3-МЕРНОЕ ГАЛИЛЕЕВО ОДУЛЯРНОЕ НИЛЬПОТЕНТНОЕ ПРОСТРАНСТВО С 2-МЕРНЫМ ВРЕМЕНЕМ

А. И. Долгарев и И. А. Долгарев

Пензенский Государственный университет
delivar@yandex.ru

Рассматривается галилеево пространство с 2-мерным временем, имеющее некоммутативную геометрию; пространство строится на одуле Ли галилеевых движений. В работе Д. Г. Павлова РЖМат 04.12А563 обсуждается концепция многомерного времени, определяемого на линейном пространстве посредством введения метрической функции Бервальда-Моора, относящейся к финслеровым метрикам. Линейное пространство есть коммутативная алгебраическая структура, на ней могут быть определены различные метрические функции. Метрическая функция на одуле Ли – некоммутативной структуре, органично связана со строением структуры, и вводится сообразно свойствам структуры. В настоящей работе приводятся первые сведения из одного из некоммутативных одулярных галилеевых пространств с 1-мерным временем, его одулем является одуль Ли галилеевых движений; и на этом же одуле Ли строится галилеево пространство с 2-мерным временем, начато исследование геометрических свойств этого пространства.

УДК 514.7

Введение

Многомерное время сейчас вызывает живой интерес, появляются исследования, посвященные этой проблеме, например, работы Д. Г. Павлова [1, 2]. Зреет мнение, что более важно для естествознания создание науки о времени, чем науки о пространстве. В [1, 2] рассматриваются финслеровы векторные пространства, к которым привели обобщения псевдоевклидовых пространств, лежащих в основе теории относительности А. Эйнштейна. Другой принцип относительности, используемый физикой, принцип относительности Г. Галилея, почти не обсуждается в [1], т. к. он предполагает введение дополнительных измерений, трактуемых в качестве временных (времениподобных). В физических исследованиях пытаются "избавиться" от этих дополнительных измерений, к таким попыткам приводит коммутативность галилеева векторного пространства. В настоящее время имеются работы по некоммутативным галилеевым пространствам, см. [3], в исследованиях которых невозможно обойтись без временных направлений. В основе указанных пространств лежат одули Ли (их коммутативным случаем являются векторные пространства); в [3] изучаются 3-мерные одулярные галилеевы пространства с 1-мерным временем. Среди описанных в [3] некоммутативных разрешимых одулей Ли имеются и такие, на которых может быть введено 2-мерное время. Ниже рассматривается сибсон – нильпотентный ступени 2 одуль Ли размерности 3; на котором в [3] введена галиллеева норма с 1-мерным временем и получены основные факты геометрии пространства-времени с сибсоном. Мы приводим необходимые сведения из 3 и начинаем построение геометрии пространства-времени с сибсоном с 2-мерным временем. Применяется идея финслеровой метрики из [1]. Финслерова метрика на сибсоне появляется естественно на основе свойств сибсона.

Используются факты, общие для пространств как с 1-мерным временем, так и с 2-мерным временем.

1 Пространство с сибсоном с 1-мерным временем

1.1. Алгебра движений галилеевой плоскости

Рассматривается прямолинейное движение материальной точки с постоянной скоростью v в системе отсчета Otx. В момент времени t положение точки на прямой относительно начала отсчета O определяется ее координатой x. Можно считать, что движется точка (t, x). Начальные условия движения: в момент времени a точка находится на расстоянии b от начала O. Тогда время t' движения точки определяется равенством

$$t' = t + a,$$

расстояние x', пройденное точкой, вычисляется по формуле

$$x' = vt + x + b.$$

Точка из положения (t, x) перемещается в положение (t', x'). Зависимость координат точки (t', x') от координат точки (t, x) описывается уже приведенными формулами, которые рассматриваются совместно:

$$\begin{cases} t' = t + a, \\ x' = vt + x + b; \end{cases} \tag{1}$$

Это формулы галилеева движения точки по прямой Ox. Обозначаем галилеево движение δ_d; в движении δ_d точка (t, x) отображается на точку (t', x').

$$\delta_d : \ (t, x) \to (t', x').$$

Определитель движения, составленный по формулам (1), есть

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ v & 1 \end{vmatrix} \neq 0;$$

матрица движения δ_d, согласно (1), такова

$$\mu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & v & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица μ является унитреугольной. Коэффициенты a, v, b в формулах движения (1) есть действительные числа. Множество действительных чисел обозначается $\mathbf{R}$.

Движению δ_d и унитреугольной матрице μ соответствует тройка действительных чисел (a, v, b) из $\mathbf{R}^3$. Эту тройку обозначаем

$$\delta = (a, v, b).$$

Всякому прямолинейному галилееву движению (1) и унитреугольной матрице μ соответствует единственная тройка δ и всякой тройке (a, v, b) из $\mathbf{R}^3$ соответствует единственное галилеево движение δ_d точки по прямой Ox и единственная унитреугольная матрица μ порядка 3, т. е. установленные соответствия являются биекциями.

Пусть τ_d еще одно галилеево движение по прямой Ox,

$$\tau_d : \ (t', x') \to (t\, x");$$

Формулы, матрица движения τ_d и соответствующая тройка таковы:

$$\tau_d : \begin{cases} t'' = t' + c, \\ x'' = wt' + x' + d; \end{cases} \qquad \nu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c & 1 & 0 \\ d & w & 1 \end{pmatrix}, \quad \tau = (c, w, d).$$

Композиция движений δ_d и τ_d, которую записываем в виде суммы $\delta_d + \tau_d$, отображает точку (t, x) на точку $(t\, x")$ прямой Ox. Формулы движения $\delta_d + \tau_d$ получаются в результате подстановки формул (1) движения δ_d в формулы движения τ_d:

$$\delta_d + \tau_d : \begin{cases} t'' = t + a + c, \\ x'' = w(t + a) + vt + x + b + d; \end{cases} \quad \begin{cases} t'' = t + a + c, \\ x'' = (w + v)t + x + wa + b + d; \end{cases}$$

Движение $\delta_d + \tau_d$ описывается матрицей $\nu\mu$, являющейся произведением матриц движений τ_d и δ_d (в обратном порядке):

$$\nu\mu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c & 1 & 0 \\ d & w & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & v & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c + a & 1 & 0 \\ d + wa + b & w + v & 1 \end{pmatrix}.$$

Движению $\delta_d + \tau_d$ соответствует тройка из $\mathbf{R}^3$:

$$\delta_d + \tau_d = (c + a, w + v, d + wa + b).$$

По виду тройки $\delta + \tau$ имеем на $\mathbf{R}^3$ операцию сложения троек:

$$(c, w, d) + (a, v, b) = (c + a, w + v, d + wa + b). \tag{2}$$

Матрицы галилеевых движений по прямой Ox составляют унитреугольную группу матриц $UT_3(\mathbf{R})$ порядка 3. Это группа Ли, она нильпотентна; ступень нильпотентности группы равна 2. Между матрицами группы $UT_3(\mathbf{R})$ и тройками из $\mathbf{R}^3$ установлена биекция:

$$\mu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & v & 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow (a, v, b) = \delta,$$

в которой произведению матриц $\nu\mu$ соответствует сумма троек $\tau + \delta$, заданная равенством (2). Следовательно, операция сложения (2) на многообразии $\mathbf{R}^3$ обладает теми же свойствами, что и умножение матриц из $UT_3(\mathbf{R})$. А это означает, что многообразие $\mathbf{R}^3$ с операцией сложения (2) является группой Ли $(\mathbf{R}^3, +)$, изоморфной группе Ли $UT_3(\mathbf{R})$. Эта группа Ли обозначается $(\mathbf{R}^3, +) = \Sigma^3$. На многообразии $\mathbf{R}^3$ имеются разные виды операций сложения троек; в зависимости от вида операции сложения получаемые группы Ли обладают разными свойствами. Например, относительно сложения

$$(c, w, d) + (a, v, b) = (c + a, w + v, d + b). \tag{3}$$

группа Ли $(\mathbf{R}^3, +) = \mathbf{L}^3$ является абелевой. Другие виды операций на $\mathbf{R}^3$ приведены в [4, 3.]

Точно также множество Σ^3_d всех прямолинейных движений материальной точки относительно композиции преобразований есть группа Ли, изоморфная группе Ли $UT_3(\mathbf{R})$ и группе Ли троек $(\mathbf{R}^3, +)$.

Нейтральным элементом в группе Σ^3 является

$$\vartheta = (0, 0, 0);\ \ \delta + \vartheta = \vartheta + \delta = \delta.$$

Противоположный элемент $-\delta$ для δ равен

$$-\delta = -(a, v, b) = (-a, -v, -b + av).$$

По равенству (2) легко проверяется выполнимость равенства

$$\delta + (-\delta) = (a, v, b) + (-a, -v, -b + av) = (0, 0, 0) = \vartheta.$$

Заменив в (2) тройку (c, w, d) тройкой (a, v, b), получаем

$$2\delta = (a, v, b) + (a, v, b) = 2(a, v, b) = (2a, 2v, 2b + av).$$

Для суммы $3\delta = 2\delta+\delta$ находим на основании (2): $3\delta = (3a, 3v, 3b+3av)$ и для $n\delta, n$ целое число, по (2) получаем: $n\delta = (na, nv, nb + \frac{n(n-1)}{2}av)$. В случае любого действительного u полагаем по определению:

$$u\delta = (au, vu, bu + av\frac{u(u-1)}{2}). \tag{4}$$

Если $p = 0$, то $0\delta = \vartheta$; если $u = 1$, то $1 \cdot \delta = \delta$; если $u = -1$, то $(-1) \cdot \delta = -\delta$.

Тем самым, на группе Ли $(\Sigma^3, +)$ задана внешняя операция $\omega_R(+)$ умножения троек на действительные числа. Свойства внешней операции (4) связаны со свойствами внутренней операции (2) сложения троек. Получена структура

$$\Sigma^3 = (\Sigma^3, +, \omega_R(+)),$$

которая называется *сибсоном.* Для абелевой группы Ли $\mathbf{L}^3 = (\mathbf{R}^3, +)$ с операцией сложения (3) внешняя операция $\omega_R(+)$ такова

$$u(a, v, b) = (au, vu, bu)$$

и на группе Ли $(\mathbf{R}^3, +)$ определена структура линейного пространства

$$\mathbf{L}^3 = (\mathbf{R}^3, +, \omega_R(+))$$

над полем $\mathbf{R}$ действительных чисел. Структура сисбсона обобщает структуру линейного пространства.

По тройке $u(a, v, b)$ (4) получаем формулы u-кратного прямолинейного движения

$$u\delta_d : \begin{cases} t' = t + au, \\ x' = vut + x + bu + a\frac{u(u-1)}{2}. \end{cases}$$

Прямолинейные галилеевы движения составляют сибсон. На основании (4) по тройке $u(a, v, b)$ записываем действительную степень μ^u матрицы μ:

$$\mu^u = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ au & 1 & 0 \\ bu + a\frac{u(u-1)}{2} & vu & 1 \end{pmatrix};$$

получен сибсон унитреугольных матриц.

1.2. Одули Ли

На многообразии $\mathbf{R}^3$ кроме операций (2) и (3) могут быть заданы и другие операции, например,

$$(x^1, x^2, x) + (y^1, y^2, y) = (x^1 + e^x y^1, x^2 + e^x y^2, x + y),$$

см. [3, с. 233], что дает другие группы Ли на $\mathbf{R}^3$. Определяя внешнюю операцию

$$t(x^1, x^2, x) = (x^1 \frac{e^{xt} - 1}{e^x - 1}, x^2 \frac{e^{xt} - 1}{e^x - 1}, xt), \qquad \text{при} \quad x \neq 0; \;\; t(x^1, x^2, 0) = (x^1 t, x^2 t, 0),$$

получаем алгебраическую структуру, отличную от линейного пространства и сибсона.

Обобщения линейного пространства, называемые одулями, введены Л. В. Сабининым в 1977 году в [5]. В общем случае рассматривается произвольная алгебраическая структура $(\Omega, +)$ с внутренней бинарной операцией, называемой сложением, и кольцо $\mathbf{K}$. Задано отображение

$$\omega_K(+): \;\; (\mathbf{K} \times \Omega) \to \Omega,$$

в котором паре $(t, \varrho) \in \mathbf{K} \times \Omega$ соответствует элемент из Ω, обозначаемый $t\varrho$. Выполняются следующие аксиомы для любых $\varrho \in \Omega, \;\; t, s \in \mathbf{K}$:

$(t + s)\varrho = t\varrho + s\varrho$,

$s(t\varrho) = (st)\varrho$.

Алгебраическая структура $\Omega = (\Omega, +, \omega_K(+))$, удовлетворяющая выписанным аксиомам, называется *одулем над кольцом* $\mathbf{K}$ или $\mathbf{K}$-*одулем,* или просто *одулем.* Структура одуля обобщает структуру $\mathbf{K}$-модуля и, в частности, структуру линейного пространства над полем.

Если структура $(\Omega, +)$ является группой и кольцо $\mathbf{K}$ обладает единицей 1, то выполняются еще аксиомы:

$0\varrho = \vartheta, \;\; 1\varrho = \varrho, \;\; (-1)\varrho = -\varrho, \;\; t(-\upsilon + \varrho + \upsilon = -\upsilon + t\varrho + \upsilon$,

где 0 нуль кольца $\mathbf{K}$, ϑ – нулевой элемент группы, $-\varrho$ противоположный элемент для ϱ. Если $(\Omega, +)$ группа Ли и кольцо $\mathbf{K}$ есть поле действительных чисел $\mathbf{R}$ или поле $\mathbf{C}$ комплексных чисел, то одуль $\Omega = (\Omega, +, \omega_R(+))$, или $\Omega = (\Omega, +, \omega_C(+))$ называется *одулем Ли.* Одули Ли введены в [3], где описаны 3-мерные разрешимые действительные одули Ли и начато изучение галилеевых геометрий с одулями Ли. Методами галилеевой геометрии в [6] получено решение задачи И. Ньютона о получении уравнений траектории движения материальной точки по заданному полю ускорения движения в случае двух степеней свободы.

1.3. Сибсон размерности 3

Приведем общее определение сибсона на многообразии $\mathbf{R}^3$. Сибсонами называются нильпотентные одули Ли. Элементы сибсонов называются *сибсами.*

Тройки из $\mathbf{R}^3$ записываем в виде (x^1, x^2, x). На $\mathbf{R}^3$ заданы операции

$$(x^1, x^2, x) + (y^1, y^2, y) = (x^1 + y^1, x^2 + y^2, x + y + x^2 y^1); \tag{5}$$

$$t(x^1, x^2, x) = (x^1 t, x^2 t, xt + \frac{t(t-1)}{2} x^1 x^2), \quad t \in \mathbf{R}. \tag{6}$$

Множество троек $\mathbf{R}^3$ с операцией сложения (5) есть неабелева группа Ли $(\mathbf{R}^3, +)$. Нулевой сибс есть $\vartheta = (0, 0, 0)$, сибс, противоположный сибсу $\sigma = (x^1, x^2, x)$, таков: $-\sigma = -(x^1, x^2, x) = (-x^1, -x^2, -x + x^1 x^2)$.

Несложная проверка показывает, что аксиомы одуля, приведенные в предыдущем п. 1.2, выполняются. Полученный одуль Ли обозначается $\mathbf{\Sigma}^3$, элементы сибсона обозначаются $\alpha, \beta, ..., \sigma, ...$. Все вычисления на сибсоне производятся на основе операций (5) и (6).

Во внутренней операции (5) компоненты сибсов обладают различными свойствами. В первой компоненте суммы используются только первые компоненты слагаемых, во второй компоненте суммы тоже используются только вторые компоненты слагаемых. А в третьей компоненте суммы кроме третьих компонент слагаемых используются еще первая и вторая компоненты слагаемых. Компоненты слагаемых, используемые в других компонентах суммы, называются *ведущими*. По операции (5) имеем, что первая и вторая компоненты сибсов являются ведущими в операциях на сибсоне.

Обозначим: $(x^1, x^2, x) = \sigma,\ (1,0,0) = \alpha, (0,1,0) = \beta, (0,0,1) = \gamma$. Имеем однозначное разложение

$$\sigma = (x^1, x^2, x) = x^1\alpha + x^2\beta + x\gamma.$$

Это означает, что сибсы α, β, γ составляют базис $\mathbf{Б} = (\alpha, \beta, \gamma)$ сибсона $\mathbf{\Sigma}^3$. Коммутатор $[\tau, \sigma]$ сибсов τ и σ вычисляется как коммутатор элементов группы: $[\tau, \sigma] = -\tau - \sigma + \tau + \sigma$. Находим коммутаторы базисных сибсов и записываем генетический код сибсона:

$$\mathbf{\Sigma}^3 = <\alpha, \beta, \gamma | [\beta, \alpha] = \gamma, [\gamma, \alpha] = [\gamma, \beta] = \vartheta> . \tag{7}$$

Сибсы порождают в сибсоне $\mathbf{\Sigma}^3$ некоторые подгруппы Ли, являющиеся подсибсонами. 1-параметрический подсибсон $<\sigma>$, порожденный сибсом σ, состоит из сибсов $t\sigma, t \in \mathbf{R}$:

$$<\sigma> = \{t\sigma, t \in \mathbf{R}\},$$

это оболочка сибса σ, она является 1-мерным линейным пространством. Сибсы σ, τ называются независимыми, если $\tau \notin <\sigma>$. Подсибсон $<\sigma, \tau>$, т. е. оболочка сибсов σ, τ, есть подгруппа Ли в $\mathbf{\Sigma}^3$, порожденная независимыми сибсами σ, τ. Согласно генетическому коду сибсона (7), подсибсоны $<\alpha, \gamma>$ и $<\beta, \gamma>$ абелевы. Это 2-мерные линейные пространства. Подсибсон $<\alpha, \beta>$ содержит и сибс γ, т. к. $[\beta, \alpha] = \gamma$, т. е. сибсы α, β порождают весь сибсон $\mathbf{\Sigma}^3$ и 3-мерный сибсон $\mathbf{\Sigma}^3$ является 2-порожденным одулем Ли. (В теории групп элемент γ называется непорождающим элементом группы $(\mathbf{\Sigma}^3, +)$, он входит в подгруппу Фраттини группы, см. [7].)

Вообще, оболочка двух перестановочных независимых сибсов является 2-мерным линейным пространством, оболочка двух неперестановочных сибсов является 3-мерным сибсоном.

Подсибсоны $<\alpha, \gamma>$ и $<\beta>$ имеют только один общий сибс – нулевой ϑ и $[\beta, \alpha] = \gamma \in <\alpha, \gamma>$. Поэтому сибсон $(\mathbf{\Sigma}^3, +)$ есть полупрямая сумма линейных пространств

$$(\mathbf{\Sigma}^3, +) = <\alpha, \gamma> \dashv <\beta> = \mathbf{L}^2 \dashv \mathbf{L}^1.$$

1.4. Галилеева норма на сибсоне (с 1-мерным временем)

В [3] на сибсоне определена галилеева норма сибсов. (Галилееву метрику Б. А. Розенфельд в [8] называет квазиметрикой.) *Галилеевой* нормой $\| \sigma \|$ сибса $\sigma = (x^1, x^2, x)$ называется

$\| \sigma \| = |x^1|$, если $x^1 \neq 0$;

$\| \sigma \| = \sqrt{(x^2)^2 + (x)^2}$, если $x^1 = 0$.

Сибсон с такой нормой обозначается $\mathbf{\Sigma}^3_{1(1)}$. Сибс σ имеет нулевую норму, если и только если $\sigma = \vartheta$, поэтому сибсон не имеет изотропных направлений. Сибс (x^1, x^2, x) при

$x^1 \neq 0$ называется галилеевым, сибс $(0, x^2, x)$ называется евклидовым. Евклидовы сибсы в нормированном сибсоне $\mathbf{\Sigma}^3_{1(1)}$ составляют 2-мерное евклидово подпространство $\mathbf{V}^2$. Сибсы $(0, x^2, x)$ являются пространственными (пространственноподобными), сибсы $(x^1, 0, 0)$ являются временными (времениподобными). Нормированный сибсон $\mathbf{\Sigma}^3_{1(1)}$ есть полупрямая сумма евклидовых пространств $\mathbf{\Sigma}^3_{1(1)} = \mathbf{V}^2 \dashv \mathbf{V}^1$ с 1-мерным временем $\mathbf{V}^1$.

Норма на сибсоне позволяет дифференцировать сибсонные функции и строить дифференциальную геометрию пространства с нормированным сибсоном. Это построение осуществлено в [3].

2 Пространства с сибсоном

2.1. Пространство с ненормированным сибсоном

Сибсон обобщает линейное пространство; пространство с исбсоном, на котором не введена норма сибсов, обобщает аффинное пространство. Последнее строится в аксиоматике Г. Вейля, [9]. Для этого рассматривается линейное пространство $\mathbf{L}^n$, множество $\mathbf{A}$ точек, $\mathbf{A} = \{A, B, ..., M, ...\}$ и отображение пар точек в линейное пространство

$$\lambda : \ \mathbf{A} \times \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{L}^n.$$

Каждой паре точек (A, B) соответствует единственный вектор $\overrightarrow{AB} = \vec{v} \in \mathbf{L}^n$; выполняются известные аксиомы Г. Вейля (они сформулированы немного ниже).

Заменяя линейное пространство $\mathbf{L}^3$ сибсоном $\mathbf{\Sigma}^3$ в аксиоматике Г. Вейля аффинного пространства, см. [3], получаем вейлевское одулярное пространство с сибсоном, которое называется *ЛС-пространством*. Приведем определение ЛС-пространства.

Пусть $\mathbf{S}^3 = \{A, B, ..., M, ...\}$ множество, элементы которого называются точками. Задано отображение

$$\lambda : \ \mathbf{S}^3 \times \mathbf{S}^3 \longrightarrow \Sigma^n.$$

Сибс σ, соответствующий паре точек (A, B), обозначается $AB = \sigma$. Выполняются следующие аксиомы Г. Вейля:

1^0. Для всякой точки A и всякого сибса σ существует единственная точка B такая, что $AB = \sigma$.
2^0. Для любых трех точек A, B, C, если $AB = \sigma$, $\ BC = \tau$, то $AC = \sigma + \tau$.

Множество $\mathbf{S}^3$ называется ЛС-пространством, это пространство с сибсоном $\mathbf{\Sigma}^3$, на котором не введена норма сибсов. ЛС-пространство есть некоммутативный аналог аффинного пространства, геометрия обоих пространств строится в одной и той же аксиоматике.

Для трех точек A, B, C выполняется $AB + BC = AC$; если $AB = \sigma$, то $BA = -\sigma$ и $AA = \vartheta$. Геометрия ЛС-пространства излагается в [3]. Приведем первые факты этой геометрии.

В ЛС-пространстве выбирается репер $\mathbf{B} = (O, \alpha, \beta, \gamma)$, где O точка ЛС-пространства, $\mathbf{Б} = (\alpha, \beta, \gamma)$ базис сибсона. Точка M ЛС-пространства определяется сибсом $\sigma = OM$. Если $\sigma = (x^1, x^2, x)$ в базисе $\mathbf{Б}$, то в репере $\mathbf{B}$ точка M имеет координаты (x^1, x^2, x), обозначение: $M = (x^1, x^2, x)$. (По аналогии с аффинным пространством.) Пусть $A = (a^1, a^2, a)$ и $B = (b^1, b^2, b)$ две точки ЛС-пространства, сибс AB имеет координаты

$$AB = (b^1 - a^1, b^2 - a^2, b - a - (b^1 - a^1)a^2). \tag{8}$$

Прямая $< A, \sigma >$, определяемая точкой A и ненулевым сибсом σ, есть множество точек (как и в аффинном пространстве)

$$< A, \sigma >= \{M | AM = t\sigma,\ t \in \mathbf{R}\}.$$

Через всякие две различные точки проходит единственная прямая. Пусть $M = (x^1, x^2, x), A = (a^1, a^2, a), \sigma = (c^1, c^2, c)$, тогда по (8): $AM = (x^1 - a^1, x^2 - a^2, x - a - (x^1 - a^1)a^2)$ и $t\sigma$ определяется равенством (6): $t\sigma = (c^1 t, c^2 t, ct + \frac{t(t-1)}{2} c^1 c^2)$. Сибсы AM и σ равны только в случае, если равны их соответствующие координаты. Параметрические уравнения прямой $< A, \sigma >$ таковы

$$x^1 = c^1 t + a^1, \quad x^2 = c^2 t + a^2, \quad x = ct + \frac{t(t-1)}{2} c^1 c^2 + c^1 a^2 t + a.$$

В общем случае уравнения нелинейны; при $c^1 = 0$ или $c^2 = 0$ уравнения прямой линейны.

Имеется два вида параллельности прямых в ЛС-пространстве. Прямые $< A, \sigma >$ и $< B, \sigma >$ с общим ненулевым сибсом σ параллельны. Обозначим $AB = \tau, \rho = -\tau + \sigma + \tau$. Если сибсы σ, τ неперестановочны, то σ, τ независимы и имеется еще одна прямая $< B, \rho >$, проходящая через точку B вместе с прямой $< B, \sigma >$, и параллельная прямой $< A, \sigma >$.

Если сибсы σ, τ неперестановочны, то оболочка $< \sigma, \tau >$ совпадает с сибсоном $\mathbf{\Sigma}^3$, см. п. 2.3, а множество точек $\{M | AM \in < \sigma, \tau >\}$ (для фиксированной точки A) совпадает с ЛС-пространством. Если σ, τ перестановочны и независимы, то $< \sigma, \tau >$ является 2-мерным линейным пространством и множество точек $\{M | AM \in < \sigma, \tau >\}$ не исчерпывает ЛС-пространства. Множество точек, определяемое точкой A и независимыми перестановочными сибсами σ, τ:

$$< A, \sigma, \tau >= \{M | AM = u\sigma + v\tau >, \quad (u, v) \in \mathbf{R}^2\}$$

называется плоскостью ЛС-пространства. Если $M = (x^1, x^2, x), A = (a^1, a^2, a), \gamma = (0, 0, 1), \sigma = (c^1, c^2, c)$, то параметрические уравнения плоскости $< A, \gamma, \sigma >$ таковы

$$x^1 = c^1 v + a^1, \quad x^2 = c^2 v + a^2, \quad x = cv + c^1 c^2 \frac{t(t-1)}{2} + c^1 a^2 + u + a;$$

уравнения нелинейны.

Одулем всякой плоскости ЛС-пространства является 2-мерное линейное пространство, поэтому всякая плоскость ЛС-пространства является аффинной. Неперестановочные сибсы не порождают никакой плоскости. Если $AB = \sigma, AC = \tau, \tau \notin < \sigma >, \sigma + \tau = \tau + \sigma$, то через три неколлинеарные точки A, B, C проходит единственная плоскость. Если $\sigma + \tau \neq \tau + \sigma$, то через неколлинеарные точки A, B, C не проходит плоскости. В последнем случае через точку C в ЛС-пространстве проходит две прямые $< C, \sigma >$ и $< C, \rho >, \rho = -\tau + \sigma + \tau$, параллельные прямой $< A, \sigma >$.

Для репера $(O, \alpha, \beta, \gamma)$ ЛС-пространства имеем координатные оси $< O, \alpha >$, $< O, \beta >$, $< O, \gamma >$. Существуют координатные плоскости $< \alpha, \gamma, >, < \beta, \gamma >$, но не существует координатной плоскости, порожденной точкой O и сибсами α, β. В плоскости $< A, \gamma, \pi >, \pi = (1, p, 0), p \neq 0$, (имеем $\gamma + \pi = \pi + \gamma$) лежат прямые $< H, \pi >, H = (h^1, h^2, h) \in < A, \gamma, \pi >$, их параметрические уравнения

$$x^1 = t + h^1, \quad x^2 = pt + h^2, \quad x = p\frac{t(t-1)}{2} + h^2 t + h.$$

Из ЛС-пространства прямые $< H, \pi >$ выглядят как параболы, это *циклы* галилеевой плоскости (термин из [10]). Кроме циклов, плоскость содержит прямые $< H, \gamma >$. Взаимное расположение прямых на плоскости такое же, как на всякой аффинной плоскости. Прямые $< A, \pi >$ и $< H, \pi >$ параллельны и лежат в плоскости $< A, \gamma, \sigma >$. Обозначим $AH = \rho, -\rho + \pi + \rho = \tau$, сибсы π, ρ неперестановочны, прямая $< H, \tau >$ параллельна прямой $< A, \pi >$, но не лежит в плоскости $< A, \gamma, \sigma >$.

2.2. Пространство с нормированным сибсоном $\mathbf{\Sigma}^3_{1(1)}$

Вводя в сибсон $\mathbf{\Sigma}^3$ ЛС-пространства норму сибсов, см. п. 2.4, превращаем сибсон $\mathbf{\Sigma}^3$ в $\mathbf{\Sigma}^3_{1(1)}$, ЛС-пространство становится ЕС-пространством-временем – это одулярное галилево пространство с некоммутативной геометрией. Координатная плоскость $< O, \beta, \gamma >$ и параллельные ей плоскости $< A, \beta, \gamma >$ становятся евклидовыми. Плоскости $< O, \alpha, \gamma >, < A, \alpha, \gamma >, < A, \gamma, \pi >$ становятся галилеевыми плоскостями. Всякая точка $M = (x^1, x^2, x)$ имеет временную координату x^1 и пространственные координаты x^2, x. Пространственноподобная составляющая ЕС-пространства евклидова. Каждая точка ЕС-пространства есть событие в пространстве-времени с сибсоном. Если $A = (a^1, a^2, a)$ начальное положение события, $B = (b^1, b^2, b)$ его конечное положение, то сибс AB, см. (8), описывает это событие. Норма события AB, согласно п. 1.4, есть

$\|AB\| = |b^1 - a^1|,\ b^1 \neq a^1,$

$\|AB\| = \sqrt{(b^2 - a^2)^2 + (b - a)^2} \quad$ если $\ b^1 = a^1.$

Величина $\|AB\| = |b^1 - a^1|$, есть длительность события AB. При $b^1 = a^1$ величина $\|AB\|$ есть расстояние между точками A и B.

3 2-мерное время в пространстве с сибсоном

3.1. Сибсон с 2-мерным временем

В п. 1.3 отмечено, что в операциях на сибсоне имеются две ведущие компоненты: у сибса (x^1, x^2, x) ведущими компонентами являются x^1 x^2 – первая и вторая. Построена геометрия ЕС-пространства-времени с сибсоном с 1-мерным временем, [3]. Некоторые факты этой геометрии приведены выше. В качестве временной компоненты взята первая ведущая компонента сибсов. Аналогичная геометрия получается, если за временную компоненту взять вторую ведущую компоненту сибсов. Теперь мы считаем **обе ведущие компоненты сибсов временными**. Галилеевой нормой $\parallel \sigma \parallel_2$ сибса $\sigma = (x^1, x^2, x)$ называется

$\parallel \sigma \parallel_2^2 = x^1 x^2, \quad$ если $\ x^1 \neq 0\ $ или $\ x^2 \neq 0;$

$\parallel \sigma \parallel_2^2 = \mid x \mid, \quad$ если $\ x^1 = x^2 = 0.$

Третью компоненту сибсов считаем пространственной. Сибсон с этой нормой обозначаем $\mathbf{\Sigma}^3_2$. Аналогичная норма на 2-мерном векторном пространстве вводится в [1] при рассмотрении 2-мерного времени. Это финслерова норма на сибсоне.

Структура из [1] принципиально отличается от рассматриваемой нами.

Галилеевы сибсы $(x^1, x^2, 0)$ не составляют подсибсона в $\mathbf{\Sigma}^3_2$, т. е. 2-мерное время на сибсоне не алгебраическая структура. Многообразие галилеевых сибсов $(x^1, x^2, 0)$ обозначим $\mathbf{T}^2$. На основании операций над сибсами (1) и (2) имеем

$$(x^1, x^2, 0) + (y^1, y^2, 0) = (x^1 + y^1, x^2 + y^2, x^2 y^1),$$

$$t(x^1, x^2, 0) = (x^1 t, x^2 t, \frac{t(t-1)}{2} x^1 x^2).$$

В частности, при $t = 2$:

$$2(x^1, x^2, 0) = (2x^1, 2x^2, x^1x^2).$$

Удвоенный галилеев сибс из $\mathbf{T}^2$ есть сибс, третья т. е. пространственная компонента которого равна произведению первых двух временных компонент; это квадрат продолжительности исходного сибса. Операции на сибсах мы записываем аддитивно. Однако, групповая операция на группах Ли есть умножение, см. работы по теории групп Ли. Поэтому 2σ в наших обозначениях является квадратом σ^2 в распространенных обозначениях.

Сибсы $(0, 0, x)$ составляют 1-мерное евклидово пространство $\mathbf{V}^1$. Третья компонента сибсов порождается первыми двумя компонентами, – пространственная компонента порождается временными компонентами. 3-мерный сибсон с 2-мерным временем есть неразделимая алгебраическая структура времени и пространства, из которой выделяется 1-мерная пространственная структура. В исследованиях свойств сибсона $\mathbf{\Sigma}_2^3$ нельзя избавиться ни от временных, ни от пространственной компонент.

Направления в сибсоне $\mathbf{\Sigma}_2^3$, определяемые базисными сибсами α и β, являются изотропными: временные интервалы на этих направлениях равны нулю. Для сибсов $\sigma = (x^1, 0, x), x^1 \neq 0$, и $\tau = (0, x^2, x), x^2 \neq 0$, нормы равны соответственно $\| \sigma \|_2 = x^1 \cdot 0 = 0$ и $\| \sigma \|_2 = 0 \cdot x^2 = 0$.

Многообразие $\mathbf{T}^2$ можно изобразить в виде точек (x^1, x^2) плоскости $\mathbf{R}^2$. Линия, заполненная точками $(x^1, 0)$, где x^1 изменяется, и линия, заполненная точками $(0, x^2)$, где x^2 изменяется; изображают изотропные направления. Их уравнения соответственно: $x^2 = 0$ и $x^1 = 0$. Возьмем симметричные относительно нулевой точки $(0, 0)$ две точки $T_0 = (a^1, a^2)$ и $T_{-1} = (-a^1, -a^2)$. Найдем множество точек $M(x^1, x^2)$ составляющих линию относительной одновременности (как в [1]), уравнение этой линии в многообразии $\mathbf{T}^2$:

$$x^2 = \frac{a^2}{a^1} x^1.$$

Многообразие $\mathbf{T}^2$ разбивается прямыми $x^1 = 0$ и $x^2 = 0$ на 4 квадранта:
в (I) лежат точки (x^1, x^2) с $x^1 > 0,\ x^2 > 0$;
в (II) – точки (x^1, x^2) с $x^1 < 0,\ x^2 > 0$;
в (III) – точки (x^1, x^2) с $x^1 < 0,\ x^2 < 0$;
в (IV) – точки (x^1, x^2) с $x^1 > 0,\ x^2 < 0$.

Для длительностей $\|OT\|$, где $T = (x^1, x^2)$ имеем:
в (I) и (III): $\|OT\|^2 > 0$, Существуют $\|OT\| = \sqrt{x^1x^2}$;
в (II) и (IV): $\|OT\|^2 < 0$. Длительность события OT определяется как $\|OT\| = \sqrt{x^1x^2}$, $x^1x^2 < 0$, поэтому длительность $\|OT\|$ не существует.

3.2. Пространство с сибсоном $\mathbf{\Sigma}_2^3$.

Указанное пространство есть одулярное пространство-время с сибсоном с 2-мерным временем. Это пространство получается из ЛС-пространства в результате введения в сибсон $\mathbf{\Sigma}^3$ финслеровой нормы, см. п. 3.1; называем пространство с сибсоном $\mathbf{\Sigma}_2^3$ *ФС-пространством.* Прямые и плоскости ФС-пространства от нормы на сибсоне не зависят, они имеют те же свойства, и те же уравнения, что и в ЛС-пространстве.

Событие $M = (a^1, a^2, a)$ из ФС-пространства обладает *собственной* мировой линией, состоящей из событий $t(a^1, a^2, a), t \in \mathbf{R}$. Параметрические уравнения собственной мировой линии

$$x^1 = a^1 t, \quad x^2 = a^2 t, \quad x = at + a^1 a^2 \frac{t(t-1)}{2}.$$

Это уравнения прямой с сибсом (a^1, a^2, a), см. п. 3.1, на события не действуют внешние силы, происходит прямолинейное движение. События $M = (a^1, a^2, 0)$ не составляют плоскости в ФС-пространстве, мировые линии таких событий:

$$x^1 = a^1 t, \quad x^2 = a^2 t, \quad x = \frac{t(t-1)}{2} a^1 a^2.$$

Длительность события $\eta = (h^1, h^2, h)$ при $h^1 h^2 > 0$ равна

$$\|\eta\| = \sqrt{h^1 h^2},$$

при $h^1 h^2 < 0$ длительность не существует. Протяженность события $\eta = (0, 0, h)$ равна $\|\eta\| = |h|$. События $M(x^1, x^2, x)$, составляющие в ЕС-пространстве множество относительной одновременности для симметричных событий $T_0 = (a^1, a^2, 0)$ и $T_{-1} = (-a^1, -a^2, a^1 a^2)$, см. п. 4.1, описывается уравнением

$$x^2 = \frac{a^2}{a^1} x^1.$$

Это цилиндрическая поверхность в ФС-пространстве с направляющей $x^2 = \frac{a^2}{a^1} x^1$, лежащей в многообразии $\mathbf{T}^2$, и образующей, параллельной координатной оси $< O, \gamma >$, – пространственной оси. Указанная цилиндрическая поверхность является плоскостью $< O, \sigma, \gamma >$, где $\sigma = (1, -\frac{a^2}{a^1}, 0)$. Параметрические уравнения плоскости:

$$x^1 = v, \quad x^2 = \frac{a^2}{a^1} v, \quad x = u.$$

События $T = (x^1, x^2, 0)$, отстоящие от начала отсчета $O(0,0,0)$ на интервал постоянной длительности d, лежат в многообразии $\mathbf{T}^2$ на линии – изохроне

$$x^1 x^2 = d^2$$

или

$$x^2 = \frac{d^2}{x^1}.$$

Это гипербола с изотропными асимптотами, ветви которой расположены в квадрантах (I) и (III). Для событий $M = (x^1, x^2, x)$, находящихся в длительности d от начала отсчета в ФС-пространстве имеем те же уравнения, но это гиперболические цилиндры. События $M = (x^1, x^2, x)$, отстоящие на интервал времени d от события $A = (a^1, a^2, a)$, заполняют в ФС-пространстве гиперболический цилиндр

$$x^2 = \frac{d^2}{x^1 - a^1}.$$

Для событий $A = (a^1, a^2, a)$, и $B = (b^1, b^2, b)$, определен сибс

$$AB = (b^1 - a^1, b^2 - a^2, b - a - (b^1 - a^1) a^2),$$

см. (8), п. 2.1. Длительность $d = \|AB\|$ события AB вычисляется на основе равенства

$$d^2 = \|AB\|^2 = (b^1 - a^1)(b^2 - a^2), \;\; (b^1 - a^1)(b^2 - a^2) > 0;$$

не существует при

$$(b^1 - a^1)(b^2 - a^2) < 0.$$

Расстояние $r = \|AB\|$ между событиями A и B равно

$$r = \|AB\| = \mid b - a \mid,$$

оно существует при условиях $b^1 = a^1, b^2 = a^2$.

Прямые $< A, \sigma >$ где $\sigma = (x^1, x^2, x), x^1 \neq 0, x^2 \neq 0$, имеют направление σ, обладающее ненулевой длительностью при $x^1x^2 > 0$. Если $x^1 = 0, x^2 \neq 0$ или $x^2 = 0, x^1 \neq 0$, то это изотропные прямые. Если $x^1 = x^2 = 0$, то прямая $< A, \sigma >$ пространственна, сибс $\sigma = (0, 0, x)$, задающий прямую, обладает длиной. Если $x^1x^2 < 0$, то между событиями, принадлежащими прямой $< A, \sigma >$, не существует ни длительности, ни расстояния.

Все плоскости ФС-пространства являются галилеевыми. Это классические 2-мерные галилеевы пространства с коммутативной геометрией.

Продолжением настоящей работы может служить дифференциальная геометрия ФС-пространства, в которой изучается влияние длительности событий на их физические характеристики.

4 Заключение

Выше рассмотрен сибсон $\mathbf{\Sigma}^3$ – некоммутативный одуль Ли, на котором в [3] в аксиоматике Г. Вейля определено 3-мерное галилеево пространство-время с 1-мерным временем. Геометрия пространства с сибсоном без нормы есть некоммутативный аналог 3-мерной аффинной геометрии. (В [3] построены геометрии с разными одулями Ли, другие аналоги аффинной геометрии.) Вводя нормы в сибсон, получаем разные геометрии (аналогично тому, как на основе аффинной геометрии получаются евклидовы геометрии). Свойства нормы сибсов и метрические функции в геометриях с сибсоном обусловлены свойствами сибсона. Ведущие компоненты в операциях над сибсами целесообразно принимать за временные (времениподобные). В [3] в качестве временной была взята одна ведущая компонента сибсов; при этом определялась стандартная галилеева норма, как в галилеевом векторном пространстве. В настоящей работе обе ведущие компоненты сибсов считаются временными. Метрические функции индуцируются операциями над сибсами, квадрат длительности временного интервала события $\sigma = (a^1, a^2, a)$ задается равенством

$$\| \sigma \|^2 = a^1a^2,$$

произведение ведущих компонент сибсов появляется в формулах операций

$$(a^1, a^2, 0) + (a^1, a^2, 0) = (2a^1, 2a^2, a^1a^2).$$

Заметим, что внутренняя операция на некоммутативной структуре обычно называется умножением. В этом случае элемент 2σ должен восприниматься как σ^2, что близко к скалярному квадрату элемента и имеет отношение к вводимой на структуре метрике. Метрическая функция возникла естественно в третьей компоненте в процессе оперирования с событиями. А норма векторов в векторное пространство вносится по желанию исследователя – евклидова, псевдоевклидова и т. д., в зависимости от того, какое пространство хочется исследовать. Однако, так же как с векторным пространством, можно поступить и с сибсоном, см. многообразие *Nil* в [11, с. 121–127]. Вместе с тем, при изучении сибсона $\mathbf{\Sigma}^3_2$ с 2-мерным временем использована галилеева норма более общая, чем в [3].

Заметим еще, что пространство с сибсоном не плоское, оно имеет ненулевую кривизну, [12].

Сибсон моделируется движениями классической галилеевой плоскости.

Литература

1. Павлов Д. Г. Хронометрия трехмерного времени// Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, N 1, 2004, с. 20–32.
2. Павлов Д. Г. Четырехмерное время// Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, N 1, 2004, с. 33–42.
3. Долгарев А. И. Классические методы в дифференциальной геометрии одулярных пространств. Монография. - Пенза: ИИЦ ПГУ, 2005. - 306 с.
4. Левичев А. В. Однородная хроногеметрия. - Новосибирск: НГУ, 1991 - 57 с.
5. Долгарев А. И. Методы одулярной галиеевой геометрии в описании механических движений.// Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки, Пенза: ИИЦ ПГУ, 2007, N 3, с. 12–24.
6. Сабинин Л. В. Одули как новый подход к геометрии со связностью// ДАН СССР, 1977, N 5, с. 800–803.
7. Холл М. Теория групп. - М.: ИЛ, 1962, - 468 с.
8. Розенфельд Б. А., Замаховский М. П. Геометрия групп Ли. Симметрические, параболические и периодические пространства. - М.: МЦНМО, 2003. - 560 с.
9. Вейль Г. Пространство. Время. Материя. Лекции по общей теории относительности. М.: Едиториал УРСС, 2004. - 456 с.
10. Яглом И. М. Принцип относительности Галилея и неевклидова геометрия. - М.: Наука, 1969. - 309 с.
11. Скотт П. Геометрии на трехмерных многообразиях. - М.: Мир, 1986, 168 с.
12. Долгарев А. И. 2-параметрические кривизна и кручение 3-мерных галилеевых одулярных пространств.// Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки, Пенза: ИИЦ ПГУ, 2007, N 4, С. 3–17.