

ПОЛИЧИСЛА (МАТРИОНЫ) В БИОЛОГИЧЕСКОЙ И КОМПЬЮТЕРНОЙ ИНФОРМАТИКЕ

С. В. Петухов, Е. С. Петухова

Институт машиноведения РАН, Москва

petoukhov@hotmail.com

Статья посвящена 2^n -мерным поличислам, обобщающим комплексные и двойные числа на основе блочно-фрактального (или кронекеровского) алгоритма. Эти поличисла, названные круговыми и гиперболическими матрионами соответственно, сконструированы в ходе авторских исследований систем генетического кода с позиций матричных методов информатики. Представляются данные об алгебрах этих поличисел. Обсуждается значение матрионов для теоретической биологии и информатики.

1 Введение

Представляемые исследования по поличислам тесно связаны с главной задачей журнала "Гиперкомплексные числа в геометрии и физике", сформулированной в редакционной статье его первого номера (2004 год): "Своей главной задачей журнал ставит обоснование возможности расширения приведенной классификации чисел на числа больших размерностей, в первую очередь, обладающих коммутативно-ассоциативным умножением.... Двойные числа в основной классификации числовых структур должны стоять рядом с комплексными.... Признание за делителями нуля права на звание обычных чисел, приводит к возможности построения гиперкомплексных систем, наделенных коммутативно-ассоциативным произведением. Подчеркивая особый статус подобных структур, их предлагается рассматривать под общим именем поличисел... Пространства, стоящие за поличислами, как правило, являются финслеровыми". Поличислам посвящен сайт <http://www.polynumbers.ru>.

В настоящей статье представляются два вида поличисел, то есть числовых систем с коммутативно-ассоциативным произведением, обобщающих именно комплексные и двойные числа. Эти поличисла построены в ходе авторского исследования систем генетического кодирования и оказываются применимыми к математическому моделированию в теоретической биологии и информатике.

Известен алгоритм удвоения Грассмана-Клиффорда, порождающий огромное, трудно обозримое множество 2^n -мерных обобщений комплексных, двойных и дуальных чисел в виде гиперкомплексных чисел, квадраты базисных элементов которых равны -1 , $+1$ или 0 [1]. К настоящему времени хорошо изучена только незначительная часть из этого множества в виде чисел, называемых зачастую по имени изучавших их авторов: числа Клиффорда, числа Грассмана, числа Паули, числа Дирака, числа Калуцы и др. Для этих чисел построена теория, аналогичная теории функций комплексного переменного, благодаря чему они нашли широкое применение в математике и различных областях науки: неевклидовой геометрии, теории непрерывных групп, квантовой теории поля, теории упругости и т. д. [1]. Большинство из так построенных гиперкомплексных обобщений комплексных, двойных и дуальных чисел, например, числа Паули, Дирака, Калуцы не обладают свойством коммутативности по умножению.

Авторов данной статьи интересуют именно гиперкомплексные числа, наделенные коммутативно-ассоциативным умножением (то есть являющиеся поличислами) и отражающие те особенности иерархических систем генетического кодирования, которые

выявляются при матричном анализе этих структурированных систем. Такие 2^n -мерные поличисла (матрионы) были построены в ходе данных исследований с помощью особого блочно-фрактального алгоритма, который, как выяснилось позже, можно трактовать, как частный случай общего алгоритма удвоения Грассмана-Клиффорда. Достоинством предложенного блочно-фрактального алгоритма является его наглядность и относительная простота, а также содержательность получаемых с его помощью результатов. Авторам не удалось найти в литературе углубленного изучения этих матрионных видов поличисел. Поэтому им пришлось самостоятельно разрабатывать излагаемые в статье теоретические и прикладные материалы по матрионам. Изучение данных поличисел в их матричной форме представления ведется уже ряд лет, начиная с работ [2–4].

Опишем особенности этих поличисел и алгоритм их построения, связанные с (2×2) -матрицами (1):

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 \\ -x_1 & x_0 \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{vmatrix} x_0 & x_1 \\ x_1 & x_0 \end{vmatrix} \quad (1)$$

где x_0 и x_1 – действительные числа.

Левая матрица в (1) является матричной формой представления комплексных чисел. Именно в такой матричной форме комплексные числа фигурируют в компьютерных программах. Эта матрица при ее нормировании к матрице с единичным детерминантом совпадает с матрицей кругового поворота в плоскости.

Правая матрица в (1) является матричной формой представления двойных чисел, введенных Клиффордом в 1872 году: $x_0 \cdot 1 + x_1 \cdot e_1$, где $e_1^2 = +1$. С геометрической точки зрения она задает преобразование масштабирования и гиперболического поворота. При ее нормировании к матрице с единичным детерминантом она совпадает с матрицей гиперболического поворота. С этим преобразованием связаны гиперболические функции, специальная теория относительности, геометрическая теория логарифмов, теория солитонов синус-Гордона (о биологическом значении солитонов синус-Гордона см. [5]). Ряд геометрических приложений двойных чисел описан в книге [6]. Двойные числа имеют отношение к преобразованиям Лоренца и потому иногда называются числами Лоренца. Их другие известные названия: гиперболические комплексные числа; моторы, каунтеркомплексные или гиперболические числа; аномальные комплексные числа; перплексные числа; сплит-комплексные числа (подробности представлены на сайте http://en.wikipedia.org/wiki/Split-complex_number).

Обобщения (2×2) -матриц из (1) с помощью названного блочно-фрактального (или кронекеровского) алгоритма ведет к $(2^n \times 2^n)$ -матрицам, которые в силу их свойств являются 2^n -мерными поличислами ($n = 1, 2, 3, \dots$). Данные поличисла названы матрионами, поскольку они возникли из рассмотрения блочных матриц специальных видов. 2^n -мерные матрионы, алгоритмически порождаемые из левой матрицы в (1), условно именуются круговыми, а порождаемые из правой матрицы в (1) – гиперболическими. Базисными единицами в многомерных матрионах выступают не только действительная и мнимые единицы i_k ($i_k^2 = -1$), но и такие единицы e_k , для которых $e_k^2 = +1$. Эти базисные единицы e_k в рамках теории матрионов условно именуются *полумнимыми* единицами, поскольку в таблицах умножения базисных единиц матрионов они частично обладают свойствами как действительной, так и мнимой единиц, занимая некоторое промежуточное положение между ними.

Множества каждого из двух названных видов 2^n -мерных матрионов, определяемые над полем действительных чисел, включают в себя единичные матрицы в качестве своих единиц и образуют кольца и алгебры со специфическими таблицами умножения базисных единиц. Поскольку матрионы отражают структурные свойства общебиологических систем генетического кодирования, то давно известные в математике

комплексные и двойные числа обретают новые грани своей значимости в области биологии, физиологии, психофизики и других областях. Например, двойные числа через свои матрионные обобщения оказываются связанными с пифагорейским музыкальным строем (см. Приложение 1) и с древнекитайской табличной системой "Книги перемен", написанной несколько тысяч лет назад (<http://lah.ru/text/petoukhov/kp.htm>).

2 Круговые матрионы

Построение 2^n -мерных круговых матрионов как обобщений комплексных чисел основано на предложенном блочно-фрактальном (или кронекеровском) алгоритме (Рис. 1). В этом алгоритме на этапе конструирования матрицы с удвоенной размерностью каждый действительный элемент x_0 и x_1 (2×2)-матрицы комплексного числа $[x_0 \ x_1; -x_1 \ x_0]$ сам рассматривается как (2×2)-матрица некоторого комплексного числа: $x_0 = [y_0 \ y_1; -y_1 \ y_0]$, $x_1 = [y_2 \ y_3; -y_3 \ y_2]$. Данная процедура повторяется на следующем шаге ($y_0 = [z_0 \ z_1; -z_1 \ z_0]$, $y_1 = [z_2 \ z_3; -z_3 \ z_2]$, $y_2 = [z_4 \ z_5; -z_5 \ z_4]$, $y_3 = [z_6 \ z_7; -z_7 \ z_6]$) и т. д. (Такая применяемая нами линейная форма записи матриц существует наряду с традиционной табличной формой; она используется, например, в компьютерной программе MatLab).

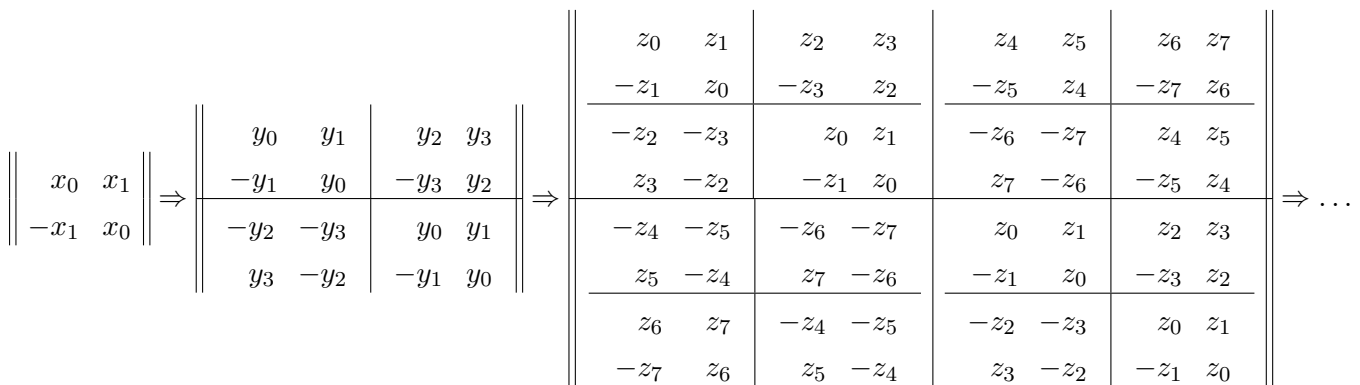


Рис. 1. Построение 2^n -мерных круговых матрионов на основе блочно-фрактального алгоритма

$(2^n \times 2^n)$ -матрицы, построенные такой локальной заменой каждого элемента матричным блоком, обладают глобально блочным характером фрактального типа. Их $(2^{n-1} \times 2^{n-1})$ -квадранты, расположенные вдоль главной диагонали, тождественны друг другу, а расположенные вдоль побочной диагонали – отличаются только знаком. Поэтому, обозначив эти квадранты через A_1 и A_2 , получаем, что при любом n вся блочная матрица имеет вид матрицы комплексного числа: $[A_1 \ A_2; -A_2 \ A_1]$. Это свойство тождественности вдоль диагоналей в равной степени относится к структурам самих квадрантов, субквадрантов, субсубквадрантов и т. д. В этом смысле имеет место блочная фрактальность, в силу которой использованный нами алгоритм порождения матрионов назван блочно-фрактальным.

Знакомые с кронекеровским произведением матриц, которое в теоретической физике зачастую называется тензорным произведением, легко увидят, что блочно-фрактальный алгоритм по результатам его применения совпадает с кронекеровским произведением соответствующих (2×2) -матриц. Здесь можно отметить, что кронекеровское произведение квадратных матриц \mathbf{A} и \mathbf{B} не коммутативно: $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \otimes \mathbf{A}$. Однако, применяя кронекеровское произведение к матричным формам представления, например, двойных и комплексных чисел, мы получаем 2^n -мерные числовые системы с коммутативно-ассоциативным умножением, поскольку $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{B} \otimes \mathbf{A}) = (\mathbf{B} \otimes \mathbf{A}) \cdot (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})$.

В свете сказанного предложенный алгоритм построения обобщенных чисел вполне можно было бы назвать тензорным или кронекеровским. Однако, большинство потенциальных читателей, интересующихся математической и теоретической биологией, не владеет понятием тензорного или кронекеровского умножения, но знакомо с представлением о фракталах, которое к тому же вызывает много эвристических ассоциаций. Поэтому авторы предпочитают называть предложенный алгоритм блочно-фрактальным.

Набор элементов первой строки матрицы кругового матриона повторяется в каждой ее строке, но в переставленном порядке и с разными знаками так, что круговые $(2^n \times 2^n)$ -матрионы, как правило, не являются вырожденными при любом n . Но, начиная с $n = 2$, в их множестве имеются делители нуля, то есть ненулевые члены множества, которые при перемножении друг с другом производят нулевой матрион. Для делителей нуля нельзя ввести операцию деления. В случае круговых тетраметрионов делители нуля имеют вид $(a, b - \text{действительные числа})$:

$$\begin{vmatrix} 0 & a & a & 0 \\ -a & 0 & 0 & a \\ -a & 0 & 0 & a \\ 0 & -a & -a & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b & 0 & 0 & b \\ 0 & b & -b & 0 \\ 0 & -b & b & 0 \\ b & 0 & 0 & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (2)$$

Каждую матрионную $(2^n \times 2^n)$ -матрицу можно представить в виде суммы базисных матриц того же порядка, состоящих из нулей и единиц. Для получения такой базисной матрицы, соответствующей координате x_k , надо в матрионной матрице все элементы x_k заменить на "1", а все остальные элементы заменить на "0". Например, круговой тетраметрион C_2 раскладывается на базисные матрицы следующим образом:

$$\begin{aligned} C_2 &= \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ -x_1 & x_0 & -x_3 & x_2 \\ -x_2 & -x_3 & x_0 & x_1 \\ x_3 & -x_2 & -x_1 & x_0 \end{vmatrix} = \\ &= x_0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + x_1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} + x_2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} + x_3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (3) \end{aligned}$$

В правой части выражения (3) первая базисная матрица представляет собой единичную матрицу, обозначаемую символом 1. Последующие три базисных матрицы обозначим символами $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{e}_3$ соответственно. Базисные матрицы \mathbf{i}_1 и \mathbf{i}_2 представляют собой мнимые единицы, поскольку $\mathbf{i}_1^2 = \mathbf{i}_2^2 = -1$. Четвертая базисная матрица является полумнимой единицей, поскольку $\mathbf{e}_3^2 = +1$. Оказывается, что 2^n -мерные круговые матрионы, начиная с $n = 2$, базируются на трех видах математических единиц: действительной единице, мнимых единицах и полумнимых единицах. Поэтому данные поличисла можно называть триединными поличислами.

На протяжении всей статьи мнимые единицы будут обозначаться символами \mathbf{i}_k , а полумнимые единицы – символами \mathbf{e}_k . При замене базисных матриц подобными символами любой 2^n -мерный круговой матрион приобретает полилинейную или векторную

форму своего представления (Рис. 2).

Размерность	Вид кругового матриона
2^1	$x_0 \cdot \mathbf{1} + x_1 \cdot \mathbf{i}_1$
2^2	$x_0 \cdot \mathbf{1} + x_1 \cdot \mathbf{i}_1 + x_2 \cdot \mathbf{i}_2 + x_3 \cdot \mathbf{e}_3$
2^3	$x_0 \cdot \mathbf{1} + x_1 \cdot \mathbf{i}_1 + x_2 \cdot \mathbf{i}_2 + x_3 \cdot \mathbf{e}_3 + x_4 \cdot \mathbf{i}_4 + x_5 \cdot \mathbf{e}_5 + x_6 \cdot \mathbf{e}_6 + x_7 \cdot \mathbf{i}_7$

Рис. 2. Полилинейные или векторные представления круговых матрионов для случаев 2-, 4- и 8-мерного пространства

Для круговых матрионов любой размерности существует общее правило вложения векторных форм матрионов меньшей размерности в векторные формы матрионов более высокой размерности. Оно заключается в том, что упорядоченный набор первых 2^{n-1} слагаемых в векторной форме каждого 2^n -мерного кругового матриона представляет собой полный упорядоченный набор слагаемых векторной формы 2^{n-1} -мерного кругового матриона. Другими словами, матрион меньшей размерности вложен в матрион удвоенной размерности, образуя его начальную половину. Выполнение этого правила можно видеть на примерах Рис. 2. Тем самым, круговой матрион, как многомерное число, объединяет в себе множество аналогичных чисел меньшей размерности в виде иерархического ансамбля.

Аналогичное правило вложения выполняется для таблицы умножения базисных единиц круговых матрионов. Рис. 3 представляет такую таблицу умножения для 8-мерных гиперболических матрионов. В каждой ячейке этой таблицы показан результат перемножения соответствующих базисных единиц из ее верхней строки и левого столбца (таблица Кэли). Данная таблица умножения полностью определяет алгебру этих матрионов.

	1	i₁	i₂	e₃	i₄	e₅	e₆	i₇
1	1	i₁	i₂	e₃	i₄	e₅	e₆	i₇
i₁	i₁	-1	e₃	-i₂	e₅	-i₄	i₇	-e₆
i₂	i₂	e₃	-1	-i₁	e₆	i₇	-i₄	-e₅
e₃	e₃	-i₂	-i₁	+1	i₇	-e₆	-e₅	i₄
i₄	i₄	e₅	e₆	i₇	-1	-i₁	-i₂	-e₃
e₅	e₅	-i₄	i₇	-e₆	-i₁	+1	-e₃	i₂
e₆	e₆	i₇	-i₄	-e₅	-i₂	-e₃	+1	i₁
i₇	i₇	-e₆	-e₅	i₄	-e₃	i₂	i₁	-1

Рис. 3. Таблица умножения базисных единиц круговых октоматрионов

В левом верхнем углу этой октоматрионной таблицы умножения выделены матрица (2×2) , которая воспроизводит таблицу умножения базисных единиц у круговых $(2^1 \times 2^1)$ -матрионов, и матрица (4×4) , воспроизводящая таблицу умножения у круговых $(2^2 \times 2^2)$ -матрионов. Сама таблица умножения круговых октоматрионов аналогичным образом вложена в таблицу умножения 16-мерных круговых матрионов и т. д. Тем самым, имеет место иерархия вложения соответствующих алгебр.

Таблица умножения базисных единиц круговых матрионов всегда симметрична относительно главной диагонали, что отражает их коммутативность.

Очередность следования антимнимых и мнимых единиц в 2^n -мерных круговых матрионах носит закономерный характер. Она совпадает с очередностью следования "+1"

и -1 на главной диагонали матрицы Адамара $H_n = [1 \ 1; 1 \ -1]^{(n)}$, играющей важную роль в теории дискретных сигналов и квантовых компьютеров. Кроме того, расположение всех знаков плюс и минус в таблицах умножения для 2^n -мерных круговых матрионов эквивалентно расположению знаков плюс и минус в этих матрицах Адамара.

Но расположение знаков плюс и минус в самих 2^n -мерных круговых матрионах совпадает с расположением этих же знаков в матрице Адамара другого вида: $[1 \ 1; -1 \ 1]^{(n)}$. Если значения всех координат $x_0, x_1, \dots, 2^n$ -мерного кругового матриона равны 1, то его матрица совпадает с этим видом матрицы Адамара.

Половина количества координат круговых матрионов всегда является мнимой, а вторая половина – "антимнимой", основанной на действительной и полумнимых базисных единицах. Образно говоря, процесс дихотомического увеличения размерности матрионов сопровождается реализацией в их составе бинарно-оппозиционных половин в виде антимнимой и мнимой половин. При этом сумма порядковых номеров антимнимых координат равна сумме порядковых номеров мнимых координат для каждого 2^n -мерного кругового матриона, начиная с $n = 2$. Например, для 4-мерного кругового матриона $x_0 \cdot \mathbf{1} + x_1 \cdot \mathbf{i}_1 + x_2 \cdot \mathbf{i}_2 + x_3 \cdot \mathbf{e}_3$ сумма порядковых номеров его антимнимых координат составляет $0 + 3 = 3$, как и сумма порядковых номеров мнимых координат: $1 + 2 = 3$. Для 8-мерного кругового матриона $x_0 \cdot \mathbf{1} + x_1 \cdot \mathbf{i}_1 + x_2 \cdot \mathbf{i}_2 + x_3 \cdot \mathbf{e}_3 + x_4 \cdot \mathbf{i}_4 + x_5 \cdot \mathbf{e}_5 + x_6 \cdot \mathbf{e}_6 + x_7 \cdot \mathbf{i}_7$ сумма порядковых номеров его антимнимых координат составляет $0 + 3 + 5 + 6 = 14$, как и сумма порядковых номеров его мнимых координат: $1 + 2 + 2 + 7 = 14$.

Закономерности собственных значений матриц круговых матрионов

У круговых матрионов это разделение на мнимые и антимнимые наборы прослеживается также в характере собственных значений их матричных форм представления. В этих собственных значениях, являющихся комплексными числами, мнимые и антимнимые координаты круговых матрионов выступают обособленными наборами, которые собраны в мнимой и действительной частях этих комплексных чисел. Например, у тетраметриона $m_2 = x_0 \cdot \mathbf{1} + x_1 \cdot \mathbf{i}_1 + x_2 \cdot \mathbf{i}_2 + x_3 \cdot \mathbf{e}_3$ собственные значения равны комплексным числам $x_0 + x_3 + j \cdot (-x_1 + x_2)$, $x_0 + x_3 - j \cdot (-x_1 + x_2)$, $-x_3 + x_0 + j \cdot (x_1 + x_2)$, $-x_3 + x_0 - j \cdot (x_1 + x_2)$ (здесь j – мнимая единица комплексного числа). Видно, что все мнимые координаты x_1 и x_2 фигурируют только в мнимой части этих собственных чисел, а все антимнимые координаты x_0 и x_3 – только в действительной части этих собственных чисел. Для случая кругового октоматриона $m_3 = x_0 \cdot \mathbf{1} + x_1 \cdot \mathbf{i}_1 + x_2 \cdot \mathbf{i}_2 + x_3 \cdot \mathbf{e}_3 + x_4 \cdot \mathbf{i}_4 + x_5 \cdot \mathbf{e}_5 + x_6 \cdot \mathbf{e}_6 + x_7 \cdot \mathbf{i}_7$ аналогичное правило группировки мнимых координат x_1, x_2, x_4, x_7 в мнимой части его собственных чисел, а антимнимых x_0, x_3, x_5, x_6 – в действительной части, реализуется в следующем виде: $x_5 - x_3 + x_6 + x_0 + j \cdot (-x_1 - x_2 - x_7 + x_4)$; $x_5 - x_3 + x_6 + x_0 - j \cdot (-x_1 - x_2 - x_7 + x_4)$; $-x_5 - x_3 - x_6 + x_0 + j \cdot (x_1 + x_2 - x_7 + x_4)$; $-x_5 - x_3 - x_6 + x_0 - j \cdot (x_1 + x_2 - x_7 + x_4)$; $x_5 + x_3 - x_6 + x_0 + j \cdot (-x_1 + x_2 + x_7 + x_4)$; $x_5 + x_3 - x_6 + x_0 - j \cdot (-x_1 + x_2 + x_7 + x_4)$; $-x_5 + x_3 + x_6 + x_0 + j \cdot (x_1 - x_2 + x_7 + x_4)$; $-x_5 + x_3 + x_6 + x_0 - j \cdot (x_1 - x_2 + x_7 + x_4)$.

Наборы собственных значений в 2^n -мерных круговых матрионах характеризуются дополнительной закономерностью: сумма всех собственных значений матриона равна действительному числу $2^n \cdot x_0$, то есть размерности матриона, умноженной на координату при действительной базисной единице. Например, сумма собственных значений круговых тетраметриона и октоматриона равна $4 \cdot x_0$ и $8 \cdot x_0$ соответственно, что можно проверить на приведенных примерах.

Молекулярные системы генетического кодирования принадлежат микромиру, подчиняющемуся законам квантовой механики. Для квантовой механики одним из важных является понятие унитарных преобразований и унитарных матриц. Отметим существование во множествах 2^n -мерных круговых матрионов подмножества матрионов,

Образовавшиеся матрицы по своей черно-белой мозаике являются бисимметрическими, т. е. симметричными относительно обеих диагоналей. Их левая и правая половина (а также верхняя и нижняя половины) зеркально антисимметричны друг другу. Составляющие их квадранты и субквадранты обладают этими же свойствами. Видно, что черно-белая мозаика матрицы (2×2) повторяется в тех квадрантах очередной матрицы (4×4) данного семейства, которые расположены вдоль главной диагонали. А в ее квадрантах, расположенных вдоль побочной диагонали, эта же мозаика повторяется в антисимметричном по цвету виде. Аналогично, вся мозаика матрицы (4×4) повторяется в точном виде в квадрантах вдоль главной диагонали очередной (8×8) -матрицы и в антисимметричном виде в ее квадрантах вдоль побочной диагонали. То есть глобальная мозаика матрицы предыдущего поколения из данного семейства наследуется в качестве локальной мозаики квадрантов матрицы следующего поколения. Подобное семейство $(2^n \times 2^n)$ -матриц с наследованием мозаик при переходе к матрице очередного поколения играет видную роль в структуризации генетического кода, исследуемого средствами матричной генетики.

Описанный графический алгоритм позволяет определять, какие из целых чисел являются антимнимыми, а какие субмнимыми. При этом можно ничего не знать о правилах матричного умножения. Достаточно запомнить представленную мозаику простейшей (2×2) -матрицы с нумерованными ячейками и вписать ее по данному алгоритму в квадранты (4×4) -матрицы с нумерованными ячейками. Затем повторить это с глобальной мозаикой (4×4) -матрицы, вписывая ее в квадранты (8×8) -матрицы, и т. д.

Отметим также, что для каждой из строк этих мозаичных матриц на Рис. 4 сумма чисел в ее белых ячейках равна сумме чисел в ее черных ячейках. Это же справедливо для каждого из столбцов данных матриц, начиная с (4×4) -матрицы.

Бинарно-мозаичные $(2^n \times 2^n)$ -матрицы, примеры из семейства которых представлены на Рис. 4, обладают интересным общим свойством самовоспроизводства. Если в этих бинарных по мозаике матрицах заменить черные ячейки элементами $+1$, а белые ячейки – элементами -1 , то так образованные бинарные матрицы демонстрируют свойство своего размножения при их возведении в целую положительную степень. Например, если обозначить через S так образованную бинарную (4×4) -матрицу, соответствующую (4×4) -матрице на Рис. 4, то при ее возведении во вторую степень получаем две таких матрицы S . И вообще оказывается справедливым соотношение: $S^k = 2^{k-1} \cdot S$, где k – целое положительное число. Аналогичное, но с другим множителем, равным 8, а не 2, справедливо в случае бинарной матрицы, соответствующей мозаичной (8×8) -матрице на Рис. 4, и т. д.

Насколько можно установить по начальным фрагментам рядов антимнимых и субмнимых натуральных чисел, для них выполняется следующее правило замыкания каждого из этих рядов относительно операции умножения: произведение двух антимнимых (субмнимых) натуральных чисел всегда равно антимнимому (соответственно субмнимому) натуральному числу. Доказательство верности этого утверждения для данных числовых рядов в общем виде авторами не проводилось.

Разбиение множества натуральных чисел на подмножества антимнимых и субмнимых чисел ставит много интересных вопросов, подлежащих углубленному изучению в дальнейшем. Например, возникает задача о распределении простых субмнимых чисел и простых антимнимых чисел. Речь идет, прежде всего, о взаимоотношениях чисел внутри каждого из этих двух подмножеств. Простым субмнимым числом (или субмнимо-простым числом) естественно называть такое, которое не разложимо на произведения никаких других субмнимых чисел, кроме себя самого и единицы (которая

является субмножимым числом). Простым антимножимым числом (или антимножимо-простым числом) естественно называть такое, которое не разложимо на произведения никаких других антимножимых чисел. Классическая задача о распределении простых чисел в ряду натуральных чисел породила большое количество принципиально важных исследований, методов и теорем, однако своего полного решения так и не получила. По нашему мнению, новая задача о распределении простых антимножимых и простых субмножимых натуральных чисел также способна лечь в основу перспективных исследований и породить новые методы и теоремы, которые, в частности, будут иметь отношение к названной классической задаче. Не может ли эта новая задача, возникшая в теории круговых матрионных, способствовать полному решению классической задачи о распределении простых чисел? Этот вопрос на сегодня является открытым.

Другим примером интересных вопросов, возникающих в связи с теорией рассматриваемых поличисел, является вопрос о рациональных числах. Их множество разбивается на несколько подмножеств по критерию того, к какому типу натуральных чисел – антимножимо или субмножимо – принадлежат в отдельности их числитель и знаменатель. Эти подмножества имеют особый характер распределения во множестве рациональных чисел, специфику перехода членов одного подмножества в другое при различных операциях и пр.

Перейдем теперь к другим бисимметрическим матрицам, представляющим гиперболические матрионы.

3 Гиперболические матрионы

Построение 2^n -мерных гиперболических матрионных как обобщений двойных чисел ведется на основе блочно-фрактального (или кронекеровского) аналогично рассмотренному выше случаю круговых матрионных. Каждый действительный элемент x_0 и x_1 (2×2) -матрицы двойного числа из (1) на этапе конструирования матрицы с удвоенной размерностью сам рассматривается как (2×2) -матрица некоторого двойного числа: $x_0 = [y_0 \ y_1; y_1 \ y_0]$, $x_1 = [y_2 \ y_3; y_3 \ y_2]$. При вложении этих (2×2) -матриц двойных чисел в исходную (2×2) -матрицу, последняя становится $(2^2 \times 2^2)$ -матрицей, являющейся матричной формой представления четырехмерного гиперболического матриона. Вновь трактуя каждый элемент новой $(2^2 \times 2^2)$ -матрицы как (2×2) -матрицу некоторого двойного числа ($y_0 = [z_0 \ z_1; z_1 \ z_0]$, $y_1 = [z_2 \ z_3; z_3 \ z_2]$, $y_2 = [z_4 \ z_5; z_5 \ z_6]$, $y_3 = [z_6 \ z_7; z_7 \ z_6]$) и вставляя их как блоки, получаем $(2^3 \times 2^3)$ -матрицу, представляющую 8-мерный гиперболический матрион и т. д. (Рис. 4).

$$\left\| \begin{array}{cc} x_0 & x_1 \\ x_1 & x_0 \end{array} \right\| \Rightarrow \left\| \begin{array}{cc|cc} y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1 & y_0 & y_3 & y_2 \\ \hline y_2 & y_3 & y_0 & y_1 \\ y_3 & y_2 & y_1 & y_0 \end{array} \right\| \Rightarrow \left\| \begin{array}{cc|cc|cc|cc} z_0 & z_1 & z_2 & z_3 & z_4 & z_5 & z_6 & z_7 \\ z_1 & z_0 & z_3 & z_2 & z_5 & z_4 & z_7 & z_6 \\ \hline z_2 & z_3 & z_0 & z_1 & z_6 & z_7 & z_4 & z_5 \\ z_3 & z_2 & z_1 & z_0 & z_7 & z_6 & z_5 & z_4 \\ \hline z_4 & z_5 & z_6 & z_7 & z_0 & z_1 & z_2 & z_3 \\ z_5 & z_4 & z_7 & z_6 & z_1 & z_0 & z_3 & z_2 \\ \hline z_6 & z_7 & z_4 & z_5 & z_2 & z_3 & z_0 & z_1 \\ z_7 & z_6 & z_5 & z_4 & z_3 & z_2 & z_1 & z_0 \end{array} \right\| \Rightarrow \dots$$

Рис. 4. Построение 2^n -мерных гиперболических матрионных

Все $(2^n \times 2^n)$ -матрицы гиперболических матрионных являются бисимметрическими, то есть симметрическими относительно обеих диагоналей. Эти $(2^n \times 2^n)$ -матрицы, по-

строенные такой локальной заменой каждого элемента матричным блоком, также обладают глобально блочным характером фрактального типа. Их $(2^{n-1} \times 2^{n-1})$ -квадранты, расположенные вдоль каждой диагонали, тождественны друг другу. Поэтому, обозначив эти квадранты через A_1 и A_2 , получаем, что при любом n вся блочная матрица имеет вид матрицы двойного числа: $[A_1 A_2; A_2 A_1]$. Это свойство тождественности вдоль диагоналей в равной степени относится к структурам самих квадрантов, субквадрантов, субсубквадрантов и т. д. В этом смысле имеет место блочная фрактальность. Этот же алгоритм построения гиперболических матрионов можно представить в форме кронекеровского произведения (2×2) -матриц двойных чисел (Рис. 5).

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 \\ x_1 & x_0 \end{vmatrix} \otimes \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ x_3 & x_2 \end{vmatrix} \otimes \begin{vmatrix} x_4 & x_5 \\ x_5 & x_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z_0 & z_1 & z_2 & z_3 & z_4 & z_5 & z_6 & z_7 \\ z_1 & z_0 & z_3 & z_2 & z_5 & z_4 & z_7 & z_6 \\ z_2 & z_3 & z_0 & z_1 & z_6 & z_7 & z_4 & z_5 \\ z_3 & z_2 & z_1 & z_0 & z_7 & z_6 & z_5 & z_4 \\ z_4 & z_5 & z_6 & z_7 & z_0 & z_1 & z_2 & z_3 \\ z_5 & z_4 & z_7 & z_6 & z_1 & z_0 & z_3 & z_2 \\ z_6 & z_7 & z_4 & z_5 & z_2 & z_3 & z_0 & z_1 \\ z_7 & z_6 & z_5 & z_4 & z_3 & z_2 & z_1 & z_0 \end{vmatrix}$$

Рис. 5. Кронекеровская форма блочно-фрактального алгоритма для гиперболических матрионов

Каждую $(2^n \times 2^n)$ -матрицу гиперболического матрионов можно представить в виде суммы базисных матриц, действуя аналогично описанному случаю круговых матрионов. Например, гиперболический тетраметрион G_2 раскладывается на базисные матрицы следующим образом:

$$G_2 = \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_0 & x_3 & x_2 \\ x_2 & x_3 & x_0 & x_1 \\ x_3 & x_2 & x_1 & x_0 \end{vmatrix} = x_0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + x_1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} + x_2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} + x_3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \tag{4}$$

В правой части (4) первая базисная матрица представляет собой единичную матрицу, поэтому обозначим ее символом $\mathbf{1}$. Последующие три базисных матрицы обозначим символами $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, поскольку они являются полумнимыми единицами, квадрат которых равен $+1$.

При замене базисных матриц подобными символами любой 2^n -мерный гиперболический матрион приобретает полилинейную или векторную форму своего представления (Рис. 6).

Размерность	Вид гиперболического матриона
2^1	$x_0 \cdot \mathbf{1} + x_1 \cdot \mathbf{e}_1$
2^2	$x_0 \cdot \mathbf{1} + x_1 \cdot \mathbf{e}_1 + x_2 \cdot \mathbf{e}_2 + x_3 \cdot \mathbf{e}_3$
2^3	$x_0 \cdot \mathbf{1} + x_1 \cdot \mathbf{e}_1 + x_2 \cdot \mathbf{e}_2 + x_3 \cdot \mathbf{e}_3 + x_4 \cdot \mathbf{e}_4 + x_5 \cdot \mathbf{e}_5 + x_6 \cdot \mathbf{e}_6 + x_7 \cdot \mathbf{e}_7$

Рис. 6. Полилинейные или векторные представления гиперболических матрионов для случаев 2-, 4- и 8-мерного пространств

Для гиперболических матрионов любой размерности существует общее правило вложения векторных форм матрионов меньшей размерности в векторные формы матрионов более высокой размерности. Оно заключается в том, что упорядоченный набор первых $2^n/2$ слагаемых в векторной форме каждого 2^n -мерного гиперболического матриона представляет собой полный упорядоченный набор слагаемых векторной формы 2^{n-1} -мерного гиперболического матриона. Другими словами, матрион меньшей размерности вложен в матрион удвоенной размерности, образуя его начальную половину. Выполнение этого правила можно видеть на примерах Рис. 6. Тем самым, гиперболический матрион, как многомерное число, объединяет в себе множество аналогичных чисел меньшей размерности в виде иерархического ансамбля.

Аналогичное правило вложения выполняется для таблицы умножения базисных единиц гиперболических матрионов. Рис. 7 представляет такую таблицу умножения для 8-мерных гиперболических матрионов.

	1	e ₁	e ₂	e ₃	e ₄	e ₅	e ₆	e ₇
1	1	e ₁	e ₂	e ₃	e ₄	e ₅	e ₆	e ₇
e ₁	e ₁	1	e ₃	e ₂	e ₅	e ₄	e ₇	e ₆
e ₂	e ₂	e ₃	1	e ₁	e ₆	e ₇	e ₄	e ₅
e ₃	e ₃	e ₂	e ₁	1	e ₇	e ₆	e ₅	e ₄
e ₄	e ₄	e ₅	e ₆	e ₇	1	e ₁	e ₂	e ₃
e ₅	e ₅	e ₄	e ₇	e ₆	e ₁	1	e ₃	e ₂
e ₆	e ₆	e ₇	e ₄	e ₅	e ₂	e ₃	1	e ₁
e ₇	e ₇	e ₆	e ₅	e ₄	e ₃	e ₂	e ₁	1

Рис. 7. Таблица умножения базисных единиц гиперболических октоматрионов

В левом верхнем углу таблицы умножения на Рис. 7 выделены матрицы порядка (2×2) и (4×4) , представляющие собой вложенные в нее таблицы умножения базисных единиц 2-мерных и 4-мерных гиперболических матрионов соответственно. Сама таблица умножения гиперболических октоматрионов аналогичным образом вложена в таблицу умножения 16-мерных гиперболических матрионов и т. д. Тем самым, имеет место иерархия вложения соответствующих алгебр.

Уникальной особенностью гиперболических матрионов является то, что структура их таблицы умножения всегда совпадает с их собственной матричной структурой. Действительно, если символы в таблице умножения на Рис. 7 трактовать как вещественные числа, то таблица умножения сама оказывается гиперболическим матрионом (сравни с Рис. 5).

Характерной особенностью гиперболических матрионов как матриц является идентичность набора координат в каждой строке и столбце. Любая строка матрионной матрицы отличается от ее первой строки только перестановкой тех же самых значений элементов по специфическому алгоритму, определяющему ее как функцию первой строки. Расположение каждой координаты в $(2^n \times 2^n)$ -матрице гиперболического матриона создает определенную мозаику, которую можно дополнительно визуализировать маркировкой ячеек с этой координатой цветом. Поскольку эта мозаика связана с базисными матрицами данных матрионов, то она является наглядным признаком, характерным для 2^n -мерного матриона. При переходе к 2^{n+1} -мерному матриону она передается ему "по наследству", алгоритмически воспроизводясь в его квадрантах в качестве локальной мозаики. При этом глобальная мозаика матриона увеличенной раз-

мерности имеет существенно иной вид. Поскольку матрионы связаны со структурами генетического кода и биоинформатикой, данные мозаики и их варианты могут рассматриваться как определенные генетические архетипы и использоваться в дизайне, культурологии, арт-терапии и других областях.

Матрица 2^n -мерного гиперболического матриона с ненулевыми элементами, в которой все элементы равны друг другу, является вырожденной. Такие матрицы не имеют обратных к ним матриц, и для них операция деления не определена.

Невырожденные гиперболические матрионы удовлетворяют определению метрических тензоров римановой геометрии, что позволяет использовать их при анализе внутренней геометрии поверхностей биологических тел и при математическом моделировании в биологической проблеме морфологического наследования. В живой природе формообразовательные процессы тесно связаны с "анизотропией биологического пространства", которая отражает их анизотропный характер. Подобная анизотропия биологических пространств выступает одним из ключевых моментов самоорганизации живой материи. Загадки биологического формообразования в науке давно связывают с идеей существования некоторого анизотропного морфогенетического поля, геометрическую теорию которого предстоит создать, например, с использованием финслеровой геометрии. Поверхности биологических тел криволинейны, и к ним как нельзя более применимы понятия внутренней геометрии поверхностей, характерные для римановой геометрии и ее обобщений.

Таблицы умножения 2^n -мерных гиперболических матрионов симметричны относительно главной диагонали, что отражает коммутативность данных матрионов по умножению. Коммутативность и ассоциативность гиперболических и круговых матрионов легко доказываются через использование их блочного строения.

Докажем для примера коммутативность 2^n -мерных гиперболических матрионов, исходя из блочного характера их структуры и коммутативности двойных чисел. Для этого сравним произведения, отличающиеся порядком сомножителей, двух 2^n -мерных гиперболических матрионов $A = [A_1, A_2; A_2, A_1]$ и $B = [B_1, B_2; B_2, B_1]$, где A_1, A_2, B_1, B_2 являются 2^{n-1} -мерными гиперболическими матрионами:

$$\begin{aligned} A \cdot B &= [A_1, A_2; A_2, A_1] \cdot [B_1, B_2; B_2, B_1] = \\ &= [A_1 \cdot B_1 + A_2 \cdot B_2, A_1 \cdot B_2 + A_2 \cdot B_1; A_2 \cdot B_1 + A_1 \cdot B_2, A_2 \cdot B_2 + A_1 \cdot B_1] \quad (5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B \cdot A &= [B_1, B_2; B_2, B_1] \cdot [A_1, A_2; A_2, A_1] = \\ &= [B_1 \cdot A_1 + B_2 \cdot A_2, B_1 \cdot A_2 + B_2 \cdot A_1; B_2 \cdot A_1 + B_1 \cdot A_2, B_2 \cdot A_2 + B_1 \cdot A_1] \quad (6) \end{aligned}$$

Коммутативность матрионов A и B по умножению реализуется тогда, когда правые части матричных тождеств (4.2/2) и (4.2/3) равны, т. е. когда их соответственные элементы равны:

$$\begin{aligned} A_1 \cdot B_1 + A_2 \cdot B_2 &= B_1 \cdot A_1 + B_2 \cdot A_2; & A_1 \cdot B_2 + A_2 \cdot B_1 &= B_1 \cdot A_2 + B_2 \cdot A_1; & (7) \\ A_2 \cdot B_1 + A_1 \cdot B_2 &= B_2 \cdot A_1 + B_1 \cdot A_2; & A_2 \cdot B_2 + A_1 \cdot B_1 &= B_2 \cdot A_2 + B_1 \cdot A_1 \end{aligned}$$

В левой и правой частях каждого из этих равенств (7) стоят одинаковые произведения, но взятые с разным порядком сомножителей. Эти равенства (7) выполняются, если каждое из данных произведений перестановочно, что имеет место тогда, когда каждая из матриц A_1 и A_2 перестановочна по умножению с каждой из матриц B_1 и B_2 . То есть для коммутативности этих блочных $(2^n \times 2^n)$ -матриц достаточно коммутативности составляющих их матриц-блоков вдвое меньшего порядка $(2^{n-1} \times 2^{n-1})$. Другими

словами, коммутативность этих $(2^{n-1} \times 2^{n-1})$ -матриц влечет за собой коммутативность $(2^n \times 2^n)$ -матриц. Но $(2^1 \times 2^1)$ -матрицы коммутативны, поскольку являются двойными числами. Значит, $(2^2 \times 2^2)$ -матрицы также коммутативны, как и все последующие $(2^n \times 2^n)$ -матрицы, представляющие гиперболические матрионы.

Ассоциативность по умножению $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ для гиперболических и круговых матрионов A, B, C доказывается аналогично.

О применимости блочно-фрактального алгоритма к другим видам чисел

Значение использованного блочно-фрактального алгоритма конструирования обобщенных числовых систем вовсе не исчерпывается названными матрионами. Он применим для обобщения любых многомерных чисел, представимых в матричной форме. В такой матрице по данному алгоритму каждый элемент рассматривается как блочная матрица исходного типа для автоматического увеличения порядка матрицы. Этим алгоритмом мы получаем многомерные обобщения дуальных чисел, кватернионов Гамильтона и др.

Например, полученное с помощью такого алгоритма четырехмерное обобщение дуальных чисел $x_1 \cdot \mathbf{1} + x_2 \cdot \mathbf{e}_1$, где $e_1^2 = 0$, имеет следующий вид (слева) и таблицу умножения его базисных единиц (справа):

$$\begin{vmatrix} x_0 & 0 \\ x_2 & x_1 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} y_0 & 0 & 0 & 0 \\ y_2 & y_1 & 0 & 0 \\ y_3 & 0 & y_1 & 0 \\ y_4 & y_3 & y_2 & y_1 \end{vmatrix}$$

	1	e_1	e_2	e_3
1	1	e_1	e_2	e_3
e_1	e_1	0	e_3	0
e_2	e_2	e_3	0	0
e_3	e_3	0	0	0

Обратимся теперь к изложению некоторых материалов о связи 2^n -мерных матрионов с иерархическими системами генетического кодирования. При этом дополнительно проиллюстрируем содержательность матричного подхода в генетике лишь несколькими примерами из представительного числа полученных результатов.

4 О генетическом коде

Молекулярная генетика открыла, что все живые организмы имеют одни и те же основы генетического кодирования и в этом отношении неотличимы друг от друга. Другими словами, в науке произошло великое объединение живых организмов. С этими основами связана удивительная помехоустойчивость передачи наследственной информации от поколения к поколению.

Базис языка наследственной информации поразительно прост. Для записи генетических посланий дискретного характера, кодирующих белки, в рибонуклеиновых кислотах любых организмов используется "алфавит", состоящий всего из четырех "букв" или азотистых оснований (рис. 1): аденин (А), цитозин (С), гуанин (G), урацил (U) (в ДНК вместо урацила используется родственный ему тимин (Т)). Именно строчная последовательность этих четырех букв (или моноплетов) на нитях нуклеиновых кислот содержит генетическую информацию для синтеза белков. Как говорят, энциклопедия жизни написана четырьмя буквами. Эти буквы образуют между собой комплементарные пары С-G и А-U, поскольку в молекулах наследственности стоят напротив друг друга и связаны соответственно тремя и двумя водородными связями (к этим числам 3 и 2 мы вернемся ниже).

Данный набор четырех букв обычно считается элементарным алфавитом генетического кода. Генетическая информация, передаваемая молекулами наследственности (ДНК и РНК), определяет первичное строение белков живого организма. Каждый кодируемый белок представляет собой цепь из 20 видов аминокислот. Последовательность аминокислот в белковой цепи определяется последовательностью триплетов (трехбуквенных "слов"). Триплетом или кодоном называется блок из трех соседних азотистых оснований, расположенных вдоль нити ДНК (или РНК). Триплеты, стоящие напротив друг друга на двух нитях ДНК, называются кодоном и антикодоном. Из четырехбуквенного алфавита можно составить всего $4^3 = 64$ вида триплетов. Каждый из них имеет кодовое значение, кодируя ту или иную из 20 аминокислот или знаки начала и остановки белкового синтеза. Генетический код называется вырожденным, поскольку 64 триплета кодируют всего 20 аминокислот, и каждая аминокислота может кодироваться разным количеством триплетов.

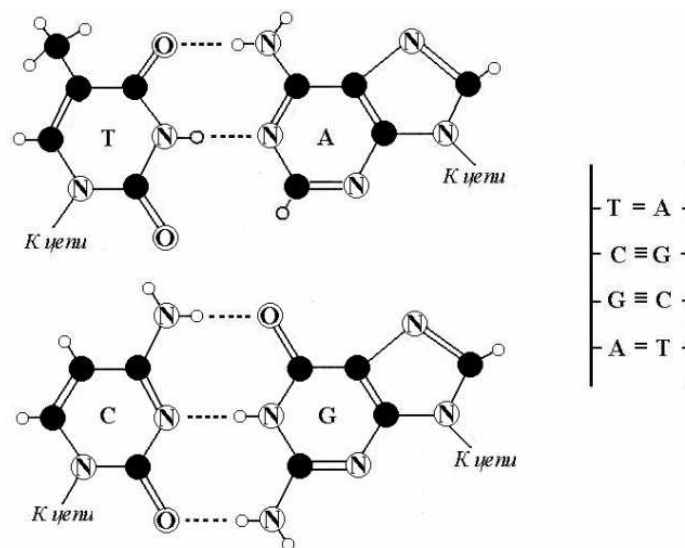


Рис. 8. Комплементарные пары четырех азотистых оснований в ДНК: А – Т (аденин и тимин), С – G (цитозин и гуанин). Пунктиром даны водородные связи 2 и 3 в этих парах. Черные кружки – атомы углерода, маленькие белые кружки – водорода, кружки с буквой N – азота, кружки с буквой O – кислорода

Современной науке не известны причины того, почему алфавит генетического языка именно четырехбуквенный (а не из тридцати букв, например); почему из миллиардов возможных химических соединений именно эти четыре азотистые основания выбраны в качестве элементов алфавита; почему генетически кодируются именно 20 аминокислот. И почему код наделен именно такой системой вырожденности, которая давно связывается в генетике с идеей его помехоустойчивости. Проводимые авторами исследования направлены на поиск адекватного подхода к этой проблематике и к пониманию генетической помехоустойчивости. Проблема наследуемой помехоустойчивости является общей для всех многоканальных взаимосвязанных систем информатики организма, который сам является информационной сущностью и живет для передачи наследственной информации от предков к потомкам. С генетическими молекулами связано много прикладных задач нанотехнологий и биотехнологий, например, по созданию компьютеров на ДНК [7]. Необходимо выявлять те особенности ансамблей генетических молекул, которые напоминают формализмы цифровой информатики, активно использующей математику матриц.

В силу дискретного характера генетического кода естественно исследовать его с позиций современной теории дискретных сигналов. Она, в частности, эффективно ре-

шает проблемы помехоустойчивости передачи цифровой информации за счет так называемых помехоустойчивых кодов, то есть кодов, способных к выявлению и исправлению ошибок. Важная особенность ситуации в современной микроэлектронной технике цифровой связи заключается в том, что даже при самом совершенном исполнении аппаратуры связи с наилучшими электрическими контактами и прочее существуют неустранимые помехи для передачи информации, вызванные, например, тепловыми шумами. Борьба с этим глубинным фактором ненадежности информации удается программными методами за счет так называемых помехоустойчивых кодов, то есть кодов, способных к обнаружению и исправлению ошибок. Математика помехоустойчивых кодов применяет представление множества сигналов и кодов в виде матриц и их кронекеровских степеней. В том числе для обеспечения надежности передачи информации широко используется кронекеровское семейство матриц Адамара, представленное в выражении (8) слева, где (n) – кронекеровская степень.

$$H^{(n)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}^{(n)} ; \quad P^{(n)} = \begin{vmatrix} C & A \\ U & G \end{vmatrix}^{(n)} \quad (8)$$

Опираясь на достижения теории цифровой связи, авторы по аналогии представляют систему четырех букв генетического алфавита в виде базовой матрицы P порядка (2×2) и исследуют семейство $P^{(n)} = [C \ A; \ U \ G]^{(n)}$ генетических матриц (кратко, геноматриц), возникающее при ее возведении в кронекеровскую степень (n) , как это показано в выражении (8) справа.

Системы генетического кода белков состоят из 4^n мультиплетов: алфавит – из 4^1 моноплетов, система триплетов – из 4^3 триплетов, белки одинаковой длины k кодируются набором из 4^{3k} мультиплетов. Данное семейство геноматриц $P^{(n)}$ при достаточно большом " n " унифицированным образом представляет всю систему кодовых мультиплетов от моноплетов до самых длинных мультиплетов, кодирующих самые длинные белки. В каждом из четырех квадрантов геноматрицы $P^{(n)}$ собраны все n -плеты, начинающиеся с одной из четырех букв C, A, U, G . Если не обращать внимания на эту первую букву в n -плетях квадранта, то легко видеть, что квадрант матрицы $P^{(n)}$ полностью воспроизводит матрицу $P^{(n-1)}$ предыдущего поколения (это обусловлено свойствами кронекеровского возведения в степень). Если процесс образования в этом семействе очередных геноматриц $P^{(n)}$ с ростом " n " условно назвать эволюционным порождением очередного поколения геноматриц, то геноматрица каждого нового поколения в силу описанной особенности содержит в себе в скрытом виде информацию о всех предыдущих поколениях (геноматрицы с "памятью поколений").

Выбранный природой набор четырех азотистых оснований A, C, G, U является носителем системы бинарно-оппозиционных признаков. Из четырех букв кода две буквы C и U являются пиримидинами (содержат одно кольцо в молекуле, как показано на Рис. 8), а две другие буквы A и G – пуринами (содержат два кольца). Поэтому можно на объективной основе ввести бинарную систему обозначений (первый бинарный субалфавит), в которой пиримидины C и U характеризуются символом 1 , а пурины A и G – символом 0 . По другой паре опозиционных признаков (наличию или отсутствию свойства аминотутируемости, или признакам кето-амино [8, с. 173]) – эквивалентными оказываются другие пары букв, что позволяет ввести другую бинарную систему обозначений (второй бинарный субалфавит): эквивалентные по наличию данного свойства буквы C и A обозначаются символом $\underline{1}$, а другая пара букв, лишенная этого свойства, – символом $\underline{0}$ (для отличия данных двух бинарных систем бинарные символы второй системы наклонены и подчеркнуты).

В матрицах на Рис. 9 указаны бинарные номера всех столбцов и строк. Эти номера

$$P = \begin{array}{c|cc} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{1} & C & A \\ \hline \mathbf{0} & U & G \end{array}; P^{(2)} = P \otimes P =$$

	11	10	01	00
11	CC 1111 15	CA 1110 14	AC 1101 13	AA 1100 12
10	CU 1011 11	CG 1010 10	AU 1001 9	AG 1000 8
01	UC 0111 7	UA 0110 6	GC 0101 5	GA 0100 4
00	UU 0011 3	UG 1110 2	GU 0001 1	GG 0000 0

	111	110	101	100	011	010	001	000
111	CCC 111111 63	CCA 111110 62	CAC 111101 61	CAA 111100 60	ACC 111011 59	ACA 111010 58	AAC 111001 57	AAA 111000 56
110	CCU 110111 55	CCG 110110 54	CAU 110101 53	CAG 110100 52	ACU 110011 51	ACG 110010 50	AAU 110001 49	AAG 110000 48
101	CUC 101111 47	CUA 101110 46	CGC 101101 45	CGA 101100 44	AUC 101011 43	AUA 101010 42	AGC 101001 41	AGA 101000 40
100	CUU 100111 39	CUG 100110 38	CGU 100101 37	CGG 100100 36	AUU 100011 35	AUG 100010 34	AGU 100001 33	AGG 100000 32
011	UCC 011111 31	UCA 011110 30	UAC 011101 29	UAA 011100 28	GCC 011011 27	GCA 011010 26	GAC 011001 25	GAA 011000 24
010	UCU 010111 23	UCG 010110 22	UAU 010101 21	UAG 010100 20	GCU 010011 19	GCG 010010 18	GAU 010001 17	GAG 010000 16
001	UUC 001111 15	UUA 001110 14	UGC 001101 13	UGA 001100 12	GUC 001011 11	GUA 001010 10	GGC 001001 9	GGA 001000 8
000	UUU 000111 7	UUG 000110 6	UGU 000101 5	UGG 000100 4	GUU 000011 3	GUG 000010 2	GGU 000001 1	GGG 000000 0

Рис. 9. Начальные представители семейства геноматриц $P^{(n)}$ для случаев моноплетов, дуплетов и триплетов ($n = 1, 2, 3$). \otimes – символ кронекеровского умножения

образуются автоматически при чтении мультиплетов каждого столбца с точки зрения первого бинарного субалфавита, а мультиплетов каждой строки – с точки зрения второго бинарного субалфавита. Например, триплет CAU в первом субалфавите имеет бинарное побуквенное обозначение 101 (оно совпадает с бинарными обозначениями всех триплетов его столбца, а потому используется как номер данного столбца), а во втором субалфавите – бинарное обозначение 110 (оно совпадает с бинарными обозначениями всех триплетов его строки, а потому используется как ее номер).

Тем самым, в матрицах $P^{(n)}$ все мультиплеты оказываются автоматически перенумерованными, сгруппированными в однородные по составу столбцы и строки и упорядоченно расположенными по объективным признакам генобукв. Эта упорядоченность выражается, в частности, в том, что, например, в геноматрице $P^{(3)}$ для 64 триплетов

каждый триплет имеет индивидуальный номер, состоящий из объединения бинарных номеров его строки и столбца (например, триплет CAU имеет бинарный номер 110101, равный 53 в десятичной системе счисления). Вся система генов переводится таким образом на язык геометрии в пространствах сообщений по аналогии с теорией дискретных сигналов. При этом геноматрица отражает реальные взаимосвязи элементов в системе генетического кода. Так, каждая пара кодон-антикодон (и только такая пара) имеет сумму их номеров равную 63. Все это свидетельствует в пользу того, что матричный подход на основе алфавитно-кронекевского семейства матриц адекватен структурным законам системы генетического кодирования.

Именно эта бинарная матрица на Рис. 9 (только без буквенных триплетов) в свое время поразила изобретателя первого компьютера (механического калькулятора) Лейбница. Лейбниц считал себя создателем двоичной системы счисления до тех пор, пока через христианских миссионеров не познакомился с этой бинарной таблицей 64 гексаграмм из древнекитайской "Книги Перемен" (I-Ching), написанной несколько тысяч лет назад и утверждавшейся древними китайцами в качестве всеобщего природного архетипа. Китайцы ничего не знали о генетическом коде, который оказывается структурированным в соответствии с их утверждениями. Лейбниц увидел в особенностях данной древней матрицы многие черты сходства с волновавшими его идеями универсального языка. "Лейбниц усмотрел в этом подобии ... свидетельство предустановленной гармонии и единства божьего промысла для всех времен и народов" [9, с. 12]. Таким образом, введенная нами естественная система нумерации триплетов и ячеек октетной таблицы известна уже несколько тысяч лет и вполне может называться древнекитайской системой. Матричный подход к генетическому коду, помимо фундаментальности объекта исследования и применяемой матричной математики, неожиданно выводит на исторические аналогии и проблему связи времен. Полученные на этом пути многочисленные результаты даны в работах [2–4, 10–13]. Упомянем также, что эта древнекитайская таблица 64 гексаграмм допускает содержательное рассмотрение с позиции гиперболических матрионов, то есть с позиции поличисел.

Подчеркнем, что имеется астрономическое число $64! \approx 10^{89}$ вариантов расположения 64 триплетов в октетной матрице. Современная физика оценивает время существования Вселенной в 10^{17} секунд. Получается, что если на рассмотрение каждого из этих вариантов затрачивать всего одну секунду, то за все время существования Вселенной мы успеем рассмотреть лишь ничтожную часть из этих 10^{89} вариантов. Заведомо ясно, что случайная расстановка 20 аминокислот и их подсемейств триплетов в октетных матрицах этого необозримого множества вариантов почти никогда не даст никакой симметрии в их расположении.

Однако природа по какой-то причине выбрала такой вариант вырожденности генетического кода, который соответствует симметрическому, а значит закономерному заполнению данной октетной матрицы. Отметим, что скрытые отношения симметрии между этими двумя подмножествами по 32 триплета выявлены именно в рассматриваемом нами эксклюзивном – алфавитно-кронекевском – варианте расположения 64 триплетов в октетной матрице, который является одним из 10^{89} вариантов их расположения. Все описываемые ниже результаты по матричной генетике получены в связи именно с этим найденным особым вариантом расположения триплетов, а также с несколькими его модификациями, определяемыми перестановками позиций и букв в триплетах. Эта совокупность взаимосвязанных симметрических геноматриц составляет ничтожную часть от общего количества 10^{89} матриц с различным расположением триплетов.

Симметрии вырожденности генетического кода в его матричном представлении

Построенная матрица $P^{(3)}$ для 64 триплетов структурирована так, что каждый из ее 16 субквадрантов (2×2) содержит полное семейство NN-триплетов, т. е. набор всех тех четырех триплетов, которые начинаются с двух одинаковых первых букв. Отражает ли эта матрица и сгруппированные в ней семейства NN-триплетов симметрическим образом структуру вырожденности генетического кода? Исходно нет никаких оснований надеяться на то, что эта формально построенная матрица отражает симметрии вырожденности кода (при ее построении аминокислоты даже не упоминались). Если же вдруг окажется, что специфика вырожденности множества 20 аминокислот вписывается в нее упорядоченным, симметрическим образом, то этот феноменологический факт будет сильным аргументом в пользу адекватности матричного представления системы генетического кодирования.

Оказывается, что именно закономерное, симметрическое расположение видов аминокислот с различной кодовой вырожденностью реализуется в данной матрице $P^{(3)}$ [2–4]. Обратимся к данным о вырожденности генетического кода и расположению 20 аминокислот в этой геноматрице 64 триплетов в случае генетического кода митохондрий позвоночных, который в генетике называется наиболее древним и "идеальным" [14]. Вырожденность этого кода оказывается связанной именно с 16 семействами NN-триплетов, каждое из которых занимает один из 16 субквадрантов (2×2) геноматрицы $P^{(3)}$ (Рис. 2.1). Множество 16 таких семейств состоит из двух равных подмножеств по 8 семейств в каждом по свойствам вырожденности кода. В первый набор входят 8 семейств "двухпозиционных" NN-триплетов, кодовое значение которых не зависит от буквы на третьей позиции в них, а потому все четыре ячейки соответствующих субквадрантов заняты одной и той же аминокислотой. Эти ячейки обозначены на рисунке черным цветом (заштрихованы). Во второй набор входят 8 семейств "трехпозиционными" NN-триплетами, кодовое значение которых зависит от буквы на третьей позиции в них, а потому обозначенные белым цветом четыре ячейки каждого из таких субквадрантов неодинаковы по аминокислотам и стоп-сигналам в них. Такие геноматрицы с черно-белой мозаикой, отражающей характер вырожденности генетического кода, будем называть геноматрицами вырожденности кода. Наряду с триплетами в них представлены 20 кодируемых ими аминокислот с их стандартными сокращенными названиями: Ala, Arg, Asn, Asp, Cys, Gln, Glu, Gly, His, Ile, Leu, Lys, Met, Phe, Pro, Ser, Thr, Trp, Tyr, Val.

CCC Pro	CCA Pro	CAC His	CAA Gln	ACC Thr	ACA Thr	AAC Asn	AAA Lys
CCU Pro	CCG Pro	CAU His	CAG Gln	ACU Thr	ACG Thr	AAU Asn	AAG Lys
CUC Leu	CUA Leu	CGC Arg	CGA Arg	AUC Ile	AUA Met	AGC Ser	AGA Stop
CUU Leu	CUG Leu	CGU Arg	CGG Arg	AUU Ile	AUG Met	AGU Ser	AGG Stop
UCC Ser	UCA Ser	UAC Tyr	UAA Stop	GCC Ala	GCA Ala	GAC Asp	GAA Glu
UCU Ser	UCG Ser	UAU Tyr	UAG Stop	GCU Ala	GCG Ala	GAU Asp	GAG Glu
UUC Phe	UUA Leu	UGC Cys	UGA Trp	GUC Val	GUA Val	GGC Gly	GGA Gly
UUU Phe	UUG Leu	UGU Cys	UGG Trp	GUU Val	GUG Val	GGU Gly	GGG Gly

Рис. 10. Геноматрица $P^{(3)}$ вырожденности генетического кода митохондрий позвоночных. В каждой ячейке указан триплет и кодируемая им аминокислота или стоп-сигнал (Stop) белкового синтеза

Геноматрица $P^{(3)}$ вырожденности кода на Рис. 10 оказывается симметрологической мозаикой из черных и белых ячеек:

- 1) Левая и правая половины матрицы зеркально-антисимметричны по мозаике

(ячейке одного цвета в левой половине матрицы соответствует зеркально расположенная ячейка противоположного цвета в ее правой половине);

2) Пары квадрантов, расположенные вдоль любой диагонали, тождественны друг другу по мозаике;

3) Мозаика всех строк носит меандровый характер и соответствует функциям Радемахера (описывается функциями, нечетными относительно средней линии).

4) Четыре пары соседних строк 1 – 2, 3 – 4, 5 – 6, 7 – 8 эквивалентны между собой по расположению в них идентичных аминокислот.

5) Если свернуть рисунок этой матрицы в цилиндр, срастив ее верхний и нижний края друг с другом, то в данной мозаике проявится симметрия циклического сдвига. Нагляднее всего ее можно продемонстрировать, замостив плоскость этой мозаичной матрицей как модульной единицей (Рис. 11, слева).

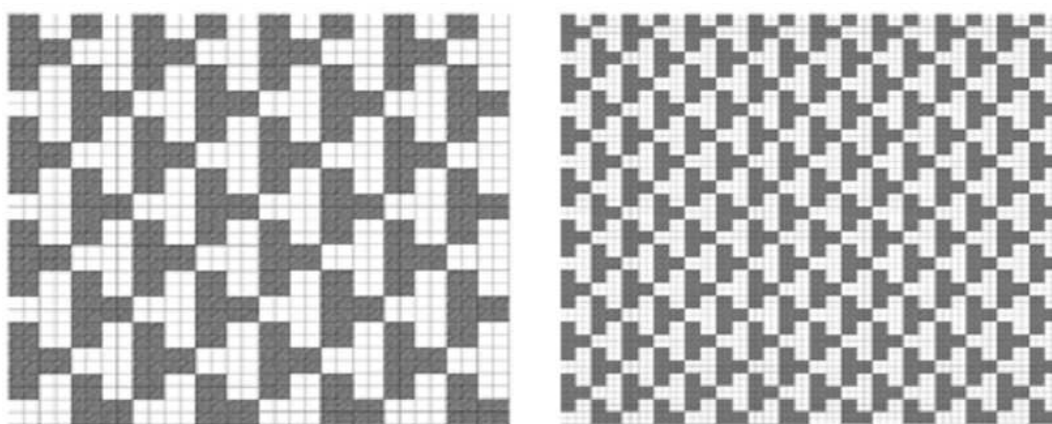


Рис. 11. Слева: замощение плоскости мозаикой геноматрицы $P^{(3)}$ вырожденности кода (из Рис. 10). Справа: замощение плоскости мозаикой геноматрицы из Рис. 12, полученной из $P^{(3)}$ циклическим сдвигом позиций в триплетах на один шаг влево

В данном замощении проявляется наличие двух мотивных единиц черного и белого цвета (по типу инь-ян), имеющих одинаковую форму "летающей совы" (название условное), но различающихся цветом и противоположной ориентацией. Этот мозаичный орнамент связан с матрицами Адамара [15, 16].

Мозаичная геноматрица $P^{(3)}$ обладает многими интересными свойствами в связи с особенностями генетического кода и теорией дискретных сигналов. Например, циклически сдвинем во всех триплетах буквы на одну позицию влево (при этом триплет CAG заменяется триплетом AGC и т.д.). В результате получится матрица с иным распределением триплетов и аминокислот в ней (Рис. 12).

CCC Pro	CAC His	ACC Thr	AAC Asn	CCA Pro	CAA Gln	ACA Thr	AAA Lys
CUC Leu	CGC Arg	AUC Ile	AGC Ser	CUA Leu	CGA Arg	AUA Met	AGA Stop
UCC Ser	UAC Tyr	GCC Ala	GAC Asp	UCA Ser	UAA Stop	GCA Ala	GAA Glu
UUC Phe	UGC Cys	GUC Val	GGC Gly	UUA Leu	UGA Trp	GUA Val	GGA Gly
CCU Pro	CAU His	ACU Thr	AAU Asn	CCG Pro	CAG Gln	ACG Thr	AAG Lys
CUU Leu	CGU Arg	AUU Ile	AGU Ser	CUG Leu	CGG Arg	AUG Met	AGG Stop
UCU Ser	UAU Tyr	GCU Ala	GAU Asp	UCG Ser	UAG Stop	GCG Ala	GAG Glu
UUU Phe	UGU Cys	GUU Val	GGU Gly	UUG Leu	UGG Trp	GUG Val	GGG Gly

Рис. 12. Геноматрица, полученная из геноматрицы $P^{(3)}$ (Рис.11) циклическим изменением порядка (1,2,3) в триплетах на (2,3,1)

Но в этой циклопорожденной геноматрице симметричность не уменьшилась и оказалась связанной с симметричностью исходной геноматрицы:

1) все ее квадранты одинаковы не только по черно-белой мозаике трех- и двухпозиционных триплетов, т. е. по мозаике вырожденности кода, но и по аминокислотам, кодируемым черными триплетами;

2) верхняя и нижняя половины матрицы, наряду с тождественностью их мозаики, идентичны по расстановке всех аминокислот и стоп-сигналов;

3) все строки (8×8) -матрицы и ее (4×4) -квадрантов имеют меандровый характер мозаики, который соответствует нечетным функциям относительно их середины (зеркальная антисимметрия).

4) сохранилась попарная идентичность строк по составу и порядку аминокислот, только пары таких строк стали иными: $1 - 5, 2 - 6, 3 - 7, 4 - 8$.

Интересно также то, что в этой циклопорожденной геноматрице на Рис. 12 в черно-белой мозаике каждого ее (4×4) -квадранта воспроизводится мозаика исходной (8×8) -матрицы. Другими словами, имеет место фрактальное воспроизведение мозаики с масштабированием по площади в четыре раза. Эта фрактальность соответствия мозаик у данных геноматриц особенно наглядно видна при сравнении замощений ими плоскости (Рис. 11). Действительно, каждая из больших "летающих сов" на Рис. 11 слева распадается на четыре малых "летающих сов" на Рис. 11 справа, что учетверяет количество "летающих сов".

Это очень напоминает тетра-размножение половых клеток в общебиологическом акте мейоза, при котором исходная половая клетка делится на четыре новых половых клетки. Такое тетра-деление половых клеток, обеспечивающее передачу генетической информации, почему-то реализуется в живой природе для всех живых организмов, что отмечал еще Э. Шредингер в своей книге "Что такое жизнь с точки зрения физики?". Ниже мы вернемся к этому в связи с принципом переупаковки молекулярных элементов как гипотетическим принципом мейоза.

Но тетра-феномены в рассматриваемых черно-белых геноматрицах не исчерпываются этим фрактальным тетра-масштабированием. Они сопровождаются свойством тетра-размножения бинарных матриц подобного типа, которое опишем.

Всего возможно шесть вариантов перестановок позиций 1, 2, 3 в триплетах: 123, 231, 312, 132, 213, 321. Этим шести вариантам соответствуют шесть геноматриц $B_{123}, B_{231}, B_{312}, B_{132}, B_{213}, B_{321}$ с существенно различными, но также симметрическими мозаиками вырожденности кода. Рис. 13 представляет бинарные мозаики всех этих шести геноматриц.

Если в ячейках этих шести геноматриц заменить черный цвет элементом $+1$, а белый цвет – элементом -1 , то оказывается, что все эти шесть бинарных геноматриц обладают неожиданным общим свойством тетра-размножения. Речь идет о том, что при перемножении каждой из этих матриц с самой собой порождается та же самая бинарная матрица, но в учетверенном количестве, то есть с множителем 4. Соответственно имеют место формулы (9):

$$\begin{aligned} (B_{123})^K &= 4^{K-1} \cdot B_{123}; & (B_{231})^K &= 4^{K-1} \cdot B_{231}; \\ (B_{312})^K &= 4^{K-1} \cdot B_{312}; & (B_{132})^K &= 4^{K-1} \cdot B_{132}; \\ (B_{213})^K &= 4^{K-1} \cdot B_{213}; & (B_{321})^K &= 4^{K-1} \cdot B_{321} \end{aligned} \quad (9)$$

Это свойство является вовсе не тривиальным, что показывает сравнение с произвольной октетной матрицей, в которой 32 элемента $+1$ и 32 элемента -1 расставлены случайным образом. Возведение такой матрицы в квадрат практически всегда приводит к матрице, в которой не только не сохраняется расстановка знаков плюс и минус во всех ячейках, но и утрачивается бинарный характер из-за появления в ней многих разных чисел в качестве ее элементов.

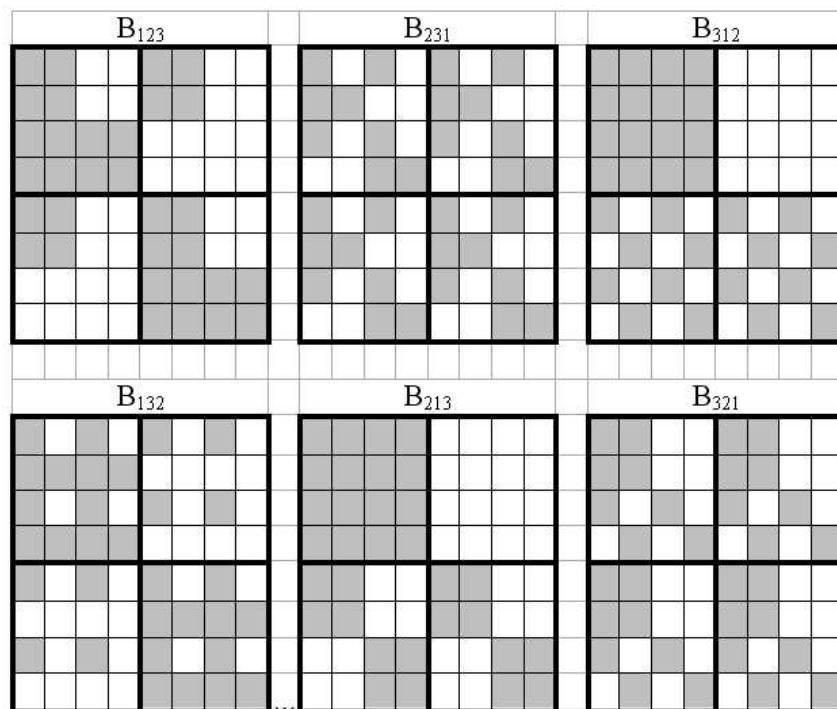


Рис. 13. Бинарные числовые геноматрицы, в которых черные ячейки соответствуют элементам "+1", а белые – "-1"

Данное свойство тетра-размножения у мозаичной матрицы вырожденности кода, видимо, отражает причины того, почему природой избран именно такой характер вырожденности генетического кода, а не какой-то другой. Например, вполне можно представить себе гипотетический характер его вырожденности, при котором все 32 черные ячейки матрицы 64 триплетов занимали бы всю ее левую половину, а белые – всю ее правую половину. Однако, соответствующая более простая бинарная матрица, как и ее триплето-перестановочные аналоги, лишена данного свойства тетра-размножения. Более подробное рассмотрение ансамбля геноматриц B_{123} , B_{231} , B_{312} , B_{132} , B_{213} , B_{321} обнаруживает еще ряд его содержательных свойств, например, при попарном перемножении данных матриц, но не будем задерживаться на этом.

Можно добавить, что на другом краю сферы биологических феноменов – при изучении архетипов человеческого сознания – мы вновь сталкиваемся с феноменом тетра-членения. Уже упоминавшийся создатель аналитической психологии К. Юнг обнаружил существование аналогичного универсального архетипа: "Четверичность (также кватерность). Универсальный архетип, являющий собой логическую предпосылку всякого целостного суждения, часто имеет структуру 3+1, в которой один из элементов занимает особое положение, или обладает несхожей с остальными природой. Именно "четвертый", дополняя три других, делает их чем-то единым, символизирующим универсум" (цитируется по [17, с. 202]). И в связи с этим: "Мандала – изображение психического процесса, воссоздание нового центра личности. Символически выражается при помощи круга, симметричного расположения некоего четырехкратного количества. В ламаизме и тантра-йоге является инструментом созерцания (янтра), местом рождения и пребывания божества" [там же, с. 201].

Выявление содержательной симметрологической группы из шести триплето-перестановочных геноматриц интересно еще и потому, что вызывает эвристические ассоциации с теорией дискретных сигналов и кодирования, где подобные перестановки давно известны и играют полезную роль.

Принцип переупаковки молекулярных элементов

Занимаясь матричной математикой в молекулярной генетике, мы выходим на биологически значимые вопросы. Действительно, мы неожиданно обнаружили, что в системе генетического кода простой алгоритмической перестановки элементов в триплеттах на основе циклического сдвига достаточно для получения новых содержательных геноматриц с тетра-размножением мозаик вырожденности кода и со свойствами тетра-размножения их бинарных матричных аналогов (Рис. 10–13). Значит, видимо, и в биологических процессах простой переупаковки молекулярных элементов в объекте может быть достаточно для получения в итоге четверки новых аналогичных объектов, то есть для тетра-размножения.

Это напомнило нам о тетра-размножении половых клеток в загадочном акте мейоза. Современная наука не располагает общепринятым пониманием механизмов самоорганизации, обеспечивающих этот удивительный биологический акт самовоспроизводства, хотя предположений о его вибрационной или иной природе различными авторами высказывалось немало. Как известно, циклические процессы пронизывают организацию живого вещества на всех уровнях. Пошаговые циклически организованные процессы типа считывания информации от элемента к элементу вдоль цепи очень характерны для молекулярной генетики, например, для считывания информации с ДНК.

По совокупности этих и других фактов мы выдвигаем гипотезу о том, что в основе акта мейозного тетра-размножения лежит механизм алгоритмической переупаковки молекулярных элементов половых клеток с участием алгоритмов циклических сдвигов. По нашим представлениям, переупаковка биологических молекул и их ансамблей с участием циклических и диадических сдвигов является важным механизмом и принципом биологической самоорганизации и саморазвития на разных уровнях. Значение этого принципа молекулярной переупаковки будет со временем раскрываться все более и более.

Кроме того, циклические коды, основанные на циклических сдвигах, играют важную роль в теории дискретных сигналов и помехоустойчивых кодах. Циклическим кодом называется линейный код, который вместе с любым своим вектором содержит также и его циклический сдвиг. Сформулированная гипотеза, предполагающая то, что организм наделен алгоритмами циклических сдвигов и использует их при молекулярных переупаковках, одновременно затрагивает вопрос о молекулярной экономии при кодировании генетической информации. Действительно, подобные алгоритмы позволяют организму не содержать для каждого кодового слова отдельный молекулярный объект, а за счет повторяющейся циклической переупаковки одной исходной молекулы обеспечивать целый набор кодовых слов при резкой экономии молекулярного материала. Тем самым, принцип молекулярной переупаковки распространяется нами не только на мейоз и ему подобные акты конструирования новых биологических тел, но и на эффективную передачу информации кодовыми словами в условиях минимизации необходимого количества молекул.

Эволюция генетического кода и матричная генетика

Алфавитно-кронекевская геноматрица на Рис. 10 позволила установить неизвестные ранее правила эволюции генетического кода [3, 4, 11, 12]. Кратко расскажем об этом.

Отметим по матрице на Рис. 10 следующую особенность рассматриваемого древнейшего кода митохондрий позвоночных. В ней 8 семейств черных (двухпозиционных) триплетов кодируют 8 видов высоковырожденных аминокислот, каждая из которых

кодируется четырьмя и более триплетами: Ala, Arg, Gly, Leu, Pro, Ser, Thr, Val. В геноматрице $P^{(3)}$ эта группа представлена симметричным образом в том смысле, что четыре ее аминокислоты Arg, Leu, Pro, Ser расположены в левой половине таблицы, а четыре других – Ala, Gly, Thr, Val – в правой половине.

Оставшиеся 12 видов аминокислот кодируются белыми (трехпозиционными) триплетами и являются низковырожденными, поскольку каждая из них кодируется тремя и менее триплетами: Asn, Asp, Cys, Gln, Glu, His, Ile, Lys, Met, Phe, Trp, Tyr. Эта группа также расположена в $P^{(3)}$ симметричным образом: шесть ее аминокислот – Cys, Gln, His, Tyr, Phe, Trp – расположены в левой половине таблицы, а шесть других – Asn, Lys, Ile, Met, Asp, Glu – в правой половине.

Тем самым, в данном коде множество 20 аминокислот состоит из двух канонических подмножеств: 8 высоковырожденных и 12 низковырожденных аминокислот.

Начиная с уровня кодового соответствия 64 триплетов 20 аминокислотам, наблюдаются эволюционные изменения в генетическом коде. Сегодня известно 17 вариантов (диалектов) генетического кода, отличающихся по своим числам вырожденности, т. е. по количеству триплетов, кодирующих отдельные аминокислоты (подробности даны на сайте <http://www.ncbi.nlm.nih.gov/Taxonomy/Utils/wprintgc.cgi>). Например, аминокислота Thr в одном коде кодируется четырьмя триплетами, т. е. имеет число вырожденности 4, а в другом коде она почему-то кодируется 8 триплетами и т. д. Рис. 14 представляет результат анализа чисел вырожденности у всех 17 кодов.

Номер кода	Распределение 20 АК по числам вырожденности от 1 до 8								Σ АК с ЧВ от 1 до 3	Σ АК с ЧВ от 4 до 8
	1	2	3	4	5	6	7	8		
1		12		6		2			<u>12</u>	<u>8</u>
2	2	9	1	5		3			<u>12</u>	<u>8</u>
3	1	10	1	5		3			<u>12</u>	<u>8</u>
4		12		6		1		1	<u>12</u>	<u>8</u>
5	2	8	2	6		1		1	<u>12</u>	<u>8</u>
6	2	8	2	5		3			<u>12</u>	<u>8</u>
7	2	9	1	5		3			<u>12</u>	<u>8</u>
8		12		5		3			<u>12</u>	<u>8</u>
9	2	7	3	6		1		1	<u>12</u>	<u>8</u>
10	2	8	2	5		3			<u>12</u>	<u>8</u>
11	2	9	1	5		2		1	<u>12</u>	<u>8</u>
12	1	10	1	6		1		1	<u>12</u>	<u>8</u>
13	2	9	1	5	1	1	1		<u>12</u>	<u>8</u>
14	2	9	1	5	1	2			<u>12</u>	<u>8</u>
15	2	9	1	5	1	1	1		<u>12</u>	<u>8</u>
16		13		5		1		1	<u>13</u>	<u>7</u>
17	2	8	1	6		3			<u>11</u>	<u>9</u>

Рис. 14. Феномен разделения в генетических кодах множества 20 аминокислот на два типовых подмножества – высоковырожденных и низковырожденных – аминокислот. В двух правых столбцах показаны количества Σ низковырожденных аминокислот (с числом вырожденности от 1 до 3) и высоковырожденных аминокислот (с числом вырожденности от 4 до 8). АК означает аминокислоты, ЧВ – число вырожденности аминокислоты

Номера в таблице на Рис. 14 соответствуют следующим кодам: 1) The Vertebrate Mitochondrial Code; 2) The Standard Code; 3) The Mold, Protozoan, and Coelenterate

Mitochondrial Code and the Mycoplasma /Spiroplasma Code; 4) The Invertebrate Mitochondrial Code; 5) The Echinoderm and Flatworm Mitochondrial Code; 6) The Euplotid Nuclear Code; 7) The Bacterial and Plant Plastid Code; 8) The Ascidian Mitochondrial Code; 9) The Alternative Flatworm Mitochondrial Code; 10) Blepharisma Nuclear Code; 11) Chlorophycean Mitochondrial Code; 12) Trematode Mitochondrial Code; 13) Scenedesmus obliquus mitochondrial Code; 14) Thraustochytrium Mitochondrial Code; 15) The Alternative Yeast Nuclear Code; 16) The Yeast Mitochondrial Code; 17) The Ciliate, Dasycladacean and Hexamita Nuclear Code.

Первое знакомство с набором чисел вырожденности аминокислот в 17 известных кодах производит впечатление нерегулярности этого набора, отсутствия в нем содержательной закономерности. Однако, это впечатление исчезает, если только предпринять, как это сделано на Рис. 14, разделение всех 20 аминокислот на две типовые категории аминокислот – низковырожденных (с числами вырожденности от 1 до 3) и высоковырожденных (с числами вырожденности от 4 до 8). Отметим, что с разделением 20 аминокислот на две категории из 12 и 8 аминокислот мы уже встречались в связи с черно-белой мозаикой геноматрицы $P^{(3)}$ на Рис. 10, которая и подсказала возможность такого группирования во множестве всех 17 кодов. Другие варианты группирования аминокислот по их числам вырожденности не выявляют скрытых закономерностей

Этот сравнительный анализ 17 генетических кодов позволил сформулировать три феноменологических правила (более подробно они представлены в работах [3, 4, 11, 12]).

Правило № 1: в генетических кодах множество 20 аминокислот содержит два оппозиционных подмножества: одно – из 12 низковырожденных аминокислот (с числами вырожденности от 1 до 3), и второе – из 8 высоковырожденных аминокислот (с числами вырожденности от 4 до 8).

Это правило выполняется, видимо, на 100% для аутотрофных организмов, которые продуцируют живое вещество, добывая углерод для своего тела благодаря механизмам фотосинтеза. Для гетеротрофных организмов, которые питаются другими организмами, существует малое исключение из этого правила: два кода из семнадцати имеют соотношение количества низковырожденных и высоковырожденных аминокислот, равное 11:9 и 13:7. Эти нестандартные отношения – минимально возможные отклонения от канонического отношения 12:8 (для чисел, дающих в сумме 20); они окружают его с обеих сторон на числовой оси, подчеркивая его центральную роль.

Правило № 2: если какой-то триплет кодирует разные аминокислоты в разных генетических кодах, то все эти аминокислоты относятся к одному и тому же каноническому набору аминокислот (высокой или низкой вырожденности). Другими словами, в ходе биологической эволюции генетических кодов триплетам, кодирующим аминокислоты из одного канонического набора вырожденности, практически запрещено переходить в группу триплетов, кодирующих аминокислоты другого канонического набора.

Единственным исключением из этого правила является триплет UAG, который в разных кодах может кодировать аминокислоты Leu или Gln, относящиеся к разным категориям. В этом Правиле № 2 не фигурируют стоп-кодоны, а потому оно не относится к тем эволюционным случаям, когда триплеты, кодировавшие в коде на Рис. 10 стоп-кодоны (или аминокислоты), начинают кодировать аминокислоты (или стоп-кодоны). Оказывается, что эволюция генетических кодов в отношении стоп-кодонов подчиняется отдельному поличисловому правилу №3, связанному с гиперболическими матрионами.

Правило №3: все стоп-кодоны во всех 17 кодах расположены в геноматрице 64 триплетов только в тех ячейках, которые в матрице гиперболического октоматриона

(Рис. 5) заняты координатами x_4, x_5, x_6, x_7 , дополняющими тетрамаатрион до октомаатриона. Другими словами, функция стоп-кодона оказывается функцией октомаатриона, не представленной в координатах тетрамаатриона.

Описанные эволюционные факты существования двух категорий аминокислот, отличающихся своей вырожденностью и почти полной обособленностью на всем множестве 17 генетических кодов по наборам кодирующих их триплетов, свидетельствуют в пользу следующего. В природе представлены две самостоятельные ветви эволюции генетического кода у миллионов видов живых организмов: одна – для канонического набора высоковырожденных аминокислот, а вторая – для канонического набора низковырожденных аминокислот. Эти две ветви эволюции внутри единой кодовой системы можно образно сравнить, например, с параллельной эволюцией женского и мужского организмов в рамках одного биологического вида, или с эволюцией гласных и согласных звуков в языке.

Одновременно обнаруживается, что вместо единого множества 20 аминокислот природа реализует объединение двух весьма разных подмножеств из 8 и 12 аминокислот. Тем самым, матричная генетика выявляет существование внутренней структуры у множества 20 аминокислот. Отметим еще две математические особенности природной системы чисел вырожденности у аминокислот:

- 1) наименьшим общим делимым чисел 8 и 12 является число 24;
- 2) основные числа вырожденности аминокислот во всех кодах – 1, 2, 3, 4, 6, 8 – являются делителями числа 24 (в четырех кодах есть по одной аминокислоте, у которой число вырожденности равно 5 или 7; встречаемость каждого из этих экстраординарных чисел вырожденности в 17 кодах составляет всего 0,88 %).

В связи с этим число 24 может рассматриваться как скрытая константа согласования чисел вырожденности в генетических кодах. Число 24 давно известно в биологии в связи с хрономедициной, имеющей тысячелетнюю историю и говорящей о том, что в течение суток системы организма претерпевают закономерные смены физиологической активности и пассивности в рамках определенных интервалов времени, связанных с делением суток на 24 равные части. Положения восточной хрономедицины, опирающиеся на представление о делении суточного цикла "день-ночь" поступления солнечной энергии на поверхность земли на 24 равные части, являются составной частью акупунктуры, тибетской диагностики по пульсу, учений об оптимальном времени фармакологических и терапевтических воздействий на организм и пр. В хронобиологии число 24 представляет собой не произвольное членение суток на части, а феноменологическое сопряжение длительности физиологических циклов с суточным циклом и его равными долями. Данные представления отражены в системе древнекитайской "Книги перемен", считающейся основой этих восточных медико-биологических учений и практик.

Механизмы фотосинтеза, посредством которых за счет потребления солнечной энергии производится само первичное живое вещество аутоотрофных организмов, связывают это биологическое производство с суточными циклами поступления животворной солнечной энергии к организмам. Выявление скрытой константы 24 в описанных особенностях эволюции генетических кодов позволило выдвинуть следующую рабочую хронобиологическую гипотезу [3, 4, 11, 12]: структуры генетического кода имеют через механизмы фотосинтеза (выступающих в роли первичных механизмов) связь с суточными 24-часовыми циклами поступления солнечной энергии на поверхность земли. С этой точки зрения древняя привязка функционирования белковых систем организма к фазам суток, признаваемая современной западной медициной, имеет предшественников в аналогичных привязках на уровне генетического кода. И секреты структур

генетических кодов надо искать с учетом особенностей биологического феномена фотосинтеза, который до сих пор не воспроизводим в современных лабораториях. Именно благодаря фотосинтезу продуцируется исходное живое вещество, существующее в циклических формах и подлежащее после своего производства наследственному кодированию в адекватных циклических формах. Одним из аргументов в пользу хронобиологической зависимости (или природы) структур генетического кода является совпадение матричных структур генетического кода с матрицами "Книги перемен", на которых базируется восточная хрономедицина.

5 Гиперболические матрионы, числовые геноматрицы и золотое сечение

В предыдущих разделах были приведены некоторые из примеров плодотворности подхода на основе кронекеровского семейства матриц к системам генетического кода. Важной отличительной особенностью кронекеровского произведения является то, что собственные значения кронекеровского произведения $A \otimes B$ матриц A и B , имеющих собственные значения α_i и β_k , равны произведениям $\alpha_i \cdot \beta_k$ этих собственных значений. Через это свойство само понятие кронекеровского произведения матриц может быть введено в математику [18]. Коль скоро собственные значения столь важны для темы кронекеровских произведений, то естественно обратиться к изучению числовых геноматриц, которые в отличие от символьных матриц имеют собственные числа.

Кроме того, в теории цифровых сигналов сигналы представляются последовательностью числовых значений их амплитуды в точках отсчета. При этом данная теория строится на представлении дискретных сигналов в виде векторов многомерных пространств: значение сигнала на каждом такте трактуется как значение одной из координат многомерного пространства сигналов. Теория дискретных сигналов оказывается во многом наукой о геометриях многомерных пространств. Размерность такого пространства равна количеству моментов отсчета у сигнала. Для этих многомерных векторных пространств вводятся метрические понятия и вообще все необходимое для тех или иных задач обеспечения надежности, скорости, экономичности при передаче сигнальной информации. Например, важные для информатики понятия энергии и мощности дискретного сигнала оказываются в многомерной геометрии пространства сигналов не чем иным, как квадратом длины многомерного вектора-сигнала и квадратом длины вектора-сигнала, деленным на размерность пространства. Различные передаваемые и принимаемые сигналы и их ансамбли сравниваются в цифровых технологиях как геометрические объекты таких метрических многомерных пространств. На этом построены методы и алгоритмы распознавания сигналов и образов, выявления и исправления информационных ошибок, искусственного интеллекта и обучения роботов, и пр. Если мы хотим использовать разнообразные методы теории сигналов в анализе системы генетического кодирования, то нам надо научиться переходить от символьных геноматриц и секвенций к их числовым аналогам.

Используемый авторами метод обеспечения такого перехода заключается в замене буквенных символов А, С, G, U (Т) азотистых оснований теми или иными количественными параметрами этих молекулярных букв, которые определяют их физико-химическую роль. Например, в замене этих букв числами их атомов, водородных связей и пр. При этом символьные геноматрицы и последовательности мультиплетов трансформируются в соответствующие числовые геноматрицы и последовательности.

В качестве конкретного примера рассмотрим матрицы водородных связей азотистых оснований кода. Комплементарные водородные связи букв кода давно подозре-

ваются на особую информационную значимость. Речь идет о двух и трех водородных связях (по которым $C = G = 3, A = U = 2$), соединяющих комплементарные пары азотистых оснований в молекулах наследственности (Рис. 8). Заменяем каждый полиплет во всех матрицах $P^{(n)}$ (Рис. 9) произведением чисел водородных связей его азотистых оснований. При этом, например, триплет CGA в октетной матрице $P^{(3)}$ заменяется на произведение $3 \cdot 3 \cdot 2 = 18$. В результате получаем мультипликативные числовые невырожденные матрицы $P_{MULT}^{(n)}$ (Рис. 15).

$$P_{mult}^{(1)} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}; \quad P_{mult}^{(2)} = \begin{vmatrix} 9 & 6 & 6 & 4 \\ 6 & 9 & 4 & 6 \\ 6 & 4 & 9 & 6 \\ 4 & 6 & 6 & 9 \end{vmatrix}; \quad P_{mult}^{(3)} = \begin{vmatrix} 27 & 18 & 18 & 12 & 18 & 12 & 12 & 8 \\ 18 & 27 & 12 & 18 & 12 & 18 & 8 & 12 \\ 18 & 12 & 27 & 18 & 12 & 8 & 18 & 27 \\ 12 & 18 & 18 & 27 & 8 & 12 & 12 & 18 \\ 18 & 12 & 12 & 8 & 27 & 18 & 18 & 12 \\ 12 & 18 & 8 & 12 & 18 & 12 & 27 & 18 \\ 12 & 8 & 18 & 12 & 18 & 12 & 27 & 18 \\ 8 & 12 & 12 & 18 & 12 & 18 & 18 & 27 \end{vmatrix}$$

Рис. 15. Начало семейства квинтовых мультипликативных геноматриц $P_{MULT}^{(n)}$, основанного на произведениях чисел водородных связей для триплетов ($C = G = 3, A = U = 2$)

Все матрицы $P_{MULT}^{(n)}$ являются гиперболическими матрионами. Каждая строка (столбец) матрицы $P_{MULT}^{(n)}$ отличается от других ее строк (столбцов) только порядком расположения стандартного набора чисел. В любой из матриц $P_{MULT}^{(n)}$ суммы чисел в каждой ее строке и каждом ее столбце равны 5^n , а общая сумма чисел в матрице равна 10^n . Например, в матрице $P_{MULT}^{(3)}$ суммы в строке и столбце равны 125, а общая сумма чисел равна 1000. Эти геноматрицы или гиперболические геноматрионы называются квинтовыми, потому что отношение $3/2$, именуемое в теории музыкальной гармонии квинтой, пронизывает эти матрицы на разных уровнях (см. Приложение 1). Гиперболические геноматрионы $P_{MULT}^{(n)}$ являются невырожденными. Детерминант матрицы $P_{MULT}(1)$ равен 5, матрицы $P_{MULT}(2) - 5^4$, матрицы $P_{MULT}^{(3)} - 5^{12}$ и т. д.

Собственные значения матрицы-ядра $P_{MULT}^{(1)}$ данного кронекеровского семейства матриц равны 1 и 5. Зная собственные значения этой матрицы-ядра, легко установить собственные значения для остальных матриц данного семейства, поскольку при кронекеровском перемножении двух матриц A и B собственные значения итоговой матрицы $A \otimes B$ равны попарным произведениям собственных значений исходных матриц. Соответственно, собственные значения матрицы $P_{MULT}^{(2)}$ равны 1, 5, 5, 5^2 ; матрицы $P_{MULT}^{(3)} - 1, 5, 5, 5, 5^2, 5^2, 5^2, 5^3$, и т. д.

В биологии генетическая система отвечает за самовоспроизведение организмов. В математике, по крайней мере, со времен Возрождения математическим символом самовоспроизведения было так называемое золотое сечение или "божественная пропорция" (обширные сведения по этой теме представлены на сайте "Музея гармонии и золотого сечения" А. П. Стахова: www.goldenmuseum.com). Золотым сечением называется величина $\varphi = (1 + 5^{0.5})/2 = 1,618\dots$ Интересно, что семейство квинтовых геноматрионов $P_{MULT}^{(n)}$ оказывается тесно связанным с этим самым золотым сечением. Данная связь заключается в том, что при извлечении квадратного корня из любой геноматрицы $P_{MULT}^{(n)}$ образуется "золотая" матрица или "золотой" гиперболический матрион $\Phi_{MULT}^{(n)} = (P_{MULT}^{(n)})^{1/2}$, все элементы которого равны золотому сечению в целой степени.

Образно говоря, квинтовые геноматрицы имеют скрытую подложку из золотых матриц [3, 4, 11, 12]). Рис. 16 представляет примеры такого извлечения корня из геноматриц $P_{MULT}^{(1)}, P_{MULT}^{(2)}, P_{MULT}^{(3)}$. Степени золотых сечений у элементов каждой матрицы соотносятся друг с другом симметричным образом. Например, для случая октетной матрицы показатели степени в ее элементах при φ образуют пары из противоположных по знаку чисел +1 и -1, +3 и -3. Произведение всех чисел в любой строке и любом столбце этих золотых матриц равно единице.

$$\begin{aligned}
 (P_{MULT})^{1/2} &= \begin{bmatrix} \varphi & \varphi^{-1} \\ \varphi^{-1} & \varphi \end{bmatrix}; & (P_{MULT}^{(2)})^{1/2} &= \begin{bmatrix} \varphi^2 & \varphi^0 & \varphi^0 & \varphi^{-2} \\ \varphi^0 & \varphi^2 & \varphi^{-2} & \varphi^0 \\ \varphi^0 & \varphi^{-2} & \varphi^2 & \varphi^0 \\ \varphi^{-2} & \varphi^0 & \varphi^0 & \varphi^2 \end{bmatrix} \\
 = \Phi_{MULT} & & = \Phi_{MULT}^{(2)} & \\
 \\
 \Phi_{MULT}^{(3)} &= \begin{bmatrix} \varphi^3 & \varphi^1 & \varphi^1 & \varphi^{-1} & \varphi^1 & \varphi^{-1} & \varphi^{-1} & \varphi^{-3} \\ \varphi^1 & \varphi^3 & \varphi^{-1} & \varphi^1 & \varphi^{-1} & \varphi^1 & \varphi^{-3} & \varphi^{-1} \\ \varphi^1 & \varphi^{-1} & \varphi^3 & \varphi^1 & \varphi^{-1} & \varphi^{-3} & \varphi^1 & \varphi^{-1} \\ \varphi^{-1} & \varphi^1 & \varphi^1 & \varphi^3 & \varphi^3 & \varphi^{-1} & \varphi^{-1} & \varphi^1 \\ \varphi^1 & \varphi^{-1} & \varphi^{-1} & \varphi^{-3} & \varphi^3 & \varphi^1 & \varphi^1 & \varphi^{-1} \\ \varphi^{-1} & \varphi^1 & \varphi^{-3} & \varphi^{-1} & \varphi^1 & \varphi^3 & \varphi^{-1} & \varphi^1 \\ \varphi^{-1} & \varphi^{-3} & \varphi^1 & \varphi^{-1} & \varphi^1 & \varphi^{-1} & \varphi^3 & \varphi^1 \\ \varphi^{-3} & \varphi^{-1} & \varphi^{-1} & \varphi^1 & \varphi^{-1} & \varphi^1 & \varphi^1 & \varphi^3 \end{bmatrix} \\
 = (P_{MULT}^{(3)})^{1/2} &=
 \end{aligned}$$

Рис. 16. Начало семейства золотых гиперболических геноматрионов $(P_{mult}^{(n)})^{1/2} = \Phi_{mult}^{(n)}$; φ – золотое сечение

Отношения между соседними по величине видами чисел во всех золотых геноматрицах равны φ^2 . В геометрии этот коэффициент φ^2 реализуется в отношениях сторон вписанных друг в друга пятиконечных звезд (пентаграмм, являющихся древним символом здоровья).

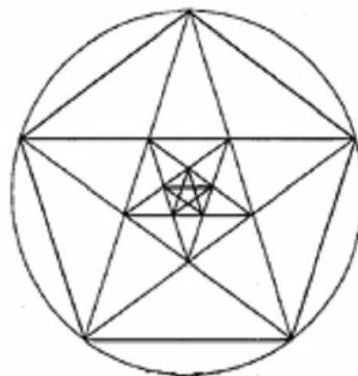


Рис. 17. Все размеры пентаграмм, вписанных друг в друга, масштабируются с коэффициентом φ^2

Золотое сечение реализуется в пентасимметричных фигурах, широко представленных в живой природе и запрещенной в классической кристаллографии. Оно также представлено во многих фигурах современной обобщенной кристаллографии: квазикристаллах Шехтмана, мозаиках Пенроуза, додекаэдрах ансамблей молекул воды, фуллеренах, икосаэдрических формах некоторых вирусов и пр. Это дает дополнительные материалы для поиска причин связи золотого сечения с параметрами генетического кода.

Выявленная связь золотого сечения с системой параметров генетического кода интересна потому, что множество авторов публикует данные о проявлении золотого сечения в биологических законах филлотаксиса [28] и в различных физиологических системах: сердечно-сосудистых, дыхательных, локомоторных, электрической активности мозга, психофизиологических и пр. (см., например, сайт музея золотого сечения <http://www.goldenmuseum.com/>). Они же описаны и изучаются в феноменах эстетического восприятия. В свете этого золотое сечение выступает кандидатом на роль одного из базовых элементов в феномене наследуемой сопряженности физиологических подсистем, обеспечивающей единство организма. Возможности применения золотых гиперболических матрионов для моделирования биологических систем весьма разнообразны. Оправданием такого применения служит то, что все физиологические системы обязательным образом структурно согласуются с системой генетического кода для генетической передачи по наследству потомкам. Такое согласование является условием эволюционного выживания любых физиологических систем и внутренним камертоном согласования между ними. Оно выступает в роли внутреннего критерия естественного отбора физиологических систем. Поэтому каждая из этих систем может нести на себе печать структурных особенностей системы генетического кода, которую матричная генетика помогает увидеть.

Неожиданное проявление золотого сечения в связи с генетическим кодом и его матрицами позволяет предложить новое – матрично-генетическое – определение золотого сечения: золотое сечение и его обратная величина (φ и φ^{-1}) представляют собой единственные матричные элементы бисимметрической матрицы Φ , являющейся корнем квадратным из такой бисимметрической числовой матрицы P_{MULT} второго порядка, элементами которой являются генетические числа водородных связей ($C = G = 3$, $A = U = 2$) и которая имеет положительный детерминант.

Это определение не использует элементов классических определений золотого сечения: отрезков прямой, квадратного уравнения, предельного отношения в специальных числовых рядах. Кроме того, оно носит бинарный характер, определяя сразу системную пару взаимобратных величин φ и φ^{-1} (в разных литературных источниках золотым сечением называют или величину φ или обратную величину φ^{-1}).

Имеется огромный литературный материал о применении золотого сечения для анализа и моделирования множества природных явлений и систем – от астрономии до биологии и физики элементарных частиц. Выдвинутое положение о матричном определении и матричной (или матрионной) сущности золотого сечения дает эвристическую возможность рассмотреть весь этот материал на предмет его содержательной интерпретации с принципиально новой – матричной (матрионной) – точки зрения. Авторы полагают, что многие реализации золотого сечения в живой и неживой природе связаны именно с матрионной сущностью и матрионным представлением золотого сечения. Математика золотых гиперболических матрионов – новая математическая веточка, изучающая, в частности, рекуррентные соотношения между рядами золотых матрионов, а также моделирование с их помощью природных систем и процессов [3, 4, 11, 12, 19].

Кронекерово семейство золотых геноматриц, как и квинтовых геноматриц, связано с известным треугольником Паскаля через количества одинаковых чисел, фигурирующих в последовательности матриц возрастающего размера. Действительно, как видно из Рис. 16, в золотой (2×2) -матрице содержится по одному числу φ^1 и φ^{-1} ; в $(2^2 \times 2^2)$ -матрице – по одному числу φ^2 и φ^{-2} и два числа φ^0 ; в $(2^3 \times 2^3)$ -матрице – по одному числу φ^3 и φ^{-3} , а также по три числа φ и φ^{-1} , и т. д. При их надлежащем расположении, показанном на Рис. 18, образуется треугольник Паскаля, сам связанный с числами Фибоначчи [20, 21].

Размер матрицы	Треугольник Паскаля
$2^1 \times 2^1$	$1(\varphi^1) \quad 1(\varphi^{-1})$
$2^2 \times 2^2$	$1(\varphi^2) \quad 2(\varphi^0) \quad 1(\varphi^{-2})$
$2^3 \times 2^3$	$1(\varphi^3) \quad 3(\varphi^1) \quad 3(\varphi^{-1}) \quad 1(\varphi^{-3})$
$2^4 \times 2^4$	$1(\varphi^4) \quad 4(\varphi^2) \quad 6(\varphi^0) \quad 4(\varphi^{-2}) \quad 1(\varphi^{-4})$
.....

Рис. 18. Треугольник Паскаля для количеств повторяющихся видов чисел в кронекеровом семействе золотых геноматриц из Рис. 16. В скобках указано, какие именно виды чисел повторяются данное количество раз в матрице соответствующего размера

Квинтовые гиперболические геноматрионы выводят на связь параметров генетической системы с пифагорейским музыкальным строем, известным еще в Древнем Китае и сопряженным с квадратными таблицами "Книги перемен" [13, 15]. На этом пути разрабатываются вопросы музыкальной гармонии в генетической системе и натуральной геномузыки. В настоящее время эта разработка ведется совместно с группой специалистов Московской государственной консерватории под руководством декана композиторского отделения проф. А. А. Кобляковым (см. Приложение 1).

6 Гиперболические матрионы и матрицы диадических сдвигов в информатике

Молекулярно-генетическая система последовательно исследуется нами с позиций теории дискретных сигналов и помехоустойчивого кодирования. Но известны ли в самой теории дискретных сигналов бисимметрические матрицы типа гиперболических матрионов? Да, наш целенаправленный поиск выявил их. Подобные матрицы в этой теории существуют и используются в связи с их полезными свойствами. Они лежат в основе ряда специфических методов анализа и синтеза сигналов и носят название матриц диадического сдвига (см., например, [22, с. 109]). Данные матрицы в компьютерной информатике строятся с помощью специфической для нее операции логического сложения по модулю 2 (без применения операции кронекеровского умножения матриц). На Рис. 19 представлен пример $(2^3 \times 2^3)$ -матрицы диадического сдвига, в каждой строке которой повторяются числа-номера ячеек в ее первой строке, но в очередности, индивидуальной для каждой строки. Именно алгоритм построения $(2^n \times 2^n)$ -матрицы диадического сдвига обуславливает эту специфическую нумерацию всех ее $(2^n \times 2^n)$ ячеек номерами из ряда чисел $0, 1, 2, \dots, 2^{n-1}$.

	111 (7)	110 (6)	101 (5)	100 (4)	011 (3)	010 (2)	001 (1)	000 (0)
111 (7)	0	1	2	3	4	5	6	7
110 (6)	1	0	3	2	5	4	7	6
101 (5)	2	3	0	1	6	7	4	5
100 (4)	3	2	1	0	7	6	5	4
011 (3)	4	5	6	7	0	1	2	3
010 (2)	5	4	7	6	1	0	3	2
001 (1)	6	7	4	5	2	3	0	1
000 (0)	7	6	5	4	3	2	1	0

Рис. 19. Октетная матрица диадических сдвигов из теории цифровых сигналов

При сравнении Рис. 5 и 19 видно, что эта матрица диадических сдвигов является 8-мерным гиперболическим матрионом. Алгоритм построения $(2^n \times 2^n)$ -матриц диадических сдвигов в теории цифровых сигналов заключается в следующем. Все строки и столбцы такой матрицы упорядоченно нумеруются в двоичной системе счисления так, как это показано на Рис. 19. Затем в каждую ячейку матрицы вставляется сумма номеров тех строки и столбца, на пересечении которых она находится, причем сумма вычисляется логическим поразрядным сложением этих бинарных номеров по модулю 2 с соблюдением правил: $0 + 0 = 0$, $0 + 1 = 1$, $1 + 0 = 1$, $1 + 1 = 0$. Например, на пересечении столбца 3 (= 011) и строки 2 (= 010) стоит ячейка 1 (= 001) как результат поразрядного сложения этих чисел по модулю 2.

Как и положено для гиперболических матриономов, матрица диадических сдвигов имеет блочное строение, представляя собой фракталоподобную структуру блочных (2×2) -матриц циклического сдвига. Одинаковые блоки размещены в ней вдоль обеих диагоналей как самой матрицы, так и ее квадрантов, субквадрантов и т. д., что придает ей крестообразный характер.

Но генетически наследуемое устройство наших физиологических информационных систем также демонстрирует аналогичные крестообразные структуры. Например, такой крестообразной структурой наделены зрительные нервные пути из двух глаз: эти пути передают информацию о правой половине поля зрения в левое полушарие мозга, а информацию о левой половине поля зрения – в правое полушарие. Аналогичное верно для слуховой системы. Сопряжение полушарий головного мозга с половинами нашего тела также имеет крестообразный характер: левое полушарие обслуживает правую половину тела, а правое полушарие – левую половину. По совокупности наработанных результатов можно полагать, что эти наследуемые физиологические феномены связаны с гиперболическими матриономов и основанными на них крестообразными структурами помехоустойчивых кодов систем генетического кодирования. Приведенный пример с матрицами диадических сдвигов только один из многих, подтверждающих адекватность и перспективность сращения теории матриономов с компьютерной и биологической информатикой.

7 Круговые матриономы и матрицы Адамара в матричной генетике

В молекулярном строении букв генетического кода есть характерное нарушение симметрии: три азотистых основания А, С, G имеют по одной аминогруппе NH_2 , а четвертое – Т (или U в РНК) не имеет ее (Рис. 20). Аминогруппы играют особую важную роль в организации всей молекулярно-генетической системы, и особенность их распределения в генетических буквах необходимо принимать во внимание.

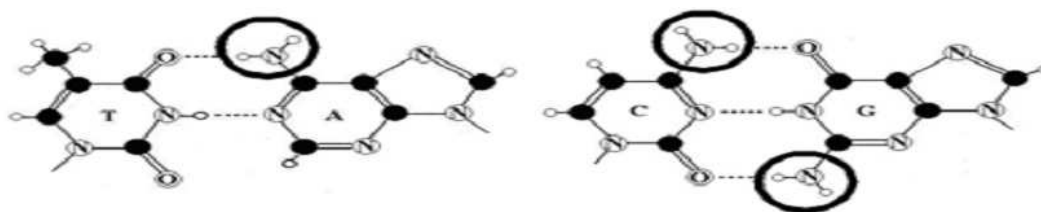


Рис. 20. Азотистые основания ДНК. Кругами выделены аминогруппы NH_2

Учет названного нарушения симметрии позволяет в алфавитной геноматрице $P = [C \ A; U \ G]$, являющейся ядром кронекеровского семейства геноматриц $P^{(n)}$, букву U/T противопоставить остальным трем буквам С, А, G, выделив ее противоположным знаком. При этом алфавитная геноматрица и все кронекеровское семейство

приобретают вид $[C A; -U G]^{(n)}$. При подстановке вместо символов букв в алфавитную геноматрицу чисел водородных связей 3 и 2 ($C = G = 3$, $A = U/T = 2$) образуется кронекерово семейство круговых геноматрионов (Рис. 21).

$$\begin{array}{c} \left| \begin{array}{cc} 3 & 2 \\ -2 & 3 \end{array} \right|; \\ \left| \begin{array}{cccc} 9 & 6 & 6 & 4 \\ -6 & 9 & -4 & 6 \\ -6 & -4 & 9 & 6 \\ 4 & -6 & -6 & 9 \end{array} \right|; \end{array} \quad \left| \begin{array}{ccccccccc} 27 & 18 & 18 & 12 & 18 & 12 & 12 & 8 \\ -18 & 27 & -12 & 18 & -12 & 18 & -8 & 12 \\ -18 & -12 & 27 & 18 & -12 & -8 & 18 & 12 \\ 12 & -18 & -18 & 27 & 8 & -12 & -12 & 18 \\ -18 & -12 & -12 & -8 & 27 & 18 & 18 & 12 \\ 12 & -18 & 8 & -12 & -18 & 27 & -12 & 18 \\ 12 & 8 & -18 & -12 & -18 & -12 & 27 & 18 \\ -8 & 12 & 12 & -18 & 12 & -18 & -18 & 27 \end{array} \right|$$

Рис. 21. Начальные представители кронекеровского семейства круговых геноматрионов, отражающего параметры водородных связей в системах генетических мультиплетов.

Заметим, что по признаку отсутствия аминокислотной группы природой выделены именно те два родственные азотистых основания U и T, которые в природе почему-то взаимно заменяются при переходе от РНК к ДНК (остальные основания в РНК и ДНК одинаковы). Даже не зная об отличии молекулярного состава букв генетического алфавита по аминокислотной группе, можно уже по этому характерному признаку взаимного замещения генобукв U и T в РНК и ДНК сопоставить геноматрицам $P^{(n)} = [C A; U G]^{(n)}$ матрицы $[C A; -U G]^{(n)}$, в которых элемент U противопоставлен по знаку остальным трем элементам. При подстановке в них чисел водородных связей ($A = U = 2$, $C = G = 3$) эти матрицы оказываются круговыми матрионами.

Если в алфавитной геноматрице $P = [C A; U G]$ каждую из названных трех генобукв A, C, G заменить символом "+1", обозначающим наличие в них аминокислотной группы, а четвертую генобукву – символом "-1", обозначающим ее отсутствие, то все кронекеровское семейство рассматриваемых символьных геноматриц $P^{(n)}$ трансформируются в кронекеровское семейство числовых геноматриц Адамара $H^{(n)}$ из выражения (8). Так образованные матрицы Адамара являются частным случаем 2^n -мерных круговых матрионов. Эти матрицы Адамара играют особую роль в теориях дискретных сигналов, ортогональных преобразований, ортогональных и биортогональных кодов и других областях, имеющих обширные приложения в цифровой технике, связи, кодировании, управлении, распознавании образов, диагностике, фильтрации, теории квантовых компьютеров и пр. Причиной этого являются математические свойства этих матриц, сопряженные с ортогональными преобразованиями и ортогональными системами функций и потому востребованные современной цифровой техникой связи и управления. Свойствам и применениям матриц Адамара и разных частных видов функций Адамара, отвечающих этим матрицам (например, функций Уолша, которыми являются строки матриц Адамара), посвящены десятки тысяч публикаций. Интересно, что ортогональные системы функций Уолша отслеживаются рядом авторов в макрофизиологических системах (см. обзор в [23, с. 416–418]).

Это обнаружение естественной реализации геноматриц Адамара (и связанных с ними ортогональных систем функций) на основе природных параметров дискретной молекулярно-генетической системы свидетельствует в пользу следующего. Все те преимущества, которые дает использование матриц Адамара в математической теории

дискретных сигналов и управлении, могут использоваться в биоинформатике и самоорганизации живого вещества (включая те преимущества, которые еще будут открыты в будущем, поскольку теория дискретных сигналов и матриц Адамара в ней продолжает интенсивно развиваться). Предлагаемый и развиваемый авторами анализ генетических структур с позиций теории дискретных сигналов связан с рассмотрением генетических секвенций как решетчатых функций, для которых существует содержательный класс дискретных логических операций. К ним относятся логическое сложение, логическое вычитание, логическое умножение, логический сдвиг, логическая свертка и, наконец, логическое дифференцирование. Все эти логические операции в той или иной мере приложимы к анализу проблем хранения и передачи наследственной информации в живом веществе.

По мнению авторов, на пути описанного в статье матричного подхода к генетической системе найдена та математика, которая адекватна ее природному строению. В настоящей статье приведена лишь часть материалов о полезности круговых и гиперболических матрионов в генетических и иных прикладных исследованиях. За ее рамками остались важные вопросы теории функций матрионного переменного, а также многомерных геометрий, соответствующих 2^n -мерным матрионам. Введение в 2^n -мерные пространства соответствующих матрионных систем координат позволяет работать с многомерными векторами этих матрионных пространств, складывая, вычитая и перемножая их. Для невырожденных матрионов-векторов этих многомерных матрионных пространств определено понятие обратного матриона, через которое вводится операция деления на невырожденный матрион, эквивалентная операции умножения на обратный к нему матрион.

В силу блочного характера своей матричной формы представления 2^n -мерные матрионы применимы во многих прикладных областях, где уже давно применяются блочные матрицы. Напомним, что свойства блочных матриц обеспечивают наглядность представления сложных взаимосвязей и делают матрицу удобным инструментом логического анализа сложных структур, где включены одновременно, например, технологический, организационно-производственный и экономический аспекты деятельности хозяйственных объектов. Блочные "информационные матрицы", отображающие движение документов и показателей, давно служат для анализа рациональности структуры, организации труда и загрузки отделов в производственных и других организациях, и пр.

Интересные возможности матрионы предоставляют для биологии, например, для биомеханики движений. Так, возможно создание матрионной теории локомоций для сравнительного анализа и классификации походок у организмов разных видов. Речь идет об интерпретации многозвенного локомоторного аппарата как такого многомерного функционального матриона, синхронизированное во времени изменение отдельных координат которого в матрионном пространстве моделирует движение звеньев опорно-двигательного аппарата при локомоциях. Управление такими матрионными многозвенными системами строится на специфических алгоритмах, отражающих целостную природу матриона как единого многомерного числа. Эти алгоритмы, как и все матрионное исчисление, будут полезны не только для биомеханики движений, но и для робототехники, где стоят задачи программирования движений для роботов, создания искусственного интеллекта и т.п. Данные задачи интересны, в частности, для отдела биомеханики Института машиноведения РАН, где описываемые матричные подходы к биоинформационным системам активно поддерживаются (см., например, [24]).

8 О познавательном значении матричной генетики и матрионов

История науки свидетельствует об особой важности поиска познавательных форм представления феноменологических данных, то есть свернутых и удобных для анализа форм представления бесчисленных единиц информации о природе. Все развитие математического естествознания базируется во многом на нахождении таких форм. Классическим примером служит работа Кеплера, который, не проводя собственных астрономических наблюдений, сумел найти особую форму представления трудно обозримого множества астрономических данных о движении планет из гроссбухов Тихо Браге. Эта открытая им когнитивная форма, связанная с обобщающей идеей движения по эллипсам, позволила ему сформулировать законы движения планет относительно Солнца, вошедшие в историю под именем законов Кеплера. Во многом благодаря открытию этой когнитивной формы уже другой человек – Ньютон – сформулировал много лет спустя закон всемирного тяготения.

Сложная ситуация в современной молекулярной генетике недаром сравнивается специалистами мирового банка генетических данных Genbank с положением Кеплера: "Что дают нам миллионы нуклеотидов в последовательностях, известных на сегодняшний день? Мы находимся в положении Иоганна Кеплера, впервые приступающего к поиску закономерностей среди тех томов данных, которые всю жизнь собирал Тихо Браге. Мы знаем программу, запускающую клеточную механику, но мы почти ничего не знаем о том, как ее "прочитать". ... мы все еще понимаем удручающе мало" [8, с. 14]. В молекулярной генетике назрела задача поиска познавательной формы представления трудно обозримого множества единиц экспериментальной информации.

Авторами предложена и развивается результативная познавательная форма представления данных о системе генетического кодирования, связанная с математикой помехоустойчивого кодирования и теорией матрионов как специальных видов поличисел. Она составляет основу развиваемого направления: матричной генетики. Уже полученные результаты этого направления позволяют моделировать генетические секвенции в цифровой форме: например, последовательность триплетов – в форме последовательности их естественных бинарных номеров, получая "цифровые" гены, цифровые экзоны и интроны, и т. п. В матричной генетике находят неожиданные применения многие понятия теории дискретных сигналов: ортогональные системы сигналов; унитарные преобразования; матрицы Адамара; спектры сигналов; свертки; преобразования Гильберта; комплексные (квадратурные) сигналы; цифровые фильтры; поразрядные операции по модулю; циклические коды и др.

Информационный подход к живой материи в последние десятилетия после открытия генетического кода постепенно занял ведущие позиции. Его значимость отражает цитата из статьи "Проблема происхождения жизни и мышления с точки зрения современной физики" [25], опубликованной в "Успехах физических наук": "В физике неживой природы понятия "информации" и "ценной информации" практически не используются, поскольку они там не нужны. В биологии, напротив, понятие "информация" и особенно "ценная информация" являются основными, и без них ни понять, ни описать явления в живой природе невозможно. В этом собственно и заключается специфика "живого". Именно с позиций биоинформатики современная наука надеется получить более глубокое понимание того, что такое жизнь и каково ее происхождение. И именно в биоинформатике закладываются сейчас основы теоретической биологии будущего.

Авторы верят в то, что в силу единства живого организма на разных физиологических уровнях используются одни и те же (или очень близкие) виды кодов для обеспечения помехоустойчивости биологической информации. Помехоустойчивость кажется

ключевым словом в рассматриваемой проблематике, а также удивительным биоинформационным феноменом, позволяющим организму сохранять свои функциональные способности в условиях постоянных внешних воздействий на него. Полученные данные свидетельствуют в пользу того, что структура систем генетического кода определена во многом требованием помехоустойчивости передачи генетической информации и связана с матрионами.

Поскольку теоретическая физика и теория кодирования дискретных сигналов зачастую используют одни и те же формализмы (например, комплексные числа, унитарные операторы, спектры сигналов), то это направление исследований сближает теорию генетического кодирования не только с теорией дискретных сигналов, но и с теоретической физикой, включая квантовую механику. Это сближение очень важно, поскольку генетические молекулы являются квантовомеханическими системами, анализ которых требует привлечения квантовой механики. Оно, в частности, способствует выявлению параллелей между молекулярно-генетическими структурами и квантовыми компьютерами.

Уже после публикации своей книги 2001 года [2] и ряда статей по матричной генетике авторы с удовольствием обнаружили небольшую статью Конопельченко Б. Г. и Ю. Б. Румера 1975 года [26]. В этой небольшой статье, посвященной исследованию симметрий в генетическом коде, ее авторы впервые представили генетический алфавит в форме (2×2) -матрицы и возвели ее во вторую кронекеровскую степень. Остается сожалеть, что эта пионерская для матричной генетики публикация оставалась без продолжения и должной оценки в течение более чем четверти века. Наши работы в области матричной генетики, произведенные совершенно независимо от нее, могут, тем не менее, считаться продолжением и развитием этой замечательной публикации. Добавим, что ее инициатором был крупный отечественный физик Ю. Б. Румер, соавтор Л. Д. Ландау и автор ряда известных книг по теоретической физике. Рекомендуем читателям знакомство с этой публикацией Конопельченко и Румера, в частности, для ее сравнения с нашей работой в постановке задачи и других деталях.

Матричная генетика способна улучшить текущую ситуацию с теорией генетического кодирования, которая описана директором Института молекулярной генетики РАН Е. Д. Свердловым [27] так: "Главный вопрос, на который хотела бы ответить молекулярная генетика, это вопрос, задаваемый всеми поколениями мыслителей: "Что такое жизнь?"... Мы не знаем, как гены и их ансамбли формируют фенотип. Наше знание о функциях генов сегодня обычно останавливается на информации типа "ген X кодирует (или вовлечен в кодирование) признак Y"... Отсутствие информации о том, что происходит в интервале между генами и фенотипом, касается всех генов и всех признаков. Хуже всего то, что неясно, как его заполнять. Нужна новая научная революция, подобная той, которую совершила структура ДНК в генетике".

В заключение авторы выражают благодарность академику К. В. Фролову за многолетнюю поддержку, а также академикам Ю. С. Осипову и В. А. Садовничему за внимание к работе на отдельных ее этапах. Авторы благодарны также профессорам и коллегам К. И. Бахтиярову, В. В. Величенко, Ю. С. Владимирову, Д. Дарвашу, И. А. Евину, В. В. Кассандрову, А. А. Коблякову, В. А. Кошцику, П. П. Лахтунову, Д. Г. Павлову, В. В. Смолянинову, М. Хи за обсуждение работы и поддержку. Авторы признательны организаторам международной конференции FERT-2007 за возможность квалифицированного и активного обсуждения ее участниками представленными в статье материалами.

Приложение 1. Связь системы генетического кодирования с пифагорейским музыкальным строем

Мысль о связи мироустройства с принципами музыкальной гармонии относится к числу древнейших идей человечества. Представители современной науки продолжают искать следы музыкальной гармонии в устройстве природных систем. Например, когда современная атомная физика нашла музыкальные отношения в спектральной серии Лаймана у атома водорода, то А. Эйнштейн и А. Зоммерфельд ввели в обиход характерный термин: "музыка атомных сфер" [29]. Значимость пифагорейских идей о роли музыкальной гармонии подчеркивал также нобелевский лауреат по физике Р. Фейнман [30]. Классики кристаллографии Х. С. Вейсс, Ю. Грассман, В. Гольдшмидт и другие давно отмечали выраженное совпадение количественных отношений в строении кристаллов с отношениями музыкальной гармонией (см. обзор в книге [31]).

Поскольку живое вещество часто сравнивают с кристаллами (так, Шредингер называл его аперриодическим кристаллом), то естественно пытаться найти следы музыкальной гармонии также в живом веществе. Эта мысль о возможном участии музыкальной гармонии в организации живого вещества не является новой для современной биофизики. Так, С. Э. Шноль пишет: "Из возможных следствий взаимодействия макромолекул ферментов, осуществляющих [циклические] конформационные колебания, рассмотрим пульсации давления – звуковые волны. Диапазон чисел оборотов большинства ферментов соответствует слышимым звуковым частотам. Некую, пока еще фантастическую картину "музыкальных взаимодействий" (!) биохимических систем, клеток, органов, и возможную роль этих взаимодействий в жизнедеятельности мы рассмотрим подробнее... Это наводит на приятные размышления о природе слуха, происхождении музыкального восприятия и о многом другом, что уже принадлежит области биохимической эстетики" [32]. Какой вклад развиваемая нами матричная генетика может внести в становление, по выражению Шноля, "биохимической эстетики"? Можно ли увидеть связь матричной системы параметров генетического кода с музыкальной гармонией? Представим полученные данные к положительному ответу на этот вопрос.

Напомним некоторые основные понятия теории музыкальной гармонии. Каждая музыкальная нота характеризуется определенной частотой звучания, обычно выражаемой в герцах. Для музыкальной мелодии важно отношение частот соседних нот в ней, а не абсолютные значения частот отдельных нот. С этим связано то, что мелодия легко распознается, независимо от того, в каком акустическом диапазоне частот она воспроизводится; например, напевают ли ее басом зрелый мужчина или высоким голосом женщина или ребенок. Математическим строем в музыке называется совокупность частотных отношений между звуками в музыкальной системе.

Одна и та же нота, например, нота "до" распознается человеком как та же самая, если ее частота увеличена или уменьшена в два раза, т.е. если она принадлежит другой октаве. Октавой называется интервал частот от некоторой ноты f_0 (принято считать началом октавы частоту ноты "до") до частоты $2 \cdot f_0$ (то есть до частоты ноты "до" следующей октавы). Так, первая октава простирается от частоты примерно 260 гц ("до" первой октавы) до удвоенной частоты 520 гц ("до" второй октавы).

Для музыкальных нот традиционно используются не все бесконечное множество частот октавы, а лишь небольшое их число. Ноты, соответствующие этим частотам, образуют определенную последовательность в порядке возрастания частоты. Музыкальный строй представляет собой последовательность числовых отношений ("интервальных отношений") между частотами соседних нот (музыкальных тонов).

Часто говорят о гармонии в живой природе. Слово "гармония" возникло в Древней Греции в связи с пифагорейским музыкальным строем, совпадающим в основных чер-

тах с древнекитайским музыкальным строем. Именно в античной теории музыки слово "гармония" обрело свое современное значение – согласие разногласного. Семь нот пифагорейского строя носят знакомые всем названия: до, ре, ми, фа, соль, ля, си. Эти семь нот соотносятся между собой по частотам вовсе не случайным образом, а закономерно взаимосвязаны в единый ансамбль. Действительно, семь нот пифагорейского строя, разнесенные в разные октавы, выстраиваются в единый ряд геометрической прогрессии на основе отношения квинты 3:2 между их частотами (отношения третьей и второй гармоник колеблющейся струны), что иллюстрирует Рис. 22. Тем самым, ноты пифагорейского строя образуют единый ансамбль на основе квинты 3:2 как коэффициента геометрической прогрессии. В этом ансамбле на Рис. 22 отношения частот отдельных нот к средней частоте ноты "ре" первой октавы в 293 Гц образуют симметрический ряд по знакам и величинам целочисленных степеней квинты: от степени -3 до степени $+3$.

Фа	До	Соль	Ре	Ля	Ми	Си
87	130	196	293	440	660	990
$(3/2)^{-3}$	$(3/2)^{-2}$	$(3/2)^{-1}$	$(3/2)^0$	$(3/2)^1$	$(3/2)^2$	$(3/2)^3$

Рис. 22. Согласование частот семи нот пифагорейского музыкального строя на основе отношения квинты. Два верхних ряда показывают ноты вместе с их частотами в герцах: "фа" большой октавы, "до" и "соль" малой октавы, "ре" и "ля" первой октавы, "ми" и "си" второй октавы. Нижний ряд показывает отношение частоты каждой ноты к средней частоте этого ряда: частоте 293 Гц ноты "ре" первой октавы

Квинтовая система музыкального строя иногда полагается древнейшей из вообще известных в истории систем музыкального строя (http://www.arbuz.uz/t_octava.html).

Древние греки, как и древние китайцы, приписывали музыкальной гармонии ключевую роль в устройстве мира. Поэтому они придавали чрезвычайное значение поиску отношений квинты $3/2$ в природных системах, считая 3 и 2 мужским и женским числами, которые своим взаимодействием порождают новые музыкальные тоны и пр. Так, великий математик и механик Архимед, совершивший множество открытий и изобретений, считал высшим достижением своей жизни обнаружение квинты $3/2$ в соотношении объемов (и площадей) цилиндра и сферы, вписанной в него [29]. Именно эти фигуры он завещал выгравировать на его могильном камне, и именно по их чертежу Цицерон обнаружил могилу Архимеда через 100 с лишним лет после смерти Архимеда.

Рассмотренное выше кронекеровское семейство квинтовых геноматриц $P_{MULT}^{(n)} = [3\ 2; 2\ 3]^{(n)}$, которое является поличисловым семейством гиперболических матриц, имеет выраженную связь с пифагорейским музыкальным строем. Оно пронизано отношениями квинты 3:2 на разных уровнях: в отношениях сумм чисел в рядом расположенных по вертикали квадрантах, субквадрантах, субсубквадрантах и т.д., включая отношения квинты между соседними по величине числами в этих матрицах. Каждая из квинтовых геноматриц $[3\ 2; 2\ 3]^{(n)}$ (см. Рис. 15) содержит индивидуальный набор из $(n+1)$ видов чисел, образующих квинтовую геометрическую прогрессию. Так, $[3\ 2; 2\ 3]^{(1)}$ содержит два вида чисел: 2 и 3. $[3\ 2; 2\ 3]^{(2)}$ – три вида чисел: 4, 6, 9. $[3\ 2; 2\ 3]^{(3)}$ – четыре вида чисел: 8, 12, 18, 27. Геноматрица $[3\ 2; 2\ 3]^{(6)}$ содержит семь видов чисел: 64, 96, 144, 216, 324, 486, 729; отношения этих чисел к среднему из них числу 216 дают тот самый фрагмент квинтовой геометрической прогрессии от $(3/2)^{-3}$ до $(3/2)^3$, который рассматривался нами на Рис. 22.

Выпишем эти наборы видов чисел для первых квинтовых геноматриц кронекеровского семейства $P_{MULT}^{(n)} = [3\ 2; 2\ 3]^{(n)}$ в столбики (см. (10, слева)):

$$\begin{array}{cccccc}
 3 & 9 & 27 & 81 & 243 & \dots & 1 & 3 & 9 & 27 \\
 & 2 & 6 & 18 & 54 & 162 & \dots & 2 & & \\
 & & 4 & 12 & 36 & 108 & \dots & & 4 & \\
 & & & 8 & 24 & 72 & \dots & & & 8 \\
 & & & & 16 & 48 & \dots & & & \\
 & & & & & 32 & \dots & & &
 \end{array} \tag{10}$$

Справа в (10) показан исторически известный числовой треугольник Платона или тетрада пифагорейцев, использованный древними греками при создании музыкального – пифагорова – строя на основе базовых пропорций из этого треугольника. Легко заметить аналогию между "генетическим" треугольником, отражающим систему генетических параметров, и числовым треугольником Платона (тетрадой пифагорейцев). Эта аналогия позволяет развивать представления о генетической основе эстетического восприятия музыки как последовательности "слаженных звуков".

Оказалось также, что "генетический" треугольник чисел (10, слева), полученный нами из семейства геноматриц, известен уже 2000 лет под названием числового треугольника древнегреческого математика Никомаха из Гераса. Он опубликован в его книге "Введение в арифметику" как основа пифагорейской теории музыкальной гармонии и эстетики пропорции. Этому треугольнику Никомаха посвящена статья [33]. Как утверждают искусствоведы, по этому числовому треугольнику, в частности, строился Парфенон и другие великие творения зодчества с их гармонией пропорций, поскольку архитектура трактовалась как застывшая музыка, а музыка – как динамическая архитектура. Ряд таких сведений содержится в названной статье [33].

Это совпадение треугольника Никомаха с треугольником чисел семейства квинтовых геноматриц первыми отметили и сообщили о нем авторам в частном письме профессора J. Karpraff и G. Adamson (США), познакомившись с авторскими публикациями о геноматрицах. С их любезного разрешения данный факт совпадения освещается в данной статье. Об этом Karpraff рассказал также на международной конференции "Symmetry Festival 2006" (12–18 августа 2006, Будапешт, Венгрия). Данная неожиданная связь времен дополнительно подтверждает правильность излагаемого пути исследования генетической системы и ее связь с пифагорейским музыкальным строем, отраженным в треугольнике Никомаха. Добавим, что Никомах из Гераса является одним из классиков теории музыкальной гармонии. В библиотеке Кембриджа имеется гравюра, изображающая его вместе с тремя другими классиками этой теории: Пифагором, Платоном и Боэцием. Она воспроизведена на сайте <http://www.jcsparks.com/painted/boethius.html>.

Очевидно, что каждая из квинтовых последовательностей видов чисел в семействе геноматриц $[3\ 2; 2\ 3]^{(n)}$ при $n = 1, 2, \dots, 6$ может быть сопоставлена части или всей квинтовой последовательности частот музыкальных нот на Рис. 22. Если, например, наименьшее число из числового набора в любой из названных геноматриц сопоставить частоте 87 гц ноты "фа" большой октавы (Рис. 22), то все остальные числа геноматрицы автоматически сопоставятся частотам других нот, указанных на данном рисунке. Так, последовательность чисел 8, 12, 18, 27 матрицы $[3\ 2; 2\ 3]^{(3)}$ будет сопоставлена последовательности частот 87, 130, 196, 293 гц соответствующих нот из таблицы на Рис. 22.

Геноматрица $[3\ 2; 2\ 3]^{(6)}$ содержит семь видов чисел: 64, 96, 144, 216, 324, 486, 729. При указанном сопоставлении числа 64, как меньшего из них, с наименьшей нотной частотой 87 из Рис. 22 этим семи видам чисел соответствуют все семь частот нот из этого рисунка: 87, 130, 196, 293, 440, 660, 990 гц.

В этой связи каждая геноматрица $[3\ 2; 2\ 3]^{(n)}$ при $n = 1, 2, \dots, 6$ может быть представлена в форме музыкальной матрицы $P_{MUSIC}^{(n)}$, в которой каждое число, представляющее n -плет, заменяется частотой соответствующей ноты. Например, геноматрица $[3\ 2; 2\ 3]^{(3)}$ триплетов представима в форме музыкальной матрицы $P_{MUSIC}^{(3)}$, где каждое исходное число заменено по описанному алгоритму соответствующей частотой ноты. В этом случае всю геноматрицу 64 триплетов можно изобразить с помощью нотного стана в виде последовательности 64 нот, в которой повторяются в нужном порядке (строка за строкой) ноты с частотами 87, 130, 196, 293 гц, указанные на Рис. 22. Эту последовательность нот можно прослушать как единую мелодию.

Описанные исследования обращают внимание, в частности, на то, что каждый ген и каждая часть ДНК как последовательности триплетов имеют собственные числовые квинтовые последовательности в виде специфической для них очередности четырех чисел 8, 12, 18, 27. Каждое из этих чисел представляет собой произведение количества водородных связей трех букв триплета: $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$, $2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$, $2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$, $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$. Отношение любых двух из этих четырех чисел равно квинте $3/2$ в той или иной целой степени. Последовательности этих четырех "водородных" чисел в каждом гене или молекуле ДНК можно сопоставить последовательность из четырех видов нот, то есть некоторую музыкальную мелодию. Другими словами, каждая генетическая последовательность характеризуется своей собственной музыкальной мелодией, определяемой в рассматриваемом случае на параметрах водородных связей.

Но в пифагорейском музыкальном строе содержится семь нот. Музыкальные мелодии на основе этих семи видов нот образуются для последовательностей триплетов описанным алгоритмом тогда, когда эти последовательности рассматриваются (интерпретируются) как состоящие из парного объединения соседних триплетов. При этом перемножаются числа водородных связей не у трех букв одного триплета, а сразу у шести букв двух соседних триплетов, что дает следующую квинтовую последовательность из семи чисел: $2^6 = 64$, $2^5 \cdot 3 = 96$, $2^4 \cdot 3^2 = 144$, $2^3 \cdot 3^3 = 216$, $2^2 \cdot 3^4 = 324$, $2 \cdot 3^5 = 486$, $3^6 = 729$. Эта квинтовая последовательность соответствует набору видов чисел в геноматрице $P^{(6)}$ и представлена в соответствующем столбце генетического треугольника $(2.3/1)$ и треугольника Никомаха. Тем самым, данная связь ДНК с пифагорейским музыкальным строем подсказывает оригинальный аналитический подход к генетическим последовательностям триплетов как последовательностям пар соседних триплетов. Возможные следствия из такого подхода, который рассматривает пару соседних триплетов как важную функциональную единицу (шестиплет), кодирующую сразу пару аминокислот, надлежит внимательно исследовать в будущем.

Молекулярная систем генетического алфавита выбрана природой так, что многие символные геноматрицы и их кронекеровские семейства при подстановке в них тех или иных видов числовых параметров азотистых оснований А, С, G, U (Т) становятся квинтовыми геноматрицами. К числу таких параметров относятся не только рассмотренные сейчас числа водородных связей, при которых $A = U (T) = 2$ и $C = G = 3$. Но к ним относятся также числа атомов в кольцах азотистых оснований ($C = U (T) = 6$, $A = G = 9$) и числа протонов в совокупности протонированных атомов этих колец ($C = U (T) = 40$, $A = G = 60$). По каждому из этих видов параметров символная последовательность триплетов может быть представлена в форме числовой квинтовой последовательности, которая может интерпретироваться, как музыкальная

мелодия на основе пифагорейского музыкального строя по аналогии с вышеописанным случаем чисел водородных связей. Как и в описанном случае параметров водородных связей, квинтовые последовательности для каждого из этих видов параметров могут состоять из четырех видов чисел при вычислении их членов по каждому триплету в отдельности. Или эти квинтовые последовательности могут состоять из семи видов чисел, сопоставляемых указанным образом всем семи нотам пифагорейского строя, при вычислении их членов сразу для пар соседних триплетов последовательности. Отметим, что одна и та же последовательность триплетов характеризуется разными мелодиями в зависимости от вида названных параметров. Это обусловлено тем, что разные виды названных параметров определяют разные квинтовые последовательности из-за разных вариантов разделения четверки букв генетического алфавита на пары эквивалентных букв, а также из-за разных числовых значений у разных видов параметров.

Цепевидная молекула ДНК может рассматриваться как полиатомная конструкция типа косички, сплетенной из многих нитей или цепочек. Одна из этих цепочек, входящих в общую косу ДНК, является цепью водородных связей, другая – цепью колец азотистых оснований, третья – цепью отдельных видов атомов и т. п. Поскольку с некоторыми из ее отдельных цепочек связаны разные квинтовые последовательности параметров, то есть разные "мелодии", то вся молекула ДНК с излагаемой "музыкально-пифагорейской" точки зрения предстает как носитель этих параллельно существующих квинтовых последовательностей или "мелодий". Их совокупность образует некоторую общую полифоническую мелодию (квинтовое многоголосье), которую при желании можно воспроизвести на музыкальных инструментах или посредством многоголосого пения и которая специфична для каждого гена.

Не может ли такая "натуральная генетическая музыка" обладать физиологической активностью и полезностью при воспроизведении генетических квинтовых последовательностей в виде музыкальных звуков, цветомузыкальных композиций, электрических стимулов, модулирующих лазерного луча, вибрационных тактильных сигналов и пр.? Например, в случае больных диабетом не будет ли наблюдаться лечебный эффект для них от сеансов музыкальных мелодий, соответствующих квинтовым последовательностям гена инсулина? Ответ могут дать только будущие эксперименты.

Подчеркнем, что эти генетические мелодии не образованы авторами волевым образом, а определены природными последовательностями параметров в цепевидных генетических молекулах. Они условно называются авторами "натуральной генетической музыкой" с тем, чтобы отличить их от вариантов "генетической музыки", иногда предлагаемых другими авторами на основе явно волевых подходов без достаточной опоры на молекулярные особенности генетических последовательностей. Речь идет об использовании этими авторами того обстоятельства, что в принципе можно волевым образом сопоставить, например, каждую из десяти цифр от 0 до 9 той или иной ноте, и затем любое многозначное десятичное число, например, телефонный номер заменить последовательностью этих нот, назвав ее "музыкой". Подобным образом названные авторы произвольно привязывают ноты к отдельным буквам генетического кода, что дает возможность переложения последовательности триплетов в последовательность звуков, называемую ими генетической музыкой.

Описанная феноменологическая связь генов с пифагорейским музыкальным строем и мелодиями на его основе интересна по многим обстоятельствам. Одним из них является существование с древних времен музыкальной терапии. В наши дни популярность музыкальной терапии демонстрирует, например, тот факт, что только "Американская ассоциация музыкальных терапевтов" объединяет свыше 5000 членов, из которых 2700 членов сертифицированы в качестве музыкальных терапевтов. В мире

также существует целое направление "цифровой фармакологии" ("digital-pharmacy"). Но современные музыкальные терапевты не знают о натуральной геномузыке, которая может предоставить дополнительные возможности. Наши прикладные исследования натуральной геномузыки ориентированы, прежде всего, не на создание приятной уху музыки, а на поиск основ целебной и физиологически действенной музыки. Эта геномузыка и композиции на ее основе должны адресоваться тем архетипам сознания и видам коллективного бессознательного, которые введены в современную науку К. Юнгом.

В свете полученных данных о музыкальной гармонии в молекулярной системе генетического кода можно думать о том, что музыка является не только инструментом вызова эмоций и наслаждения, но и принципом организации и языком живой материи. При этом выдающиеся композиторы предстают по существу как исследователи структурных принципов организации живого вещества на основе их сильно развитой интуиции, способности слышать свой организм. Как писал Лейбниц в письме Гольбаху от 17 апреля 1712 г., "музыка есть таинственная арифметика души, которая вычисляет себя, сама того не сознавая". Можно думать, что именно с музыкально-пифагорейскими аспектами молекулярно-генетической системы связана загадочная способность Моцарта и других гениальных композиторов слышать рождающееся у них новое музыкальное произведение целиком. Р. Фейнман отметил существование проблемы физиологических основ эстетики, когда писал о неясных корнях чувства музыкальной гармонии: "Но далеко ли мы ушли от Пифагора в понимании того, почему только некоторые звуки приятны для слуха? Общая теория эстетики, по-видимому, ненамного продвинулась со времен Пифагора" [30, т. 4, с. 201]. Изложенные выше материалы и другие результаты авторских исследований дают основания считать, что эстетические чувства и предпочтения имеют генетическую основу и связаны с общей проблемой помехоустойчивости информационных систем. Это направление исследований, развиваемое совместно с Московской государственной консерваторией (группа декана композиторского отделения проф. А. А. Коблякова), дало ряд содержательных материалов в области математической теории музыкальной гармонии. Речь идет, прежде всего, о полученном из семейства золотых гиперболических геноматрионных $\Phi_{MULT}^{(n)}$ (Рис. 16) "строе золотого вурфа", базирующемся на геометрической прогрессии с иррациональным отношением; выявлении в пифагорейских алгоритмах размножения нот музыкальных строев обобщения классической задачи Фибоначчи о размножении кроликов, и пр. Эти материалы, выходящие за рамки статьи, представлены в [34].

Добавим, что кронекеровское семейство геноматриц $P_{MULT}^{(n)} = [3 \ 2; \ 2 \ 3]^{(n)}$ алгоритмически связано с семействами генетических "бисексных" алгебр (или чет-нечет-алгебр, или инь-ян-алгебр) и матрицами Адамара. Это показано в работах [34–38]. Изложенные материалы по генетическим алгебрам доложены на XX Международном конгрессе генетики (Берлин, 12–17 июля 2008 года).

Литература

- [1] Сильвестров В. В. Системы чисел. - Соросовский образовательный журнал, № 8, 1998, с. 121–127.
- [2] Петухов С. В. Бипериодическая таблица генетического кода и число протонов. М., 2001.
- [3] Petoukhov S. V. Genetic Codes 1: Binary Sub-Alphabets, Bi-Symmetric Matrices and Golden Section; Genetic Codes II: Numeric Rules of Degeneracy and a Chronocyclic Theory. - Symmetry in Genetic Information, ISBN 963216 242 0, special double issue of the journal "Symmetry: Culture and Science", Budapest, 2001, 255–274 p.
- [4] Petoukhov S. V. Genetic Codes II: Numeric Rules of Degeneracy and a Chronocyclic Theory. - Symmetry in Genetic Information, ISBN 963216 242 0, special double issue of the journal

"Symmetry: Culture and Science", Budapest, 2001, 275–306 p.

- [5] Петухов С. В. Биосолитоны. Основы солитонной биологии. - М., 1999.
- [6] Розенфельд Б. А. Многомерные пространства. М., Наука, 1966.
- [7] Бененсон Я., Шапиро Э. Компьютеры из ДНК. - В мире науки, №9, 2006, с. 34–41
- [8] Уотермен М. С., редактор. Математические методы для анализа последовательностей ДНК, М., Мир, 1999.
- [9] Щуцкий Ю. К. Китайская классическая "Книга перемен" - М., 1997, 605 с.
- [10] Петухов С. В. Симметрии в биологии.- Приложение к книге: А. В. Шубников, В. А. Копчик "Симметрия в науке и искусстве", 3-е изд., М., 2004, с. 489–546.
- [11] Петухов С. В. Метафизические аспекты матричного анализа генетического кодирования и золотое сечение.- Метафизика. XXI век. (под ред. Ю. С. Владимирова). - М., Бином, 2006, с. 216-250.
- [12] Petoukhov S. V. The rules of degeneracy and segregations in genetic codes. The chrono cyclic conception and parallels with Mendel's laws.- "Advances in Bioinformatics and its Applications" (editors - M. He, G. Narasimhan, S. Petoukhov), Proceedings of the International Conference (Florida, USA, 16–19 December 2004), Series in Mathematical Biology and Medicine, v. 8, 2005, pp. 512–532, New Jersey-London-Singapore-Beijing, World Scientific.
- [13] Петухов С. В., Петухова Е. С. Матрично-тензорная интерпретация таблиц древнекитайской "Книги перемен" и генетического кода. Геноарт. - Ежегодник "Дельфис", М., 2006, часть 2, с. 89–95.
- [14] Франк-Каменецкий М. Д. Самая главная молекула. - М, Наука, 1988
- [15] Petoukhov S. V. Hadamard matrices and quint matrices in matrix presentations of molecular genetic systems. - Symmetry: Culture and Science, Vol. 16, No. 3, 2005, p. 247–266.
- [16] Петухов С. В. Матричная генетика и теоретическая биология. - М., 2007 (в печати).
- [17] Вер Г. "Карл Густав Юнг", Свердловск, Урал Лтд, 1998.
- [18] Беллман Р. Введение в теорию матриц. - М., Наука, 1976.
- [19] Petoukhov S. V. Attributive conception of genetic code, its bi-periodic tables and a problem of unification bases of biological languages.-"Symmetry: Culture and Science", 2003, #1–4, p. 40–59
- [20] Воробьев Н. Н. Числа Фибоначчи. - М., Наука, 1969.
- [21] Успенский В. А. Треугольник Паскаля. - М., Наука, 1966.
- [22] Ахмед Н., Рао К. Р. Ортогональные преобразования при обработке цифровых сигналов.- М., 1980
- [23] Залманзон Л. А. Преобразования Фурье, Уолша, Хаара и их применение в управлении, связи и других системах., М, Наука, 1989
- [24] Смолянинов В. В., Петухов С. В. Симметрии генетических триплетов. - Симметрии: теоретический и методологический аспекты. Сборник научных трудов 1-го Международного семинара, Астрахань, 2005. Издательский дом "Астраханский университет", 2005, с. 42–47.
- [25] Чернавский Д. С. Проблема происхождения жизни и мышления с точки зрения современной физики. - Успехи физических наук, т. 170, №2, с. 157–183, 2000.
- [26] Конопельченко Б. Г., Ю. Б. Румер. Классификация кодонов в генетическом коде. - ДАН СССР, т. 223, №2, 471–474, 1975.
- [27] Свердлов Е. Д. Великое открытие: революция, канонизация, догмы и ересь. - Вестник РАН, т. 73, №6, 2003.
- [28] Джан Р. Филлотаксис: системное исследование морфогенеза растений (под ред. С. В. Петухова), М, РХД, 2006.
- [29] Волошинов А. В. Математика и искусство. М., Просвещение, 2000.
- [30] Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике, т. 4, М., Мир, 1965.
- [31] Бергер Л. Г. Эпистемология искусства. М., Просвещение, 2001
- [32] Шноль С. Э. Физико-химические факторы биологической эволюции.- М., Наука, 1989.
- [33] Kappraff J. The arithmetic of Nichomachus of Gerasa and its applications to systems of proportions. - Nexus Network Journal, v. 2, № 4 (October 2000), <http://www.nexusjournal.com/Kappraff.html>

- [34] Петухов С. В. Матричная генетика, алгебры генетического кода, помехоустойчивость. - (Предисловие акад. К. В. Фролова).- М., РХД, 2008.
- [35] Petoukhov S. The degeneracy of the genetic code and Hadamard matrices, arXiv:0802.3366
- [36] Petoukhov S. Matrix genetics, part 1: permutations of positions in triplets and symmetries of genetic matrices, arXiv:0803.0888
- [37] Petoukhov S. Matrix genetics, part 2: the degeneracy of the genetic code and the octave algebra with two quasi-real units (the "Yin-Yang octave algebra"), arXiv:0803.3330
- [38] Petoukhov S. Matrix genetics, part 3: the evolution of the genetic code from the viewpoint of the genetic octave Yin-Yang-algebra, arXiv:0805.4692

POLY-NUMBERS (MATRIONS) IN BIOLOGICAL AND COMPUTER INFORMATICS

Sergey Petoukhov, Elena Petoukhova

Mechanical Engineering Research Institute RAS, Moscow
petoukhov@hotmail.com

The article is devoted to 2^n -dimensional poly-numbers, which generalize complex and double numbers on the basis of a block-fractal (or Kronecker) algorithm. These poly-numbers were named circular and hyperbolic matrons correspondingly. They were constructed in a course of investigations of genetic code systems from the viewpoint of matrix methods of informatics. Data about algebras of these poly-numbers are presented. A meaning of these poly-numbers for theoretical biology and information science is under discussion.