из предыдущей формулы следует

$$f'^l = \epsilon^i \frac{\partial f^l}{\partial x^i}\,. \tag{364}$$

Подставив полученное выражение в (363), имеем n^2 соотношений

$$\frac{\partial f^l}{\partial x^i} = \epsilon^s p^l_{ji} \frac{\partial f^j}{\partial x^s}\,, \tag{365}$$

из которых независимых не более $n^2 - n$, так как свертка левой и правой части с ϵ^i (компоненты единичного элемента в данном базисе) приводит к n тождествам. Соотношения (365) для функций комплексной переменной принято называть соотношениями Коши - Римана. Сохраним этот термин для функций поличисловой переменной. Если эти соотношения выполняются, то, определив функцию $F'(X)$ с помощью формул (364), приходим к выполнению формулы (362).

Таким образом, мы пришли к следующему результату: для того, чтобы функция $F(X)$ поличисловой переменной была аналитической, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения Коши - Римана (365).

Непосредственно из определения аналитической функции поличисловой переменной следует:

1) линейная комбинация аналитических функций поличисловой переменной с действительными коэффициентами α и β или поличисловыми переменными A и B есть аналитическая функция той же переменной, причем

$$\big[\alpha F_{(1)}(X)+\beta F_{(2)}(X)\big]'=\alpha F'_{(1)}(X)+\beta F'_{(2)}(X)\,, \qquad (366)$$

$$\big[AF_{(1)}(X)+BF_{(2)}(X)\big]'=AF'_{(1)}(X)+BF'_{(2)}(X)\,;$$

2) поличисловое произведение двух аналитических функций поличисловой переменной, есть аналитическая функция той же переменной, причем

$$\big[F_{(1)}(X)\cdot F_{(2)}(X)\big]'=F'_{(1)}(X)F_{(2)}(X)+F_{(1)}(X)F'_{(2)}(X)\,; \qquad (367)$$

3) аналитическая функция поличисловой переменной от аналитической функции той же поличисловой переменной есть аналитическая функция все той же поличисловой переменной, причем

$$\Big[F_{(1)}\Big(F_{(2)}(X)\Big)\Big]'=F'_{(1)}(Y)\Big|_{Y=F_{(2)}(X)}\cdot F'_{(2)}(X)\,. \qquad (368)$$

Общий вид аналитических функций переменной $P_{k+2\cdot m}$ можно найти, работая в изотропном базисе $e_1,e_2,...,e_n$ со структурным тензором p^l_{ij} (320), но выполнить эту задачу еще проще, если вспомнить, что невырожденные поличисла $P_{k+2\cdot m}$ изоморфны прямой сумме (327) алгебр H_k и H^C_m, то есть алгебре квадратных диагональных частично комплексных матриц над полем действительных чисел. В этой алгебре любой элемент $\hat{X}$ может быть представлен в виде

$$\hat{X}=x^1\hat{\Psi}_1+...+x^k\hat{\Psi}_2+...+x^{k+1}\hat{\Psi}_{k+1}+...+x^{m+k}\hat{\Psi}_{k+m}\,, \qquad (369)$$

где $\hat{\Psi}_i$ - действительная квадратная диагональная матрица, у которой единственным отличным от нуля элементом, является i-й, равный единице; x^i $(i=1,2,...,k)$ - k действительных чисел, а x^j $(j=k+1,k+2,...,k+m)$ - m комплексных чисел. Можно рассматривать матрицы $\hat{\Psi}_1,\hat{\Psi}_2,...,\hat{\Psi}_{k+m}$ как базис. Тогда

$$\hat{\Psi}_i\hat{\Psi}_j=\tilde{p}^l_{ij}\hat{\Psi}_l\,, \qquad \tilde{p}^l_{ij}=\begin{cases}1\,, & \text{если } i=j=l\,,\\ \\ 0\,, & \text{во всех остальных случаях}\,,\end{cases} \qquad (370)$$

а функции поличисловой переменной в таком представлении имеют вид

$$F(\hat{X}) = f^1(x^1, ..., x^{k+m})\hat{\Psi}_1 + ... + f^{k+m}(x^1, ..., x^{k+m})\hat{\Psi}_{k+m}\,, \tag{371}$$

$f^i \in R$, если $i = 1, 2, ..., k$, и $f^j \in C$, если $j = k+1, k+2, ..., k+m$. Подставим $\tilde{p}^l_{ij}$ в соотношения Коши - Римана (363), получим

$$\frac{\partial f^i}{\partial x^{i_-}} = f'^i\,, \tag{372}$$

а все остальные частные производные $\dfrac{\partial f^l}{\partial x^i}$ при $i \neq j$ равны нулю. С учётом этого формула (371) для аналитических функций поличисловой переменной уточняется:

$$F(\hat{X}) = f^i(x^1)\hat{\Psi}_1 + ... + f^k(x^k)\hat{\Psi}_k +$$

$$+ f^{k+1}(x^{k+1})\hat{\Psi}_{k+1} + ... + f^{k+m}(x^{k+m})\hat{\Psi}_{k+m}\,,$$

x^i, $f^i \in R$, если $i = 1, 2, ..., k$, и x^j, $f^j \in C$, если $j = k+1, k+2, ..., k+m$.

Перейдем опять изотропному базису $e_1, e_2, ..., e_n$ со структурным тензором (320), в котором поличисловая переменная X имеет n действительных координат $x^1, x^2, ..., x^n$. Тогда с учётом выше изложенного произвольная аналитическая функция переменной $P_{k+2\cdot m}$ в изотропном базисе имеет вид

$$F(X) = f^1(x^1)e_1 + ... + f^k(x^k)e_k + f^{k+1}(x^{k+1}, x^{k+2})e_{k+1} +$$

$$+ f^{k+2}(x^{k+1}, x^{k+2})e_{k+2} + ... + f^{n-1}(x^{n-1}, x^n)e_{n-1} + f^n(x^{n-1}, x^n)e_n\,, \tag{373}$$

где $f^1(x^1), ..., f^k(x^k)$ - произвольные гладкие функции одной действительной переменной, а пары функций

$$\{f^{j_-}(x^{j_-}, x^{j+1}), f^{(j_-+1)}(x^{j_-}, x^{j+1})\}\,, \qquad j \equiv j_- = k+1, k+3, ..., n-1 \tag{374}$$

являются компонентами аналитических функций комплексных переменных $(x^j; x^{j+1})$.

Так как аналитические функции комплексной переменной бесконечное число раз дифференцируемы, то аналитическая функция $F(X)$ переменной $P_{k+2\cdot m}$ столько раз дифференцируема, сколько раз дифференцируемы все компоненты $f^1(x^1), ..., f^k(x^k)$.

Итак, в общем случае аналитическая функция $P_{k+2\cdot m}$ переменной однозначно определяется, если заданы k гладких функций одной действительной переменной и m аналитических функций комплексной переменной. Как известно [4], аналитическая функция комплексной переменной однозначно определяется заданием на некотором множестве точек в области ее определения, например, на отрезке некоторой кривой. Для всех элементарных функций одной действительной переменной можно с помощью аналитического продолжения построить однозначно аналитическую функцию комплексной переменной. Последнее свойство выполняется и для аналитических функций $P_{k+2\cdot m}$ переменной.

Используем компоненты аналитической функции $F(X)$ для перехода от системы координат $x^{i'}$, в которой элемент длины в пространстве $P_{k+2\cdot m}$ не зависит от точки пространства, к некоторой криволинейной системе координат x^i, в которой элемент длины финслерова пространства будет зависеть не только от дифференциалов координат, но и от самих координат. Пусть

$$x^{i'} = f^i(x^1, x^2, ..., x^n)\,, \tag{375}$$

где f^i компоненты аналитической функции $F(X)$, штрих у индекса указывает на принадлежность к другой системе координат. Необходимо, чтобы якобиан такого преобразования был конечен и отличен от нуля. Достаточно это проверить в каком-то одном базисе, например, в изотропном. Тогда согласно формулам (363) и (331), получим:

$$\frac{D(f^1, f^2, ..., f^n)}{D(x^1, x^2, ..., x^n)} = (F', F', ..., F') \neq 0\,, \tag{376}$$

где

$$F'(X) = \frac{df^1}{dx^1}e_1 + ... + \frac{df^k}{dx^k}e_k +$$

$$+\frac{\partial f^{k+1}}{\partial x^{k+1}}e_{k+1} + \frac{\partial f^{k+2}}{\partial x^{k+1}}e_{k+2} + ... + \frac{\partial f^{n-1}}{\partial x^{n-1}}e_{n-1} + \frac{\partial f^n}{\partial x^{n-1}}e_n$$

- производная аналитической функции $F(X)$ переменной $X \in P_{k+2\cdot m}$, а

$$(F', F', ..., F') = \frac{df^1}{dx^1}...\frac{df^k}{dx^k}\times$$

$$\times\left[\left(\frac{\partial f^{k+1}}{\partial x^{k+1}}\right)^2 + \left(\frac{\partial f^{k+1}}{\partial x^{k+2}}\right)^2\right]...\left[\left(\frac{\partial f^{n-1}}{\partial x^{n-1}}\right)^2 + \left(\frac{\partial f^{n-1}}{\partial x^{n}}\right)^2\right].$$

Здесь мы не использовали обозначение нормы в n-ой степени $|F'|^n$ функции $F'(X)$ вместо формы $(F', F', ..., F')$, так как функция $F'(X)$ при этом может не иметь нормы.

Таким образом, преобразование координат (375) или отображение одной области пространства $P_{k+2\cdot m}$ на другую область того же пространства, осуществляемое с помощью компонент аналитической функции $F(X)$, взаимно однозначно в некоторой области, если в этой области скалярное полипроизведение с одним и тем же аргументом $F'(X)$ имеет конечное значение, не равное нулю.

Последнее утверждение и формула (376) показывают, что понятие скалярного полипроизведения, впервые введенное в работе [18], естественным образом возникает при рассмотрении преобразований пространства $P_{k+2\cdot m}$ с помощью аналитических функций $P_{k+2\cdot m}$ переменной и не сводится к понятию нормы и метрики.

Посмотрим как изменится метрическая функция $L(dx)$ (340) при таком преобразовании координат или преобразовании самого пространства. Для этого вначале потребуем выполнения условия

$$(F', F', ..., F') > 0\,, \tag{377}$$

тогда у функции F' существует норма

$$|F'| = \sqrt[n]{(F', F', ..., F')}\,.$$

Подставим (375) в (340) и получим ту же метрическую функцию, но уже в координатах x^i,

$$L(dx^{1'}, dx^{2'}, ..., dx^{n'}) = |F'(X)| \cdot L(dx^1, dx^2, ..., dx^n)\,, \tag{378}$$

умноженную на коэффициент растяжения-сжатия

$$\kappa(x) = |F'(X)|\,.$$

Подчеркнём ещё раз, что слева и справа в формуле (378) стоит одна и та же функция $L(\xi)$.

Таким образом, аналитическая функция невырожденной поличисловой переменной осуществляет в некоторой области D финслерова поличислового пространства конформное преобразование координат или конформное преобразование самой области D этого пространства, если ее производная имеет отличную от нуля норму, причём норма производной суть коэффициент растяжения-сжатия.

Это же утверждение можно сформулировать несколько иначе.

Пусть финслерова геометрия $L(dx;x)$ конформно связана с финслеровой геометрией $L(dx)$ плоского поличислового пространства $P_{k+2\cdot m}$, то есть

$$L(dx;x) = \kappa(x)L(dx)\,, \tag{379}$$

причем

$$\kappa(x) = |F'(X)| \neq 0\,, \tag{380}$$

где $F'(X)$ - производная, имеющая конечную норму, аналитической функции $F(X)$ поличисловой переменной $P_{k+2\cdot m}$, тогда геометрия $L(dx;x)$ получается из плоской геометрии $L(dx)$ пространства $P_{k+2\cdot m}$ введением криволинейных координат с помощью компонент аналитической функции $F(X)$, а значит, геометрия $L(dx;x)$ также является той же самой плоской геометрией, что и исходная геометрия.

Итак, в любом невырожденном поличисловом пространстве P_n размерности $n \geq 3$ имеется бесконечно параметрическая непрерывная группа конформных преобразований, в то время как в евклидовых и псевдоевклидовых пространствах размерности $n \geq 3$ непрерывная конформная группа всегда конечно параметрическая.

Аналогично тому как конформные преобразования на евклидовой плоскости связаны не только с аналитическими функциями комплексной переменной, но и с функциями, комплексно сопряжёнными к аналитическим, (последние приводят к конформным преобразованиям второго рода), конформные преобразования в пространстве поличисел $P_{k+2\cdot m}$ также не сводятся только к аналитическим функциям поличисловой переменной. Изменение знака у $(k+2)$-ой, $(k+4)$-ой, ... , n-ой компонент аналитической функции поличисловой переменной дает 2^m возможностей; произвольная подстановка 1-ой, 2-ой, ... , k-ой компонент аналитической функции также приводит к функции, осуществляющей конформное преобразование, что даёт $k!$ возможностей; произвольная подстановка $(k-1)$-ой, $(k-3)$-ой, ... , $(n-1)$-ой пар компонент аналитической функции поличисловой переменной также приводит к функции, осуществляющей конформное преобразование, что даёт $m!$ возможностей. Таким образом, конформные преобразования в пространстве поличисел $P_{k+2\cdot m}$ связаны с аналитическими функциями поличисловой переменной и имеют, если их различать по родам, не менее $2^m \cdot k! \cdot m!$ родов.

16 Пространство гиперкомплексных чисел H_4

Поличисла $H_4 \equiv P_{4+2\cdot 0}$ изоморфны алгебре действительных квадратных диагональных матриц 4×4. Координаты в изотропном базисе пространства H_4 будем обозначать $\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4$, а сам базис - $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$, то есть любое поличисло можно представить в виде разложения

$$X = \xi^1\psi_1 + \xi^2\psi_2 + \xi^3\psi_3 + \xi^4\psi_4\,, \tag{381}$$

или четверки действительных чисел $(\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4)$. Бинарная операция поличислового умножения на множестве базисных векторов ψ_1, ψ_2, ψ_3, ψ_4 определяется следующей формулой:

$$\psi_i \cdot \psi_j = \delta_{ij}\ \psi_{j_-}\,.$$

Если $\xi^1\xi^2\xi^3\xi^4 > 0$, то для числа $X \in H_4$ определена норма

$$|X| = \sqrt[4]{\xi^1\xi^2\xi^3\xi^4} > 0\,. \tag{382}$$

Пространство H_4 является финслеровым пространством с метрической функцией

$$L(d\xi) = \sqrt[4]{d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3 d\xi^4}\,. \tag{383}$$

Никакими преобразованиями координат подкоренное выражение в правой части нельзя привести к квадратичному виду или квадрату однородной дифференциальной формы второго порядка, то есть такое финслерово пространство качественно отличается от евклидова и псевдоевклидовых пространств размерности четыре. Метрику, определяемую метрической функцией (383), называют иногда метрикой Бервальда - Моора.

В пространстве H_4 существует базис $1, j, k, jk$,

$$\left.\begin{aligned}
1 &= \psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \psi_4\,,\\[2ex]
j &= \psi_1 + \psi_2 - \psi_3 - \psi_4\,,\\[2ex]
k &= \psi_1 - \psi_2 + \psi_3 - \psi_4\,,\\[2ex]
jk &= \psi_1 - \psi_2 - \psi_3 + \psi_4\,,
\end{aligned}\right\} \tag{384}$$

закон умножения базисных элементов которого определен формулами:

$$1\cdot 1=1,\quad 1\cdot j=j,\quad 1\cdot k=k,\quad 1\cdot jk=jk,$$

$$j\cdot 1=j,\quad j\cdot j=1,\quad j\cdot k=jk,\quad j\cdot jk=k,$$

$$k\cdot 1=k,\quad k\cdot j=jk,\quad k\cdot k=1,\quad k\cdot jk=j,$$

$$jk\cdot 1=jk,\quad jk\cdot j=k,\quad jk\cdot k=j,\quad jk\cdot jk=1\,.$$

Координаты x^0, x^1, x^2, x^3 числа X в этом базисе связаны с координатами $\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4$ того же числа в изотропном базисе формулами:

$$\left.\begin{aligned}\xi^1&=x^0+x^1+x^2+x^3\,,\\ \xi^2&=x^0+x^1-x^2-x^3\,,\\ \xi^3&=x^0-x^1+x^2-x^3\,,\\ \xi^4&=x^0-x^1-x^2+x^3\,.\end{aligned}\right\}\tag{385}$$

Базис $1, j, k, jk$ является "ортонормированным" и в нем имеет место экспоненциальное представление чисел, у которых

$$\xi^1>0,\ \xi^2>0,\ \xi^3>0,\ \xi^4>0\,.$$

Для того, чтобы проверить первое утверждение, достаточно вычислить всевозможные скалярные полипроизведения вида (A, B, B, B), где A, B - любые базисные элементы 1, j, k, jk. Покажем, как происходит вычисление таких скалярных полипроизведений на одном примере, а затем приведем результаты вычислений.

Выразим скалярное полипроизведение (j, k, k, k) через антиопределитель:

$$(j,k,k,k)=\frac{1}{4!}\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&-1&-1&-1\\-1&1&1&1\\-1&-1&-1&-1\end{vmatrix}_{+}\,.\tag{386}$$

Так как из любой строки можно вынести общий числовой множитель за знак перманента, вынесем (-1) из второй и третьей строки

$$(j,k,k,k) = \frac{1}{4!}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}_+ \tag{387}$$

и воспользуемся выше полученной формулой вычисления антиопределителя, у которого все столбцы одинаковые, кроме одного:

$$(j,k,k,k) = 0\,. \tag{388}$$

Действуя аналогичным образом, вычислим скалярные полипроизведения $(A, B,\ B, B)$, где A, B любые базисные элементы $1, j, k, jk$. Приведем результаты вычислений:

$$\left.\begin{array}{l} (1,1,1,1) = (j,j,j,j) = (k,k,k,k) = (jk,jk,jk,jk) = 1\,, \\ (1,j,j,j) = (1,k,k,k) = (1,jk,jk,jk) = 0\,, \\ (j,1,1,1) = (k,1,1,1) = (jk,1,1,1) = 0\,, \\ (j,k,k,k) = (k,j,j,j) = (j,jk,jk,jk) = 0\,, \\ (jk,j,j,j) = (k,jk,jk,jk) = (jk,k,k,k) = 0\,. \end{array}\right\} \tag{389}$$

Таким образом, базис $1, j, k, jk$ является "ортонормированным", а значит коэффициенты разложения числа X в этом базисе могут быть выражены через скалярные полипроизведения следующим образом:

$$X = (X,1,1,1)\cdot 1 + (X,j,j,j)\cdot j + (X,k,k,k)\cdot k + (X,jk,jk,jk)\cdot jk\,. \tag{390}$$

Базисные элементы j, k, jk получаются из базисных элементов E_2, E_3, E_4 (356) с помощью невырожденного линейного преобразования:

$$j = -E_2 + E_3 + E_4\,, \quad k = E_2 - E_3 + E_4\,, \quad jk = E_2 + E_3 - E_4\,, \tag{391}$$

так как

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0\,. \tag{392}$$

Поэтому в базисе $1, j, k, jk$ для чисел $X \in H_4$, имеющих отличную от нуля норму $|X| \neq 0$ и удовлетворяющих ещё некоторым требованиям, возможно экспоненциальное представление:

$$X = |X| \cdot \exp(\alpha j + \beta k + \gamma jk)\,, \tag{393}$$

где α, β, γ - действительные числа, угловые переменные.

Если функция $F(x)$ одной действительной переменной x представима как полином или сходящийся ряд переменной x, то функция $F(X)$ переменной $X \in H_4$ в изотропном базисе также определена,

$$F(X) = F(\xi^1)\psi_1 + F(\xi^2)\psi_2 + F(\xi^3)\psi_3 + F(\xi^4)\psi_4 \tag{394}$$

и является аналитической функцией H_4 переменной. Применяя эту формулу к экспоненциальному представлению (393), имеем

$$\begin{aligned} X &= \xi^1\psi_1 + \xi^2\psi_2 + \xi^3\psi_3 + \xi^4\psi_4 = \\ &= |X|\left(e^{\alpha+\beta+\gamma}\psi_1 + e^{\alpha-\beta-\gamma}\psi_2 + e^{-\alpha+\beta-\gamma}\psi_3 + e^{-\alpha-\beta+\gamma}\psi_4\right) , \end{aligned} \tag{395}$$

откуда находим выражения угловых переменных через координаты числа X в изотропном базисе:

$$\alpha = \ln\left(\frac{\xi^1\xi^2}{\xi^3\xi^4}\right) , \quad \beta = \ln\left(\frac{\xi^1\xi^3}{\xi^2\xi^4}\right) , \quad \gamma = \ln\left(\frac{\xi^1\xi^4}{\xi^2\xi^3}\right) . \tag{396}$$

Формула (395) дает и условия, при выполнении которых поличисло $X \in H_4$ может быть представлено в экспоненциальном виде:

$$\xi^1 > 0, \quad \xi^2 > 0, \quad \xi^3 > 0, \quad \xi^4 > 0 .$$

Область, выделяемая в пространстве H_4 этими неравенствами, отождествляется с конусом будущего, если интерпретировать пространство H_4 как четырехмерное пространство-время.

Итак, все поличисла $X \in H_4$, лежащие в конусе будущего, имеют в ортонормированном базисе $1, j, k, jk$ экспоненциальное представление.

Из формулы (394) следует, что произвольная элементарная функция одной действительной переменной однозначно определяет аналитическую функцию переменной H_4.

Любая аналитическая функция переменной H_4 в изотропном базисе $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$ имеет вид

$$F(X) = f^1(\xi^1)\psi_1 + f^2(\xi^2)\psi_2 + f^3(\xi^3)\psi_3 + f^4(\xi^4)\psi_4 , \tag{397}$$

где f^i - произвольные дифференцируемые функции одной действительной переменной. Если все функции f^i дифференцируемы $r+1$ раз, то все производные функции $F(X)$ переменной H_4 вплоть до r-ой также являются аналитическими функциями. Запись произвольной аналитической функции (397) в "ортонормированном" базисе $1, j, k, jk$ (384) имеет более громоздкий вид:

$$
\begin{aligned}
&F(X) = \\
&= \frac{1}{4}[f^1(x^0 + x^1 + x^2 + x^3) + f^2(x^0 + x^1 - x^2 - x^3) + \\
&\quad + f^3(x^0 - x^1 + x^2 - x^3) + f^4(x^0 - x^1 - x^2 + x^3)] \cdot \mathbf{1} + \\
&+ \frac{1}{4}[f^1(x^0 + x^1 + x^2 + x^3) + f^2(x^0 + x^1 - x^2 - x^3) - \\
&\quad - f^3(x^0 - x^1 + x^2 - x^3) - f^4(x^0 - x^1 - x^2 + x^3)] \cdot \mathbf{j} + \\
&+ \frac{1}{4}[f^1(x^0 + x^1 + x^2 + x^3) - f^2(x^0 + x^1 - x^2 - x^3) + \\
&\quad + f^3(x^0 - x^1 + x^2 - x^3) - f^4(x^0 - x^1 - x^2 + x^3)] \cdot \mathbf{k} + \\
&+ \frac{1}{4}[f^1(x^0 + x^1 + x^2 + x^3) - f^2(x^0 + x^1 - x^2 - x^3) - \\
&\quad - f^3(x^0 - x^1 + x^2 - x^3) + f^4(x^0 - x^1 - x^2 + x^3)] \cdot \mathbf{jk}\,.
\end{aligned}
\tag{398}
$$

В "ортонормированных" координатах x^0, x^1, x^2, x^3 метрическая функция (383) финслерова пространства H_4 записывается следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&L(dx) = \\
&= [(dx^0 + dx^1 + dx^2 + dx^3)(dx^0 + dx^1 - dx^2 - dx^3) \times \\
&\quad \times (dx^0 - dx^1 + dx^2 - dx^3)(dx^0 - dx^1 - dx^2 + dx^3)]^{1/4}\,.
\end{aligned}
\tag{399}
$$

Разложим выражение в квадратных скобках по степеням dx^0, получим

$$\begin{aligned} L^4(dx) = \left(dx^0\right)^4 - 2\left(dx^0\right)^2 \left[\left(dx^1\right)^2 + \left(dx^2\right)^2 + \left(dx^3\right)^2\right] + \\ + 8\, dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 + \left(dx^1\right)^4 + \left(dx^2\right)^4 + \left(dx^3\right)^4 - \\ - 2\,\left[\left(dx^1\right)^2 \left(dx^2\right)^2 + \left(x^1\right)^2 \left(x^3\right)^2 + \left(x^2\right)^2 \left(dx^3\right)^2\right]\,. \end{aligned} \tag{400}$$

Предположим, что

$$dx^\alpha = \varepsilon^\alpha dx^0\,, \quad 0 < \varepsilon^\alpha \ll 1\,, \tag{401}$$

тогда, если пренебречь членами ε^3 по сравнению с 1, что соответствует в механике пренебрежению членами $\left(\frac{v}{c}\right)^3$, где v - скорость частицы, а c - скорость света, по сравнению с единицей (нерелятивистское приближение), для элемента длины $L(dx)$ (399) в пространстве H_4 получим приближенную формулу:

$$L_{H_4}(dx) \simeq \sqrt{(dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2}\,. \tag{402}$$

Справа в этой формуле стоит элемент длины в пространстве Минковского, поэтому справедливо следующее утверждение.

Координаты x^0, x^1, x^2, x^3 в "ортонормированном" базисе пространства H_4 в нерелятивистском приближении в геометрическом (метрическом) плане ведут себя также как общепринятые координаты четырехмерного пространства-времени Минковского, которые в СТО отождествляются с координатами пространства событий.

Непрерывная группа $G_1(H_4)$ изометрической симметрии в пространстве H_4 является трёхпараметрической абелевой группой Ли, элементами которой являются матрицы

$$\begin{pmatrix} e^{\varepsilon_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\varepsilon_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\varepsilon_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\varepsilon_4} \end{pmatrix}, \qquad \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 = 0\,,$$

действующие в координатном пространстве $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$. Эта группа не содержит в качестве подгруппы никакой группы, даже отдалённо напоминающей группу трёхмерных пространственных поворотов. И всё же группа $G_1(H_4)$ содержит три однопараметрических преобразования, с помощью которых можно переходить в другие системы отсчёта, в которых наблюдаемые объекты будут иметь другую скорость относительно наблюдателя. Для того, чтобы это показать, введём вначале несколько обозначений, причём некоторое время для упрощения формул все индексы будем писать внизу:

$$\xi_i = A_{ij}x_j, \;\; (A_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \;\; A_{ik}A_{kj} = 4\delta_{ij}\,, \tag{403}$$

$$W = (1+v_1+v_2+v_3)(1+v_1-v_2-v_3)(1-v_1+v_2-v_3)(1-v_1-v_2+v_3), \tag{404}$$

$$\sqrt{1-v^2} = \sqrt[4]{W(v_1,v_2,v_3)}, \tag{405}$$

или

$$v = \sqrt{1-\sqrt{W(v_1,v_2,v_3)}}. \tag{406}$$

В нерелятивистском приближении

$$v \simeq \sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2}. \tag{407}$$

Если же вектор $(1, v_1, v_2, v_3)$ стремится к изотропному направлению, то $v \to 1$. Отметим также, что в общем случае

$$W(-v_1,-v_2,-v_3) \neq W(v_1,v_2,v_3)\,.$$

Сложение скоростей.

Непрерывная группа изометрической симметрии $G_1(H_4)$, оставляющая инвариантным элемент длины (399) в пространстве H_4 и состоящая из непрерывных линейных преобразований вида

$$x'_i = \frac{1}{4}A_{ik}D_{km}A_{mj}x_j, \tag{408}$$

где

$$(D_{km}) = diag(\exp\varepsilon_0, \exp\varepsilon_1, \exp\varepsilon_2, \exp\varepsilon_3), \tag{409}$$

действительные параметры ε_i изменяются в пределах $(-\infty, \infty)$ и связаны соотношением

$$\varepsilon_0+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3 = 0, \tag{410}$$

может быть параметризована тремя действительными величинами, V_1, V_2, V_3, имеющими смысл компонент скорости, которую приобретает покоящийся объект после преобразования (408):

$$\exp \varepsilon_i = \frac{A_{ij} V_j}{\sqrt{1 - V^2}}, \tag{411}$$

где $i, j = 0, 1, 2, 3$; $V_0 = 1$. Если в исходной системе отсчёта объект имел скорость (v_1, v_2, v_3) , то в новой системе отсчёта этот же объект будет иметь скорость

$$\left.\begin{aligned} v'_1 &= \frac{v_1 + V_1 + v_2 V_3 + v_3 V_2}{1 + v_1 V_1 + v_2 V_2 + v_3 V_3}, \\ v'_2 &= \frac{v_2 + V_2 + v_1 V_3 + v_3 V_1}{1 + v_1 V_1 + v_2 V_2 + v_3 V_3}, \\ v'_3 &= \frac{v_3 + V_3 + v_1 V_2 + v_2 V_1}{1 + v_1 V_1 + v_2 V_2 + v_3 V_3}. \end{aligned}\right\} \tag{412}$$

Из определения группы $G_1(H_4)$ имеем

$$(x'_{(2)0} - x'_{(1)0}) \sqrt{1 - (v')^2} = (x_{(2)0} - x_{(1)0}) \sqrt{1 - v^2}, \tag{413}$$

что даёт формулу для модуля трёхмерной скорости в новой системе координат

$$v' = \sqrt{1 - \frac{(1 - v^2)(1 - V^2)}{(1 + v_1 V_1 + v_2 V_2 + v_3 V_3)^2}}, \tag{414}$$

так как при преобразованиях (408) - (411)

$$x'_{(2)0} - x'_{(1)0} = \frac{1 + v_1 V_1 + v_2 V_2 + v_3 V_3}{\sqrt{1 - V^2}} (x_{(2)0} - x_{(1)0}). \tag{415}$$

Если среди компонент v_α и V_α отличны от нуля только по одной компоненте вдоль одного и того же специального направления, например, $(v_1, 0, 0)$ и $(V_1, 0, 0)$, то формулы (412) совпадают с соответствующими формулами сложения скоростей в СТО.

Переход из покоящейся инерциальной системы в движущуюся систему отсчёта.

Рассмотрим переход из старой (нештрихованной) системы отсчета в новую (штрихованную) систему отсчёта, инерциально движущуюся со скоростью (V_1, V_2, V_3) относительно старой системы отсчета, то есть точка, движущаяся в старой системе отсчета со скоростью (V_1, V_2, V_3), в новой системе отсчета будет двигаться со скоростью $(0,0,0)$. Формулы (408) - (410) останутся теми же, а вместо формулы (411) получим

$$\exp\left(-\varepsilon_i\right) = \frac{A_{ij}V_j}{\sqrt{1-V^2}}, \tag{416}$$

то есть переходы от одной системы отсчета к другой, рассмотренные выше и в данном случае, являются обратными друг к другу. Заметим, что замена в преобразовании (408) - (411) (V_1, V_2, V_3) на $(-V_1, -V_2, -V_3)$ в общем случае не дает обратное преобразование к преобразованию (408) - (411).

Итак, при переходе к системе координат движущейся со скоростью (V_1, V_2, V_3) старые координаты, будут выражаться через новые по формулам

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ \\ x_1 \\ \\ x_2 \\ \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{4\sqrt{1-V^2}} \cdot \hat{A} \cdot \begin{pmatrix} (1+V_1+V_2+V_3)(x'_0+x'_1+x'_2+x'_3) \\ \\ (1+V_1-V_2-V_3)(x'_0+x'_1-x'_2-x'_3) \\ \\ (1-V_1+V_2-V_3)(x'_0-x'_1+x'_2-x'_3) \\ \\ (1-V_1-V_2+V_3)(x'_0-x'_1-x'_2+x'_3) \end{pmatrix}, \tag{417}$$

где матрица $\hat{A}$ имеет компоненты A_{ij} (403).

Рассмотрим это преобразование, когда компоненты скорости новой системы отсчета в старой по трем специальным направлениям равны нулю, кроме одной компоненты, например, $V_1 \neq 0$, а $V_2 = 0$ и $V_3 = 0$, тогда

$$V = |V_1|, \tag{418}$$

а формулы (417) принимают вид

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ \\ x_1 \\ \\ x_2 \\ \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-V_1^2}} & \frac{V_1}{\sqrt{1-V_1^2}} & 0 & 0 \\ \\ \frac{V_1}{\sqrt{1-V_1^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-V_1^2}} & 0 & 0 \\ \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-V_1^2}} & \frac{V_1}{\sqrt{1-V_1^2}} \\ \\ 0 & 0 & \frac{V_1}{\sqrt{1-V_1^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-V_1^2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'_0 \\ \\ x'_1 \\ \\ x'_2 \\ \\ x'_3 \end{pmatrix}, \tag{419}$$

или

$$\left.\begin{array}{ll} x_0 = \dfrac{x_0' + V_1 x_1'}{\sqrt{1 - V_1^2}} & x_1 = \dfrac{V_1 x_0' + x_1'}{\sqrt{1 - V_1^2}} \\ x_2 = \dfrac{x_2' + V_1 x_3'}{\sqrt{1 - V_1^2}} & x_3 = \dfrac{V_1 x_2' + x_3'}{\sqrt{1 - V_1^2}} \end{array}\right\} . \qquad (420)$$

Такое преобразование координат $(x_0', x_1') \leftrightarrow (x_0, x_1)$ совпадает с соответствующим преобразованием в СТО, а преобразование координат $(x_2', x_3') \leftrightarrow (x_2, x_3)$ отличается от соответствующих преобразования в СТО, где $x_2 = x_2'$, $x_3 = x_3'$.

В пространстве событий всегда возникает вопрос о том, что такое истинное пространственное трёхмерное расстояние. Если истинное пространственное расстояние $r_{_{H_4}}$ в H_4 искать тем же способом, как это обычно делается в СТО и ОТО [11], то в результате получим [15]:

$$r_{_{H_4}} \equiv r_d = |x^\alpha| + |x^\beta| \, ; \qquad \text{причем} \qquad |x^\gamma| \le |x^\alpha|, |x^\beta| \, . \qquad (421)$$

Здесь $\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3$; $\alpha \neq \beta$, $\alpha \neq \gamma$, $\beta \neq \gamma$. В евклидовом пространстве гиперповерхность, определяемая уравнением

$$r_d = const \, , \qquad (422)$$

является ромбододекаэдром [16]. Так как такое трёхмерное пространство, элементами которого являются параллельные прямые мировые линии, есть плоское пространство, то все индикатрисы такого пространства являются ромбододекаэдрами, а метрическая функция определяется формулой:

$$L(dx^1, dx^2, dx^3) = |dx^\alpha| + |dx^\beta| \, , \quad |dx^\gamma| \le |dx^\alpha|, |dx^\beta| \, , \qquad (423)$$

где $\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3$; $\alpha \neq \beta$, $\alpha \neq \gamma$, $\beta \neq \gamma$. Но пространство с такой метрической функцией не является финслеровым.

17 Конформный потенциал

Успехи приложения теории функций комплексной переменной к решению задач физики, особенно решению уравнения Лапласа на евклидовой плоскости, подвигли многих математиков и физиков к попыткам построения аналогичных теорий для других пространств. Особое значение, конечно, здесь занимает четырёхмерное пространство-время.

Теория конформного потенциала строится для пространств, конформно связанных с финслеровыми пространствами, у которых метрические функции однозначно определены. При этом выделяется множество плоских финслеровых пространств, взятых в качестве исходных, а среди последних - класс поличисловых пространств.

Если в качестве исходных пространств берутся поличисловые пространства, то тогда будем говорить о гиперкомплексном потенциале, так как получающаяся теория наиболее близка к теории комплексного потенциала на евклидовой плоскости.

Пусть $x^1, x^2, ..., x^n$ - финслерово пространство с метрической функцией

$$L(\xi; x) \equiv L(\xi^1, \xi^2, ..., \xi^n; x^1, x^2, ..., x^n)\,, \tag{424}$$

где $\xi^1, \xi^2, ..., \xi^n$ - касательное пространство в точке $M(x^1, x^2, ..., x^n)$ основного пространства. Тогда элемент длины определяется формулой

$$ds = L(dx^1, dx^2, ..., dx^n; x^1, x^2, ..., x^n)\,, \tag{425}$$

а компоненты обобщенного импульса

$$p_i = \frac{\partial L(dx; x)}{\partial (dx^i)} \tag{426}$$

связаны тангенциальным уравнением индикатрисы

$$\Phi(p; x) = 0\,. \tag{427}$$

В финслеровых пространствах тангенциальному уравнению индикатрисы всегда можно придать некоторую специальную форму

$$\Phi_m(p; x) - 1 = 0\,, \tag{428}$$

где $\Phi_m(p; x)$ - однородная функция m-го порядка $(m > 0)$ по первым n аргументам. Очевидно, что функция Финслера в этом случае суть функция

$$\Phi(p; x) = \Phi_m(p; x) - 1\,.$$

Если функция $S(x)$ определяет в рассматриваемом финслеровом пространстве нормальную конгруэнцию геодезических, то она должна удовлетворять дифференциальному уравнению

$$\Phi\left(\frac{\partial S}{\partial x^1}, ... \frac{\partial S}{\partial x^n}; x\right) = 0\,. \tag{429}$$

Функцию $S(x)$ в классической механике называют действием как функцией координат, а уравнение, соответствующее уравнению (429), - уравнением Гамильтона - Якоби. Если функция $S(x)$ известна, то поле обобщенных импульсов находится как

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial x^i}\,, \tag{430}$$

а экстремали (мировые линии, траектории движения, линии тока) находятся из системы уравнений

$$\dot{x}^i = \left.\frac{\partial \Phi(p;x)}{\partial p_i}\right|_{p_k=\frac{\partial S}{\partial x^k}} \cdot \lambda(x)\,,$$

или

$$\dot{x}^i = \left.\frac{\partial \Phi_m(p;x)}{\partial p_i}\right|_{p_k=\frac{\partial S}{\partial x^k}} \cdot \lambda(x)\,, \tag{431}$$

где $\lambda(x) \neq 0$ - некоторая функция, $\dot{x}^i \equiv \dfrac{dx^i}{d\tau}$, а τ - параметр вдоль мировой линии, параметр эволюции.

Финслерово пространство, конформно связанное с исходным, имеет метрическую функцию вида

$$\tilde{L}(\xi;x) = \kappa(x)L(\xi;x)\,, \tag{432}$$

где $\kappa(x) > 0$ - некая скалярная функция. Элемент длины в таком пространстве определяется формулой

$$d\tilde{s} = \kappa(x)L(dx;x)\,. \tag{433}$$

Обобщенные импульсы

$$\tilde{p}_i = \kappa(x)\frac{\partial L(dx;x)}{\partial (dx^i)} \tag{434}$$

связаны соотношением

$$\Phi_m(\tilde{p};x) - \kappa^m = 0\,, \tag{435}$$

то есть функция Финслера пространства, конформно связанного с основным пространством, может быть определена следующим образом:

$$\tilde{\Phi}(\tilde{p};x) = \Phi_m(\tilde{p};x) - \kappa^m\,. \tag{436}$$

Пусть $S_W(x)$ - произвольная скалярная функция, тогда в области, где выполняется неравенство

$$\Phi_m\left(\frac{\partial S_W}{\partial x^1},...\frac{\partial S_W}{\partial x^n};x\right)>0\,, \tag{437}$$

определена финслерова геометрия, конформно связанная с исходной и полем коэффициента растяжения-сжатия

$$\kappa(x)=\sqrt[m]{\Phi_m\left(\frac{\partial S_W}{\partial x^1},...\frac{\partial S_W}{\partial x^n};x\right)}\,, \tag{438}$$

причем в этой же области функция $S_W(x)$ определяет нормальную конгруэнцию геодезических

$$\dot{x}^i=\left.\frac{\partial\Phi_m(\tilde{p};x)}{\partial\tilde{p}_i}\right|_{\tilde{p}_k=\frac{\partial S_W}{\partial x^k}}\cdot\tilde{\lambda}(x)\,, \tag{439}$$

где $\tilde{\lambda}(x)\neq 0$ - некоторая функция, $\dot{x}^i\equiv\dfrac{dx^i}{d\tilde{\tau}}$, а $\tilde{\tau}$ - параметр эволюции. Таким образом, функция $S_W(x)$ автоматически является действием как функцией координат в финслеровом пространстве с метрической функцией $\tilde{L}(\xi;x)$ (432).

Отметим, что при замене функции $S(x)$ и параметра эволюции τ на функцию $S_W(x)$ и параметр эволюции $\tilde{\tau}$ формула (431) формально совпадает с формулой (439), хотя геометрии разные.

Предположим, что инвариантный элемент объёма в исходном финслеровом пространстве с однозначно заданной метрической функцией $L(\xi;x)$ определён и имеет вид:

$$dV=\rho(x)\cdot dx^1dx^2...dx^n\,. \tag{440}$$

Тогда в конформно связанном пространстве с метрической функцией $\tilde{L}(\xi;x)$ (432) также определён инвариантный элемент объёма:

$$d\tilde{V}=\rho(x)\left[\Phi_m\left(\frac{\partial S_W}{\partial x^1},...\frac{\partial S_W}{\partial x^n};x\right)\right]^{\frac{n}{m}}dx^1dx^2...dx^n\,. \tag{441}$$

Согласно принципу самодостаточности финслеровой геометрии, если скалярное поле не задано, оно определяется из уравнения поля Лагранжа - Эйлера - Остроградского [5] с лагранжианом

$$\mathfrak{L}=const\cdot\rho(x)\left[\Phi_m\left(\frac{\partial S_W}{\partial x^1},...\frac{\partial S_W}{\partial x^n};x\right)\right]^{\frac{n}{m}}\,. \tag{442}$$

Так как лагранжиан зависит только от производных поля S_W, уравнение поля принимает вид:

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial\,\mathfrak{L}}{\partial\left(\frac{\partial S_W}{\partial x^i}\right)} = 0\,,$$

или

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\left[\varrho(x)\,\Phi_m^{\frac{n-m}{m}}\,\frac{\partial\,\Phi}{\partial\left(\frac{\partial S_W}{\partial x^i}\right)}\right] = 0\,. \qquad (443)$$

Функция $S_W(x)$, удовлетворяющую уравнению поля (443), будем называть *Мировой функцией*, а само уравнение - *фундаментальным уравнением* исходного и конформно связанного с ним финслеровых пространств.

Любое невырожденное полечисловое пространство $P_n \ni X$ является финслеровым, причем любая компонента произвольной аналитической функции $F(X)$ в нем удовлетворяет уравнению поля для Мировой функции $S_W(x)$. Аналитические функции можно перемножать, брать их линейные комбинации, строить функцию от функции, при этом опять будут получаться аналитическая функция, каждая компонента которых будет удовлетворять уравнению поля для Мировой функции. Если не оговорено другое, в качестве Мировой функции в поличисловом пространстве будем брать компоненту $U(x^1, ..., x^2)$ при единице

$$F(X) = U(x)\cdot 1 + V^1(x)\cdot E_2 + ... + V^{n-1}(x)\cdot E_n \qquad (444)$$

в базисе $1, E_2, ..., E_n$, в котором имеет место экспоненциальное представление поличисел, то есть

$$X = |X|\exp(\alpha^1\cdot E_2 + ... + \alpha^{n-1}\cdot E_n)\,, \qquad (445)$$

тогда в этом базисе

$$\ln\left(\frac{X}{b}\right) = \ln\left(\frac{|X|}{|b|}\right)\cdot 1 + \alpha^1\cdot E_2 + ... + \alpha^{n-1}\cdot E_n\,, \qquad (446)$$

где b - действительное число, а $|X|$ - модуль поличисла.

Теорию конформного потенциала в пространствах, конформно связанных с невырожденными поличисловыми пространствами, или построенную на основе поличисловых пространств, будем называть *тео-*

рией гиперкомплексного потенциала. Именно в последней присутствует наиболее много черт, аналогичных свойствам, которые имеют место в теории комплексного потенциала на евклидовой плоскости, при этом ряд свойств и формул включают в себя не только компоненту $U(x)$, но и остальные компоненты: $V^1, V^2, ..., V^{n-1}$ - соответствующей аналитической функции поличисловой переменной, как это имеет место и в теории комплексного потенциала на евклидовой плоскости.

Замечание. Пространства невырожденных поличисел являются частным случаем более широкого класса плоских финслеровых пространств, каждой точке которых, вообще говоря, нельзя сопоставить поличисло, но для этого более широкого класса пространств понятие конформного потенциала работает, хотя в общем случае оно не связано с понятием аналитических функций и лишь частично связано с конформными преобразованиями этих пространств.

18 Пространство двойных чисел

Двойные, или гиперболические числа H_2 можно определить как двумерную линейную алгебру, в которой существует базис 1, j со следующими свойствами:

$$H_2 \ni X = x^0 + x^1 \cdot j\,, \qquad 1\cdot 1 = 1\,, \quad 1\cdot j = j\cdot 1 = j\,, \quad j^2 = 1\,, \tag{447}$$

где x^0, x^1 - действительные числа.

В качестве потенциала выберем действительную компоненту U аналитической функции

$$\begin{gathered} F(X) \equiv U + j\cdot V = \\ = a\cdot\ln\left(\frac{X}{b}\right) \equiv \frac{a}{2}\ln\left[\frac{(x^0)^2-(x^1)^2}{b}\right] + j\cdot\frac{a}{2}\ln\left[\frac{x^0+x^1}{x^0-x^1}\right], \end{gathered} \tag{448}$$

a, b - действительные числа, то есть

$$U(x^0,x^1) = \frac{a}{2}\ln\left[\frac{(x^0)^2-(x^1)^2}{b}\right]. \tag{449}$$

Ограничимся конусом будущего:

$$x^0 > |x^1|\,, \tag{450}$$

где аналитическая функция (448), а значит и потенциал (449), определены.

Для того, чтобы записать уравнения (439), которым подчиняются мировые линии материальных объектов, надо определиться с выбором функции Финслера и функции $\tilde{\lambda}(x)$. И хотя наблюдаемые величины не зависят от этого выбора, от него зависит конкретный вид уравнений (439).

Если мы хотим, чтобы формулы (439) напоминали формулы теории комплексного потенциала, то следует выбрать

$$\tilde{\Phi}(p;x) = p_0^2 - p_1^2 - \kappa^2(x^0,x^1)\,, \qquad \tilde{\lambda}(x^0,x^1) = \frac{1}{2}\,, \tag{451}$$

тогда

$$\acute{x}^0 = \frac{\partial U}{\partial x^0}\,, \qquad \acute{x}^1 = -\frac{\partial U}{\partial x^1}\,, \tag{452}$$

где $\acute{x}^i \equiv \dfrac{dx^i}{d\acute{\tau}}$, а $\acute{\tau}$ - некий параметр вдоль мировой линии, параметр эволюции. В этом случае

$$\sqrt{(\acute{x}^0)^2 - (\acute{x}^1)^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x^0}\right)^2 - \left(\frac{\partial U}{\partial x^1}\right)^2} \equiv \kappa(x^0,x^1)\,, \tag{453}$$

где $\kappa(x^0,x^1)$ - коэффициент растяжения-сжатия конформного преобразования в пространстве H_2, которое (преобразование) определяется аналитической функцией (448). Таким образом, вдоль мировой линии в данном случае

$$\sqrt{(dx^0)^2 - (dx^1)^2} = \kappa(x^0,x^1)\,d\acute{\tau}\,.$$

Если мы хотим, чтобы уравнения (439) по форме и физической интерпретации соответствовали формулам СТО, то следует выбрать

$$\tilde{\Phi}(p;x) = \sqrt{p_0^2 - p_1^2} - \kappa(x^0,x^1)\,, \qquad \tilde{\lambda}(x^0,x^1) = 1\,, \tag{454}$$

тогда

$$\dot{x}^0 = \frac{\frac{\partial U}{\partial x^0}}{\sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x^0}\right)^2 - \left(\frac{\partial U}{\partial x^1}\right)^2}}\,, \qquad \dot{x}^1 = -\frac{\frac{\partial U}{\partial x^1}}{\sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x^0}\right)^2 - \left(\frac{\partial U}{\partial x^1}\right)^2}}\,, \tag{455}$$

где $\dot{x}^i \equiv \dfrac{dx^i}{d\tau}$, а τ - некий параметр вдоль мировой линии. В этом случае

$$\sqrt{(\dot{x}^0)^2 - (\dot{x}^1)^2} = 1\,, \tag{456}$$

то есть в этом случае параметр эволюции суть собственное время, соответствующее мировой линии в пространстве H_2, умноженное на скорость света. Таким образом, вдоль мировой линии в данном случае

$$\sqrt{(dx^0)^2 - (dx^1)^2} = d\tau \,.$$

Выбирая формулы (454), для потенциала (449) получим дифференциальные уравнения для определения мировых линий, по которым двигаются материальные объекты, составляющие рассматриваемую замкнутую физическую систему:

$$\frac{dx^0}{d\tau} = \frac{x^0}{\sqrt{(x^0)^2 - (x^1)^2}}, \; \frac{dx^1}{d\tau} = \frac{x^1}{\sqrt{(x^0)^2 - (x^1)^2}} \;\Rightarrow\; \frac{dx^1}{dx^0} = \frac{x^1}{x^0}. \tag{457}$$

Решениями этой системы уравнений являются мировые линии:

$$(x^0, x^1) = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \right) \cdot \tau \,, \qquad x^1 = \frac{v}{c} \cdot x^0 \,, \tag{458}$$

где c - скорость света, а v - скорость материального объекта, соответствующего данной мировой линии, конечно, $|v| < c$. Все такие мировые линии являются лучами, исходят из начала отсчета, особой точки потенциала, и расположены в конусе будущего.

Совместим себя с наблюдателем (мировой линией) $v = 0$ и будем вести отсчет времени начиная с некоторого значения t_0. Тогда мы будем наблюдать *удаление* материальных объектов от нас с различными скоростями, зависящими от расстояния до этих объектов. Модуль координаты x^1 будет характеризовать нам истинное пространственное расстояние r от наблюдателя до материальных объектов. Из формул (457) и (458) получим

$$|v| \equiv \frac{dr}{dt} = \frac{r}{t_0 + t} \,, \tag{459}$$

а при $t \ll t_0$ имеем

$$|v| \simeq \frac{1}{t_0} \cdot r \,. \tag{460}$$

Таким образом, мы получили закон Хаббла с коэффициентом Хаббла $H = \dfrac{1}{t_0}$, что вполне согласуется с формулой, которая получается для этого закона в космологической модели Эйнштейна - де Ситтера [13], где $H = \dfrac{2}{3t_0}$.

19 Поличисловое пространство H_4

Гиперкомплексные числа H_4 изоморфны алгебре действительных квадратных диагональных матриц 4×4. Координаты в изотропном базисе пространства H_4 будем обозначать $\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4$, а сам базис - $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$, то есть любое число можно представить в виде разложения

$$X = \xi^1\psi_1 + \xi^2\psi_2 + \xi^3\psi_3 + \xi^4\psi_4\,, \tag{461}$$

или четверки действительных чисел $(\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4)$. Бинарная операция поличислового умножения определяется заданием правила умножения для базисных векторов:

$$\psi_i\psi_j = \begin{cases} \psi_i\,, & \text{если} \quad i = j \\ \\ 0\,, & \text{если} \quad i \neq j\,. \end{cases} \tag{462}$$

Если $\xi^1\xi^2\xi^3\xi^4 > 0$, то для числа $X \in H_4$ определена норма

$$|X| = \sqrt[4]{\xi^1\xi^2\xi^3\xi^4} > 0\,. \tag{463}$$

Пространство H_4 является метрическим финслеровым пространством с метрической функцией

$$L(d\xi) = \sqrt[4]{d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3 d\xi^4}\,, \tag{464}$$

которую никакими преобразованиями координат нельзя привести к квадратному корню из дифференциальной квадратичной формы, то есть такое финслерово пространство качественно отличается от евклидова и псевдоевклидовых пространств размерности четыре. Метрику, которая определяется метрической функцией (464), называют иногда метрикой Бервальда - Моора [17].

В пространстве H_4 существует базис $1, j, k, jk$,

$$\left.\begin{aligned} 1 &= \psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \psi_4\,, \\ j &= \psi_1 + \psi_2 - \psi_3 - \psi_4\,, \\ k &= \psi_1 - \psi_2 + \psi_3 - \psi_4\,, \\ jk &= \psi_1 - \psi_2 - \psi_3 + \psi_4\,, \end{aligned}\right\} \tag{465}$$

закон умножения базисных элементов которого определен Таб. 5.1.

×	**1**	**j**	**k**	**jk**
1	1	j	k	jk
j	j	1	jk	0
k	k	jk	1	j
jk	jk	k	j	1

Таб. 5.1

Координаты x^0, x^1, x^2, x^3 числа X в этом базисе связаны с координатами $\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4$ того же числа в изотропном базисе формулами:

$$\left.\begin{aligned} \xi^1 &= x^0 + x^1 + x^2 + x^3\,, \\ \xi^2 &= x^0 + x^1 - x^2 - x^3\,, \\ \xi^3 &= x^0 - x^1 + x^2 - x^3\,, \\ \xi^4 &= x^0 - x^1 - x^2 + x^3\,. \end{aligned}\right\} \tag{466}$$

Базис $1, j, k, jk$ является "ортонормированным", именно в нем в конусе $\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4 > 0$ определено экспоненциальное представление чисел $X \in H_4$.

Если гладкая функция $F(x)$ одной действительной переменной x представима как полином или сходящийся ряд переменной x, то функция $F(X)$ переменной $X \in H_4$ также определена и является аналитической, в изотропном базисе она запишется следующим образом:

$$F(X) = F(\xi^1)\psi_1 + F(\xi^2)\psi_2 + F(\xi^3)\psi_3 + F(\xi^4)\psi_4\,. \tag{467}$$

В "ортонормированном" базисе $1, j, k, jk$ та же функция имеет вид:

$$\begin{aligned} F(X) &= \\ &= \frac{1}{4}[F(x^0+x^1+x^2+x^3) + F(x^0+x^1-x^2-x^3) + \\ &\quad + F(x^0-x^1+x^2-x^3) + F(x^0-x^1-x^2+x^3)]\cdot 1 + \\ &+ \frac{1}{4}[F(x^0+x^1+x^2+x^3) + F(x^0+x^1-x^2-x^3) - \\ &\quad - F(x^0-x^1+x^2-x^3) - F(x^0-x^1-x^2+x^3)]\cdot j + \\ &+ \frac{1}{4}[F(x^0+x^1+x^2+x^3) - F(x^0+x^1-x^2-x^3) + \\ &\quad + F(x^0-x^1+x^2-x^3) - F(x^0-x^1-x^2+x^3)]\cdot k + \\ &+ \frac{1}{4}[F(x^0+x^1+x^2+x^3) - F(x^0+x^1-x^2-x^3) - \\ &\quad - F(x^0-x^1+x^2-x^3) + F(x^0-x^1-x^2+x^3)]\cdot jk\,. \end{aligned} \tag{468}$$

Элемент длины в пространстве, конформно связанном с пространством H_4, в изотропном базисе имеет вид

$$ds = \kappa(\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4)\sqrt[4]{d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3 d\xi^4}\,. \tag{469}$$

Обобщенные импульсы находятся по формулам

$$p_i = \frac{1}{4}\kappa(\xi)\frac{\sqrt[4]{d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3 d\xi^4}}{d\xi^i}\,, \tag{470}$$

а тангенциальное уравнение индикатрисы можно записать, например, так

$$p_1 p_2 p_3 p_4 - \frac{\kappa^4(\xi)}{4^4} = 0\,. \tag{471}$$

Выберем в качестве функции $F(x)$ в формуле (467) функцию

$$F(x) = a\ln(x/b)\,, \tag{472}$$

где a, $b > 0$ - действительные параметры. Потенциал - это действительная часть аналитической функции $F(X)$ (468), поэтому

$$U(\xi^1,\xi^2,\xi^3,\xi^4) = \frac{a}{4}\ln\left(\frac{\xi^1\xi^2\xi^3\xi^4}{b^4}\right)\,. \tag{473}$$

Для нахождения мировых линий, которые порождает потенциал (473), необходимо решить систему уравнений (439), которая в нашем конкретном случае принимает вид

$$\dot{\xi}^i = \frac{\dfrac{\partial U}{\partial \xi^1}\dfrac{\partial U}{\partial \xi^2}\dfrac{\partial U}{\partial \xi^3}\dfrac{\partial U}{\partial \xi^4}}{\dfrac{\partial U}{\partial \xi^i}}\lambda(\xi)\,, \tag{474}$$

где $\lambda(\xi) \neq 0$ - некоторая скалярная функция. При соответствующем выборе $\lambda(\xi)$, уравнения принимают более простой вид

$$\dot{\xi}^i = \xi^i\,. \tag{475}$$

Введем переменную

$$x^0 = \frac{1}{4}(\xi^1 + \xi^2 + \xi^3 + \xi^4)\,, \tag{476}$$

которая в четырехмерном пространстве Бервальда - Моора играет ту же роль, что и координата x^0 в пространстве Минковского, тогда

$$\dot{x}^0 = x^0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d\xi^i}{dx^0} = \frac{\xi^i}{x^0} \qquad \Rightarrow \qquad \xi^i = \xi^i_0 \cdot x^0\,, \tag{477}$$

где ξ^i_0 - постоянные. Таким образом, все мировые линии - лучи, исходящие из начала координат (особой точки потенциала), причем движение материальных тел является равномерным и прямолинейным, поэтому для координат в "ортонормированном" базисе имеют место следующие формулы:

$$x^\mu = v^\mu x^0 \,, \qquad \frac{dx^\mu}{dx^0} = \frac{x^\mu}{x^0} \,, \tag{478}$$

где $\mu = 1, 2, 3$, а v^μ - действительные постоянные.

Совместим наблюдателя с мировой линией $v^\mu = 0$ и будем вести отсчет времени начиная с некоторого момента t_0. Считая, что скорость удаления материальных объектов $|v| = \frac{dr}{dt}$, где r - истинное пространственное расстояние, мы будем наблюдать *удаление* от нас материальных объектов с различными скоростями, зависящими от истинного пространственного расстояния до объекта. Предположим, что наблюдатели при обработке экспериментальных данных используют евклидовы расстояния в качестве истинных пространственных расстояний, то есть

$$r \simeq r_{ev} \equiv \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^2)^2} \,, \tag{479}$$

и тогда из формул (477) следует обычный закон Хаббла

$$\frac{dr}{dt} \simeq \frac{1}{t_0} \cdot r \,, \tag{480}$$

и этот закон не зависит от пространственных направлений. Таким образом, закон Хаббла получен с коэффициентом Хаббла $H = \frac{1}{t_0}$, что вполне согласуется с формулой, которая получается для этого закона в космологической модели Эйнштейна - де Ситтера [13], где $H = \frac{2}{3t_0}$.

Если истинное пространственное расстояние в H_4 искать тем же способом, как это обычно делается в СТО и ОТО [11], то в результате получим [15]:

$$r \equiv r_d = |x^\alpha| + |x^\beta| \,; \qquad \text{причем} \qquad |x^\gamma| \leq |x^\alpha|, |x^\beta| \,. \tag{481}$$

Здесь $\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3$; $\alpha \neq \beta$, $\alpha \neq \gamma$, $\beta \neq \gamma$. В евклидовом пространстве гиперповерхность, определяемая уравнением

$$r_d = const \,, \tag{482}$$

является ромбододекаэдром [16]. Если предположить, что истинное трёхмерное пространственное расстояние определяется формулой (481), в этом случае закон Хаббла принимает вид

$$|v| \simeq \frac{1}{t_0} \cdot r_d \,. \tag{483}$$

Если наши представления о пространстве остались евклидовыми, теоретически полученную формулу для закона Хаббла следует переписать следующим образом:

$$|v| \simeq \frac{r_d}{t_0 r_{ev}} \cdot r_{ev} \,. \tag{484}$$

Тогда коэффициент Хаббла определяется формулой

$$H = \frac{r_d}{t_0 r_{ev}} \tag{485}$$

и зависит от пространственных направлений, имея 12 максимумов, 6 минимумов и 8 локальных минимумов, причём

$$\frac{H_{max}}{H_{min}} = \sqrt{2}\,, \qquad \frac{H^{loc}_{max}}{H_{min}} = \frac{1+\sqrt{2}}{2}\,. \tag{486}$$

Каждый минимум окружен четырьмя максимумами, а каждый локальный минимум - тремя максимумами.

Обе формулы (480) и (484) не будут противоречить друг другу, если предположить, что использовать геометрию Бервальда - Моора следует только на расстояниях "близким к размерам" Вселенной. Тогда при изменении расстояния до галактик от самых малых до самых больших, коэффициент Хаббла в логарифмической модели претерпевает изменения:

$$\frac{1}{t_0} \quad \xrightarrow{\quad H \quad} \quad \frac{r_d}{t_0 r_{ev}}\,, \tag{487}$$

причём появляется зависимость этого коэффициента от пространственных направлений.

Таким образом, дополнительная анизотропия в четырёхмерном пространстве-времени приводит к анизотропии в истинном трёхмерном пространстве. Астрономические данные [22] указывают на наличие анизотропии коэффициента Хаббла и позволяют иначе взглянуть и на другое устоявшееся и, по-видимому, ошибочное убеждение, а именно, на уверенность большинства физиков в применимости к релятивистским моделям реального физического Мира исключительно квадратичных метрик. Пространства же невырожденных поличисел P_n при $n > 2$ всегда обладают дополнительной анизотропией по сравнению с квадратичными пространствами той же размерности.

Список литературы

[1] П.К.Рашевский: Геометрическая теория уравнений с частными производными. М. - Л., ОГИЗ, 1947.

[2] П.К.Рашевский: Риманова геометрия и тензорный анализ. М., "Наука", 1967.

[3] Кантор И.Л., Солодовников А.С., Гиперкомплексные числа, М., "Наука", 1973.

[4] А.Г.Свешников, А.Н.Тихонов: Теория функций комплексной переменной. М., 1967.

[5] Л.Э.Эльсольц: Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М., "Наука", 1969.

[6] И.М.Гельфанд: Лекции по линейной алгебре, "Наука", М., 1971.

[7] Нетер Э, Инвариантные вариационные задачи: Вариационные принципы механики, сб. статей под ред.Полака Л.С., М., "ГИФМЛ", 1959, стр. 611 - 630.

[8] И.М. Гельфанд, С.В. Фомин. Вариационное исчисление. М., "Госиздат. физико-математической литературы", 1961.

[9] Будак Б.М., Фомин С.В., Кратные интегралы и ряды, М., "Наука", 1967.

[10] Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц: Механика. М., "Наука", 1965.

[11] Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц: Теория поля. М., "Наука", 1967.

[12] Боголюбов Н.Н, Ширков Д.В., Введение в теорию квантованных полей, М., "Наука", 1973.

[13] К. Мёллер: Теория относительности. М., АТОМИЗДАТ, 1975.

[14] Г.Ю.Богословский: Статус и перспективы теории локально анизотропного пространства-времени, Физика ядра и частиц под редю Б.С.Ишханова и др., М., Изд-во МГУ, 1997.

[15] G.Yu. Bogoslovsky, H.F. Goenner, On the possibility of phase transitions in the geometric structure of space-time, Phys. Lett. A 244 (1998) 222–228.

[16] G.Yu. Bogoslovsky, H.F. Goenner, Finslerian spaces possessing local relativistic symmetry, Gen. Relativ. Gravit. 31 (1999) 1565–1603.

[17] Богословчкий Г.Ю. 4-импульс частицы и уравнение массовой поверхности в полностью анизотропном пространстве-времени. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 2(4), (2005), стр. 27 - 43.

[18] Д.Г.Павлов: Обобщение аксиом скалярного произведения, Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **1(1)** (2004), 5 - 19.

[19] Д.Г.Павлов: Хронометрия трёхмерного времени, Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **1(1)** (2004), 20 - 32.

[20] Д.Г.Павлов: Четырёхмерное время, Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **1(1)** (2004), 33 - 42.

[21] Гарасько Г.И., Теория поля и финслеровы пространства. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 2(6), Т. 3 (2006), стр. 6 - 20.

[22] McClure M.L., Dyer C.C. Ayisotropy in the Hubble constant as jbserved in the HST Extragalactic Distance Scale Key Project results. arXiv:astro-po/0703556v1