ПОЛИАДИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ НА ДЕКАРТОВЫХ СТЕПЕНЯХ

А. М. Гальмак

Могилевский государственный университет продовольствия

mti@mogilev.by

Для любых $n \geq 3$, $s \geq 1$, $m \geq 2$ на декартовых степенях A^{n-1} и $A^{m(n-1)}$ полугруппы A определяются соответственно $(s(n-1)+1)$-арная операция $[\ ]_{s(n-1)+1,n-1}$ и n-арная операция $[\ ]_{n,m,m(n-1)}$. Изучаются свойства таких операций.

УДК 512.548

1. Введение

Простейшим примером операции на декартовой степени может служить операция, определенная покомпонентно на k-ой декартовой степени A^k группоида A. К числу таких операций относятся, например, сложение комплексных чисел и покомпонентное сложение векторов, заданных своими координатами, и не относятся произведение комплексных чисел, произведение кватернионов и произведение октонионов, которые определены соответственно на 2-ой, 4-ой и 8-ой декартовой степени множества действительных чисел. Все перечисленные выше операции являются бинарными. Полиадические операции арности больше 2, определенные на декартовых степенях множеств, появляются, прежде всего, при изучении прямых произведений универсальных алгебр, в сигнатуру которых входят многоместные операции арности больше 2. При этом n-арные операции, определенные на прямых сомножителях, индуцируют в прямом произведении соответствующие n-арные операции. Другие n-арные операции на декартовых степенях при $n > 2$, как правило, не рассматриваются, и по этой причине о них мало что известно. Частичному устранению указанного пробела будет способствовать данная работа, в которой для любых целых $n \geq 3$, $s \geq 1$, $m \geq 2$ определяются и изучаются $(s(n-1)+1)$-арная операция $[\ ]_{s(n-1)+1,n-1}$ и n-арная операция $[\ ]_{n,m,m(n-1)}$, определенные соответсвенно на декартовых степенях A^{n-1} и $A^{m(n-1)}$ полугруппы A.

Определение понятий, используемых в данной работе, можно найти в [1–6]. Здесь же напомним только, что n-арная операция $[\ ]$, определенная на множестве A, называется ассоциативной, если в A выполняются тождества

$$[[x_1x_2\dots x_n]x_{n+1}\dots x_{2n-1}] = [x_1[x_2\dots x_nx_{n+1}]\dots x_{2n-1}] = \dots = [x_1x_2\dots x_{n-1}[x_n\dots x_{2n-1}]].$$

2. Тернарная алгебра $< \mathbb{R}^2, +, [\ ] >$

Пусть $\mathbb{R}^2 = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$ – арифметическое линейное пространство размерности два над полем действительных чисел с обычными операциями сложения элементов в $\mathbb{R}^2$ и умножения их на действительные числа. Определим на $\mathbb{R}^2$ тернарную операцию

$$[\mathbf{xyz}] = [(x_1, x_2)(y_1, y_2)(z_1, z_2)] = (x_1y_2z_1, x_2y_1z_2), \tag{2.1}$$

где в правой части присутствует операция умножения действительных чисел.

Соответствующие вычисления показывают, что в $\mathbb{R}^2$ выполняются тождества

$$[(\mathbf{x}+\mathbf{y})\mathbf{zu}] = [\mathbf{xzu}] + [\mathbf{yzu}],\ [\mathbf{x}(\mathbf{y}+\mathbf{z})\mathbf{u}] = [\mathbf{xyu}] + [\mathbf{xzu}],\ [\mathbf{xy}(\mathbf{z}+\mathbf{u})] = [\mathbf{xyz}] + [\mathbf{xyu}], \tag{2.2}$$

которые называются тождествами дистрибутивности.

Если в универсальной алгебре $< A, +, [\ \ ] >$ с бинарной операцией $+$ и тернарной операцией $[\ \ ]$ выполняются последние три тождества, и при этом $< A, + >$ – абелева группа, то $< A, +, [\ \ ] >$ называют *(2, 3)-кольцом.*

Таким образом, $< \mathbb{R}^2, +, [\ \ ] >$ – (2, 3)-кольцо.

Легко проверяется, что в $\mathbb{R}^2$ выполняются тождества

$$[[\mathbf{xyz}]\mathbf{uv}] = [\mathbf{x}[\mathbf{yzu}]\mathbf{v}] = [\mathbf{xy}[\mathbf{zuv}]]. \tag{2.3}$$

Приведенные выше тождества называются тождествами ассоциативности, а (2, 3)-кольцо $< A, +, [\ \ ] >$ с ассоциативной тернарной операцией $[\ \ ]$ называют *ассоциативным.*

Таким образом, $< \mathbb{R}^2, +, [\ \ ] >$ – ассоциативное (2, 3)-кольцо.

Так как для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ верно

$$\lambda[\mathbf{xyz}] = [\lambda x_1y_2z_1, \lambda x_2y_1z_2],\ [(\lambda\mathbf{x})\mathbf{yz}] = (\lambda x_1y_2z_1, \lambda x_2y_1z_2),$$

$$[\mathbf{x}(\lambda\mathbf{y})\mathbf{z}] = (x_1(\lambda y_2)z_1,\ x_2(y_1)z_2) = (\lambda x_1y_2z_1, \lambda x_2y_1z_2),$$

$$[\mathbf{xy}(\lambda\mathbf{z})] = (x_1y_2(\lambda z_1),\ x_2y_1(\lambda z_2)) = (\lambda x_1y_2z_1, \lambda x_2y_1z_2),$$

то

$$\lambda[\mathbf{xyz}] = [(\lambda\mathbf{x})\mathbf{yz}] = [\mathbf{x}(\lambda\mathbf{y})\mathbf{z}] = [\mathbf{xy}(\lambda\mathbf{z})]. \tag{2.4}$$

Если линейное пространство A над полем P является (2, 3)-кольцом, и при этом для всех λ из поля P выполняются равенства (2.4), то A называют *линейной (2, 3)-алгеброй над P* или просто *тернарной алгеброй над P.*

Таким образом, $< \mathbb{R}^2, +, [\ \ ] >$ – ассоциативная тернарная алгебра над $\mathbb{R}$.

(2, 3)-Кольцо $< A, +, [\ \ ] >$ называют *абелевым*, если в нем выполняются тождества

$$[\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2\mathbf{x}_3] = [\mathbf{x}_1\mathbf{x}_3\mathbf{x}_2] = [\mathbf{x}_2\mathbf{x}_1\mathbf{x}_3] = [\mathbf{x}_2\mathbf{x}_3\mathbf{x}_1] = [\mathbf{x}_3\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2] = [\mathbf{x}_3\mathbf{x}_2\mathbf{x}_1].$$

Если же в $< A, +, [\ \ ] >$ выполняется тождество $[\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2\mathbf{x}_3] = [\mathbf{x}_3\mathbf{x}_2\mathbf{x}_1]$, то $< A, +, [\ \ ] >$ называют *полуабелевым* (2, 3)-кольцом.

Так как для $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_3 = (1,\ 1)$, $\mathbf{x}_2 = (1,\ 0)$ имеем

$$[\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2\mathbf{x}_3] = (0,\ 1),\ [\mathbf{x}_2\mathbf{x}_1\mathbf{x}_3] = (1,\ 0),$$

то $[\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2\mathbf{x}_3] \neq [\mathbf{x}_2\mathbf{x}_1\mathbf{x}_3]$. Таким образом, тернарная алгебра $< \mathbb{R}^2, +, [\ \ ] >$ не является абелевой.

Так как

$$[\mathbf{xyz}] = (x_1y_2z_1, x_2y_1z_2),\ [\mathbf{zyx}] = (z_1y_2x_1, z_2y_1x_2) = (x_1y_2z_1, x_2y_1z_2),$$

то в $< \mathbb{R}^2, +, [\ \ ] >$ выполняется тождество

$$[\mathbf{xyz}] = [\mathbf{zyx}]. \tag{2.5}$$

Таким образом, $< \mathbb{R}^2, +, [\ \ ] >$ – полуабелева тернарная алгебра.

Так как

$$[(\mathbf{x} - \mathbf{y})\mathbf{zu}] = [(\mathbf{x} + (-\mathbf{y}))\mathbf{zu}] = [\mathbf{xzu}] + [(-\mathbf{y})\mathbf{zu}] = [\mathbf{xzu}] - [\mathbf{yzu}],$$

$$[\mathbf{x}(\mathbf{y} - \mathbf{z})\mathbf{u}] = [\mathbf{x}(\mathbf{y} + (-\mathbf{z}))\mathbf{u}] = [\mathbf{xyu}] + [\mathbf{x}(-\mathbf{z})\mathbf{u}] = [\mathbf{xyu}] - [\mathbf{xzu}],$$

$$[\mathbf{xy}(\mathbf{z} - \mathbf{u})] = [\mathbf{xy}(\mathbf{z} + (-\mathbf{u}))] = [\mathbf{xyz}] + [\mathbf{xy}(-\mathbf{u})] = [\mathbf{xyz}] - [\mathbf{xyu}],$$

то в $< \mathbb{R}^2, +, [\ \ ] >$ выполняются тождества

$$[(\mathbf{x}-\mathbf{y})\mathbf{zu}] = [\mathbf{xzu}]-[\mathbf{yzu}],\ [\mathbf{x}(\mathbf{y}-\mathbf{z})\mathbf{u}] = [\mathbf{xyu}]-[\mathbf{xzu}],\ [\mathbf{xy}(\mathbf{z}-\mathbf{u})] = [\mathbf{xyz}]-[\mathbf{xyu}]. \quad (2.6)$$

Из определения операции $[\ \ ]$ следует

$$[(0,\ 0)\mathbf{yz}] = (0,\ 0),\ [\mathbf{x}(0,\ 0)\mathbf{z}] = [0,\ 0],\ [\mathbf{xy}(0,\ 0)] = [0,\ 0]$$

для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^2$. Это означает, что элемент $\mathbf{0} = (0,\ 0)$ является не только аддитивным, но и мультипликативным нулем в $< \mathbb{R}^2, +, [\ ] >$.

Если $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, то

$$[\mathbf{x}(a,\ 0)(a,\ 0)] = (0,\ 0),\ [(0,\ a)\mathbf{x}(a,\ 0)] = (0,\ 0),\ [(0,\ a)(0,\ a)\mathbf{x}] = (0,\ 0),$$

то есть для любого $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ существуют $\mathbf{u} = (a,\ 0), \mathbf{v} = (0,\ a) \in \mathbb{R}^2$, отличные от нуля (0, 0) (2, 3)-алгебры $< \mathbb{R}^2, +, [\ \ ] >$, такие, что

$$[\mathbf{xuu}] = 0,\ [\mathbf{vxu}] = 0,\ [\mathbf{vvx}] = 0.$$

Поэтому все элементы тернарной алгебры $< \mathbb{R}^2, +, [\ \ ] >$ являются делителями её нуля (0, 0).

Для любого $a \in \mathbb{R}$ справедливы также следующие равенства

$$[(0,\ a)(0,\ a)(0,\ a)] = (0,\ 0),\ [(a,\ 0)(a,\ 0)(a,\ 0)] = (0, 0).$$

Элемент e тернарного группоида $< A, [\ ] >$ называют его *единицей*, если для любого $x \in A$ верно

$$[xee] = [exe] = [eex] = x.$$

Предположим, что $\mathbf{e} = (e_1, e_2)$ – единица в $\mathbb{R}^2$, $a \in \mathbb{R}$. Так как

$$[\mathbf{ee}(a, e_2)] = (a, e_2), [\mathbf{ee}(a, e_2)] = (e_1e_2a, e_2e_1e_2),$$

то из равенства левых частей последних двух равенств следует $e_1e_2a = a$ для любого $a \in \mathbb{R}$, в частности, $e_1e_2e_1 = e_1$.

Кроме того,

$$[\mathbf{e}(a, e_2)\mathbf{e}] = (a, e_2),\ [\mathbf{e}(a, e_2)\mathbf{e}] = (e_1e_2e_1, e_2ae_2).$$

Из равенства левых частей последних двух равенств следует $a = e_1e_2e_1$, откуда, учитывая полученное выше равенство $e_1e_2e_1 = e_1$, получаем $a = e_1$, что невозможно, если выбрать $a \neq e_1$.

Таким образом, в $< \mathbb{R}^2, +, [\ \ ] >$ нет единиц. В частности, пара (1, 1) не является единицей. Например, если $a \neq b$, то

$$[(1,\ 1)(a,\ b)(1,\ 1)] = (b,\ a) \neq (a,\ b).$$

Элемент e тернарного группоида $< A, [\ \ ] >$ называют его *мультипликативным идемпотентом*, если $[eee] = e$.

Предположим, что $\mathbf{e} = (e_1, e_2)$ является мультипликативным идемпотентом в $< \mathbb{R}^2, +, [\ \ ] >$, $e_1 \neq 0$, $e_2 \neq 0$. Так как

$$[\mathbf{eee}] = \mathbf{e} = (e_1, e_2),\ [\mathbf{eee}] = [e_1e_2e_1, e_2e_1e_2],$$

то $e_1 = e_1e_2e_1$, откуда $e_1e_2 = 1$, $e_2 = e_1^{-1}$.

Обратно, если $e_2 = e_1^{-1}$, то

$$[(e_1, e_1^{-1})(e_1, e_1^{-1})(e_1, e_1^{-1})] = (e_1 e_1^{-1} e_1, e_1^{-1} e_1 e_1^{-1}) = (e_1, e_1^{-1}),$$

то есть (e_1, e_1^{-1}) – мультипликативный идемпотент в $< \mathbb{R}^2, +, [\ \ ] >$.

Ясно, что элемент (0, 0) также является мультипликативным идемпотентом в $< \mathbb{R}^2, +, [\ \ ] >$. Таким образом, множество всех мультипликативных идемпотентов в $< \mathbb{R}^2, +, [\ \ ] >$ имеет вид:

$$I(\mathbb{R}^2) = \{(a, a^{-1}) | a \in \mathbb{R}, a \neq 0\} \bigcup \{(0, 0)\}.$$

Если

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2),\ \mathbf{b} = (b_1, b_2),\ \mathbf{c} = (c_1, c_2),\ \mathbf{d} = (d_1, d_2) \in (\mathbb{R}\backslash\{0\})^2,$$

то

$$[(b_2^{-1} c_1^{-1} d_1, b_1^{-1} c_2^{-1} d_2)(b_1, b_2)(c_1, c_2)] = (d_1, d_2),$$
$$[(a_1, a_2)(a_2^{-1} c_2^{-1} d_2, a_1^{-1} c_1^{-1} d_1)(c_1, c_2)] = (d_1, d_2),$$
$$[(a_1, a_2)(b_1, b_2)(a_1^{-1} b_2^{-1} d_1, a_2^{-1} b_1^{-1} d_2)] = (d_1, d_2),$$

то есть в $(\mathbb{R}\backslash\{0\})^2$ разрешимы уравненния

$$[\mathbf{xbc}] = \mathbf{d},\ [\mathbf{ayc}] = \mathbf{d},\ [\mathbf{abz}] = \mathbf{d},$$

при этом указанные решения

$$\mathbf{x} = (b_2^{-1} c_1^{-1} d_1, b_1^{-1} c_2^{-1} d_2),\ \mathbf{y} = (a_2^{-1} c_2^{-1} d_2, a_1^{-1} c_1^{-1} d_1),\ \mathbf{z} = (a_1^{-1} b_2^{-1} d_1, a_2^{-1} b_1^{-1} d_2)$$

единственные.

Как обычно, символом $\overline{\mathbf{x}}$ обозначим элемент $(x_1, -x_2)$, сопряженный к элементу $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$. Так как

$$\overline{[\mathbf{xyz}]} = (x_1 y_2 z_1, -x_2 y_1 z_2),$$
$$[\overline{\mathbf{x}}\,\overline{\mathbf{y}}\,\overline{\mathbf{z}}] = [(x_1, -x_2)(y_1, -y_2)(z_1, -z_2)] = (x_1(-y_2) z_1, -x_2 y_1 (-z_2)) =$$
$$= (-x_1 y_2 z_1, x_2 y_1 z_2) = -(x_1 y_2 z_1, -x_2 y_1 z_2),$$

то $\overline{[\mathbf{xyz}]} = -[\overline{\mathbf{x}}\,\overline{\mathbf{y}}\,\overline{\mathbf{z}}]$ для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^2$.

Теперь все вышесказанное можно сформулировать в виде теоремы.

2.1. Теорема. Определим на линейном пространстве $\mathbb{R}^2$ размерности два над полем действительных чисел с обычными операциями сложения элементов в $\mathbb{R}^2$ и умножения их на действительные числа еще одну – тернарную операцию (2.1). Тогда:

1) $< \mathbb{R}^2, +, [\ \ ] >$ является ассоциативной, неабелевой, полуабелевой тернарной алгеброй над $\mathbb{R}$, то есть в $< \mathbb{R}^2, +, [\ \ ] >$ выполняются тождества (2.2) – (2.5), но не выполняются тождества абелевости;

2) в $< \mathbb{R}^2, +, [\ \ ] >$ выполняются тождества (2.6);

3) для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^2$ верно

$$[(0,\ 0)\mathbf{yz}] = [\mathbf{x}(0,\ 0)\mathbf{z}] = [\mathbf{xy}(0,\ 0)] = (0,\ 0),$$

то есть $(0,\ 0)$ – мультипликативный нуль в $< \mathbb{R}^2, +, [\ \ ] >$;

4) в $< \mathbb{R}^2, +, [\ \ ] >$ все элементы являются делителями нуля;

5) для любого $a \in \mathbb{R}$ верно

$$[(0,\ a)(0,\ a)(0,\ a)] = (0,\ 0),\ [(a,\ 0)(a,\ 0)(a,\ 0)] = (0,\ 0);$$

6) в $< \mathbb{R}^2, +, [\ \ ] >$ нет единиц;

7) множество всех мультипликативных идемпотентов в $< \mathbb{R}^2, +, [\ \ ] >$ имеет вид

$$I(\mathbb{R}^2) = \{(a, a^{-1}) | a \in \mathbb{R}, a \neq 0\} \bigcup \{(0,0)\};$$

8) для любых $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d} \in (\mathbb{R} \backslash \{0\})^2$ каждое из уравнений

$$[\mathbf{xbc}] = \mathbf{d},\ [\mathbf{ayc}] = \mathbf{d},\ [\mathbf{abz}] = \mathbf{d},$$

имеет в $(\mathbb{R} \backslash \{0\})^2$ единственное решение;

9) для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^2$ верно $\overline{[\mathbf{xyz}]} = -[\overline{\mathbf{x}}\ \overline{\mathbf{y}}\ \overline{\mathbf{z}}]$.

В связи с теоремой 2.1 возникает естественный вопрос: можно ли ее утверждения обобщить на арифметическое линейное пространство $\mathbb{R}^k$ любой размерности k, заменив при этом тернарную операцию (2.1) аналогичной многоместной операцией арности больше 2? Можно сформулировать вопрос еще шире: можно ли утверждения теоремы 2.1 обобщить на арифметическое линейное пространство любой размерности над произвольным полем, заменив при этом тернарную операцию (2.1) аналогичной многоместной операцией арности больше 2?

3. Определение и свойства операции $[\ \ ]_{\mathbf{s(n-1)+1,n-1}}$

Определение операции $[\ \ ]_{\mathbf{s(n-1)+1,n-1}}$

3.1. Определение. Пусть A – полугруппа, $n \geq 3$, $s \geq 1$,

$$\mathbf{x_i} = (x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{i(n-1)}) \in A^{n-1},\ i = 1, \ldots, s(n-1)+1.$$

Положим

$$[\mathbf{x_1 x_2} \ldots \mathbf{x_{s(n-1)+1}}]_{s(n-1)+1,\, n-1} = (y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}),$$

где

$$y_j = x_{1j} x_{2(j+1)} \ldots x_{(n-j)(n-1)} x_{(n-j+1)1} \ldots x_{(n-1)(j-1)}$$

$$x_{nj} x_{(n+1)(j+1)} \ldots x_{(2(n-1)-j+1)(n-1)} x_{(2(n-1)-j+2)1} \ldots x_{(2(n-1))(j-1)}$$

$$x_{(2(n-1)+1)j} x_{(2(n-1)+2)(j+1)} \ldots x_{(3(n-1)-j+1)(n-1)} x_{(3(n-1)-j+2)1} \ldots x_{(3(n-1))(j-1)}$$

....

$$x_{((s-1)(n-1)+1)j} x_{((s-1)(n-1)+2)(j+1)} \ldots x_{(s(n-1)-j+1)(n-1)}$$

$$x_{(s(n-1)-j+2)1} \ldots x_{(s(n-1))(j-1)} x_{(s(n-1)+1)j}. \tag{3.1}$$

3.2. Замечание. Если изменить обозначения, то (3.1) можно переписать иначе. Пусть

$$[\mathbf{x_1'} \ldots \mathbf{x_{n-1}'} \mathbf{x_1''} \ldots \mathbf{x_{n-1}''} \ldots \mathbf{x_1^{(s)}} \ldots \mathbf{x_{n-1}^{(s)}} \mathbf{x}]_{s(n-1)+1,n-1} = (y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}),$$

где

$$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_{n-1}),\ \mathbf{x_i^{(k)}} = (x_{i1}^{(k)}, \ldots, x_{i(n-1)}^{(k)}),\ i = 1, \ldots, n-1,\ k = 1, \ldots, s.$$

Тогда

$$y_j = x_{1j}' x_{2(j+1)}' \ldots x_{(n-j)(n-1)}' x_{(n-j+1)1}' \ldots x_{(n-1)(j-1)}'$$

$$x_{1j}'' x_{2(j+1)}'' \ldots x_{(n-j)(n-1)}'' x_{(n-j+1)1}'' \ldots x_{(n-1)(j-1)}''$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_{1j}^{(s)}x_{2(j+1)}^{(s)}\ldots x_{(n-j)(n-1)}^{(s)}x_{(n-j+1)1}^{(s)}\ldots x_{(n-1)(j-1)}^{(s)}x_j.$$

Полагая в (3.1) $s=1$, получим определение n-арной операции $[\ ]_{n,n-1}$:

$$[\mathbf{x_1x_2}\ldots\mathbf{x_n}]_{n,n-1}=(y_1,y_2,\ldots y_{n-1}),$$

где

$$y_j=x_{1j}x_{2(j+1)}\ldots x_{(n-j)(n-1)}x_{(n-j+1)1}\ldots x_{(n-1)(j-1)}x_{nj},\quad j=1,\ldots,n-1. \tag{3.2}$$

Можно заметить, что рассмотренная выше тернарная операция (2.1) является операцией вида $[\ ]_{3,2}$.

Ассоциативность операции $[\ ]_{\mathbf{s(n-1)+1,n-1}}$

Тот, кто знаком с n-арными подстановками, заметит, что n-арная операция (3.2) аналогична n-арной операции, которую Пост определил на множестве всех n-арных подстановок [2], относительно которой, как он установил, множество всех n-арных подстановок является n-арной группой; в частности, эта n-арная операция ассоциативна. Можно предположить, что ассоциативной будет и n-арная операция (3.2).

Следующее предложение утверждает даже больше.

3.3. Предложение. Операция $[\ ]_{s(n-1)+1,n-1}$, определенная на декартовой степени A^{n-1} полугруппы A, является ассоциативной, то есть $< A^{n-1},[\ ]_{s(n-1)+1,n-1} >$ – n-арная полугруппа.

Полагая в предыдущем предложении $s=1$, получим

3.4. Следствие. Операция $[\ ]_{n,n-1}$, определенная на декартовой степени A^{n-1} полугруппы A, является ассоциативной, то есть $< A^{n-1},[\ ]_{n,n-1} >$ – n-арная полугруппа.

3.5. Замечание. Легко заметить, что операция $[\ ]_{s(n-1)+1,n-1}$ является производной от операции $[\ ]_{n,n-1}$. Поэтому многие утверждения об операции $[\ ]_{s(n-1)+1,n-1}$ достаточно доказывать для операции $[\ ]_{n,n-1}$.

Как показывает следующий пример, многоместные операции на декартовых степенях, аналогичные операциям вида (2.1), могут не быть ассоциативными.

3.6. Пример. Определим на $\mathbb{R}^2$ 4-арную операцию $[\ ]$ по типу операции (2.1):

$$[(x_1,x_2)(y_1,y_2)(z_1,z_2)(u_1,u_2)]=(x_1y_2z_1u_2,x_2y_1z_2u_1).$$

Так как

$$[[(x_1,x_2)(y_1,y_2)(z_1,z_2)(u_1,u_2)](v_1,v_2)(w_1,w_2)(s_1,s_2)]=$$
$$=(x_1y_2z_1u_2v_2w_1s_2,x_2y_1z_2u_1v_1w_2s_1),$$
$$[(x_1,x_2)[(y_1,y_2)(z_1,z_2)(u_1,u_2)(v_1,v_2)](w_1,w_2)(s_1,s_2)]=$$
$$=(x_1y_2z_1u_2v_1w_1s_2,x_2y_1z_2u_1v_2w_2s_1),$$

то 4-арная операция $[\ ]$ не является ассоциативной.

Определим на $\mathbb{R}^3$ тернарную операцию $[\ ]$ по типу операции (2.1):

$$[(x_1,x_2,x_3)(y_1,y_2,y_3)(z_1,z_2,z_3)]=(x_1y_2z_3,x_2y_3z_1,x_3y_1z_2).$$

Так как

$$[[(x_1,x_2,x_3)(y_1,y_2,y_3)(z_1,z_2,z_3)](u_1,u_2,u_3)(v_1,v_2,v_3)]=$$

$$= (x_1y_2z_3u_2v_3, x_2y_3z_1u_3v_1, x_3y_1z_2u_1v_2),$$

$$[(x_1, x_2, x_3)[(y_1, y_2, y_3)(z_1, z_2, z_3)(u_1, u_2, u_3)](v_1, v_2, v_3)] =$$

$$= (x_1y_2z_3u_1v_3, x_2y_3z_1u_2v_1, x_3y_1z_2u_3v_2),$$

то тернарная операция $[\ \ ]$ не является ассоциативной.

Проведя соответствующие вычисления, можно убедиться в неассоциативности тернарной

$$[(x_1, x_2, x_3, x_4)(y_1, y_2, y_3, y_4)(z_1, z_2, z_3, z_4)] = (x_1y_2z_3, x_2y_3z_4, x_3y_4z_1, x_4y_1z_2)$$

и 4-арной

$$[(x_1, x_2, x_3, x_4)(y_1, y_2, y_3, y_4)(z_1, z_2, z_3, z_4)(u_1, u_2, u_3, u_4)] =$$

$$= (x_1y_2z_3u_4, x_2y_3z_4u_1, x_3y_4z_1u_2, x_4y_1z_2u_3)$$

операций, определенных на $\mathbb{R}^4$.

Дистрибутивность операции $[\ \ ]_{\mathbf{s(n-1)+1,n-1}}$

Напомним, что если в универсальной алгебре $< A, +, [\ \ ] >$ с бинарной операцией $+$ и n-арной операцией $[\ \ ]$ для любого $i = 1, \ldots, n$ выполняется тождество

$$[a_1 \ldots a_{i-1}(b_1 + b_2)a_{i+1} \ldots a_n] = [a_1 \ldots a_{i-1}b_1a_{i+1} \ldots a_n] + [a_1 \ldots a_{i-1}b_2a_{i+1} \ldots a_n], \quad (3.3)$$

то n-арную операцию $[\ \ ]$ называют *дистрибутивной* относительно операции $+$. Само тождество (3.3) называют тождеством дистрибутивности. Если к тому же $< A, + >$ – абелева группа, то $< A, +, [\ \ ] >$ называют (2, n)-*кольцом.* Если операция $[\ \ ]$ – ассоциативна, то (2, n)-кольцо $< A, +, [\ \ ] >$ называют *ассоциативным* [7, 8].

Проведя соответствующие вычисления, можно убедиться в дистрибутивности всех многоместных операций из примера 3.6 относительно операции $+$, определенной на соответствующих декартовых степенях покомпонентно.

3.7. Предложение. Пусть на множестве A определены бинарная операция $+$ и дистрибутивная относительно нее ассоциативная бинарная операция $\times$. Тогда операция $[\ \ ]_{s(n-1)+1,n-1}$, определенная на A^{n-1} с помощью операции $\times$, является ассоциативной, дистрибутивной относительно операции $+$, определенной на A^{n-1} покомпонентно.

Далее в работе операция $+$ определяется на декартовых степенях всегда покомпонентно.

3.8. Следствие. Если $< A, +, \times >$ – ассоциативное кольцо, то универсальная алгебра $< A^{n-1}, +, [\ \ ]_{s(n-1)+1,n-1} >$ является ассоциативным $(2, s(n-1)+1)$-кольцом. В частности, $< A^{n-1}, +, [\ \ ]_{n,n-1} >$ – ассоциативное (2, n)-кольцо.

Пусть в линейном пространстве A над полем P определена n-арная операция $[\ \ ]$, удовлетворяющая следующим условиям:

1) для любого $\lambda \in P$ верно

$$\lambda[a_1 \ldots a_n] = [(\lambda a_1)a_2 \ldots a_n] = [a_1(\lambda a_2)a_3 \ldots a_n] = \ldots = [a_1 \ldots a_{n-1}(\lambda a_n)];$$

2) n-арная операция $[\ \ ]$ дистрибутивна относительно операции $+$ сложения элементов в A, то есть в A для любого $i = 1, \ldots, n$ выполняется тождество (3.3).

Приведенную выше конструкцию называют (2, n)-*алгеброй над полем* P, так как при $n = 2$ она превращается в обычную бинарную алгебру над P.

Понятно, что (2, n)-алгебру можно определить как (2, n)-кольцо $< A, +, [\ \ ] >$, в котором определена операция умножения скаляров поля P на элементы из A, удовлетворяющая предыдущему условию 1), а также следующим условиям:

3) $\lambda(\tau a) = (\lambda\tau)a$ для всех $\lambda, \tau \in P$, $a \in A$;

4) $(\lambda + \tau)a = \lambda a + \tau a$ для всех $\lambda, \tau \in P$, $a \in A$;

5) $\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$ для всех $\lambda \in P$, $a, b \in A$;

6) $1a = a$ для всех $a \in A$;

Если n-арная операция $[\,]$ ассоциативна (абелева, полуабелева), то $(2, n)$-алгебру $< A, +, [\,] >$ называют *ассоциативной (абелевой, полуабелевой)*.

Полную прямую сумму $\underbrace{A \oplus \ldots \oplus A}_{k}$ линейного пространства A над полем P будем обозначать тем же символом A^k, что и k-ую декартову степень множества A. При этом операции сложения векторов в линейном пространстве A^k и умножения скаляров из P на векторы из A^k определены покомпонентно.

3.9. Предложение. Если $< A, +, \times >$ – ассоциативная алгебра над полем P, то универсальная алгебра $< A^{n-1}, +, [\ \ ]_{s(n-1)+1,n-1} >$ является ассоциативной $(2, s(n-1)+1)$-алгеброй над P. В частности, $< A^{n-1}, +, [\ \ ]_{n,n-1} >$ – ассоциативная (2, n)-алгебра над P.

Доказательство. Сразу же заметим, что A^{n-1} – линейное пространство.

Согласно теореме 3.3, $[\ \ ]_{s(n-1)+1,n-1}$ – ассоциативная операция, а по предложению 3.7. операция $[\ \ ]_{s(n-1)+1,n-1}$ дистрибутивна относительно операции $+$.

Положим

$$\mathbf{x_i} = (x_{i1}, \ldots, x_{i(n-1)}) \in A^{n-1}, i = 1, \ldots, n,$$

$$[\mathbf{x_1} \ldots \mathbf{x_n}]_{n,n-1} = (y_1, \ldots, y_{n-1}),\ \ [(\lambda\mathbf{x_1})\mathbf{x_2} \ldots \mathbf{x_n}]_{n,n-1} = (z_1, \ldots, z_{n-1}),\ \lambda \in P.$$

Так как $\lambda\mathbf{x_1} = (\lambda x_{11}, \ldots, \lambda x_{1(n-1)})$, то

$$z_j = (\lambda x_{1j})x_{2(j+1)} \ldots x_{(n-j)(n-1)}x_{(n-j+1)1} \ldots x_{(n-1)(j-1)}x_{nj} = \lambda y_j,\ \ j = 1, \ldots, n-1.$$

Поэтому

$$[(\lambda\mathbf{x_1})\mathbf{x_2} \ldots \mathbf{x_n}]_{n,n-1} = (\lambda y_1, \ldots, \lambda y_{n-1}) = \lambda(y_1, \ldots, y_{n-1}) = \lambda[\mathbf{x_1} \ldots \mathbf{x_n}]_{n,n-1}.$$

Аналогично доказываются равенства

$$[\mathbf{x_1} \ldots \mathbf{x_{i-1}}(\lambda\mathbf{x_i})\mathbf{x_{i+1}} \ldots \mathbf{x_n}]_{n,n-1} = \lambda[\mathbf{x_1} \ldots \mathbf{x_n}]_{n,n-1},\ \ i = 2, \ldots, n.$$

Таким образом, для операции $[\ \ ]_{n,n-1}$ выполняются все равенства из условия 1) определения (2, n)-алгебры над P. Следовательно, $< A^{n-1}, [\ \ ]_{n,n-1} >$ – (2, n)-алгебра.

Доказательство выполнимости условия 1) для случая $s > 1$ принципиально ничем не отличается от приведенного выше доказательства для случая $s = 1$. Предложение доказано.

Перестановочность элементов в $< \mathbf{A^{n-1}}, [\ \ ]_{\mathbf{s(n-1)+1,n-1}} >$

3.10. Предложение. Если A – полугруппа с единицей 1, содержащая более одного элемента, то $(s(n-1)+1)$-арная полугруппа $< A^{n-1}, [\ \ ]_{s(n-1)+1,n-1} >$ не является абелевой.

Доказательство. Положим

$$\mathbf{e} = (\underbrace{1, \ldots, 1}_{n-1}),\ \ \mathbf{a} = (a, \underbrace{1, \ldots, 1}_{n-2}),\ \ a \neq 1.$$

Тогда

$$[\mathbf{a}\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{s(n-1)}]_{s(n-1)+1,n-1} = \mathbf{a} = (a, \underbrace{1,\ldots,1}_{n-2}), \quad [\mathbf{ea}\ \underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{s(n-1)-1}]_{s(n-1)+1,n-1} = (\underbrace{1,\ldots,1}_{n-2}, a).$$

Следовательно,

$$[\mathbf{a}\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{s(n-1)}]_{s(n-1)+1,n-1} \neq [\mathbf{ea}\ \underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{s(n-1)-1}]_{s(n-1)+1,n-1},$$

то есть $< A^{n-1}, [\ \ ]_{s(n-1)+1,n-1} >$ не является абелевой. Предложение доказано.

3.11. Предложение. Если полугруппа A – абелева, то $(s(n-1)+1)$-арная полугруппа $< A^{n-1}, [\ \ ]_{s(n-1)+1,n-1} >$ полуабелева. В частности, полуабелева n-арная полугруппа $< A^{n-1}, [\ \ ]_{n,n-1} >$.

Доказательство. Ввиду замечания 3.5, достаточно привести доказательство для случая $s = 1$.

Так как полугруппа A – абелева, то

$$[(a_{11},\ldots,a_{1(n-1)})(a_{21},\ldots,a_{2(n-1)})\ldots(a_{(n-1)1},\ldots,a_{(n-1)(n-1)})(a_{n1},\ldots,a_{n(n-1)})]_{n,n-1} =$$

$$= (a_{11}a_{22}\ldots a_{(n-1)(n-1)}a_{n1}, a_{12}a_{23}\ldots a_{(n-2)(n-1)}a_{(n-1)1}a_{n2},\ldots$$
$$\ldots, a_{1(n-2)}a_{2(n-1)}a_{31}\ldots a_{(n-1)(n-3)}a_{n(n-2)}, a_{1(n-1)}a_{21}\ldots a_{(n-1)(n-2)}a_{n(n-1)}) =$$
$$= (a_{n1}a_{22}\ldots a_{(n-1)(n-1)}a_{11}, a_{n2}a_{23}\ldots a_{(n-2)(n-1)}a_{(n-1)1}a_{12},\ldots$$
$$\ldots, a_{n(n-2)}a_{2(n-1)}a_{31}\ldots a_{(n-1)(n-3)}a_{1(n-2)}, a_{n(n-1)}a_{21}\ldots a_{(n-1)(n-2)}a_{1(n-1)}) =$$
$$= [(a_{n1}, a_{n2},\ldots,a_{n(n-2)}, a_{n(n-1)})(a_{21},\ldots,a_{2(n-1)})\ldots$$
$$\ldots(a_{(n-1)1},\ldots,a_{(n-1)(n-1)})(a_{11}, a_{12},\ldots,a_{1(n-2)}, a_{1(n-1)})]_{n,n-1},$$

то есть

$$[\mathbf{a_1a_2}\ldots\mathbf{a_{n-1}a_n}]_{n,n-1} = [\mathbf{a_na_2}\ldots\mathbf{a_{n-1}a_1}]_{n,n-1}$$

для любых $\mathbf{a_i} = (a_{i1},\ldots,a_{i(n-1)}) \in A^{n-1}$, $\ i = 1,\ldots,n$. Следовательно, $< A^{n-1}, [\ \ ]_{n,n-1} >$ – полуабелева n-арная полугруппа. Предложение доказано.

Разрешимость уравнений в $< \mathbf{A^{n-1}}, [\ \ ]_{\mathbf{s(n-1)+1,n-1}} >$

Имеет место

3.12. Предложение. Если A – группа, то $< A^{n-1}, [\ \ ]_{s(n-1)+1,n-1} >$ – $(s(n-1)+1)$-арная группа. В частности, $< A^{n-1}, [\ \ ]_{n,n-1} >$ – n-арная группа.

3.13. Пример. Выпишем в явном виде решения уравнений

$$[(x_1, x_2)(a_1, a_2)(b_1, b_2)]_{3,2} = (c_1, c_2),$$

$$[(a_1, a_2)(y_1, y_2)(b_1, b_2)]_{3,2} = (c_1, c_2),$$

$$[(a_1, a_2)(b_1, b_2)(z_1, z_2)]_{3,2} = (c_1, c_2).$$

в $< A^2, [\ \ ]_{3,2} >$:

$$(u_1 = c_1b_1^{-1}a_2^{-1}, u_2 = c_2b_2^{-1}a_1^{-1}),$$
$$(v_1 = a_2^{-1}c_2b_2^{-1}, v_2 = a_1^{-1}c_1b_1^{-1}),$$
$$(w_1 = b_2^{-1}a_1^{-1}c_2, w_2 = b_1^{-1}a_2^{-1}c_1),.$$

Сопряженность элементов в $< \mathbf{A^{n-1}}, [\ \ ]_{\mathbf{s(n-1)+1,n-1}} >$

Если $< A, +, \times >$ – алгебра над полем P, $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_{n-1}) \in A^{n-1}$, то положим

$$\overline{\mathbf{a}} = (a_1, -a_2, \ldots, -a_{n-1}).$$

3.14. Предложение. Пусть $< A, +, \times >$ – ассоциативная алгебра над полем P. Тогда:

$$\overline{[\mathbf{x_1} \ldots \mathbf{x_{s(n-1)+1}}]_{s(n-1)+1,n-1}} = [\overline{\mathbf{x_1}} \ldots \overline{\mathbf{x_{s(n-1)+1}}}]_{s(n-1)+1,n-1}, \tag{3.4}$$

если s – четное или s – нечетное и n – четное;

$$\overline{[\mathbf{x_1} \ldots \mathbf{x_{s(n-1)+1}}]_{s(n-1)+1,n-1}} = -[\overline{\mathbf{x_1}} \ldots \overline{\mathbf{x_{s(n-1)+1}}}]_{s(n-1)+1,n-1}, \tag{3.5}$$

если s – нечетное и n – нечетное.

Доказательство. Пусть $\mathbf{x_1} \ldots \mathbf{x_{s(n-1)+1}}$, $y_1, \ldots, y_{n-1}$ – те же, что и в определении 3.1. Положим также

$$[\overline{\mathbf{x_1}} \ldots \overline{\mathbf{x_{s(n-1)+1}}}]_{s(n-1)+1,n-1} = (z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}).$$

Так как

$$\overline{\mathbf{x_i}} = (x_{i1}, -x_{i2}, \ldots, -x_{i(n-1)}), \quad i = 1, \ldots, s(n-1)+1,$$

то, согласно (3.1), и ввиду верных в любом кольце тождеств $(-x)y = x(-y) = -xy$, имеем

$$z_1 = x_{11}(-x_{22}) \ldots (-x_{(n-1)(n-1)})x_{n1}(-x_{(n+1)2}) \ldots (-x_{(2(n-1))(n-1)}) \ldots$$
$$\ldots x_{((s-1)(n-1)+1)1}(-x_{((s-1)(n-1)+2)2} \ldots (-x_{(s(n-1))(n-1)})x_{(s(n-1)+1)1} =$$
$$= (-1)^{s(n-2)} x_{11}x_{22} \ldots x_{(n-1)(n-1)}x_{n1}x_{(n+1)2} \ldots x_{(2(n-1))(n-1)} \ldots$$
$$\ldots x_{((s-1)(n-1)+1)1}x_{((s-1)(n-1)+2)2} \ldots x_{(s(n-1))(n-1)}x_{(s(n-1)+1)1} = (-1)^{s(n-2)}y_1;$$
$$z_j = (-x_{1j}) \ldots (-x_{(n-j)(n-1)})x_{(n-j+1)1}(-x_{(n-j+2)2}) \ldots (-x_{(n-1)(j-1)})$$
$$(-x_{nj}) \ldots (-x_{(2(n-1)-j+1)(n-1)}x_{(2(n-1)-j+2)1}(-x_{(2(n-1)-j+3)2}) \ldots (-x_{(2(n-1))(j-1)}) \ldots$$
$$\ldots (-x_{((s-1)(n-1)+1)j}) \ldots (-x_{(s(n-1)-j+1)(n-1)})x_{(s(n-1)-j+2)1}(-x_{(s(n-1)-j+3)2}) \ldots (x_{(s(n-1)+1)j}) =$$
$$= (-1)^{s(n-1)+1-s}y_j = (-1)^{s(n-2)+1}y_j$$

для любого $j = 2, \ldots, n-1$. Таким образом,

$$z_1 = (-1)^{s(n-2)}y_1, \quad z_2 = (-1)^{s(n-2)+1}y_2, \ldots, z_{n-2} = (-1)^{s(n-2)+1}y_{n-1}. \tag{3.6}$$

Если s – четное, то, согласно (3.6), $z_1 = y_1$, $z_2 = -y_2$, $\ldots$, $z_{n-1} = -y_{n-1}$. Поэтому

$$\overline{[\mathbf{x_1} \ldots \mathbf{x_{s(n-1)+1}}]_{s(n-1)+1,n-1}} = \overline{(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1})} =$$
$$= (y_1, -y_2, \ldots, -y_{n-1}) = (z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}) = [\overline{\mathbf{x_1}} \ldots \overline{\mathbf{x_{s(n-1)+1}}}]_{s(n-1)+1,n-1},$$

то есть верно (3.4).

Если s – нечетное и n – четное, то $z_1 = y_1$, $z_2 = -y_2$, $\ldots$, $z_{n-1} = -y_{n-1}$, и снова верно (3.4).

Если s и n – нечетные, то согласно (3.6), $z_1 = -y_1$, $z_2 = y_2$, $\ldots$, $z_{n-1} = y_{n-1}$. Поэтому

$$\overline{[\mathbf{x_1} \ldots \mathbf{x_{s(n-1)+1}}]_{s(n-1)+1,n-1}} = \overline{(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1})} =$$
$$= (y_1, -y_2, \ldots, -y_{n-1}) = -(-y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}) = -[\overline{\mathbf{x_1}} \ldots \overline{\mathbf{x_{s(n-1)+1}}}]_{s(n-1)+1,n-1},$$

то есть верно (3.5). Предложение доказано.

4. Нуль и делители нуля в $< \mathbf{A^{n-1}}, [\ \ ]_{\mathbf{s(n-1)+1,n-1}} >$

Элемент a n-арного группоида $< A, [\ \ ] >$ называется его *нулем*, если для всех $x_1, \dots, x_{n-1} \in A$ верно

$$[ax_1 \dots x_{n-1}] = [x_1 a x_2 \dots x_{n-1}] = \dots = [x_1 \dots x_{n-1} a] = a.$$

Понятно, что n-арный группоид не может иметь более одного нуля.

Элемент a n-арного группоида $< A, [\ \ ] >$ с нулем 0 называется его *i-ым делителем нуля*, где $i \in \{1, \dots, n\}$, если существуют отличные от нуля $b_1, \dots, b_{i-1}, b_{i+1}, \dots, b_n \in A$ такие, что

$$[b_1 \dots b_{i-1} a b_{i+1} \dots b_n] = 0.$$

Если элемент a является i-ым делителем нуля для каждого $i \in \{1, \dots, n\}$, то a называют *делителем нуля* в $< A, [\ \ ] >$ [8]. Понятно, что сам нуль является делителем нуля.

4.1. Предложение. Пусть A – полугруппа с нулем 0. Тогда $\mathbf{0} = (\underbrace{0, \dots, 0}_{n-1})$ – нуль $(s(n-1)+1)$-арной полугруппы $< A^{n-1}, [\ \ ]_{s(n-1)+1,n-1} >$, в которой все элементы являются делителями ее нуля.

Доказательство. Ввиду замечания 3.5, достаточно привести доказательство для случая $s = 1$.

То, что $\mathbf{0} = (\underbrace{0, \dots, 0}_{n-1})$ – нуль n-арной полугруппы $< A^{n-1}, [\ \ ]_{n,n-1} >$, следует из определения операции $[\ \ ]_{n,n-1}$.

Покажем, что для любого $\mathbf{a} \in A^{n-1}$ и любого $i \in \{1, \dots, n\}$ существуют

$$\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_{i-1}, \mathbf{b}_{i+1}, \dots, \mathbf{b}_n \in A^{n-1},$$

отличные от $(\underbrace{0, \dots, 0}_{n-1})$, такие, что

$$[\mathbf{b}_1 \dots \mathbf{b}_{i-1} \mathbf{a} \mathbf{b}_{i+1} \dots \mathbf{b}_n]_{n,n-1} = (\underbrace{0, \dots, 0}_{n-1}).$$

Если $i = 1$, то $\mathbf{b}_3, \dots, \mathbf{b}_{n-1}$ можно выбрать любыми, отличными от нуля n-арной полугруппы $< A^{n-1}, [\ \ ]_{n,n-1} >$, а $\mathbf{b}_2$ и $\mathbf{b}_n$ положить равными

$$\mathbf{b}_2 = (c_1, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-2}), \ \ \mathbf{b}_n = (c_2, \dots, c_{n-1}, 0),$$

где $c_1, \dots, c_{n-1}$ могут быть любыми из A, отличными от нуля. Тогда

$$[\mathbf{a}(c_1, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-2}) \mathbf{b}_3 \dots \mathbf{b}_{n-1} (c_2, \dots, c_{n-1}, 0)]_{n,n-1} = (\underbrace{0, \dots, 0}_{n-1}).$$

Если $2 \le i \le n-1$, то $\mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_{i-1}, \mathbf{b}_{i+1}, \dots, \mathbf{b}_{n-1}$ можно выбрать любыми, отличными от нуля из $< A^{n-1}, [\ \ ]_{n,n-1} >$, а $\mathbf{b}_1$ и $\mathbf{b}_n$ положить равными

$$\mathbf{b}_1 = (\underbrace{0, \dots, 0}_{n-2}, c_1), \ \ \mathbf{b}_n = (c_2, \dots, c_{n-1}, 0),$$

где $c_1, \ldots, c_{n-1}$ могут быть любыми из A, отличными от нуля. Тогда

$$[(\underbrace{0,\ldots,0}_{n-2}, c_1)\mathbf{b}_2 \ldots \mathbf{b}_{i-1}\mathbf{a}\mathbf{b}_{i+1} \ldots \mathbf{b}_{n-1}(c_2, \ldots, c_{n-1}, 0)]_{n,n-1} = (\underbrace{0,\ldots,0}_{n-1}).$$

Если $i = n$, то $\mathbf{b}_3, \ldots, \mathbf{b}_{n-1}$ можно выбрать любыми, отличными от нуля n-арной полугруппы $< A^{n-1}, [\ ]_{n,n-1} >$, а $\mathbf{b}_1$ и $\mathbf{b}_2$ положить равными

$$\mathbf{b}_1 = (\underbrace{0,\ldots,0}_{n-2}, c_1), \quad \mathbf{b}_2 = (0, c_2, \ldots, c_{n-1}),$$

где $c_1, \ldots, c_{n-1}$ могут быть любыми из A, отличными от нуля. Тогда

$$[(\underbrace{0,\ldots,0}_{n-2}, c_1)(0, c_2, \ldots, c_{n-1})\mathbf{b}_3 \ldots \mathbf{b}_{n-1}\mathbf{a}]_{n,n-1} = (\underbrace{0,\ldots,0}_{n-1}).$$

Предложение доказано.

4.2. Замечание. Можно показать, что в доказательстве предыдущего предложения для любого $i \in \{1, \ldots, n\}$ все элементы $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_{i-1}, \mathbf{b}_{i+1}, \ldots, \mathbf{b}_n$ можно выбрать так, что в каждом из них только одна компонента равна нулю, а все остальные компоненты отличны от нуля.

Например, если $n = 4$, (a, b, c) – произвольный элемент из A^3, где $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$, то

$$[(a, b, c)(x, 0, y)(0, z, u)(v, w, 0)]_{4,3} = (0, 0, 0),$$
$$[(0, x, y)(a, b, c)(0, z, u)(v, w, 0)]_{4,3} = (0, 0, 0),$$
$$[(0, x, y)(z, u, 0)(a, b, c)(v, w, 0)]_{4,3} = (0, 0, 0),$$
$$[(0, x, y)(z, u, 0)(v, 0, w)(a, b, c)]_{4,3} = (0, 0, 0),$$

где x, y, z, u, v, w могут быть любыми из A, отличными от 0. Таким образом, (a, b, c) – делитель нуля в $< A^3, [\ ]_{4,3} >$.

4.3. Предложение. Пусть A – полугруппа с нулем 0, $j \in \{1, \ldots, n-1\}$,

$$a_1, \ldots, a_{j-1}, a_{j+1}, \ldots, a_{n-1} \in A, \quad \mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_{j-1}, a_j = 0, a_{j+1}, \ldots, a_{n-1}) \in A^{n-1}.$$

Тогда

$$[\underbrace{\mathbf{a} \ldots \mathbf{a}}_{s(n-1)+1}]_{s(n-1)+1,n-1} = (\underbrace{0,\ldots,0}_{n-1}).$$

Доказательство. Ввиду замечания 3.5, достаточно привести доказательство для случая $s = 1$.

Положим

$$[\underbrace{\mathbf{a} \ldots \mathbf{a}}_{n}]_{n,n-1} = (g_1, \ldots, g_{n-1}).$$

Тогда, согласно определению операции $[\ ]_{n,n-1}$,

$$g_k = a_k a_{k+1} \ldots a_{n-1} a_1 \ldots a_{k-1} a_k, \quad k = 1, \ldots, n-1.$$

Так как в правой части последнего равенства присутствуют все $a_1, \ldots, a_{n-1}$, то среди них обязательно встретится $a_j = 0$. Поэтому $g_k = 0$, для любого $k = 1, \ldots, n-1$. Следовательно, верно равенство из условия предложения. Предложение доказано.

4.4. Замечание. Из предложения 4.3 вытекает, что если A – полугруппа с нулем 0, то в $< A^{n-1}, [\ \ ]_{s(n-1)+1,n-1} >$ существуют ненулевые элементы a, удовлетворяющие условию

$$[\underbrace{\mathbf{a}\ldots\mathbf{a}}_{s(n-1)+1}]_{s(n-1)+1,n-1} = (\underbrace{0,\ldots,0}_{n-1}).$$

Таковым будет любой элемент $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_{j-1}, 0, a_{j+1}, \ldots, a_{n-1})$, в котором, по крайней мере, одна из компонент $a_1, \ldots, a_{j-1}, a_{j+1}, \ldots, a_{n-1}$ отлична от нуля.

5. Идемпотенты в $< \mathbf{A^{n-1}}, [\ \ ]_{\mathbf{s(n-1)+1,n-1}} >$

5.1. Предложение. Если полугруппа A содержит не менее двух элементов, то в $(s(n-1)+1)$-арной полугруппе $< A^{n-1}, [\ \ ]_{s(n-1)+1,n-1} >$ нет единиц.

Доказательство. Предположим, что элемент $\mathbf{e} = (e_1, e_2, \ldots, e_{n-1})$ является единицей в $< A^{n-1}, [\ \ ]_{s(n-1)+1,n-1} >$, и пусть a – произвольный элемент из A. Так как $\mathbf{e}$ – единица в $< A^{n-1}, [\ \ ]_{s(n-1)+1,n-1} >$, то

$$[(a, e_2, \ldots, e_{n-1})\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{s(n-1)}]_{s(n-1)+1,n-1} = (a, e_2, \ldots, e_{n-1}). \quad (5.1)$$

Тогда, положив

$$[(a, e_2, \ldots, e_{n-1})\underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{s(n-1)}]_{s(n-1)+1,n-1} = (u_1, \ldots, u_{n-1}), \quad (5.2)$$

получим

$$u_1 = ae_2e_1, \text{ если } n = 3; \ \ u_1 = ae_2e_3, \text{ если } n > 3.$$

Из (5.1) и (5.2) следует $a = u_1$. Поэтому $a = ae_2e_1$, если $n = 3$; $a = ae_2e_3$, если $n > 3$ для любого $a \in A$. В частности,

$$e_1 = e_1e_2e_1, \text{ если } n = 3; \ \ e_1 = e_1e_2e_3, \text{ если } n > 3. \quad (5.3)$$

Так как $\mathbf{e}$ – единица в $< A^{n-1}, [\ \ ]_{s(n-1)+1,n-1} >$, то

$$[\mathbf{e}(a, e_2, \ldots, e_{n-1})\ \underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{s(n-1)-1}]_{s(n-1)+1,n-1} = (a, e_2, \ldots, e_{n-1}) \quad (5.4)$$

Тогда, положив

$$[\mathbf{e}(a, e_2, \ldots, e_{n-1})\ \underbrace{\mathbf{e}\ldots\mathbf{e}}_{s(n-1)-1}]_{s(n-1)+1,n-1} = (w_1, \ldots, w_{n-1}), \quad (5.5)$$

получим

$$w_1 = e_1e_2e_1, \text{ если } n = 3; \ \ w_1 = e_1e_2e_3, \text{ если } n > 3.$$

Из (5.4) и (5.5) следует $a = w_1$. Поэтому $a = e_1e_2e_1$, если $n = 3$; $a = e_1e_2e_3$, если $n > 3$, откуда и из (5.3) вытекает $a = e_1$ для любого $a \in A$. Последнее равенство возможно не всегда, так как в A имеются элементы, отличные от e_1. Предложение доказано.

Множество всех идемпотентов универсальной алгебры $< A, \Omega >$ обозначим через $I(A, \Omega)$.

5.2. Лемма. Если A – группа, 1 – её единица, $a_1, \ldots, a_{n-1} \in A$, $s \geq 1$, то

$$(a_1 \ldots a_{n-1})^s = 1 \quad (5.6)$$

тогда и только тогда, когда

$$(a_j \dots a_{n-1} a_1 \dots a_{j-1})^s = 1. \qquad (5.7)$$

Доказательство. Перепишем (5.6)

$$a_1 \dots a_{j-1}(a_j \dots a_{n-1} a_1 \dots a_{j-1})^{s-1} a_j \dots a_{n-1} = 1.$$

Тогда

$$(a_1 \dots a_{j-1})^{-1} a_1 \dots a_{j-1}(a_j \dots a_{n-1} a_1 \dots a_{j-1})^{s-1} a_j \dots a_{n-1} a_1 \dots a_{j-1} = (a_1 \dots a_{j-1})^{-1} a_1 \dots a_{j-1},$$

откуда

$$(a_j \dots a_{n-1} a_1 \dots a_{j-1})^{s-1} a_j \dots a_{n-1} a_1 \dots a_{j-1} = 1,$$

то есть верно (5.7).

Если верно (5.7), то, рассуждая в обратном порядке, получим (5.6). Лемма доказана.

5.3. Теорема. Пусть A – группа, 1 – ее единица. Тогда

$$I(A^{n-1}, [\ \ ]_{s(n-1)+1,n-1}) = \{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}) \in A^{n-1} | (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1})^s = 1\},$$

$$I(A^{n-1}, [\ \ ]_{s(n-1)+1,n-1}) = \bigcup_{c \in A, c^s = 1} \{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}) | \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-2} \in A,\ \varepsilon_{n-1} = \varepsilon_{n-2}^{-1} \dots \varepsilon_1^{-1} c\}.$$

Если A – конечная порядка r, t – число элементов c группы A, удовлетворяющих условию $c^s = 1$, то в $< A^{n-1}, [\ \ ]_{s(n-1)+1,n-1} >$ ровно tr^{n-2} идемпотентов и ровно $r^{n-2}(r-t)$ элементов, не являющихся идемпотентами.

Доказательство. Если $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}) \in I(A^{n-1}, [\ \ ]_{s(n-1)+1,n-1})$, то есть

$$[\underbrace{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}) \dots (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1})}_{s(n-1)+1}]_{s(n-1)+1,n-1} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}),$$

то

$$\underbrace{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_{n-1} \dots \varepsilon_1 \dots \varepsilon_{n-1}}_{s} \varepsilon_1 = \varepsilon_1,$$

откуда $(\varepsilon_1 \dots \varepsilon_{n-1})^s = 1$. Таким образом, доказано включение

$$I(A^{n-1}, [\ \ ]_{s(n-1)+1,n-1}) \subseteq \{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}) \in A^{n-1} | (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1})^s = 1\}. \qquad (5.8)$$

Если теперь $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1} \in A$, $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1})^s = 1$, то

$$[\underbrace{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}) \dots (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1})}_{s(n-1)+1}]_{s(n-1)+1,n-1} = (y_1, \dots, y_{n-1}),$$

где

$$y_j = \underbrace{\varepsilon_j \varepsilon_{j+1} \dots \varepsilon_{n-1} \varepsilon_1 \dots \varepsilon_{j-1} \dots \varepsilon_j \varepsilon_{j+1} \dots \varepsilon_{n-1} \varepsilon_1 \dots \varepsilon_{j-1}}_{s} \varepsilon_j$$

Применяя к правой части полученного равенства лемму 5.2, получаем $y_j = \varepsilon_j$. Следовательно,

$$[\underbrace{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}) \dots (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1})}_{s(n-1)+1}]_{s(n-1)+1,n-1} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}),$$

и доказано включение

$$\{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{n-1})\in A^{n-1}|(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{n-1})^s=1\}\subseteq I(A^{n-1},[\ \ ]_{s(n-1)+1,n-1}). \tag{5.9}$$

Из (5.8) и (5.9) следует первое равенство из формулировки теоремы.

Второе равенство из формулировки теоремы следует из первого равенства, так как правые части в обоих равенствах равны.

Если A – конечная группа порядка r, то по доказанному, мощность множества $I(A^{n-1},[\ \ ]_{s(n-1)+1,n-1})$ совпадает с мощностью множества, являющегося объединением t непересекающихся множеств, каждое из которых имеет мощность r^{n-2}, то есть

$$|I(A^{n-1},[\ \ ]_{s(n-1)+1,n-1})|=tr^{n-2}$$

Тогда число элементов в $< A_{n-1},[\ \ ]_{s(n-1)+1,n-1} >$, которые не являются идемпотентами равно

$$|A^{n-1}|-|I(A^{n-1},[\ \ ]_{s(n-1)+1,n-1})|=r^{n-1}-tr^{n-2}=r^{n-2}(r-t).$$

Теорема доказана.

5.4. Следствие. Пусть A – полугруппа с нулем 0, причем $A^*=A\backslash\{0\}$ – группа с единицей 1. Тогда

$$I(A^{n-1},[\ \ ]_{s(n-1)+1,n-1})=\{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{n-1})\in {A^*}^{n-1}|(\varepsilon_1\ldots\varepsilon_{n-1})^s=1\}\bigcup\{(\underbrace{0,\ldots,0}_{n-1})\}=$$

$$=\bigcup_{c\in A, c^s=1}\{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{n-1})|\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{n-2}\in A^*,\ \varepsilon_{n-1}=\varepsilon_{n-2}^{-1}\ldots\varepsilon_1^{-1}c\}\bigcup\{(\underbrace{0,\ldots,0}_{n-1})\}.$$

Если A – конечная порядка r, t – число элементов c группы A, удовлетворяющих условию $c^s=1$, то в $< A^{n-1},[\ \ ]_{s(n-1)+1,n-1} >$ имеется ровно $t(r-1)^{n-2}+1$ идемпотентов и ровно $r^{n-1}-t(r-1)^{n-2}-1$ элементов, не являющихся идемпотентами.

5.5. Следствие. Имеют место формулы:

$$I(\mathbb{R}^{n-1},[\ \ ]_{s(n-1)+1,n-1})=\{(a_1,\ldots,a_{n-2},\frac{1}{a_1\ldots a_{n-2}})|a_1,\ldots,a_{n-2}\in\mathbb{R}^*\}\bigcup\{(\underbrace{0,\ldots,0}_{n-1})\},$$

если s – нечетное;

$$I(\mathbb{R}^{n-1},[\ \ ]_{s(n-1)+1,n-1})=\{(a_1,\ldots,a_{n-2},\frac{1}{a_1\ldots a_{n-2}})|a_1,\ldots,a_{n-2}\in\mathbb{R}^*\}\bigcup$$

$$\bigcup\{(a_1,\ldots,a_{n-2},-\frac{1}{a_1\ldots a_{n-2}})|a_1,\ldots,a_{n-2}\in\mathbb{R}^*\}\bigcup\{(\underbrace{0,\ldots,0}_{n-1})\}=$$

если s – четное;

Полагая в теореме 5.3 и следствиях 5.4 и 5.5 $s=1$, получим соответственно следующие три утверждения.

5.6. Теорема. Пусть A – группа, $n\geq 3$. Тогда

$$I(A^{n-1},[\ \ ]_{n,n-1})=\{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{n-1})|\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{n-2}\in A,\varepsilon_{n-1}=\varepsilon_{n-2}^{-1}\ldots\varepsilon_1^{-1}\}.$$

Если A – конечная группа порядка r, то в $< A^{n-1},[\ \ ]_{n-1,n} >$ ровно r^{n-2} идемпотентов и ровно $r^{n-2}(r-1)$ элементов, не являющихся идемпотентами.

5.7. Следствие. Пусть A – полугруппа с нулем 0, причем $A^* = A\backslash\{0\}$ – группа с единицей 1. Тогда:

$$I(A^{n-1}, [\ \ ]_{n,n-1}) = \{(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}) | \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-2} \in A^*, \varepsilon_{n-1} = \varepsilon_{n-2}^{-1} \ldots \varepsilon_1^{-1}\} \bigcup \{(\underbrace{0, \ldots, 0}_{n-1})\}.$$

Если A – конечная порядка r, то в $< A^{n-1}, [\ \ ]_{n,n-1} >$ имеется ровно $(r-1)^{n-2}+1$ идемпотентов и ровно $r^{n-1}-(r-1)^{n-2}-1$ элементов, не являющихся идемпотентами.

5.8. Следствие. Имеет место формула:

$$I(\mathbb{R}^{n-1}, [\ \ ]_{n,n-1}) = \{(a_1, \ldots, a_{n-2}, \frac{1}{a_1 \ldots a_{n-2}}) | a_1, \ldots, a_{n-2} \in \mathbb{R}^*\} \bigcup \{(\underbrace{0, \ldots, 0}_{n-1})\}.$$

Если в следствии 5.4 положить $\mathbb{C}$ – поле всех комплексных чисел и учесть, что

$$z_{n-2}^{-1} \ldots z_1^{-1} = (z_1 \ldots z_{n-2})^{-1} = \frac{\overline{z_1 \ldots z_{n-2}}}{|z_1 \ldots z_{n-2}|^2}$$

для любых $z_1, \ldots, z_{n-2}$ из $\mathbb{C}$, отличных от нуля 0 поля $\mathbb{C}$, где $\overline{z} = a - bi$, $|z| = a^2 + b^2$ для $z = a + ib \in \mathbb{C}$, то получим

5.9. Следствие. Имеют место формулы

$$I(\mathbb{C}^{n-1}, [\ ]_{s(n-1)+1,n-1}) = \bigcup_{i=1}^{s} \{(z_1, \ldots, z_{n-2}, \frac{\overline{z_1 \ldots z_{n-2}}}{|z_1 \ldots z_{n-2}|^2} u_i) | z_1, \ldots, z_{n-2} \in \mathbb{C}^*\} \bigcup \{(\underbrace{0, \ldots, 0}_{n-1})\},$$

где $u_i = \cos\frac{2k\pi}{s} + i \sin\frac{2k\pi}{s}$, $i = 0, 1, \ldots, s-1$ – все корни s-ой степени из единицы. В частности,

$$I(\mathbb{C}^{n-1}, [\ \ ]_{n,n-1}) = \{(z_1, \ldots, z_{n-2}, \frac{\overline{z_1 \ldots z_{n-2}}}{|z_1 \ldots z_{n-2}|^2}) | z_1, \ldots, z_{n-2} \in \mathbb{C}^*\} \bigcup \{(\underbrace{0, \ldots, 0}_{n-1})\}.$$

5.10. Пример. Полагая в следствии 5.9 $n = 3, s = 1, 2, 3, 4$, получим:

$$I(\mathbb{C}^2, [\ \ ]_{3,2}) = \{(a + ib, \frac{a - ib}{a^2 + b^2}) | a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 \neq 0\} \bigcup \{(0, 0)\};$$

$$I(\mathbb{C}^2, [\ \ ]_{5,2}) = \{(a + ib, \frac{a - ib}{a^2 + b^2}) | a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 \neq 0\} \bigcup$$

$$\bigcup \{(a + ib, \frac{-a + ib}{a^2 + b^2}) | a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 \neq 0\} \bigcup \{(0, 0)\};$$

$$I(\mathbb{C}^2, [\ \ ]_{7,2}) = \{(a + ib, \frac{a - ib}{a^2 + b^2}) | a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 \neq 0\} \bigcup$$

$$\bigcup \{a + ib, \frac{a - ib}{a^2 + b^2}(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) | a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 \neq 0\} \bigcup$$

$$\bigcup \{a + ib, \frac{a - ib}{a^2 + b^2}(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}) | a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 \neq 0\} \bigcup \{(0, 0)\};$$

$$I(\mathbb{C}^2, [\ \ ]_{9,2}) = \{(a + ib, \frac{a - ib}{a^2 + b^2}) | a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 \neq 0\} \bigcup$$

$$\bigcup\{(a+ib,\frac{-a+ib}{a^2+b^2})|a,b\in\mathbb{R},a^2+b^2\neq 0\}\bigcup$$
$$\bigcup\{(a+ib,\frac{b+ia}{a^2+b^2})|a,b\in\mathbb{R},a^2+b^2\neq 0\}\bigcup$$
$$\bigcup\{(a+ib,\frac{-b-ia}{a^2+b^2})|a,b\in\mathbb{R},a^2+b^2\neq 0\}\bigcup\{(0,0)\}.$$

Если в следствии 5.4 положить $\mathbb{H}$ – тело всех кватернионов и учесть, что

$$q_{n-2}^{-1}\dots q_1^{-1}=(q_1\dots q_{n-2})^{-1}=\frac{\overline{q_1\cdots q_{n-2}}}{|q_1\cdots q_{n-2}|^2}$$

для любых $q_1,\dots,q_{n-2}\in\mathbb{H}$, отличных от нуля 0 тела $\mathbb{H}$, где

$$\overline{q}=a-ib-jc-kd,\ \ |q|=a^2+b^2+c^2+d^2$$

для $q=a+ib+jc+kd\in\mathbb{H}$, то получим

5.11. Следствие. Имеют место формулы

$$I(\mathbb{H}^{n-1},[\ ]_{s(n-1)+1,n-1})=\bigcup_{u\in\mathbb{H},u^s=1}\{(q_1,\dots,q_{n-2},\frac{\overline{q_1\cdots q_{n-2}}}{|q_1\cdots q_{n-2}|^2}u)|q_1,\dots,q_{n-2}\in\mathbb{H}^*\}\bigcup\{(\underbrace{0,\dots,0}_{n-1})\}.$$

В частности,

$$I(\mathbb{H}^{n-1},[\ \ ]_{n,n-1})=\{(q_1,\dots,q_{n-2},\frac{\overline{q_1\cdots q_{n-2}}}{|q_1\cdots q_{n-2}|^2})|q_1,\dots,q_{n-2}\in\mathbb{H}^*\}\bigcup\{(\underbrace{0,\dots,0}_{n-1})\}.$$

5.12. Пример. Полагая в следствии 5.11 $n=3$, $s=1$, получим:

$$I(\mathbb{H}^2,[\ \ ]_{3,2})=\{(a+ib+jc+kd,\frac{a-ib-jc-kd}{a^2+b^2+c^2+d^2})|a,b,c,d\in\mathbb{R}^*\}\bigcup\{(0,0)\}.$$

5.13. Замечание. Если $c_1,\dots,c_t$ – все элементы группы A, удовлетворяющие условию $c_k^s=1$, то второе равенство из формулировки теоремы 5.3 можно переписать следующим образом

$$I(A^{n-1},[\ \ ]_{s(n-1)+1,n-1})=\bigcup_{k=1}^{t}\{(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{n-1})|\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{n-2}\in A,\ \varepsilon_{n-1}=\varepsilon_{n-2}^{-1}\dots\varepsilon_1^{-1}c_k\}.$$

5.14. Замечание. Из первого равенства формулировки теоремы 5.3 для любого $j\in\{1,\dots,n-1\}$ вытекает равенство

$$I(A^{n-1},[\ \ ]_{s(n-1)+1,n-1})=$$
$$=\bigcup_{c\in A,c^s=1}\{(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{n-1})|\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{j-1},\ \varepsilon_{j+1},\dots,\varepsilon_{n-1}\in A,\ \ \varepsilon_j=\varepsilon_{j-1}^{-1}\dots\varepsilon_1^{-1}c\varepsilon_{n-1}^{-1}\dots\varepsilon_{j+1}^{-1}\},$$

в частности,

$$I(A^{n-1},[\ ]_{n,n-1})=\{(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{n-1})|\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{j-1},\ \varepsilon_{j+1},\dots,\varepsilon_{n-1}\in A,\ \ \varepsilon_j=\varepsilon_{j-1}^{-1}\dots\varepsilon_1^{-1}\varepsilon_{n-1}^{-1}\dots\varepsilon_{j+1}^{-1}\}.$$

При $j=n-1$ из этого равенства получаются равенства из формулировок теорем 5.3 и 5.6.

Утверждения 5.4 – 5.12 могут быть переписаны с учетом последних двух равенств.

6. Основная теорема

Предложения 3.9 – 3.12, 3.14, 4.1, 4.3, 5.1, и теорема 5.3 позволяют сформулировать следующую теорему, которая обобщает теорему 2.1.

6.1. Теорема. Пусть $< A, +, \times >$ – ассоциативная алгебра над полем P, 0 – ее нуль. Тогда:

1) $< A^{n-1}, +, [\ \ ]_{s(n-1)+1,n-1} >$ – ассоциативная $(2, s(n-1)+1)$-алгебра над P, в которой все элементы являются делителями ее нуля $(\underbrace{0, \ldots, 0}_{n-1})$;

2) если $< A, +, \times >$ – коммутативна, то $< A^{n-1}, +, [\ \ ]_{s(n-1)+1,n-1} >$ – полуабелева;

3) если $< A\backslash\{0\}, \times >$ – группа, то $< (A\backslash\{0\})^{n-1}, [\ \ ]_{s(n-1)+1,n-1} >$ – $(s(n-1)+1)$-арная группа;

4) для любого $j \in \{1, \ldots, n-1\}$ и любого $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_{j-1}, a_j = 0, a_{j+1}, \ldots, a_{n-1}) \in A^{n-1}$ верно
$$[\underbrace{\mathbf{a} \ldots \mathbf{a}}_{s(n-1)+1}]_{s(n-1)+1,n-1} = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{n-1});$$

5) если алгебра $< A, +, \times >$ содержит более одного элемента и в ней есть единица, то $< A^{n-1}, +, [\ \ ]_{s(n-1)+1,n-1} >$ – неабелева;

6) если $< A, +, \times >$ содержит более одного элемента, то в $< A^{n-1}, +, [\ \ ]_{s(n-1)+1,n-1} >$ нет единиц;

7) если $< A\backslash\{0\}, \times >$ – группа, 1 – ее единица, то
$$I(A^{n-1}, +, [\ \ ]_{s(n-1)+1,n-1}) = \{(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}) \in A^{n-1} | (\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_{n-1})^s = 1\} =$$
$$= \bigcup_{c \in A, c^s = 1} \{(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}) | \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-2} \in A,\ \varepsilon_{n-1} = \varepsilon_{n-2}^{-1} \ldots \varepsilon_1^{-1} c\} \bigcup \{\underbrace{0, \ldots, 0}_{n-1}\};$$

8) если s – четное либо s – нечетное и n – четное, то верно (3.4); в случае, если s – нечетное и n – нечетное, то верно (3.5).

Полагая в теореме 6.1 $s = 1$, получим

6.2. Следствие. Пусть $< A, +, \times >$ – ассоциативная алгебра над полем P, 0 – ее нуль. Тогда:

1) $< A^{n-1}, +, [\ \ ]_{n,n-1} >$ – ассоциативная $(2, n)$-алгебра над P, в которой все элементы являются делителями ее нуля $(\underbrace{0, \ldots, 0}_{n-1})$;

2) если $< A, +, \times >$ – коммутативна, то $< A^{n-1}, +, [\ \ ]_{n,n-1} >$ – полуабелева;

3) если $< A\backslash\{0\}, \times >$ – группа, то $< (A\backslash\{0\})^{n-1}, [\ \ ]_{n,n-1} >$ – n-арная группа;

4) для любого $j \in \{1, \ldots, n-1\}$ и любого $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_{j-1}, a_j = 0, a_{j+1}, \ldots, a_{n-1}) \in A^{n-1}$ верно
$$[\underbrace{\mathbf{a} \ldots \mathbf{a}}_{n}]_{n,n-1} = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{n-1});$$

5) если алгебра $< A, +, \times >$ содержит более одного элемента и в ней есть единица, то $< A^{n-1}, +, [\ \ ]_{n,n-1} >$ – неабелева;

6) если $< A, +, \times >$ содержит более одного элемента, то в $< A^{n-1}, +, [\ \ ]_{n,n-1} >$ нет единиц;

7) если $< A\backslash\{0\}, \times >$ – группа, 1 – ее единица, то
$$I(A^{n-1}, +, [\ \ ]_{n,n-1}) = \{(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}) | \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-2} \in A,\ \varepsilon_{n-1} = \varepsilon_{n-2}^{-1} \ldots \varepsilon_1^{-1}\} \bigcup \{\underbrace{0, \ldots, 0}_{n-1}\};$$

8) если n – четное, то верно (3.4); если же n – нечетное, то верно (3.5).

7. N-арная операция $[\ ]_{\mathbf{n,m,m(n-1)}}$

Пусть B – множество, $m \geq 2$, $n \geq 3$, $A = B^m$ – m-ая декартова степень множества A, $< A, \times >$ – полугруппа, операцию которой в некоторых случаях для сокращения записей указывать не будем.

Заметим, что если B – полугруппа, то в качестве $\times$ можно взять операцию, определенную на $A = B^m$ покомпонентно.

Определим на $B^{m(n-1)}$ n-арную операцию $[\ ]_{n,m,m(n-1)}$ следующим образом. Если

$$\boldsymbol{\alpha_i} = (\alpha_{i1}^{(1)}, \ldots, \alpha_{im}^{(1)}, \alpha_{i1}^{(2)}, \ldots, \alpha_{im}^{(2)}, \ldots, \alpha_{i1}^{(n-1)}, \ldots, \alpha_{im}^{(n-11)}) \in B^{m(n-1)}, \ \ i \in \{1, \ldots, n\},$$

то

$$[\boldsymbol{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n}]_{n,m,m(n-1)} = (y_{11}, \ldots, y_{1m}, y_{21}, \ldots, y_{2m}, \ldots, y_{(n-1)1}, \ldots, y_{(n-1)m}) \in B^{m(n-1)},$$

где y_{ij} определяются следующим образом

$$(y_{j1}, \ldots, y_{jm}) = (\alpha_{11}^{(j)}, \ldots, \alpha_{1m}^{(j)}) \times (\alpha_{21}^{(j+1)}, \ldots, \alpha_{2m}^{(j+1)}) \times \ldots$$
$$\ldots (\alpha_{(n-j)1}^{(n-1)}, \ldots, \alpha_{(n-j)m}^{(n-1)}) \times (\alpha_{(n-j+1)1}^{(1)}, \ldots, \alpha_{(n-j+1)m}^{(1)}) \times \ldots$$
$$\ldots (\alpha_{(n-1)1}^{(j-1)}, \ldots, \alpha_{(n-1)m}^{(j-1)}) \times (\alpha_{n1}^{(j)}, \ldots, \alpha_{nm}^{(j)}) \in B^m, \ \ j = 1, \ldots, n-1.$$

Если положить

$$\boldsymbol{\alpha_{ij}} = (\alpha_{i1}^{(j)}, \ldots, \alpha_{im}^{(j)}) \in B^m, \ \ \mathbf{y_i} = (y_{i1}, \ldots, y_{im}) \in B^m, \ \ j \in \{1, \ldots, n-1\},$$

то

$$\mathbf{y_j} = (y_{j1}, \ldots, y_{jm}) = \boldsymbol{\alpha_{1j}} \times \boldsymbol{\alpha_{2(j+1)}} \times \ldots \times \boldsymbol{\alpha_{(n-j)(n-1)}} \times$$
$$\times \boldsymbol{\alpha_{(n-j+1)1}} \times \ldots \times \boldsymbol{\alpha_{(n-1)(j-1)}} \times \boldsymbol{\alpha_{nj}} \in B^m. \tag{7.1}$$

Понятно, что при $m = 1$ n-арная операция $[\ ]_{n,m,m(n-1)}$ совпадает с n-арной операцией $[\ ]_{n,n-1}$.

Рассмотрим на $A^{n-1} = \underbrace{B^m \times \ldots \times B^m}_{n-1}$ n-арную операцию $[\ ]_{n,n-1}$, определенную с помощью операции $\times$, и запишем явный вид операции $[\ ]_{n,n-1}$. Для этого для любого $i \in \{1, \ldots, n\}$ положим

$$\mathbf{x_i} = (\mathbf{x_{i1}}, \ldots, \mathbf{x_{i(n-1)}}) \in A^{n-1}, \ \ \mathbf{x_{ij}} = (x_{i1}^{(j)}, \ldots, x_{im}^{(j)}) \in B^m, \ \ j = 1, \ldots, n-1,$$

то есть

$$\mathbf{x_i} = ((x_{i1}^{(1)}, \ldots, x_{im}^{(1)}), (x_{i1}^{(2)}, \ldots, x_{im}^{(2)}), \ldots, (x_{i1}^{(n-1)}, \ldots, x_{im}^{(n-1)})) \in A^{n-1}.$$

Применяя определение операции $[\ ]_{n,n-1}$, получим $[\mathbf{x_1 x_2 \ldots x_n}]_{n,n-1} = (\mathbf{z_1}, \mathbf{z_2}, \ldots, \mathbf{z_{n-1}})$, где

$$\mathbf{z_j} = \mathbf{x_{1j}} \times \mathbf{x_{2(j+1)}} \times \ldots \times \mathbf{x_{(n-j)(n-1)}} \times \mathbf{x_{(n-j+1)1}} \times \ldots \times \mathbf{x_{(n-1)(j-1)}} \times \mathbf{x_{nj}} \in B^m \tag{7.2}$$

или

$$\mathbf{z_j} = (x_{11}^{(j)}, \ldots, x_{1m}^{(j)}) \times (x_{21}^{(j+1)}, \ldots, x_{2m}^{(j+1)}) \times \ldots \times (x_{(n-j)1}^{(n-1)}, \ldots, x_{(n-j)m}^{(n-1)}) \times$$
$$\times (x_{(n-j+1)1}^{(1)}, \ldots, x_{(n-j+1)m}^{(1)}) \times \ldots \times (x_{(n-1)1}^{(j-1)}, \ldots, x_{(n-1)m}^{(j-1)}) \times (x_{n1}^{(j)}, \ldots, x_{nm}^{(j)}).$$

7.1. Пример. Если $m = 2$, $n = 3$, то

$$\boldsymbol{\alpha_1} = (\alpha_{11}^{(1)}, \alpha_{12}^{(1)}, \alpha_{11}^{(2)}, \alpha_{12}^{(2)}), \ \ \boldsymbol{\alpha_2} = (\alpha_{21}^{(1)}, \alpha_{22}^{(1)}, \alpha_{21}^{(2)}, \alpha_{22}^{(2)}), \ \ \boldsymbol{\alpha_3} = (\alpha_{31}^{(1)}, \alpha_{32}^{(1)}, \alpha_{31}^{(2)}, \alpha_{32}^{(2)}),$$

$$[\boldsymbol{\alpha_1}\boldsymbol{\alpha_2}\boldsymbol{\alpha_3}]_{3,2,4} = (y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}),$$

где

$$(y_{11}, y_{12}) = (\alpha_{11}^{(1)}, \alpha_{12}^{(1)})(\alpha_{21}^{(2)}, \alpha_{22}^{(2)})(\alpha_{31}^{(1)}, \alpha_{32}^{(1)}),$$

$$(y_{21}, y_{22}) = (\alpha_{11}^{(2)}, \alpha_{12}^{(2)})(\alpha_{21}^{(1)}, \alpha_{22}^{(1)})(\alpha_{31}^{(2)}, \alpha_{32}^{(2)}).$$

Кроме того,

$$\mathbf{x_1} = (\mathbf{x_{11}} = (x_{11}^{(1)}, x_{12}^{(1)}), \ \mathbf{x_{12}} = (x_{11}^{(2)}, x_{12}^{(2)})), \ \ \mathbf{x_2} = (\mathbf{x_{21}} = (x_{21}^{(1)}, x_{22}^{(1)}), \ \mathbf{x_{22}} = (x_{21}^{(2)}, x_{22}^{(2)})),$$

$$\mathbf{x_3} = (\mathbf{x_{31}} = (x_{31}^{(1)}, x_{32}^{(1)}), \ \mathbf{x_{32}} = (x_{31}^{(2)}, x_{32}^{(2)})), \ \ [\mathbf{x_1}\mathbf{x_2}\mathbf{x_3}]_{3,2} = [\mathbf{y_1}, \mathbf{y_2}],$$

где

$$\mathbf{y_1} = \mathbf{x_{11}}\mathbf{x_{22}}\mathbf{x_{31}} = (x_{11}^{(1)}, x_{12}^{(1)})(x_{21}^{(2)}, x_{22}^{(2)})(x_{31}^{(1)}, x_{32}^{(1)}),$$

$$\mathbf{y_2} = \mathbf{x_{12}}\mathbf{x_{21}}\mathbf{x_{32}} = (x_{11}^{(2)}, x_{12}^{(2)})(x_{21}^{(1)}, x_{22}^{(1)})(x_{31}^{(2)}, x_{32}^{(2)}).$$

Пусть по-прежнему B – множество, $m \geq 2$, $n \geq 3$, $A = B^m$ – m-ая декартова степень множества A, и пусть, кроме того, $< A, + >$ – группоид. Определим на $B^{m(n-1)}$ бинарную операцию $\widetilde{+}$ следующим образом. Если

$$\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{1m}, \ldots, \alpha_{(n-1)1}, \ldots, \alpha_{(n-1)m}),$$

$$\boldsymbol{\beta} = (\beta_{11}, \ldots, \beta_{1m}, \ldots, \beta_{(n-1)1}, \ldots, \beta_{(n-1)m}) \in B^{m(n-1)},$$

то

$$\boldsymbol{\alpha}\widetilde{+}\boldsymbol{\beta} = (u_{11}, \ldots, u_{1m}, \ldots, u_{(n-1)1}, \ldots, u_{(n-1)m}) \in B^{m(n-1)},$$

где

$$(u_{j1}, \ldots, u_{jm}) = (\alpha_{j1}, \ldots, \alpha_{jm}) + (\beta_{j1}, \ldots, \beta_{jm}) \in B^{m(n-1)}$$

для любого $j \in \{1, \ldots, n-1\}$.

7.2. Замечание. Если на множестве B определена операция $+$, с помощью которой на множестве $A = B^m$ покомпонентна определена операция $+$, то

$$\boldsymbol{\alpha}\widetilde{+}\boldsymbol{\beta} = (\alpha_{11} + \beta_{11}, \ldots, \alpha_{1m} + \beta_{1m}, \ldots, \alpha_{(n-1)1} + \beta_{(n-1)1}, \ldots, \alpha_{(n-1)m} + \beta_{(n-1)m}),$$

то есть, в этом случае, операция $\widetilde{+}$ совпадает с операцией $+$, определенной на $B^{m(n-1)}$ покомпонентно.

Пусть при тех же предположениях о m, n, B и A определено произведение элементов поля P на элементы из $A = B^m$:

$$\lambda\mathbf{a} = \lambda(a_1, \ldots, a_m) = (u_1, \ldots, u_m).$$

Определим произведение $\circ$ элементов $\lambda \in P$ на элементы из $B^{m(n-1)}$ следующим образом. Если

$$\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{1m}, \ldots, \alpha_{(n-1)1}, \ldots, \alpha_{(n-1)m}) \in B^{m(n-1)},$$

то

$$\lambda \circ \boldsymbol{\alpha} = (u_{11}, \ldots, u_{1m}, \ldots, u_{(n-1)1}, \ldots, u_{(n-1)m}),$$

где

$$(u_{j1},\dots,u_{jm})=\lambda(\alpha_{j1},\dots,\alpha_{jm})$$

для любого $j\in\{1,\dots,n-1\}$.

7.3. Замечание. Если

$$\lambda\mathbf{a}=\lambda(a_1,\dots,a_m)=(\lambda a_1,\dots,\lambda a_m),$$

то

$$\lambda\circ\boldsymbol{\alpha}=(\lambda\alpha_{11},\dots,\lambda\alpha_{1m},\dots,\lambda\alpha_{(n-1)1},\dots,\lambda\alpha_{(n-1)m}).$$

7.4. Теорема. Пусть B – множество, $m\ge 2$, $n\ge 3$, , $<A=B^m,+,\times>$ – ассоциативная алгебра над полем P, $\theta=(\theta_1,\dots,\theta_m)$ – ее нуль. Тогда:

1) $<B^{m(n-1)},\widetilde{+},[\ \ ]_{n,m,m(n-1)}>$ – ассоциативная $(2,n)$-алгебра над P, изоморфная $(2,n)$-алгебре $<A^{n-1},+,[\ \ ]_{n,n-1}>$;

2) в $<B^{m(n-1)},\widetilde{+},[\ \ ]_{n,m,m(n-1)}>$ все элементы являются делителями ее нуля

$$(\underbrace{\theta_1,\dots,\theta_m,\dots,\theta_1,\dots,\theta_m}_{n-1});$$

3) если $<A,+,\times>$ – коммутативна, то $<B^{m(n-1)},\widetilde{+},[\ \ ]_{n,m,m(n-1)}>$ – полуабелева;

4) если $\{A^*=A\backslash\{\boldsymbol{\theta}\},\times\}$ – группа, то $<\widetilde{B},[\ \ ]_{n,m,m(n-1)}>$ – n-арная группа, где $\widetilde{B}$ – множество всех элементов

$$(b_{11},\dots,b_{1m},\dots,b_{(n-1)1},\dots,b_{(n-1)m})\in B^{m(n-1)}$$

таких, что $(b_{j1},\dots,b_{jm})\neq(\theta_1,\dots,\theta_m)$ для любого $j\in\{1,\dots,n-1\}$;

5) для любого

$$\mathbf{b}=(b_{11},\dots,b_{1m},\dots,b_{(n-1)1},\dots,b_{(n-1)m})\in B^{m(n-1)}$$

такого, что $(b_{j1},\dots,b_{jm})=(\theta_1,\dots,\theta_m)$ для некоторого $j\in\{1,\dots,n-1\}$, верно

$$[\underbrace{\mathbf{b}\dots\mathbf{b}}_{n}]_{n,m,m(n-1)}=(\underbrace{\theta_1,\dots,\theta_m,\dots,\theta_1,\dots,\theta_m}_{n-1});$$

6) если множество B содержит более одного элемента, и в $<A,+,\times>$ есть единица, то $<B^{m(n-1)},\widetilde{+},[\ \ ]_{n,m,m(n-1)}>$ – неабелева;

7) если множество B содержит более одного элемента, то в $<B^{m(n-1)},\widetilde{+},[\ \ ]_{n,m,m(n-1)}>$ нет единиц;

8) если $<A^*,\times>$ – группа, то

$$I(B^{m(n-1)},\widetilde{+},[\ \ ]_{n,m,m(n-1)})=J\bigcup\{(\underbrace{\theta_1,\dots,\theta_m,\dots,\theta_1,\dots,\theta_m}_{n-1})\},$$

где J – множество всех элементов

$$(\varepsilon_{11},\dots,\varepsilon_{1m},\dots,\varepsilon_{(n-2)1},\dots,\varepsilon_{(n-2)m},\varepsilon_{(n-1)1},\dots,\varepsilon_{(n-1)m})\in B^{m(n-1)},$$

в которых компоненты $\varepsilon_{11},\dots,\varepsilon_{1m},\dots,\varepsilon_{(n-2)1},\dots,\varepsilon_{(n-2)m}$ выбираются произвольными из B, а компоненты $\varepsilon_{(n-1)1},\dots,\varepsilon_{(n-1)m}$ удовлетворяют условию

$$(\varepsilon_{11},\dots,\varepsilon_{1m})\times\dots\times(\varepsilon_{(n-2)1},\dots,\varepsilon_{(n-2)m})\times(\varepsilon_{(n-1)1},\dots,\varepsilon_{(n-1)m})=(e_1,\dots,e_m),$$

где $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_m)$ – единица группы $< A^*, \times >$ или условию

$$(\varepsilon_{(n-1)1}, \ldots, \varepsilon_{(n-1)m}) = (\varepsilon_{(n-2)1}, \ldots, \varepsilon_{(n-2)m})^{-1} \times \ldots \times (\varepsilon_{11}, \ldots, \varepsilon_{1m})^{-1}.$$

Доказательство. 1) Сразу же заметим, что по следствию 6.2 $< A^{n-1}, +, [\ ]_{n,n-1} >$ – ассоциативная $(2, n)$-алгебра над P.

Ясно, что отображение φ, ставящее в соответствие элементу

$$((\alpha_1^{(1)}, \ldots, \alpha_m^{(1)}), (\alpha_1^{(2)}, \ldots, \alpha_m^{(2)}), \ldots, (\alpha_1^{(n-1)}, \ldots, \alpha_m^{(n-1)})) \in A^{n-1}$$

элемент

$$(\alpha_1^{(1)}, \ldots, \alpha_m^{(1)}, \alpha_1^{(2)}, \ldots, \alpha_m^{(2)}, \ldots, \alpha_1^{(n-1)}, \ldots, \alpha_m^{(n-1)}) \in B^{m(n-1)}$$

является биекцией A^{n-1} на $B^{m(n-1)}$.

Пусть

$$\boldsymbol{\alpha_i} = (\boldsymbol{\alpha_{i1}}, \ldots, \boldsymbol{\alpha_{i(n-1)}}) = ((\alpha_{i1}^{(1)}, \ldots, \alpha_{im}^{(1)}), \ldots, (\alpha_{i1}^{(n-1)}, \ldots, \alpha_{im}^{(n-1)}))$$

– произвольные элементы из A^{n-1}, $i = 1, \ldots, n$. Тогда

$$[\boldsymbol{\alpha_1}\boldsymbol{\alpha_2}\ldots\boldsymbol{\alpha_n}]_{n,n-1}^{\varphi} = (\mathbf{z_1}, \mathbf{z_2}, \ldots, \mathbf{z_{n-1}})^{\varphi} =$$

$$= ((z_{11}, \ldots, z_{1m}), (z_{21}, \ldots, z_{2m}), \ldots, (z_{(n-1)1}, \ldots, z_{(n-1)m}))^{\varphi} =$$

$$= (z_{11}, \ldots, z_{1m}, z_{21}, \ldots, z_{2m}, \ldots, z_{(n-1)1}, \ldots, z_{(n-1)m}),$$

где, ввиду (7.2),

$$\mathbf{z_j} = (z_{j1}, \ldots, z_{jm}) = \boldsymbol{\alpha_{1j}} \times \boldsymbol{\alpha_{2(j+1)}} \times \ldots \times \boldsymbol{\alpha_{(n-j)(n-1)}} \times \boldsymbol{\alpha_{(n-j+1)1}} \times \ldots \times \boldsymbol{\alpha_{(n-1)(j-1)}} \times \boldsymbol{\alpha_{nj}}. \tag{7.3}$$

Кроме того,

$$[\boldsymbol{\alpha_1^{\varphi}}\boldsymbol{\alpha_2^{\varphi}}\ldots\boldsymbol{\alpha_n^{\varphi}}]_{n,m,m(n-1)} =$$

$$= [((\alpha_{11}^{(1)}, \ldots, \alpha_{1m}^{(1)}), (\alpha_{11}^{(2)}, \ldots, \alpha_{1m}^{(2)}), \ldots, (\alpha_{11}^{(n-1)}, \ldots, \alpha_{1m}^{(n-1)}))^{\varphi}$$

$$((\alpha_{21}^{(1)}, \ldots, \alpha_{2m}^{(1)}), (\alpha_{21}^{(2)}, \ldots, \alpha_{2m}^{(2)}), \ldots, (\alpha_{21}^{(n-1)}, \ldots, \alpha_{2m}^{(n-1)}))^{\varphi} \ldots$$

$$\ldots((\alpha_{n1}^{(1)}, \ldots, \alpha_{nm}^{(1)}), (\alpha_{n1}^{(2)}, \ldots, \alpha_{nm}^{(2)}), \ldots, (\alpha_{n1}^{(n-1)}, \ldots, \alpha_{nm}^{(n-1)}))^{\varphi}]_{n,m,m(n-1)} =$$

$$= [(\alpha_{11}^{(1)}, \ldots, \alpha_{1m}^{(1)}, \alpha_{11}^{(2)}, \ldots, \alpha_{1m}^{(2)}, \ldots, \alpha_{11}^{(n-1)}, \ldots, \alpha_{1m}^{(n-1)})$$

$$(\alpha_{21}^{(1)}, \ldots, \alpha_{2m}^{(1)}, \alpha_{21}^{(2)}, \ldots, \alpha_{2m}^{(2)}, \ldots, \alpha_{21}^{(n-1)}, \ldots, \alpha_{2m}^{(n-1)}) \ldots$$

$$\ldots, (\alpha_{n1}^{(1)}, \ldots, \alpha_{nm}^{(1)}, \alpha_{n1}^{(2)}, \ldots, \alpha_{nm}^{(2)}, \ldots, \alpha_{n1}^{(n-1)}, \ldots, \alpha_{nm}^{(n-1)})]_{n,m,m(n-1)} =$$

$$= (y_{11}, \ldots, y_{1m}, \ldots, y_{21}, \ldots, y_{2m}, \ldots, y_{(n-1)1}, \ldots, y_{(n-1)m}),$$

где, согласно определению операции $[\ ]_{n,m,m(n-1)}$, все y_{jk} определяются равенством (7.1). Так как правые части в (7.1) и (7.3) равны, то

$$[\boldsymbol{\alpha_1}\boldsymbol{\alpha_2}\ldots\boldsymbol{\alpha_n}]_{n,n-1}^{\varphi} = [\boldsymbol{\alpha_1^{\varphi}}\boldsymbol{\alpha_2^{\varphi}}\ldots\boldsymbol{\alpha_n^{\varphi}}]_{n,m,m(n-1)} \tag{7.4}$$

Пусть

$$\boldsymbol{\alpha} = ((\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{1m}), \ldots, (\alpha_{(n-1)1}, \ldots, \alpha_{(n-1)m})), \quad \boldsymbol{\beta} = ((\beta_{11}, \ldots, \beta_{1m}), \ldots, (\beta_{(n-1)1}, \ldots, \beta_{(n-1)m}))$$

произвольные элементы из A^{n-1}. Тогда

$$(\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta})^{\boldsymbol{\varphi}} = (((\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{1m}), \ldots, (\alpha_{(n-1)1}, \ldots, \alpha_{(n-1)m}))+$$

$$+((\beta_{11},\dots,\beta_{1m}),\dots,(\beta_{(n-1)1},\dots,\beta_{(n-1)m})))^{\varphi} =$$
$$=((\alpha_{11},\dots,\alpha_{1m})+(\beta_{11},\dots,\beta_{1m}),\dots,(\alpha_{(n-1)1},\dots,\alpha_{(n-1)m})+(\beta_{(n-1)1},\dots,\beta_{(n-1)m}))^{\varphi} =$$
$$=((v_{11},\dots,v_{1m}),\dots,(v_{(n-1)1},\dots,v_{(n-1)m}))^{\varphi} = (v_{11},\dots,v_{1m},\dots,v_{(n-1)1},\dots,v_{(n-1)m}),$$

где для любого $j=1,\dots,n-1$ положено

$$(v_{j1},\dots,v_{jm}) = (\alpha_{j1},\dots,\alpha_{jm}) + (\beta_{j1},\dots,\beta_{jm}). \tag{7.5}$$

Кроме того,

$$\boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{\varphi}} \mathbin{\widetilde{+}} \boldsymbol{\beta}^{\boldsymbol{\varphi}} = ((\alpha_{11},\dots,\alpha_{1m}),\dots,(\alpha_{(n-1)1},\dots,\alpha_{(n-1)m}))^{\varphi} \mathbin{\widetilde{+}}$$
$$\mathbin{\widetilde{+}} ((\beta_{11},\dots,\beta_{1m}),\dots,(\beta_{(n-1)1},\dots,\beta_{(n-1)m}))^{\varphi} =$$
$$=(\alpha_{11},\dots,\alpha_{1m},\dots,\alpha_{(n-1)1},\dots,\alpha_{(n-1)m}) \mathbin{\widetilde{+}} (\beta_{11},\dots,\beta_{1m},\dots,\beta_{(n-1)1},\dots,\beta_{(n-1)m}) =$$
$$=(u_{11},\dots,u_{1m},\dots,u_{(n-1)1},\dots,u_{(n-1)m}),$$

где, согласно определению операции $\widetilde{+}$,

$$(u_{j1},\dots,u_{jm}) = (\alpha_{j1},\dots,\alpha_{jm}) + (\beta_{j1},\dots,\beta_{jm}). \tag{7.6}$$

для любого $j=\{1,\dots,n-1\}$. Так как правые части в (7.5) и (7.6) равны, то

$$(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})^{\boldsymbol{\varphi}} = \boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{\varphi}} \mathbin{\widetilde{+}} \boldsymbol{\beta}^{\boldsymbol{\varphi}} \tag{7.7}$$

Пусть

$$\boldsymbol{\alpha} = ((\alpha_{11},\dots,\alpha_{1m}),\dots,(\alpha_{(n-1)1},\dots,\alpha_{(n-1)m}))$$

– произвольный элемент из A^{n-1}. Тогда

$$(\lambda\boldsymbol{\alpha})^{\varphi} = (\lambda((\alpha_{11},\dots,\alpha_{1m}),\dots,(\alpha_{(n-1)1},\dots,\alpha_{(n-1)m})))^{\varphi} =$$
$$=(\lambda(\alpha_{11},\dots,\alpha_{1m}),\dots,\lambda(\alpha_{(n-1)1},\dots,\alpha_{(n-1)m}))^{\varphi} =$$
$$=((v_{11},\dots,v_{1m}),\dots,(v_{(n-1)1},\dots,v_{(n-1)m}))^{\varphi} =$$
$$=(v_{11},\dots,v_{1m},\dots,v_{(n-1)1},\dots,v_{(n-1)m}),$$

где положено

$$(v_{j1},\dots,v_{jm}) = \lambda(\alpha_{j1},\dots,\alpha_{jm}). \tag{7.8}$$

Кроме того,

$$\lambda\circ\boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{\varphi}} = \lambda\circ((\alpha_{11},\dots,\alpha_{1m}),\dots,(\alpha_{(n-1)1},\dots,\alpha_{(n-1)m}))^{\varphi} =$$
$$=\lambda\circ(\alpha_{11},\dots,\alpha_{1m},\dots,\alpha_{(n-1)1},\dots,\alpha_{(n-1)m}) =$$
$$=(u_{11},\dots,u_{1m},\dots,u_{(n-1)1},\dots,u_{(n-1)m}),$$

где, согласно определению произведения $\circ$,

$$(u_{j1},\dots,u_{jm}) = \lambda(\alpha_{j1},\dots,\alpha_{jm}). \tag{7.9}$$

для любого $j=\{1,\dots,n-1\}$. Так как правые части в (7.8) и (7.9) равны, то

$$(\lambda\boldsymbol{\alpha})^{\varphi} = \lambda\circ\boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{\varphi}} \tag{7.10}$$

Из (7.4), (7.7) и (7.10) следует, что φ является изоморфизмом $< A^{n-1}, +, [\ \ ]_{n,n-1} >$ на $< B^{m(n-1)}, \widetilde{+}, [\ \ ]_{n,m,m(n-1)} >$. А так как $< A^{n-1}, +, [\ \ ]_{n,n-1} >$ – ассоциативная $(2, n)$-алгебра над P, то $< B^{m(n-1)}, \widetilde{+}, [\ \ ]_{n,m,m(n-1)} >$ – ассоциативная $(2, n)$-алгебра над P.

2) согласно утверждению 1) следствия 6.2, в $(2, n)$-алгебре $< A^{n-1}, +, [\ \ ]_{n,n-1} >$ все элементы являются делителями ее нуля

$$(\underbrace{\boldsymbol{\theta} \ldots \boldsymbol{\theta}}_{n-1}) = (\underbrace{(\theta_1, \ldots, \theta_m), \ldots, (\theta_1, \ldots, \theta_m)}_{n-1}).$$

Далее используется установленный в 1) изоморфизм φ.

3) Используются утверждение 2) следствия 6.2 и изоморфизм φ.

4) Используются утверждение 3) следствия 6.2 и равенство

$$((A \backslash \{(\theta_1, \ldots, \theta_m)\})^{n-1})^{\varphi} = \widetilde{B}.$$

5) Используются утверждение 4) следствия 6.2 и изоморфизм φ.

6) Используются утверждение 5) следствия 6.2 и изоморфизм φ.

7) Используются утверждение 6) следствия 6.2 и изоморфизм φ.

8) Ясно, что

$$(I(A^{n-1}, +, [\ \ ]_{n,n-1}))^{\varphi} = J \bigcup \{(\underbrace{\theta_1, \ldots, \theta_m, \ldots, \theta_1, \ldots, \theta_m}_{n-1})\}.$$

Кроме того, по доказанному в (1),

$$(I(A^{n-1}, +, [\ \ ]_{n,n-1}))^{\varphi} = I(B^{m(n-1)}, \widetilde{+}, [\ \ ]_{n,m,m(n-1)}).$$

Поэтому

$$I(B^{m(n-1)}, \widetilde{+}, [\ \ ]_{n,m,m(n-1)}) = J \bigcup \{(\underbrace{\theta_1, \ldots, \theta_m, \ldots, \theta_1, \ldots, \theta_m}_{n-1})\}.$$

Теорема доказана.

Если в теореме 7.4 положить $m = 2$, то получим

7.5. Теорема. Пусть B – множество, $n \geq 3$, $< A = B^2, +, \times >$ – ассоциативная алгебра над полем P, $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ – ее нуль. Тогда:

1) $< B^{2(n-1)}, \widetilde{+}, [\ \ ]_{n,2,2(n-1)} >$ – ассоциативная $(2, n)$-алгебра над P, изоморфная $(2, n)$-алгебре $< A^{n-1}, +, [\ \ ]_{n,n-1} >$;

2) в $< B^{2(n-1)}, \widetilde{+}, [\ \ ]_{n,2,2(n-1)} >$ все элементы являются делителями ее нуля

$$(\underbrace{\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_1, \theta_2}_{n-1});$$

3) если $< A, +, \times >$ – коммутативна, то $< B^{2(n-1)}, \widetilde{+}, [\ \ ]_{n,2,2(n-1)} >$ – полуабелева;

4) если $\{A^* = A \backslash \{\theta\}, \times\}$ – группа, то $< \widetilde{B}, [\ \ ]_{n,2,2(n-1)} >$ – n-арная группа, где $\widetilde{B}$ – множество всех элементов

$$(b_{11}, b_{12}, \ldots, b_{(n-1)1}, b_{(n-1)2}) \in B^{2(n-1)}$$

таких, что $(b_{j1}, b_{j2}) \neq (\theta_1, \theta_2)$ для любого $j \in \{1, \ldots, n-1\}$;

5) для любого $\mathbf{b} = (b_{11}, b_{12}, \ldots, b_{(n-1)1}, b_{(n-1)2}) \in B^{2(n-1)}$ такого, что $(b_{j1}, b_{j2}) = (\theta_1, \theta_2)$ для некоторого $j \in \{1, \ldots, n-1\}$, верно

$$[\underbrace{\mathbf{b} \ldots \mathbf{b}}_{n}]_{n,2,2(n-1)} = (\underbrace{\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_1, \theta_2}_{n-1});$$

6) если множество B содержит более одного элемента, и в $< A, +, \times >$ есть единица, то $< B^{2(n-1)}, \widetilde{+}, [\ \ ]_{n,2,2(n-1)} >$ – неабелева;

7) если множество B содержит более одного элемента, то в $< B^{2(n-1)}, \widetilde{+}, [\ \ ]_{n,2,2(n-1)} >$ нет единиц;

8) если $< A^*, \times >$ – группа, то

$$I(B^{2(n-1)}, \widetilde{+}, [\ \ ]_{n,2,2(n-1)}) = J \bigcup \{(\underbrace{\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_1, \theta_2}_{n-1})\},$$

где J – множество всех элементов

$$(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}, \ldots, \varepsilon_{(n-2)1}, \varepsilon_{(n-2)2}, \varepsilon_{(n-1)1}, \varepsilon_{(n-1)2}) \in B^{2(n-1)},$$

в которых компоненты $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}, \ldots, \varepsilon_{(n-2)1}, \varepsilon_{(n-2)2}$ выбираются произвольными из B, а компоненты $\varepsilon_{(n-1)1}, \varepsilon_{(n-1)2}$ удовлетворяют условию

$$(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}) \times \ldots \times (\varepsilon_{(n-2)1}, \varepsilon_{(n-2)2}) \times (\varepsilon_{(n-1)1}, \varepsilon_{(n-1)2}) = (e_1, e_2),$$

где $\mathbf{e} = (e_1, e_2)$ – единица группы $< A^*, \times >$ или условию

$$(\varepsilon_{(n-1)1}, \varepsilon_{(n-1)2}) = (\varepsilon_{(n-2)1}, \varepsilon_{(n-2)2})^{-1} \times \ldots \times (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12})^{-1}.$$

При формулировке следующих следствий будем учитывать замечания 7.2 и 7.3.

Если в теореме 7.5 положить $n = 3$, $B = \mathbb{R}$, $< A = \mathbb{R}^2, +, \times >$ – алгебра комплексных чисел с операцией $(a, b) \times (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$, то получим

7.6. Следствие. Определим на $\mathbb{R}^4$ тернарную операцию

$$[(x_1, x_2, x_3, x_4)(y_1, y_2, y_3, y_4)(z_1, z_2, z_3, z_4)]_{3,2,4} = (r_1, r_2, r_3, r_4),$$

где

$$r_1 = x_1y_3z_1 - x_2y_4z_1 - x_1y_4z_2 - x_2y_3z_2, \ \ r_2 = x_1y_3z_2 - x_2y_4z_2 + x_1y_4z_1 + x_2y_3z_1,$$

$$r_3 = x_3y_1z_3 - x_4y_2z_3 - x_3y_2z_4 - x_4y_1z_4, \ \ r_4 = x_3y_1z_4 - x_4y_2z_4 + x_3y_2z_3 + x_4y_1z_3.$$

Тогда:

1) $< \mathbb{R}^4, +, [\ \ ]_{3,2,4} >$ – ассоциативная, неабелева, полуабелева $(2, 3)$-алгебра, в которой все элементы являются делителями ее нуля $(0, 0, 0, 0)$, и в которой нет единиц;

2) $< \widetilde{\mathbb{R}}, [\ \ ]_{3,2,4} >$ – тернарная группа, где

$$\widetilde{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^4 \backslash (\{(0, 0, a, b) | a, b \in \mathbb{R}\} \bigcup \{(a, b, 0, 0) | a, b \in \mathbb{R}\});$$

3) множество всех мультипликативных идемпотентов в $< \mathbb{R}^4, +, [\ \ ]_{3,2,4} >$ имеет следующий вид

$$I(\mathbb{R}^4, +, [\ \ ]_{3,2,4}) = \{(a, b, \frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2}) | a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 \neq 0\} \bigcup \{(0, 0, 0, 0)\}.$$

Если в теореме 7.5 положить $n = 3$, $B = \mathbb{R}$, $< A = \mathbb{R}^2, +, \times >$ – алгебра двойных чисел с операцией $(a, b) \times (c, d) = (ac + bd, ad + bc)$, то получим

7.7. Следствие. Определим на $\mathbb{R}^4$ тернарную операцию

$$[(x_1, x_2, x_3, x_4)(y_1, y_2, y_3, y_4)(z_1, z_2, z_3, z_4)]_{3,2,4} = (r_1, r_2, r_3, r_4),$$

где

$$r_1 = x_1y_3z_1 + x_2y_4z_1 + x_1y_4z_2 + x_2y_3z_2, \quad r_2 = x_1y_3z_2 + x_2y_4z_2 + x_1y_4z_1 + x_2y_3z_1,$$

$$r_3 = x_3y_1z_3 + x_4y_2z_3 + x_3y_2z_4 + x_4y_1z_4, \quad r_4 = x_3y_1z_4 + x_4y_2z_4 + x_3y_2z_3 + x_4y_1z_3.$$

Тогда $< \mathbb{R}^4, +, [\ \ ]_{3,2,4} >$ – ассоциативная неабелева, полуабелева $(2,3)$-алгебра, в которой все элементы являются делителями ее нуля $(0,0,0,0)$, и в которой нет единиц.

Если в теореме 7.5 положить $n = 3$, $B = \mathbb{R}$, $< A = \mathbb{R}^2, +, \times >$ – алгебра дуальных чисел с операцией $(a,b) \times (c,d) = (ac, ad + bc)$, то получим

7.8. Следствие. Определим на $\mathbb{R}^4$ тернарную операцию

$$[(x_1,x_2,x_3,x_4)(y_1,y_2,y_3,y_4)(z_1,z_2,z_3,z_4)]_{3,2,4} = (r_1,r_2,r_3,r_4),$$

где

$$r_1 = x_1y_3z_1, \quad r_2 = x_1y_3z_2 + x_1y_4z_1 + x_2y_3z_1,$$

$$r_3 = x_3y_1z_3, \quad r_4 = x_3y_1z_4 + x_3y_2z_3 + x_4y_1z_3.$$

Тогда $< \mathbb{R}^4, +, [\ \ ]_{3,2,4} >$ – ассоциативная неабелева, полуабелева $(2,3)$-алгебра, в которой все элементы являются делителями ее нуля $(0,0,0,0)$, и в которой нет единиц.

Если в теореме 7.5 положить $n = 4$, $B = \mathbb{R}$, $< A = \mathbb{R}^2, +, \times >$ – алгебра комплексных чисел, то получим

7.9. Следствие. Определим на $\mathbb{R}^6$ 4-арную операцию

$$[(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6)(y_1,y_2,y_3,y_4,y_5,y_6)$$

$$(z_1,z_2,z_3,z_4,z_5,z_6)(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5,u_6)]_{4,2,6} = (r_1,r_2,r_3,r_4,r_5,r_6),$$

где

$$r_1 = x_1y_3z_5u_1 - x_2y_4z_5u_1 - x_1y_4z_6u_1 - x_2y_3z_6u_1 - x_1y_3z_6u_2 + x_2y_4z_6u_2 - x_1y_4z_5u_2 - x_2y_3z_5u_2,$$

$$r_2 = x_1y_3z_5u_2 - x_2y_4z_5u_2 - x_1y_4z_6u_2 - x_2y_3z_6u_2 + x_1y_3z_6u_1 - x_2y_4z_6u_1 + x_1y_4z_5u_1 + x_2y_3z_5u_1,$$

$$r_3 = x_3y_5z_1u_3 - x_4y_6z_1u_3 - x_3y_6z_2u_3 - x_4y_5z_2u_3 - x_3y_5z_2u_4 + x_4y_6z_2u_4 - x_3y_6z_1u_4 - x_4y_5z_1u_4,$$

$$r_4 = x_3y_5z_1u_4 - x_4y_6z_1u_4 - x_3y_6z_2u_4 - x_4y_5z_2u_4 + x_3y_5z_2u_3 - x_4y_6z_2u_3 + x_3y_6z_1u_3 + x_4y_5z_1u_3,$$

$$r_5 = x_5y_1z_3u_5 - x_6y_2z_3u_5 - x_5y_2z_4u_5 - x_6y_1z_4u_5 - x_5y_1z_4u_6 + x_6y_2z_4u_6 - x_5y_2z_3u_6 - x_6y_1z_3u_6,$$

$$r_6 = x_5y_1z_3u_6 - x_6y_2z_3u_6 - x_5y_2z_4u_6 - x_6y_1z_4u_6 + x_5y_1z_4u_5 - x_6y_2z_4u_5 + x_5y_2z_3u_5 + x_6y_1z_3u_5.$$

Тогда:

1) $< \mathbb{R}^6, +, [\ \ ]_{4,2,6} >$ – ассоциативная неабелева, полуабелева $(2,4)$-алгебра, в которой все элементы являются делителями ее нуля $(0,0,0,0,0,0)$, и в которой нет единиц;

2) $< \widetilde{\mathbb{R}}, [\ \ ]_{4,2,6} >$ – 4-арная группа, где

$$\widetilde{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^6 \backslash (\{(0,0,a,b,c,d) | a,b,c,d \in \mathbb{R}\} \bigcup$$

$$\bigcup \{(a,b,0,0,c,d) | a,b,c,d \in \mathbb{R}\} \bigcup \{(a,b,c,d,0,0) | a,b,c,d \in \mathbb{R}\});$$

3) множество всех мультипликативных идемпотентов в $< \mathbb{R}^6, +, [\ \ ]_{4,2,6} >$ имеет следующий вид

$$I(\mathbb{R}^6, +, [\ \ ]_{4,2,6}) =$$

$$= \{(a,b,c,d,\frac{ac-bd}{(a^2+b^2)(c^2+d^2)},\frac{-ad-bc}{(a^2+b^2)(c^2+d^2)})|a,b,c,d\in\mathbb{R},$$
$$a^2+b^2\neq 0,\ c^2+d^2\neq 0\}\bigcup\{(0,0,0,0,0,0)\}.$$

Если в теореме 7.4 положить $m=4$, $n=3$, $B=\mathbb{R}$, $<A=\mathbb{R}^4,+,\times>$ – алгебра кватернионов с операцией

$$(a_1,b_1,c_1,d_1)\times(a_2,b_2,c_2,d_2)=(a_1a_2-b_1b_2-c_1c_2-d_1d_2,\ a_1b_2+b_2a_1+c_1d_2-d_1c_2,$$
$$a_1c_2+c_1a_2+d_1b_2-b_1d_2,\ a_1d_2+d_1a_2+b_1c_2-c_1b_2),$$

то получим

7.10. Следствие. Определим на $\mathbb{R}^8$ тернарную операцию

$$[(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8)(y_1,y_2,y_3,y_4,y_5,y_6,y_7,y_8)(z_1,z_2,z_3,z_4,z_5,z_6,z_7,z_8)]_{3,4,8}=$$
$$=(r_1,r_2,r_3,r_4,r_5,r_6,r_7,r_8),$$

где

$$r_1=x_1y_5z_1-x_2y_6z_1-x_3y_7z_1-x_4y_8z_1-x_1y_6z_2-x_2y_5z_2-x_3y_8z_2+x_4y_7z_2-$$
$$-x_1y_7z_3-x_3y_5z_3-x_4y_6z_3+x_2y_8z_3-x_1y_8z_4-x_4y_5z_4-x_2y_7z_4+x_3y_6z_4,$$
$$r_2=x_1y_5z_2-x_2y_6z_2-x_3y_7z_2-x_4y_8z_2+x_1y_6z_1+x_2y_5z_1+x_3y_8z_1-x_4y_7z_1+$$
$$+x_1y_7z_4+x_3y_5z_4+x_4y_6z_4-x_2y_8z_4-x_1y_8z_3-x_4y_5z_3-x_2y_7z_3+x_3y_6z_3,$$
$$r_3=x_1y_5z_3-x_2y_6z_3-x_3y_7z_3-x_4y_8z_3+x_1y_7z_1+x_3y_5z_1+x_4y_6z_1-x_2y_8z_1+$$
$$+x_1y_8z_2+x_4y_5z_2+x_2y_7z_2-x_3y_6z_2-x_1y_6z_4-x_2y_5z_4-x_3y_8z_4+x_4y_7z_4,$$
$$r_4=x_1y_5z_4-x_2y_6z_4-x_3y_7z_4-x_4y_8z_4+x_1y_8z_1+x_4y_5z_1+x_2y_7z_1-x_3y_6z_1+$$
$$+x_1y_6z_3+x_2y_5z_3+x_3y_8z_3-x_4y_7z_3-x_1y_7z_2-x_3y_5z_2-x_4y_6z_2+x_2y_8z_2).$$
$$r_5=x_5y_1z_5-x_6y_2z_5-x_7y_3z_5-x_8y_4z_5-x_5y_2z_6-x_6y_1z_6-x_7y_4z_6+x_8y_3z_6-$$
$$-x_5y_3z_7-x_6y_1z_7-x_7y_2z_7+x_8y_4z_7-x_5y_4z_8-x_6y_1z_8-x_7y_3z_8+x_8y_2z_8,$$
$$r_6=x_5y_1z_6-x_6y_2z_6-x_7y_3z_6-x_8y_4z_6+x_5y_2z_5+x_6y_1z_5+x_7y_4z_5-x_8y_3z_5+$$
$$+x_5y_3z_8+x_6y_1z_8+x_7y_2z_8-x_8y_4z_8-x_5y_4z_7-x_6y_1z_7-x_7y_3z_7+x_8y_2z_7,$$
$$r_7=x_5y_1z_7-x_6y_2z_7-x_7y_3z_7-x_8y_4z_7+x_5y_3z_5+x_6y_1z_5+x_7y_2z_5-x_8y_4z_5+$$
$$+x_5y_4z_6+x_6y_1z_6+x_7y_3z_6-x_8y_2z_6-x_5y_2z_8-x_6y_1z_8-x_7y_4z_8+x_8y_3z_8,$$
$$r_8=x_5y_1z_8-x_6y_2z_8-x_7y_3z_8-x_8y_4z_8+x_5y_4z_5+x_6y_1z_5+x_7y_3z_5-x_8y_2z_5+$$
$$+x_5y_2z_7+x_6y_1z_7+x_7y_4z_7-x_8y_3z_7-x_5y_3z_6-x_6y_1z_6-x_7y_2z_6+x_8y_4z_6).$$

Тогда:

1) $<\mathbb{R}^8,+,[\ \ ]_{3,4,8}>$ – ассоциативная, неполуабелева $(2,3)$-алгебра, в которой все элементы являются делителями ее нуля $(0,0,0,0,0,0,0,0)$, и в которой нет единиц;

2) $<\widetilde{\mathbb{R}},[\ \ ]_{3,4,8}>$ – тернарная группа, где

$$\widetilde{\mathbb{R}}=\mathbb{R}^8\backslash(\{(0,0,0,0,a,b,c,d)|a,b,c,d\in\mathbb{R}\}\bigcup$$
$$\bigcup\{(a,b,c,d,0,0,0,0)|a,b,c,d\in\mathbb{R}\});$$

3) множество всех мультипликативных идемпотентов в $< \mathbb{R}^8, +, [\ \ ]_{3,4,8} >$ имеет следующий вид

$$I(\mathbb{R}^8, +, [\ \ ]_{3,4,8}) =$$

$$= \{(a, b, c, d, \frac{a}{a^2+b^2+c^2+d^2}, \frac{-b}{a^2+b^2+c^2+d^2}, \frac{-c}{a^2+b^2+c^2+d^2}, \frac{-d}{a^2+b^2+c^2+d^2})|$$

$$a, b, c, d \in \mathbb{R}, a^2+b^2+c^2+d^2 \neq 0\} \bigcup \{(0,0,0,0,0,0,0,0)\}.$$

Заметим, что неполуабелевость $< \mathbb{R}^8, +, [\ \ ]_{3,4,8} >$ не следует из теоремы 7.4. Но в этом можно легко убедиться. Если положить

$$\mathbf{x} = (0,1,0,0,0,0,0,0), \ \ \mathbf{y} = (1,0,0,0,1,0,0,0), \ \ \mathbf{z} = (0,0,1,0,0,0,0,0),$$

то, проделав соответствующие вычисления, получим

$$[\mathbf{xyz}]_{3,4,8} = (0,0,0,1,0,0,0,0), \ \ [\mathbf{zyx}]_{3,4,8} = (0,0,0,-1,0,0,0,0),$$

то есть $[\mathbf{xyz}]_{3,4,8} \neq [\mathbf{zyx}]_{3,4,8}$. Следовательно, $(2,3)$-алгебра $< \mathbb{R}^8, +, [\ \ ]_{3,4,8} >$ не является полуабелевой.

Литература

[1] Dörnte, W. Untersuchungen über einen verallgemeinerten Gruppenbegriff / W. Dörnte // Math. Z. – 1928. – Bd. 29. – S. 1 – 19.

[2] Post, E. L. Polyadic groups / E. L. Post // Trans. Amer. Math. Soc. – 1940. – Vol. 48, № 2. – P.208 – 350.

[3] Русаков, С.А. Алгебраические n-арные системы / С.А. Русаков. – Минск: Навука і тэхніка. – 1992.

[4] Гальмак, А. М. N-арные группы. Часть 1 / А. М. Гальмак. – Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины. – 2003.

[5] Гальмак, А. М. N-арные группы. Часть 2 / А. М. Гальмак. – Минск: Изд.центр БГУ. – 2007.

[6] Гальмак, А. М. N-арные группы / А. М. Гальмак // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. – 2007. – № 2 (8). – С. 76 – 95.

[7] Čupona, G. On $[m, n]$-rings / G. Čupona // Bull. Soc. math. phys. Maced. – 1965. – Vol. 16. – P. 5 – 10.

[8] Crombez, G. On (n, m)-rings / G. Crombez // Abh. Math. Semin. Univ. – Hamburg. – 1972. – Vol. 37. – P. 180 – 199.