ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ И ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ ФИЗИКИ

Тришин В. Н.

vtrishin@mtu-net.ru

Статья содержит обзор и краткое введение в дифференциально-геометрические и топологические структуры, которые находят приложения в физике. Основное внимание уделяется изложению идей и методов, лежащих в основе описываемых геометрических и топологических объектов.

1 Введение

Развитие физики и математики в последние десятилетия XX века показало, что между этими внешне различными науками существует очень тесная связь. Физические теории не только используют язык математики для своей формулировки. Многие физические теории развивают по сути те же самые идеи, что и теории математические. Теория калибровочных полей, являющаяся классической теорией Стандартной модели взаимодействия элементарных частиц, с математической точки зрения представляет собой теорию связностей в векторных расслоениях. Сечения этих расслоений над пространством-временем интерпретируются (на классическом уровне) как поля материи, а поля – переносчики взаимодействий – как линейные связности на этих расслоениях. В Общей теории относительности, представляющей собой классическую теорию гравитации, гравитационное поле описывается метрическим тензором пространства-времени, кривизна которого соответствует напряженности гравитационного поля.

Кроме того, постановка задач и методы решения в одной области часто приводят к лучшему пониманию задач и способов их решения в другой. Например, проблема классификации инстантонов в уравнениях Янга-Миллса была решена методами алгебраической геометрии, а экзотические гладкие структуры на четырехмерных многообразиях исследовались с помощью уравнений Янга-Миллса. Многие современные геометрические и топологические структуры возникают как физические объекты в квантовых полевых моделях и струнных теориях.

Предлагаемая статья ориентирована на студентов-физиков, приступающих к самостоятельной работе в области математической физики. Основное внимание уделено не формулировкам и доказательствам теорем (которые в тексте явно, как правило, даже не формулируются), а изложению сути базовых математических конструкций, идей и методов, нашедших свое применение в теоретической физике. Таким образом, первая цель работы – это введение физика в стандартные геометро-топологические концепции с помощью наводящих интуитивных примеров. Вторая цель статьи заключается в описании карты-схемы современной геометрии, которая позволила бы начинающему физику-теоретику ориентироваться в столь разнообразных математических структурах, которые возникают в современной физике. Поэтому статью можно рассматривать как своего рода взгляд на ландшафт геометрии с “высоты птичьего полета”.

Проникновение геометрии в современную теорию поля чрезвычайно широко, и рассмотреть, даже кратко, в одном обзоре все аспекты этого взаимодействия физики и математики невозможно. Мы ограничимся только теми структурами, которые связаны с классической теорией поля, оставляя в стороне практически все темы, связанные с подходами к геометризации квантовых полей. Основное внимание уделено геометрическому аппарату калибровочных теорий – главным и присоединенным расслоениям, линейным связностям на этих расслоениях и характеристическим классам. Описаны такие базовые понятия как топологическое пространство, многообразие, дифференциальные формы и векторные поля, группы гомологий. Разобраны также другие геометрические объекты, такие как метрика, симплектическая структура, комплексная структура и др.

О соотношении топологии, геометрии и физики

Обычный путь построения физической теории заключается в выборе исходного многообразия (например, пространства-времени) и записи лагранжиана для полей, заданных на этом многообразии. Уравнения поля, полученные при варьировании функционала действия, описывают динамику соответствующей физической системы. Вообще говоря, понятие многообразия возникает всегда, когда приходится сталкиваться с пространствами, которые локально могут быть описаны набором из n вещественных чисел. Можно представлять себе многообразие как составленное из кусков пространства $\mathbb{R}^n$, склеенных друг с другом посредством гомеоморфизмов (непрерывных обратимых отображений). Как правило, это многообразие несет на себе некоторую дополнительную структуру: риманову метрику, динамическую систему и т. д. Обычно эта структура и оказывается объектом изучения, а многообразие играет роль фона. В этом случае мы имеем дело с (локальной) дифференциальной геометрией, которая представляет собой по сути обобщение обычного математического анализа.

Но многообразие является далеко не самым элементарным объектом. Оно несет в себе определенную глобальную информацию, которую можно извлекать, используя дополнительные структуры в качестве инструментов исследования. Исследование этих глобальных свойств, не меняющихся при непрерывных деформациях, составляет основную задачу топологии.

Поскольку многообразие (связное, без края) устроено одинаково во всех своих точках (группа диффеоморфизмов действует транзитивно, то есть одну точку многообразия может перевести в любую другую), то для извлечения внутренних свойств многообразия на нем необходимо искусственно ввести неоднородную структуру, по свойствам которой можно было бы судить о топологических свойствах пространства. Таким образом, структуры на многообразии (в том числе и те, которые используются в физике) несут как свою собственную “индивидуальную” информацию, так и информацию, которую они наследуют от пространства, на котором они заданы.

Например, в дифференциальной топологии основным инструментом исследования является дифференцируемое (гладкое) отображение исследуемого многообразия в некоторое известное. Так в теории Морса исследуются линии уровня $f^{-1}(y)$ гладкой функции $f : M \to \mathbb{R}$, особенности которой устроены простейшим образом. В алгебраической топологии с каждым пространством связываются объекты алгебраической природы: группы гомотопии, группы гомологий и т. д. Основная задача топологии в этом случае заключается в характеризации пространства посредством алгебраических инвариантов. Простейший пример: ориентируемые замкнутые связные двумерные многообразия полностью (с точностью до диффеоморфизма) характеризуются родом g (количеством ручек, вклеенных в сферу).

2 Топологические пространства

Простейшей структурой, которую можно задать на множестве, является топологическая структура. Она определяет отношение близости между элементами множества. Существенно, что эта структура не позволяет дифференцировать функции, заданные на множестве, а также, вообще говоря, не определяет такие геометрические понятия как расстояние или угол. Для вычисления производных, векторов и т. п. необходимо определить структуру многообразия, которое можно представлять себе как пространство, склеенное из областей $\mathbb{R}^n$. В топологическом пространстве (то есть множестве с топологической структурой) по сути можно только определить принадлежность точки к окрестности любой другой точки.

Определение. **Топологическое пространство** – это пара $\{X, \tau\}$, где X – произвольное множество, а τ – набор подмножеств $\tau_i \subset X$, причем τ удовлетворяет следующим условиям:

1) $\varnothing \in \tau$, $X \in \tau$.

2) Объединение произвольного семейства множеств, принадлежащих τ, принадлежит τ. То есть, если $U_a \in \tau\ \forall a \in A$, где A множество произвольного индекса (принимающего конечное или бесконечное число значений), то $\bigcup U_a \in \tau$.

3) Пересечение конечного семейства множеств, принадлежащих τ, принадлежит τ. То есть, если $U_i \in \tau\ i = 1, \ldots, n$, то $\bigcap U_i \in \tau$.

Подмножества, принадлежащие набору τ, называются *открытыми множествами*, а набор τ – *топологией* в X.

Отображение $f : X \mapsto Y$ топологических пространств называется *непрерывным*, если прообраз $f^{-1}(U)$ каждого открытого подмножества $U \subset Y$ является открытым множеством в X. Если отображение $f : X \mapsto Y$ непрерывно, взаимно однозначно и обратное к нему отображение $f^{-1} : Y \mapsto X$ тоже непрерывно, то отображение f называется *гомеоморфизмом*, а пространства X и Y – *гомеоморфными*. Заметим, что непрерывное взаимно-однозначное отображение может не иметь непрерывного обратного, например отображение $[0, 1) \ni x \to y = \exp(2\pi i x)$, не являющееся гомеоморфизмом. В этом примере отображение является *инъекцией* (injection) отрезка $[0, 1)$ в плоскость $\mathbb{R}^2$. Инъекция, являющаяся гомеоморфизмом, называется *вложением* (embedding).

Гомеоморфные пространства эквивалентны с топологической точки зрения. Можно сказать, что в топологии исследуются свойства пространств, сохраняющиеся при непрерывных отображениях. Существенно, что эти отображения могут быть даже не дифференцируемы.

Некоторые классы топологических пространств:

1. Пространство называется *хаусдорфовым*, если любую пару его точек можно окружить непересекающимися друг с другом открытыми множествами.
2. Пространство X называется *компактным*, если из любого счетного числа открытых областей, покрывающих X, можно выбрать *конечное* число покрывающих X. Например, дискретное пространство компактно тогда, и только тогда, когда оно конечно (в качестве покрывающих областей возьмем области, состоящие из одной точки). В компактном пространстве любая бесконечная последовательность имеет предельную точку.
3. Топологическое пространство *локально компактно*, если каждая точка имеет компактную окрестность. Очевидно, что все дискретные пространства локально компактны. Локально компактны также пространства $\mathbb{R}^n$, а бесконечномерные гильбертовы пространства не локально компактны.

4. Пространство называется *связным*, если оно не является объединением двух открытых непересекающихся множеств. Компонента связности точки пространства – это максимальное связное множество, содержащее эту точку. Пространство называется *линейно связным*, если любые две точки в нем можно соединить непрерывной кривой.

Для описания топологии пространство обычно снабжается некоторой дополнительной структурой.

Пример. Важный класс топологических пространств образуют *метрические пространства.* Для любых двух точек x и y метрического пространства определена функция расстояния $\rho(x, y)$ такая, что

1) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;
2) $\rho(x, x) = 0$, $\rho(x, y) > 0$ при $x \neq y$;
3) $\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y)$ ("неравенство треугольника").

Открытыми множествами являются объединения произвольных семейств открытых шаров, где открытый шар с центром в точке x_0 радиуса ε есть совокупность таких точек x, что $\rho(x_0, x) < \varepsilon$. Такая топология называется *метрической топологией*, причем метрика здесь нужна только для того, чтобы определить близость точек. Заметим, что все метрические пространства хаусдорфовы. Кроме того, метрическое пространство компактно тогда, и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено (то есть принадлежит шару конечного радиуса).

Другой важной структурой на топологическом пространстве является *дифференциальная структура* и различные дифференциально-геометрические объекты, построенные на ее основе. Описание топологии пространств с их помощью составляет предмет дифференциальной топологии, и будет обсуждаться в следующей части статьи, а в этой главе мы рассмотрим средства, позволяющие различать негомеоморфные пространства и не требующие для своего определения операции дифференцирования. Эти инструменты являются по сути алгебраическими.

2.1 Алгебраическая топология. Гомотопические группы

Применение алгебраических методов в топологии основывается на том соображениии, что, грубо говоря, с алгебраическими структурами работать проще, чем с топологическими. Подходящий выбор таких структур позволяет описывать изменения в топологии с помощью алгебры. Топологический инвариант является алгебраическим объектом (числом, группой, линейным пространством и т. д.), который ассоциирован с топологическим пространством и сохраняется при гомеоморфизмах. Два пространства с различными алгебраическими структурами будут не гомеоморфны. Обратное, вообще говоря, не верно, то есть могут существовать пространства с одинаковыми алгебраическими (топологическими) инвариантами не гомеоморфные друг другу.

Для построения алгебраических инвариантов топологического пространства можно использовать непрерывные отображения некоторого "пробного" пространства в данное. Таким образом строятся *гомотопические группы*, где в качестве "пробного" пространства выступают сферы S^n. Определим понятие гомотопии.

Определение. Непрерывные отображения f и g между топологическими пространствами X и Y называются **гомотопными**, если существует такое непрерывное отображение $F : [0, 1] \times X \mapsto Y$, что $F(0, x) = f(x)$ и $F(1, x) = g(x)$ для всех $x \in X$.

Гомотопные отображения можно представлять себе как такие, образы которые могут быть совмещены друг с другом непрерывной деформацией. Отношение гомотопии является отношением эквивалентности, поэтому множество всех непрерывных отображений пространства X в Y можно разбить на классы эквивалентности, называемые *гомотопическими классами* $\pi(X, Y)$.

Определение. n-мерная **гомотопическая группа** $\pi_n(X, x_0)$ – это множество (снабженное групповой операцией) гомотопических классов отображений сферы S^n с выделенной точкой в пространство X с выделенной точкой x_0. Первая гомотопическая группа $\pi_1(X, x_0)$ (группа гомотопически эквивалентных петель) называется *фундаментальной группой* пространства. Групповую операцию на множестве гомотопических классов отображений можно определить как композицию двух петель, то есть двум петлям ставится в соответствие петля, получающаяся при последовательном прохождении обоих петель. Единицей группы будет класс стягиваемых петель, а обратным элементом – петля, проходимая в обратном направлении.

Заметим, что гомотопические группы $\pi_n(X, x_0)$ зависят от выделенной точки x_0, хотя в случае линейно связных пространств эти группы изоморфны. Далее зависимость группы от выбора точки в обозначениях мы будем опускать и писать просто $\pi_n(X)$.

Некоторые свойства гомотопических групп:

1. Высшие гомотопические группы $\pi_n(X)$ при $n > 1$ всегда абелевы (коммутативны). Фундаментальная группа может быть некоммутативной, например $\pi_1(M^2)$, где M^2 – сфера с двумя и более ручками.
2. Для сфер $\pi_n(S^m) = 0$ при $n < m$, а $\pi_n(S^n) = \mathbb{Z}$.
3. Гомотопические группы прямых произведений: $\pi_n(X \times Y) = \pi_n(X) \times \pi_n(Y)$.

Пример. Фундаментальная группа плоскости тривиальна, $\pi_1(\mathbb{R}^2) = 0$, так как любая петля может быть стянута в точку. Напротив, для плоскости с выколотой точкой $\pi_1(\mathbb{R}^2/0) = \mathbb{Z}$. Здесь целые числа, образующие группу, нумеруют количество обходов петли вокруг выколотого нуля на плоскости. Очевидно, что такие петли не гомотопны. Таким образом, мы доказали, что плоскость негомеоморфна плоскости без точки, так как эти пространства имеют различные фундаментальные группы.

С помощью фундаментальной группы легко доказать "интуитивно ясное" утверждение, что сфера не гомеоморфна тору. Действительно, на сфере любую петлю можно стянуть в точку, поэтому $\pi_1(S^2) = 0$. Для тора $T = S^1 \times S^1$ получаем $\pi_1(T) = \pi_1(S^1) \times \pi_1(S^1) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Понятие фундаментальной группы ведет к определению *односвязного* пространства, для которого $\pi_1(X) = 0$. Так окружность S^1 связна, но не односвязна, $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$. Важным средством для изучения неодносвязных пространств является понятие накрывающего пространства. Пространство $\tilde{X}$ называется *накрывающим* для X, если $\tilde{X}$ односвязно, и существует непрерывное отображение $f : \tilde{X} \mapsto X$, такое что для любой точки $x \in X$ существует окрестность $U(x)$, прообраз которой есть объединение открытых в $\tilde{X}$ множеств, гомеоморфных $U(x)$. Число областей в прообразе $f^{-1}(U)$ называется числом листов накрытия. Например, для S^1 накрывающим пространством будет прямая $\mathbb{R}$ с бесконечным числом листов.

2.2 Гомологии

Гомотопические группы представляют собой одно из средств описания топологии с помощью непрерывных отображений. Другой аппарат для характеристики топологических свойств дает теория гомологий. Она основана на разбиении исходного пространства на более простые составляющие. Этому разбиению ставится в соответствие некоторая алгебраическая структура, например, клеточный комплекс, который будет описан ниже. Алгебраические характеристики этого комплекса, независящие от разбиения и сохраняющиеся при гомеоморфизмах, несут информацию о топологии пространства.

Существуют несколько различных способов для введения гомологий (заметим, что их строгое определение, в отличие от теории гомотопий, связано со значительными формальными трудностями), но все они основаны на семействе $C = \{C_n, \partial_n\}$, $n = 0, \pm 1, \ldots$, где C_n – некоторые абелевы группы, а гомоморфизмы $\partial_n : C_n \to C_{n-1}$ по определению таковы, что $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$. Семейство C можно представить в виде последовательности (*цепного комплекса*)

$$\ldots \xleftarrow{\partial_{n-1}} C_{n-1} \xleftarrow{\partial_n} C_n \xleftarrow{\partial_{n+1}} C_{n+1} \longleftarrow \ldots$$

в которой композиция любых двух последовательных гомоморфизмов равна нулю, поэтому всегда $\operatorname{Im} \partial_{n+1} \subseteq \operatorname{Ker} \partial_n$. Если образ предыдущего отображения совпадает с ядром последующего: $\operatorname{Im} \partial_{n+1} = \operatorname{Ker} \partial_n$, то последовательность называется *точной*.

Элементы группы C_n называются n-мерными *цепями*, из них элементы из $\operatorname{Ker} \partial_n$ называются n-мерными *циклами*, а элементы из $\operatorname{Im} \partial_{n+1}$ – n-мерными *границами*. Фактор-группа

$$H_n(C) := \frac{\operatorname{Ker} \partial_n}{\operatorname{Im} \partial_{n+1}}$$

называется n-мерной *группой гомологий* комплекса C, а ее элементы (смежные классы) называются классами гомологий. Цикл, являющийся границей, называется гомологичным нулю. Если все циклы являются границами, то последовательность цепного комплекса является точной, а группы гомологий тривиальны. В противном случае гомологии измеряют величину "неточности" последовательности – "количество" циклов, не являющихся границами.

Рассмотрим более подробно клеточное разбиение, соответствующее *сингулярным гомологиям.* Для этого введем *стандартный k-мерный симплекс*

$$\Delta^k := \{x = \sum_{i=0}^{k} x^i e_i | \sum_{i=0}^{k} x^i = 1,\, 0 \leqslant x_i \leqslant 1\}$$

определенный в пространстве $\mathbb{R}^{k+1}$ с базисом e_i. Геометрически он представляет собой пересечение гиперплоскости $x^0 + \ldots + x^k = 1$ с положительным ортантом $\{x^i \geqslant 0\}$, или, другими словами, выпуклую оболочку точек $\{p_0, \ldots, p_k\}$. Например $\Delta^0 = [p_0]$ – это точка, $\Delta^1 = [p_0, p_1]$ – отрезок, $\Delta^2 = [p_0, p_1, p_2]$ – треугольник.

Определим *сингулярный k-мерный симплекс* с помощью непрерывного отображения стандартного симплекса в пространство X

$$\sigma : \Delta^k \to X$$

Слово "сингулярный" означает, что отображение может быть вырожденным, например, треугольник может стягиваться в отрезок. Возьмем множество всех сингулярных k-симплексов и некоторое коммутативное кольцо R, например целые числа $\mathbb{Z}$, действительные $\mathbb{R}$ или комплексные $\mathbb{C}$ числа. Определим $C_k(X, R)$ – множество всевозможных формальных сумм вида $\sigma = \sum_i a^i \sigma_i$, где a^i – элемент кольца R, а σ_i – сингулярный k-симплекс. $C_k(X, R)$ является модулем над кольцом R и называется *сингулярной цепью* размерности k. Это бесконечномерное пространство, и для того, чтобы получить конечные величины, необходимо ввести на нем некоторое соотношение эквивалентности.

Для этого введем оператор границы

$$\partial : C_k(X,R) \to C_{k-1}(X,R)$$

Граница стандартного симплекса $\Delta^k = [p_0, \ldots, p_k]$ образована $(k-1)$-мерными гранями – симплексами $\Delta_i^{k-1} = [p_0, \ldots, \hat{p}_i, \ldots, p_k]$, где $\hat{p}_i$ означает, что вершина p_i удалена. Эти грани должны быть ориентированы, чтобы их замыкание образовавало петлю, являющуюся геометрической границей исходного симплекса. В результате получаем

$$\partial\Delta^k = \sum_i (-1)^i \Delta_i^{k-1}$$

Для сингулярного k-симплекса определим грань как $\sigma^{(i)} = \sigma \circ \Delta_i^k$. Тогда границей k-симплекса будет формальная сумма $\partial\sigma = \sum_{i=0}^k (-1)^i \sigma^{(i)}$. Действие оператора границы можно продолжить по линейности на любую сингулярную цепь, то есть, если $\sigma = \sum a^k \sigma_k$, то $\partial\sigma = \sum a^k \partial\sigma_k$. Можно проверить, что $\partial^2 := \partial \circ \partial = 0$ ("граница границы равна нулю"). Фактор-пространства (для переменного k)

$$H_k(X,R) = \frac{\operatorname{Ker}\partial_k}{\operatorname{Im}\partial_{k+1}}$$

называются группами сингулярных гомологий с коэффициентами в R. Если в качестве кольца R берут множество целых чисел, то группу гомологий $H_k(X,\mathbb{Z})$ обозначают просто $H_k(X)$.

Пример. Вычислим группы гомологий для сферы S^2. Клеточное разбиение сферы состоит из 0-мерной клетки (точки a) и 2-мерной клетки (диска d). Все цепи σ_i, $i = 0, 1, 2$ являются циклами: $\partial\sigma_i = 0$ ($\partial\sigma_2 = 0$ в силу того, что граница 2-мерной клетки является одномерной, а они отсутствуют в разбиении). Найдем группу $H_0(S^2) = \operatorname{Ker}\partial_0/\operatorname{Im}\partial_1$. В силу того, что одномерных клеток нет, $\operatorname{Im}\partial_1$ состоит из одного элемента, равного 0. Кроме того, каждая 0-мерная клетка является циклом ($\partial a = 0$), и 0-мерная цепь имеет вид $\sigma_0 = \alpha a$, $\alpha \in \mathbb{Z}$. Поэтому $H_0(S^2) = \operatorname{Ker}\partial_0 = \mathbb{Z}$. Для $H_1(S^2) = \operatorname{Ker}\partial_1/\operatorname{Im}\partial_2 = 0$ (нет одномерных клеток). Для $H_2(S^2) = \operatorname{Ker}\partial_2/\operatorname{Im}\partial_3$, где $\operatorname{Ker}\partial_2 = \beta d$ (любая 2-цепь – цикл), а $\operatorname{Im}\partial_3$ состоит только из 0 (отличных от нуля 3-мерных клеток нет), таким образом $H_2(S^2) = \mathbb{Z}$. Все группы $H_n(S^2) = 0$ при $n > 2$.

Группы гомологий, которые используются в приложения, являются конечно-порожденными группами, то есть имеют конечное число образующих. Такие группы изоморфны прямой сумме циклических и свободных групп. Если группа гомологий содержит циклическую подгруппу, то говорят, что она содержит *кручение*, например для бутылки Клейна K^2 имеем $H_1(K^2) = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}$.

Если в качестве коэффициентов берут множество действительных чисел, $R = \mathbb{R}$, то группы гомологий являются векторными пространствами над $\mathbb{R}$, и можно определить *числа Бетти* по формуле $b_k(X) := \dim H_k(X,\mathbb{R})$. Эти числа, грубо говоря, подсчитывают количество дырок в различных измерениях, в частности $b_0(X)$ – это число компонент связности пространства X. С помощью чисел Бетти можно определить важный топологический инвариант – *эйлерову характеристику*

$$\chi(X) = \sum_k (-1)^k b_k$$

В заключение заметим, что группы гомологий формально зависят от выбора кольца коэффициентов R, хотя, например, имеются простые соотношения $H_k(X,\mathbb{R}) = H_k(X) \otimes \mathbb{R}$ или $H_k(X,\mathbb{C}) = H_k(X) \otimes \mathbb{C}$. Можно сказать, что группы $H_k(X)$, $H_k(X,\mathbb{R})$ и $H_k(X,\mathbb{C})$ совпадают по модулю конечных групп (кручения). В частности группы $H_k(X,\mathbb{R})$ кручения не содержат.

3 Гладкие многообразия

В физике используются поля и полевые уравнения, поэтому только топологии на множестве недостаточно – необходимо уметь производить дифференцирования функций, заданных на топологическом пространстве. Для этого необходимо задать на нем *дифференциальную (гладкую) структуру*, превратив его тем самым в *дифференцируемое (гладкое) многообразие.*

3.1 Определение многообразия. Гладкая структура

Определение. Пусть M – хаусдорфово топологическое пространство, покрытое счетным семейством открытых множеств $\mathcal{U}$ с гомеоморфизмами $\phi_U : U \in \mathcal{U} \to U_R$, где U_R – открытое множество в $\mathbb{R}^n$. Если числовые функции (*функции перехода*) $f_{UV} := \phi_U \cdot \phi_V^{-1}$, отображающие $\phi_V(U \cap V)$ в $\phi_U(U \cap V)$, являются гладкими в $\mathbb{R}^n$ (принадлежат классу C^∞), то пара (U, ϕ_U) называется (гладкой) *картой.* Семейство $A = \{\mathcal{U}, \phi_U\}$ попарно гладко согласованных карт называется (гладким) *атласом*, или гладкой структурой. Два атласа многообразия называются эквивалентными, если их объединение – тоже атлас. Пространство M наделенное семейством эквивалентных атласов называется n-мерным вещественным **гладким многообразием**.

Если функции перехода f_{UV} дифференцируемы (класса C^1), то многообразие называется дифференцируемым. Если f_{UV} аналитичны* (класса C^ω), то многообразие называется аналитическим. Формально можно рассмотреть случай, когда f_{UV} только непрерывны (класса C^0), но не обязательно дифференцируемы. Тогда многообразие называется топологическим. Можно доказать, что структура топологического многообразия определяется единственным способом, поэтому топологические многообразия – это просто подкласс топологических пространств. Заметим, что на топологическом пространстве может вообще не существовать гладкой структуры, такие пространства называются несглаживаемыми.

Далее под словом многообразие, если не оговорено другое, мы всегда будем понимать именно гладкое многообразие.

Можно рассматривать гомеоморфизмы $\phi_U : U \in \mathcal{U} \to U_C$ в открытые множества в $\mathbb{C}^n$ (M очевидно должно иметь четную размерность). Тогда, если функции f_{UV} голоморфны, многообразие M называется *комплексным.* На таком многообразии можно ввести комплексные координаты.

Пример. Сфера S^2 является гладким многообразием, атлас которого состоит из двух карт – (U, ϕ_U) и (V, ϕ_V), где ϕ_U (ϕ_V) – стереографическая проекция сферы U без южного полюса (соответственно сферы V без северного полюса) на плоскость $\mathbb{R}^2$. Если (x_1, y_1) и (x_2, y_2) соответствующие координаты в этих картах, то функции перехода имеют вид

$$x_2 = \frac{x_1}{x_1^2 + y_1^2}, \qquad y_2 = \frac{-y_1}{x_1^2 + y_1^2}$$

Если использовать комплексную координату $z = x_1 + iy_1$, то функция перехода (голоморфная на пересечении карт) имеет вид $w = 1/z$, где $w = x_2 + iy_2$. Голоморфность функции перехода означает, что сфера является комплексным многообразием.

Пример. **Проективные пространства**. Для ненулевых векторов в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ определим соотношение эквивалентности, считая, что векторы v и λv, $\lambda \neq 0$ задают одну и ту же точку. Пространство классов эквивалентности называется (действительным) *проективным пространством* $\mathbb{R}P^n$. Оно обладает структурой n-мерного

* т. е. могут быть представлены сходящимся рядом Тейлора на всей области определения многообразия, атлас которого состоит из $n+1$ карт U_k, $k=0,\dots,n$ с координатами

$$x^\mu_{(k)} = \left(\frac{y^0}{y^k},\dots,\frac{y^{k-1}}{y^k},\frac{y^{k+1}}{y^k},\dots,\frac{y^n}{y^k}\right), \qquad \mu=1,\dots,n$$

Числа $y^i \in \mathbb{R}^{n+1}$ называют *однородными координатами* и записывают в виде $[y^0:\dots:y^n]$. Функции перехода, например, на пересечении карт U_0 и U_1, где $y^0 \neq 0$ и $y^1 \neq 0$, имеют вид

$$x^\mu_{(1)} = \left(\frac{1}{x^1_{(0)}},\frac{x^2_{(0)}}{x^1_{(0)}},\frac{x^3_{(0)}}{x^1_{(0)}}\dots,\frac{x^n_{(0)}}{x^1_{(0)}}\right)$$

и являются гладкими дробно-линейными функциями ($x^1_{(0)} = y^1/y^0 \neq 0$). Все проективные пространства компактны, а нечетномерные $\mathbb{R}P^{2n-1}$ – ориентируемы, в частности $\mathbb{R}P^1 \approx S^1$ и $\mathbb{R}P^3 \approx SO(3)$. Геометрия проективных пространств устроена проще, чем аффинных. Например, все прямые в проективном пространстве пересекаются.

Понятие проективного пространства можно обобщить, введя *проективную структуру* на многообразии M. Проективная структура – это класс эквивалентности проективных атласов, то есть атласов с дробно-линейными функциями перехода на пересечении областей U_i и U_j вида

$$x^\mu_{(i)} = \frac{a^\mu_0 + a^\mu_1 x^1_{(j)} + \dots + a^\mu_n x^n_{(j)}}{a^0_0 + a^0_1 x^1_{(j)} + \dots + a^0_n x^n_{(j)}}$$

где $(n+1)\times(n+1)$ матрица $\|a\|^\mu_\nu$ невырождена. Грубо говоря, многообразие с проективной структурой локально выглядит так же, как $\mathbb{R}P^n$.

Из определения многообразия естественно вытекает определение гладкого отображения многообразий. $f: M \to N$ является гладким, если его выражение в терминах локальных координат принадлежит классу C^∞. Если это отображение является гомеоморфизмом, и обратное к нему тоже гладко, то f называется *диффеоморфизмом.* С физической точки зрения диффеоморфизм представляет собой глобальную замену координат (общековариантные преобразования). Множество всех диффеоморфизмов образует (бесконечномерную) группу Ли – *группу диффеоморфизмов* многообразия.

Важно заметить, что не все гомеоморфные многообразия являются диффеоморфными. Другими словами, на топологическом пространстве могут быть *различные* дифференциальные (гладкие) структуры, которые нельзя перевести друг в друга с помощью диффеоморфизма. Так на пространствах $\mathbb{R}^n$, рассматриваемых как многообразия, существует единственная, с точностью до диффеоморфизма, гладкая структура для всех n, кроме 4. На пространстве $\mathbb{R}^4$ существует бесконечно много (континуум) гладких структур! Такие $\mathbb{R}^4$ с нестандартной гладкой структурой называются экзотическими, или фальшивыми, $\mathbb{R}^4$. Они были открыты в начале 80-х годов в работах Фридмана и Дональдсона.

3.2 Векторные поля и дифференциальные формы. Когомологии де Рама

Для дифференцирования функций на многообразии необходимо ввести понятие векторного поля. На современном языке векторное поле – это, грубо говоря, “дифференцирование по направлению”.

Определение. **Касательный вектор** v_x в точке x многообразия M – это оператор, который каждой дифференцируемой функции f на M ставит в соответствие действительное число $v_x(f)$, при этом должны выполняться условия:

1) линейность: $v_x(af+bg) = av_x(f) + bv_x(g)$, где a, b – константы, f, g – функции;
2) правило Лейбница: $v_x(fg) = f(x)v_x(g) + g(x)v_x(g)$.

Касательные векторы к n-мерному многообразию M в точке x образуют n-мерное векторное пространство T_xM, которое называется *касательным пространством.* Если в качестве базисных векторов этого пространства взять кательные векторы к координатным линиям на M через точку x, то полученный базис называется *голономным* (координатным) и обозначается $\{\partial_\mu\}$. Любой вектор v_x можно записать в виде

$$v_x = v^\mu(x)\frac{\partial}{\partial x^\mu} := v^\mu \partial_\mu$$

откуда видно, что локально вектор соответствует контравариантному тензору 1-го ранга.

Множество TM всех касательных пространств к многообразию M также можно наделить структурой $2n$-мерного многообразия, задав на нем голономную систему координат $(x^\mu, \dot{x}^\mu)$ с условиями перехода

$$x'^\mu = x'^\mu(x^\nu), \qquad \dot{x}'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}\dot{x}^\nu$$

где x^μ – координаты на M, а $\dot{x}^\mu$ – координаты на касательных пространствах к M относительно голономных базисов.

В касательном пространстве можно определить *коммутатор* двух векторных полей $[u, v](f) := u(v(f)) - v(u(f))$. Соответствующее векторное поле имеет вид

$$[u, v] = (u^\nu\frac{\partial v^\mu}{\partial x^\nu} - v^\nu\frac{\partial u^\mu}{\partial x^\nu})\partial_\mu$$

Антисимметричная операция коммутирования удовлетворяет тождеству Якоби

$$[[u, v], w] + [[v, w], u] + [[w, u], v] = 0$$

поэтому векторные поля образуют (бесконечномерную) алгебру Ли $\mathfrak{a}M$ относительно коммутатора. Она является алгеброй Ли группы Ли $Diff(M)$ всех диффеоморфизмов многообразия M.

Используя тензорное произведение $T_xM \times \ldots \times T_xM$ можно определить поливекторное поле w, которое локально представимо контравариантным тензором ранга k: $w = w^{\mu_1 \ldots \mu_k}\partial_{\mu_1} \otimes \ldots \otimes \partial_{\mu_k}$.

Дифференциальные формы

Алгебраически двойственным объектом к касательному вектору v является дифференциальная 1-форма α. Она осуществляет отображение вектора v в действительное число посредством свертки (внутреннего произведения) $v \lrcorner\, \alpha$. Свертка часто обозначается $\imath_v\alpha = \alpha(v)$. Это отображение обладает свойством линейности $(au+bv)\lrcorner\, \alpha = au \lrcorner\, \alpha + bv \lrcorner\, \alpha$.

В локальных координатах 1-форма в точке x имеет вид $\alpha = \alpha_\mu(x)dx^\mu$, причем координатный базис 1-форм $dx^1, \ldots, dx^n$ по определению связан с базисом векторных полей соотношением $< \partial_\mu, dx^\nu >=< dx^\nu, \partial_\mu >= \delta^\nu_\mu$. Локально 1-форма соответствует ковариантному тензору 1-го ранга. В точке p многообразия M 1-формы образуют *кокасательное* пространство T^*_xM.

Используя линейную алгебру, можно определить полилинейные функции $T_xM \times \ldots \times T_xM \to \mathbb{R}$. Среди них выделим класс антисимметричных линейных k-форм, определенных соотношением

$$\omega(X_1, \ldots, X_i, \ldots, X_j, \ldots, X_k) = -\omega(X_1, \ldots, X_j, \ldots, X_i, \ldots, X_k)$$

где $X_i \in T_x M$. Множество дифференцируемых функций, удовлетворяющих этому соотношению, обозначим $\Lambda^k(T_x M)$. Элементы $\omega_x \in \Lambda^k(T_x M)$ называются *дифференциальными (внешними) k-формами.* Множество всех k-форм на многообразии обозначим через $\Omega^k(M)$. Пространство всех форм $\Omega(M) = \bigoplus \Omega^k(M)$ обладает структурой градуированной грассмановой алгебры, где операция произведения между элементами алгебры определена с помощью ассоциативного, антикоммутативного и дистрибутивного *внешнего умножения* $\wedge$ по формуле

$$\omega \wedge \eta = (-1)^{pq} \eta \wedge \omega$$

где $\omega \in \Omega^p(M)$, а $\eta \in \Omega^q(M)$. В локальных координатах любая k-форма $\omega \in \Omega^k(M)$ может быть записана в виде

$$\omega = \sum_{\mu_1 < \ldots < \mu_k} f_{\mu_1 \ldots \mu_k}(x) dx^{\mu_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\mu_k}$$

Функции по определению являются 0-формами. Если размерность многообразия равна n, то все k-формы при $k > n$ равны нулю, а n-форма $\omega = f(x) dx^{\mu_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\mu_n}$ состоит из одного слагаемого, причем $f(x)$ не является числовой функцией, так как при координатном преобразовании делится на якобиан перехода.

Алгебру дифференциальных k-форм можно превратить в дифференциальный комплекс (частный случай цепного комплекса), называемый *комплексом де Рама.* Для этого определим операцию *внешнего дифференцирования* d. Внешний дифференциал d переводит k-форму в $(k+1)$-форму и обладает свойствами:

1) $dd = 0$;

2) $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta, \quad \omega \in \Omega^k(M)$.

В голономных координатах имеем

$$d\omega = \sum \frac{\partial f_{\mu_1 \ldots \mu_k}(x)}{\partial x^\mu} dx^\mu \wedge dx^{\mu_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\mu_k}$$

Пример. Для многообразия $M = \mathbb{R}^3$ комплекс де Рама имеет вид

$$0 \to \Omega^0(M) \xrightarrow{\text{grad}} \Omega^1(M) \xrightarrow{\text{rot}} \Omega^2(M) \xrightarrow{\text{div}} \Omega^3(M) \to 0$$

где над стрелками приведены обычные операции векторного анализа, соответствующие внешнему дифференцированию d. Например, в голономных координатах имеем следующие представления

$$\begin{aligned}
&\Omega^0(M) \xrightarrow{d} \Omega^1(M): \quad d(f(x)) = \frac{\partial f}{\partial x^\mu} dx^\mu \\
&\Omega^1(M) \xrightarrow{d} \Omega^2(M): \quad d(f_\mu(x) dx^\mu) = \frac{\partial f_\mu}{\partial x^\alpha} dx^\alpha \wedge dx^\mu \\
&\Omega^2(M) \xrightarrow{d} \Omega^3(M): \quad d(f_{\mu\nu}(x) dx^\mu \wedge dx^\nu) = \frac{\partial f_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} dx^\alpha \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu
\end{aligned}$$

Форма ω называется *замкнутой*, если $d\omega = 0$, то есть $\omega \in Z^k(M) := \operatorname{Ker}\{d : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)\}$. Если существует $(k-1)$-форма η такая, что $\omega = d\eta$, то есть $\omega \in B^k(M) := \operatorname{Im}\{d : \Omega^{k-1}(M) \to \Omega^k(M)\}$, то форма ω называется *точной.*

Фактор-пространство замкнутых k-форм по точным называется *k-группой когомологий де Рама*

$$H^k_{dR}(M) = \frac{\operatorname{Ker} d^k}{\operatorname{Im} d^{k-1}}$$

Оно образовано классами эквивалентности замкнутых форм, разность которых является точной формой. Эти группы являются линейными пространствами, причем размерность группы $H^0_{dR}(M)$, состоящей из постоянных функций, равна числу компонент связности многообразия M. При $k > n$, где n – размерность многообразия M, $H^k_{dR}(M) = 0$.

Пример. Для пространства $\mathbb{R}^n$ все группы когомологий $H^k_{dR}(\mathbb{R}^n) = 0$ при $k > 0$, $H^0_{dR}(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}$ (пространство постоянных функций). Можно доказать, что для любого стягиваемого многообразия $H^k_{dR}(M) = 0$ при $k > 0$. Для нестягиваемых многообразий группы когомологий могут быть нетривиальными, в частности на таких многообразиях могут существовать неградиентные векторные поля, ротор которых равен 0. Например, на плоскости без точки $M = \mathbb{R}^2/0$ можно определить замкнутую, но не точную 1-форму $\omega = \dfrac{y}{x^2+y^2}dx + \dfrac{-x}{x^2+y^2}dy$.

Группы когомологий де Рама $H^k_{dR}(M)$ изоморфны группам сингулярных когомологий $H^k(M,\mathbb{R})$ и поэтому двойственны группам сингулярных гомологий $H_k(M,\mathbb{R})$ (теорема де Рама). Эта двойственность устанавливается билинейной формой

$$< \omega^k | c_k >= \int_{c_k} \omega^k \tag{1}$$

определяющей интегрирование замкнутых k-форм ω^k по k-мерным циклам c_k, реализуемым подмногообразиями M.

Производная Ли

Производная Ли $\mathcal{L}_v T$ тензорного поля T по направлению векторного поля v – это главная линейная часть приращения тензорного поля T при его преобразовании, которое индуцировано локальной однопараметрической группой диффеоморфизмов Φ_t многообразия, порожденной полем v. Например, если при диффеоморфизме точка с координатами $x^\mu(t)$ переходит в точку x^μ_0 (векторное поле v является касательным к линии $x(t)$), то закон преобразования тензора T^μ_ν при переносе из $x(t)$ в x_0 имеет вид

$$(\Phi_t T)^\mu_\nu = T^\alpha_\beta \frac{\partial x^\mu_0}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x^\beta}{\partial x^\nu_0}$$

и для производной Ли по определению получаем выражение

$$\mathcal{L}_v T^\mu_\nu = \left.\frac{d(\Phi_t T)^\mu_\nu}{dt}\right|_{t=0}$$

Можно сказать, что производная Ли измеряет скорость изменения тензора T при деформации многообразия, вызванного диффеоморфизмом Φ_t. Отметим, что производная Ли (как и внешнее дифференцирование форм) представляет собой операцию, определенную на многообразии без введения дополнительных структур, в частности, она не зависит от связности или метрики.

Для функции $f(x)$ производная Ли совпадает с обычной производной по направлению векторного поля v, то есть в голономных координатах $\mathcal{L}_v f = v^\mu \partial_\mu f$. Производная Ли от векторного поля u есть коммутатор полей $\mathcal{L}_v u = [v,u] = (v^\alpha \partial_\alpha u^\mu - u^\alpha \partial_\alpha v^\mu)\partial_\mu$. Для тензорного поля произвольного ранга имеем

$$\mathcal{L}_v T^{\mu_1\ldots\mu_n}_{\nu_1\ldots\nu_m} = v^\alpha\partial_\alpha T^{\mu_1\ldots\mu_n}_{\nu_1\ldots\nu_m} + (\partial_{\nu_1}v^\alpha)T^{\mu_1\ldots\mu_n}_{\alpha\ldots\nu_m} + (\partial_{\nu_m}v^\alpha)T^{\mu_1\ldots\mu_n}_{\nu_1\ldots\alpha} - (\partial_\alpha v^{\mu_1})T^{\alpha\ldots\mu_n}_{\nu_1\ldots\nu_m} - (\partial_\alpha v^{\mu_n})T^{\mu_1\ldots\alpha}_{\nu_1\ldots\nu_m}$$

Производная Ли используется для описания симметрий, а именно, если мы хотим исследовать инвариантность какого-либо объекта, заданного на M, относительно действия некоторой группы диффеоморфизмов, то достаточно рассмотреть соответствующие производные Ли. Например, векторное поле v определяет *изометрию*[⋆] многообразия тогда, и только тогда, когда производная Ли метрического тензора g вдоль этого поля равна нулю, то есть $\mathcal{L}_v g = 0$. Заметим, что в приложениях, например, в общей теории относительности, это уравнение обычно записывают через ковариантные производные ∇_μ относительно связности Леви-Чивита (см. главу 5) в виде $\nabla_{(\mu}v_{\nu)} = 0$ (уравнения Киллинга), а векторное поле v, являющееся решением этого уравнения, называют *полем Киллинга.*

Конформные преобразования метрики описываются векторным полем v, удовлетворяющим уравнению $\mathcal{L}_v g = \phi(x) g$, где $\phi(x)$ – произвольная функция на M.

На дифференциальных формах производная Ли и внешнее дифференцирование связаны следующим соотношением:

$$\mathcal{L}_v \omega = v \lrcorner\, d\omega + d(v \lrcorner\, \omega)$$

Оператор Ходжа

На пространстве форм $\Omega(M)$ можно определит линейный *оператор дуальности Ходжа* $\star : \Omega^k(M) \to \Omega^{n-k}(M)$. В голономных координатах он имеет вид

$$\star(dx^{\mu_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\mu_k}) = \frac{\sqrt{|\det g_{\mu\nu}|}}{(n-k)!} \varepsilon^{\mu_1 \ldots \mu_k}_{\nu_{k+1} \ldots \nu_n} dx^{\nu_{k+1}} \ldots dx^{\nu_n}$$

где $\varepsilon^{\mu_1 \ldots \mu_k}_{\nu_{k+1} \ldots \nu_n}$ – полностью антисимметричный тензор, а $g_{\mu\nu}$ – метрический тензор. В частности, оператор $\star$ переводит функции в n-формы, например $\star 1 = \nu_M$, где $\nu_M = \sqrt{|\det g_{\mu\nu}|} dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$ – инвариантная (относительно диффеоморфизмов) форма объема. Очевидно, оператор Ходжа зависит от выбора метрики и ориентации на M.

Действие оператора Ходжа можно расширить на группы когомологий $H^k_{dR}(M)$. Для гладких компактных многообразий это приводит к изоморфизму групп $H^k_{dR}(M)$ и $H^{(n-k)}_{dR}(M)$, что с учетом двойственности групп гомологий и когомологий ведет к *двойственности Пуанкаре*: изоморфизму групп гомологий над $\mathbb{R}$ $H_k(M, \mathbb{R})$ и групп когомологий де Рама $H^{(n-k)}_{dR}(M)$. Это соответствие позволяет использовать на компактных многообразиях билинейную форму (1), чтобы ввести скалярное произведение на пространстве $\Omega(M)$ по формуле

$$< \omega, \eta >= \int_M \omega \wedge \star\eta$$

Используя оператор $\star$, можно определить *кодифференциал* $\delta = (-1)^{k(n-k)+1} \star d \star$. Он понижает степень формы на единицу $\delta : \Omega^k(M) \to \Omega^{k-1}(M)$ и сопряжен к оператору d:

$$< d\omega, \eta >=< \omega, \delta\eta >, \quad \omega \in \Omega^k(M), \eta \in \Omega^{k+1}(M)$$

Для него также справедливо свойство $\delta\delta = 0$. Группы когомологий, индуцированные δ, совпадают с когомологиями де Рама, определенными с помощью d.

Из операторов d и δ можно получить инвариантный (топологический) *лапласиан* (оператор Лапласа-Бельтрами) $\Delta_k = (d+\delta)^2 = d\delta + \delta d$ – самосопряженный оператор

[⋆] преобразование, сохраняющее расстояние между точками второго порядка $\Delta_k : \Omega^k(M) \to \Omega^k(M)$. Решения уравнения $\Delta_k\omega = 0$ называются *гармоническими* формами. Они обобщают обычные гармонические функции математического анализа. Используя их, можно записать для компактных многообразий следующее “разложение Ходжа”:

$$\Omega^k = \mathcal{H}^k \oplus \mathrm{Im}\, d \oplus \mathrm{Im}\, \delta,$$

где $\mathcal{H}^k = \mathrm{Ker}\, \Delta_k$ – пространство всех гармонических k-форм.

Из этого разложения следует важное следствие о конечномерности групп когомологий компактных многообразий, а именно, векторное пространство гармонических k-форм изоморфно k-ой группе когомологий де Рама: $\mathcal{H}^k \simeq H^k_{dR}(M)$ (теорема Ходжа). Таким образом, мы имеем интерпретацию когомологий в терминах пространства решений дифференциального уравнения.

3.3 Группы Ли

Важным примером многообразий, часто встречающихся в физике, являются группы Ли.

Определение. **Группа Ли** – это гладкое многообразие G, являющееся одновременно группой, причем групповые операции умножения $G \times G \to G : (g, h) \to gh$ и взятия обратного элемента $G \to G : g \to g^{-1}$ являются гладкими отображениями.

В действительности справедлив глубокий результат, что функции перехода, задающие атлас группы Ли, достаточно выбрать непрерывными (C^0), чтобы в результате получить гладкое (C^∞) и даже аналитическое (C^ω) многообразие.

Пример. Группой Ли является пространство $\mathbb{R}^n$ с обычной операцией сложения между векторами. Другой пример – группа невырожденных матриц $GL(n, \mathbb{R})$. Подгруппы Ли групп $GL(n, \mathbb{R})$ называются *матричными* группами Ли. Заметим, что не каждая группа Ли является матричной.

Группа G *действует*[⋆] на многообразии M, если для любого ее элемента $g \in G$ задан диффеоморфизм $T_g(x)$ такой, что $T_gT_h = T_{gh}$, $T_1 = Id$ и $T_g(x)$ гладко зависит от пары (g, x). Группа действует на M *транзитивно*, если для любых точек $x, y \in M$ существует такой элемент $g \in G$, что $T_g(x) = y$. Многообразие, на котором задано транзитивное действие группы G, называется *однородным*. Подгруппа H группы G, оставляющая точку $x \in M$ на месте, называется группой *изотропии*. Однородное пространство является фактор-пространством G/H.

Примеры. Следующие пространства однородны:
1) сфера $S^n = O(n+1)/O(n) = SO(n+1)/SO(n)$, а также $S^{2n-1} = U(n)/U(n-1)$;
2) проективное пространство $\mathbb{R}P^n = O(n+1)/(O(n) \times O(1))$;
3) комплексное проективное пространство $\mathbb{C}P^n = U(n+1)/(U(n) \times U(1)) = S^{2n+1}/S^1$.

Каждая группа Ли является группой преобразований самой себя. Это преобразование Φ дается правыми (левыми) сдвигами $R_g : h' \to h'g$ ($L_g : h' \to gh'$), а сама группа называется *главным* правым (левым) однородным пространством. Отображение Φ естественным образом индуцирует отображение Φ^* действительных функций f на G по формуле $\Phi^* f(p) = f(\Phi(p))$. Индуцированное отображение векторных полей имеет вид $\Phi_* : v \in T_pG \to \Phi_* v \in T_{\Phi(p)}G$ и определяется соотношением

$$\Phi_* v(f)|_{\Phi(p)} = v(\Phi^* f)|_p$$

Алгебра векторных полей на группе Ли, будучи бесконечномерной, мало связана с групповой операцией на самой группе G. Если рассматривать только *правоинвариант-*

[⋆] Это обобщение понятия линейного представления группы на векторном пространстве.

ные векторные поля v, удовлетворяющие условию $(R_g)_* v = v$, то значение $v(p)$ такого поля в точке p определяется его значением в точке I – единичного элемента группы:

$$v(p) = (R_g)_* v(I), \quad v(I) = (R_{g^{-1}})_* v(p)$$

Таким образом пространство всех правоинвариантных векторных полей в группе Ли образует конечномерное пространство, изоморфное касательному пространству $T_I G$.

Это векторное пространство, снабженное билинейной антисимметричной операцией (коммутатором $[v, u]$), удовлетворяющей тождеству Якоби, называется **алгеброй Ли** $\mathfrak{g}$.

Для задания структуры алгебры Ли на n-мерном линейном пространстве, достаточно определить попарные коммутаторы базисных векторов e_i, то есть коэффициенты c^k_{ij} в разложении $[e_i, e_j] = c^k_{ij} e_k$. Эти коэффициенты называются *структурными константами** алгебры Ли. Они должны удовлетворять условиям

$$\begin{aligned} c^k_{ij} + c^k_{ji} &= 0 & \text{(антисимметричность)} \\ c^p_{is} c^s_{jk} + c^p_{js} c^s_{ki} + c^p_{ks} c^s_{ij} &= 0 & \text{(тождество Якоби)} \end{aligned}$$

Подпространство L алгебры $\mathfrak{g}$ является *подалгеброй*, если $[L, L] \subset L$, и *идеалом*, если $[L, \mathfrak{g}] \subset L$. Существование подалгебр и идеалов в $\mathfrak{g}$ выражается в определенных ограничениях на структурные константы. Например, если $e_1, \ldots, e_k$ – базис идеала, то $c^s_{ij} = 0$ при $i \leqslant j$, $s > k$ и произвольном j.

Примеры.
1) Алгебра Ли $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ группы $GL(n, \mathbb{R})$ – это пространство всех матриц порядка n.
2) Алгебра Ли $\mathfrak{o}(n)$ ортогональной группы $O(n)$ состоит из всех антисимметричных матриц $\{a \mid a^T = -a\}$. Она совпадает с алгеброй Ли $\mathfrak{so}(n)$ для группы $SO(n)$.
3) Алгебра Ли $\mathfrak{u}(n)$ унитарной группы $U(n)$ состоит из всех антиэрмитовых матриц $\{a \mid a^\dagger = -a\}$. Алгебра Ли $\mathfrak{su}(n)$ для группы $SU(n)$ определяется дополнительным условием бесследовости $\operatorname{Tr} a = 0$.

Композиция сдвига в группе G на элемент g слева и на g^{-1} справа,

$$h \to g h g^{-1}, \qquad h, g \in G$$

называемая внутренним автоморфизмом группы $\operatorname{Int} G : G \to G$, задает автоморфизм касательного пространства (алгебры Ли) $\operatorname{Ad} g : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ по формуле $\operatorname{Ad} g(v) = g v g^{-1}$. Это отображение является представлением $\operatorname{Ad} : G \to GL(n, \mathbb{R})$ группы Ли G в n-мерном линейном пространстве алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Оно называется *присоединенным представлением*. Для абелевых групп представление Ad тривиально, то есть $\operatorname{Ad} g = 1$ для $\forall g \in G$.

Дифференциал отображения Ad является отображением $\operatorname{ad} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$, которое задает представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Его можно явно записать в виде линейного оператора ad_v, действующего в $\mathbb{R}^n$:

$$\operatorname{ad}_v w = [v, w], \qquad v, w \in \mathfrak{g}$$

В базисе e_i присоединенное представление имеет вид $\operatorname{ad}_{e_i} e_j = c^k_{ij} e_k$. Пространство всех операторов ad_v является подалгеброй и идеалом алгебры Ли $\operatorname{Der} \mathfrak{g}$ всех дифференцирований* $\mathfrak{g}$ и называется *присоединенной алгеброй*.

* Эти величины не являются постоянными, несмотря на название, а преобразуются как тензор третьего ранга при замене базиса в алгебре $\mathfrak{g}$.

* Дифференцирование D алгебры $\mathfrak{g}$ – это линейное отображение $\mathfrak{g}$ в себя, удовлетворяющее правилу Лейбница: $D([v, w]) = [D(v), w] + [v, D(w)]$ для любых $v, w \in \mathfrak{g}$.

На алгебре Ли можно определить скалярное произведение по формуле

$$(v, w)_K = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{ad}_v \cdot \mathrm{ad}_w), \qquad v, w \in \mathfrak{g}$$

которая задает на $\mathfrak{g}$ инвариантную (относительно группы всех автоморфизмов алгебры $\mathfrak{g}$) *метрику Киллинга* (функционал Киллинга)

$$g^K_{ij} = c^l_{ik} c^k_{jl}$$

Метрика Киллинга невырождена тогда и только тогда, когда алгебра Ли полупроста. Если G – компактная группа, то форма Киллинга является отрицательно определенной и существует базис алгебры Ли, к котором она принимает вид $g^K_{ij} = -2\delta_{ij}$. В теориях калибровочных полей как правило используют компактные группы, поскольку отрицательная определенность формы Киллинга приводит к положительной определенности энергии калибровочного поля в таких моделях.

Пример. Метрика Киллинга на алгебре Ли общей линейной группы $\mathfrak{g}l(n, \mathbb{R})$ имеет вид

$$(v, w)_K = 2n\mathrm{Tr}\,(vw) - 2\mathrm{Tr}\,(v)\mathrm{Tr}\,(w)$$

где vw – обычное матричное умножение, а $\mathrm{Tr}\,(v)$ обозначает след матрицы v.

4 Геометрия расслоений и калибровочные теории

4.1 Расслоения. Векторные и главные расслоения

Определение. **Гладкое расслоенное многообразие** (fiber bundle), или расслоение, – это тройка объектов (E, π, M), состоящая из многообразия E (тотального пространства расслоения), многообразия M (базы расслоения) и проекции $E \xrightarrow{\pi} M$, причем для любой точки $x \in M$ существует открытая окрестность U такая, что имеет место *локальное расщепление*, описываемое коммутативной диаграммой*

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] & U \times F \arrow[dl, "pr_1"] \\ U & \end{tikzcd}$$

Гомеоморфизм $\varphi : \pi^{-1}(U) \to U \times F$ локально задает на E структуру прямого произведения, а прообраз $\pi^{-1}(x)$, $\forall x \in M$ гомеоморфен многообразию F и называется (типичным) *слоем* (standard fiber) расслоения.

Таким образом, расслоение E над M со слоем F можно представлять себе как многообразие, которое локально является прямым произведением M и F. На E можно смотреть также как на семейство многообразий F, параметризованное точками многообразия M.

Если многообразие разбито на (погруженные) подмногообразия, то оно называется *слоением* (foliation). Пространство слоев слоения, в отличие от пространства слоев расслоения, вообще говоря, не является многообразием.

Множество всех $\{U_i, \varphi_i\}$ таких, что $\varphi_i : E|_{U_i} \simeq U_i \times F$, называется *локальными тривиализациями*, или калибровками (gauge). Эти тривиализации составляют атлас расслоения $A = \{U_i, \varphi_i, f_{ij}\}$ с функциями перехода (склейки) между слоями

$$f_{ij}(x) := \varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : (U_i \cap U_j) \times F \to (U_i \cap U_j) \times F$$

* Коммутативная диаграмма — это ориентированный граф, в вершинах которого находятся объекты, а стрелками являются морфизмы (отображения), причём результат композиции стрелок не зависит от выбранного пути.

которые осуществляют гомеоморфизм слоя F и удовлетворяют условиям

$$f_{ii}(x) = \mathrm{Id}\,, \quad f_{ij}(x) = (f_{ji}(x))^{-1}, \quad f_{ij}f_{jk} = f_{ik}$$

Функции перехода можно представлять себе как матричнозначные функции $T_{ij}(x)$, действующие на координаты расслоения $x \in U_j$, $y \in F$ по правилу

$$f_{ij} : (x, y) \to (x, T_{ij}(x)y)$$

Набор отображений f_{ij} называется *склеивающим коциклом.* Смена тривиализации расслоения называется также *калибровочным преобразованием* (пример расслоения для поля Максвелла мы рассмотрим в следующем параграфе).

Сечением (section) расслоения E называется такое непрерывное отображение $s : M \to E$, что $\pi \circ s(x) = x$ для $\forall x \in M$. Множество всех сечений E над M обозначается $\Gamma(M, E)$. В физических приложениях сечение – это просто физическое поле на многообразии M. Существенно, что хотя локальные сечения $s : U_i \to E$ существуют всегда, глобальное сечение $s : M \to E$ есть не у каждого расслоения.

Если расслоение E является прямым произведением $E = M \times F$, то оно называется *тривиальным.* Заметим, что любое расслоение по определению локально-тривиально. У тривиального расслоения всегда существует глобальное сечение. Таким образом, существование (нетривиального) глобального сечения является важной топологической характеристикой многообразия.

Пример. *Лист Мебиуса* представляет собой простейший пример нетривиального расслоения над базой – окружностью S^1 со слоем $F = [-1, 1]$. Структура расслоения определяется атласом, состоящим их двух карт $U_1 \times F$ и $U_2 \times F$, над покрытием

$$U_1 = \{-\varepsilon < \alpha < \pi + \varepsilon\}, \qquad U_2 = \{\pi - \varepsilon < \alpha < 2\pi + \varepsilon\}$$
$$U_1 \cap U_2 = W_1 \cup W_2, \quad W_1 = [-\varepsilon, \varepsilon], W_2 = [\pi - \varepsilon, \pi + \varepsilon]$$

с функциями перехода

$$\varphi(\alpha) : v \mapsto -v,\ \alpha \in W_1, v \in F$$
$$\varphi(\alpha) : v \mapsto v, \quad \alpha \in W_2, v \in F$$

Для цилиндра (тривиального расслоения над окружностью) функция перехода имеет вид

$$\varphi(\alpha) :\ v \mapsto v$$

Лист Мебиуса имеет глобальное сечение $(v \circ s)\alpha = 0$.

Пример. *Касательное расслоение* (tangent bundle) TM – это $(2n)$-мерное многообразие касательных пространств к n-мерному многообразию M. Здесь базой расслоения является является многообразие M, слоем – пространство $\mathbb{R}^n$. В качестве атласа расслоения можно взять голономный атлас с координатами $(x^\mu_i, \dot{x}^\mu_i)$ и функциями перехода

$$\|f_{ij}(x)\|^\mu_\nu = \frac{\partial x^\mu_i}{\partial x^\nu_j}, \qquad \dot{x}^\mu_i = \|f_{ij}(x)\|^\mu_\nu \dot{x}^\nu_j$$

Сечения касательного расслоения TM – это векторные поля на многообразии M. Заметим, что над M существуют и другие расслоения со слоем $\mathbb{R}^n$, не эквивалентные касательному TM.

Многообразие, касательное расслоение которого тривиально, называется *параллелизуемым.* Многообразие размерности n параллелизуемо тогда и только тогда, когда на нем имеется n линейно независимых в каждой точке непрерывных векторных полей. Отметим, что все группы Ли являются параллелизуемыми многообразиями.

Примером тривиального касательного расслоения служит касательное расслоение $TM = S^1 \times \mathbb{R}$ над окружностью $M = S^1$ – двумерное многообразие, диффеоморфное бесконечному цилиндру. В качестве примера касательного расслоения, не являющегося тривиальным, можно привести касательное расслоение TM над сферой $M = S^2$. Это четырехмерное многообразие, которое локально имеет структуру $U_i \times \mathbb{R}^2$, $U_i \in S^2$, но глобально $TM \neq S^2 \times \mathbb{R}^2$. Как следствие, на сфере нельзя построить векторного поля, которое нигде не обращалось бы в ноль ("нельзя причесать ежа").

Дифференциальные 1-формы являются сечениями *кокасательного* расслоения (cotangent bundle) T^*M с голономными координатами $(x^\mu, \dot{x}_\mu)$ и с функциями перехода

$$\|f_{ij}(x)\|^\mu_\nu = \frac{\partial x_i^\mu}{\partial x_j^\nu}, \qquad (\dot{x}_i)_\nu = \|f_{ij}(x)\|^\mu_\nu (\dot{x}_j)_\mu$$

Дифференциальные формы старших порядков определяются как сечения внешнего произведения кокасательного расслоения $\bigwedge^k T^*M = T^*M \wedge \ldots \wedge T^*M$ со слоем – k-кратным антисимметризованным тензорным произведением слоя $\mathbb{R}^n$ расслоения T^*M.

Векторные и главные расслоения

Расслоения, как правило, наделяют некоторой алгебраической структурой. Это может быть структура линейного пространства (над полем действительных $\mathbb{R}$ или комплексных чисел $\mathbb{C}$), и тогда мы получаем *векторное расслоение*, частным случаем которого является касательное расслоение. Слой векторного расслоения изоморфен линейному пространству $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$), и гомеоморфизмы тривиализации линейны на этих слоях, по сути можно считать, что на слой действуют линейные преобразования из $GL(n, \mathbb{R})$ ($GL(n, \mathbb{C})$).

Векторное расслоение с одномерным слоем (действительным или комплексным) называется *линейным*. Комплексное расслоение с голоморфными функциями перехода называется *голоморфным* расслоением.

Пример. Построим все *линейные голоморфные расслоения* над сферой S^2. Для этого удобно рассматривать S^2 как компактифицированную комплексную плоскость, то есть сферу Римана $S^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Покроем S^2 двумя картами $\{U_0, z\}$ и $\{U_\infty, w\}$, где z – это стандартная комплексная координата в окрестности $U_0 = S^2/\{\infty\} \approx \mathbb{C}$, а $w = 1/z$ – координата на $U_\infty = S^2/\{0\} \approx \mathbb{C}$. Соответствующие сечения обозначим $s_0 : U_0 \to \mathbb{C}$ и $s_\infty : U_\infty \to \mathbb{C}$. Структура расслоения будет определена с помощью функции перехода $f_{\infty 0} : U_0 \cap U_\infty \to GL(1, \mathbb{C})$

$$s_\infty = f_{\infty 0} s_0, \quad \text{где выберем } f(z) = \frac{1}{z^n}$$

Такая функция перехода определяет для каждого целого n некоторое голоморфное расслоение над S^2, которое обозначается $\mathcal{O}(n)$. Можно доказать, что любое голоморфное линейное расслоение изоморфно $\mathcal{O}(n)$ при некотором n. Тривиальное расслоение $S^2 \times \mathbb{C}$ будет соответствовать $\mathcal{O}(0)$. Касательное расслоение TS^2 также должно быть изоморфно $\mathcal{O}(n)$ при определенном n. Поскольку $dw = -(1/z^2)dz$, то функция перехода для касательного расслоения должна иметь вид $f_{\infty 0} = dw/dz = -1/z^2$, откуда следует, что $TS^2 \cong \mathcal{O}(2)$. Аналогично для кокасательного расслоения получаем $T^*S^2 \cong \mathcal{O}(-2)$.

Отметим важный факт, что любое голоморфное векторное расслоение E над S^2 эквивалентно прямой сумме линейных расслоений $E \cong \mathcal{O}(n_1) \oplus \ldots \oplus \mathcal{O}(n_k)$ (теорема Биркгофа-Гротендика).

Векторное расслоение всегда допускает глобальное сечение, например нулевое сечение $s(x) = 0$, которое сохраняется линейными преобразованиями. Так же можно выбрать ненулевое локальное сечение внутри некоторой окрестности U. Если около границы U это сечение обращается в ноль, то его можно продолжить непрерывно как нулевое сечение за границу U и таким образом получить глобальное ненулевое сечение. Заметим, что нетривиальное глобальное сечение расслоения, которое в каждой точке многообразия отлично от нуля, существует не всегда. Пример – касательное расслоение к сфере. Вообще, среди всех двумерных замкнутых ориентируемых поверхностей только касательное расслоение над тором имеет нетривиальное сечение.

Набор $s = (s_1, \dots, s_n)$ из n гладких (непрерывных, аналитических в зависимости от типа расслоения) сечений векторного расслоения над окрестностью U n-мерного многообразия M называется *репером*, если вектора $\{s_1(x), \dots, s_n(x)\}$ образуют базис в слое для каждой точки $x \in U$. Выбор репера эквивалентен локальным тривиализациям расслоения.

Векторное расслоение тривиально тогда и только тогда, когда оно имеет глобально определенный над каждой точкой базы репер.

Важным классом расслоений являются *главные* расслоения (principal bundle), слоем которых является группа Ли, причем определено действие группы на себя левыми сдвигами $g : G \to gG$, $g \in G$.

Определение. Расслоение $P \xrightarrow{\pi} M$ называется **главным расслоением** со *структурной* (калибровочной) группой Ли G, если задано послойное свободное и транзитивное действие группы G на P справа $R_g : p \mapsto pg$, где $p \in P$, $g \in G$. База главного расслоения M диффеоморфна фактор-пространству P/G, а проекция π совпадает с каноническим отображением $P \to P/G$.

Любое главное расслоение однозначно задается выбором базы M, структурной группы G и атласом $A = \{U_i, \varphi_i, f_{ij}\}$, где функции перехода f_{ij} – G-значные гладкие функции на $U_i \cap U_j$. Функции перехода определяются расслоением неоднозначно. Если рассмотреть различные тривиализации $\{U_i, \varphi_i\}$ и $\{U_i, \psi_i\}$ и определить отображение

$$\lambda_i(x) := \varphi_i(x) \circ \psi_i^{-1}(x) : U_i \times F \to U_i \times F$$

так, чтобы оно принадлежало структурной группе G, то функции перехода $f_{ij}(x)$ и

$$f'_{ij}(x) = \lambda_i^{-1}(x) f_{ij}(x) \lambda_j(x)$$

будут определять эквивалентные расслоения, а сами коциклы $\{f_{ij}\}$ и $\{f'_{ij}\}$ называются эквивалентными.

Глобальное сечение главного расслоения P существует тогда и только тогда, когда расслоение тривиально, то есть $P = M \times G$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы функции перехода имели вид

$$f_{ij}(x) = \lambda_i^{-1}(x) \lambda_j(x)$$

где $\lambda_i(x)$ – гомеоморфизмы слоя, принадлежащие структурной группе G.

С главным расслоением P со структурной группой G связаны так называемые *ассоциированные расслоения* (associated bundle), которые отличаются только слоем V, которой является в этом случае пространством представления группы G. Это часто обозначают как $P \times_G V \to M$.

Пример. Ленту Мебиуса можно рассматривать как ассоциированное расслоение над окружностью со структурной группой $\mathbb{Z}_2 = \{e, g\}$. Функции перехода имеют вид

$$f_{12}(\alpha) = \begin{cases} e, & \alpha \in W_2 \\ g, & \alpha \in W_1 \end{cases}$$

Пример. Векторное расслоение (в частности, касательное) называется ориентируемым, если все функции перехода f_{ij} могут быть выбраны так что $f_{ij} \in GL^+(n, \mathbb{R}) := \{f \in GL(n, \mathbb{R}) | \det(f) > 0\}$. Например, из функций перехода для расслоения, определяющего лист Мебиуса, видно ($f = -1$, $\alpha \in W_1$), что оно неориентируемо.

В физических приложениях сечения ассоциированных расслоений могут описывать поля материи в некотором представлении структурной (калибровочной) группы G. Обычно используется фундаментальное представление. Например, для $G = SU(n)$ сечение $\phi = s(x)$ в точке x будет иметь вид n-компонентного столбца-вектора, преобразующегося под действием матрицы $g \in SU(2)$ как $\phi \mapsto g\phi$.

Часто используется также присоединенное представление $\mathrm{Ad} : G \to Hom(\mathfrak{g})$ группы Ли G в ее алгебре Ли $\mathfrak{g}$ – здесь роль алгебры $\mathfrak{g}$ (как линейного пространства) играет слой *присоединенного* расслоения $\mathrm{ad}P = P \times_G \mathfrak{g}$ главного расслоения P. Для группы $SU(n)$ сечение ϕ представляет антиэрмитову бесследовую матрицу размера $n \times n$, преобразующуюся как $\phi \mapsto g\phi g^{-1}$.

Пример. Слой присоединенного расслоения с калибровочной группой $SU(2)$ изоморфен алгебре $\mathfrak{s}u(2) \cong \mathbb{R}^3$. В качестве базиса в нем можно взять матрицы Паули

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Пример. Касательное расслоение TM ассоциированно с главным расслоением со структурной группой $GL(n, \mathbb{R})$, которое также называют главным реперным расслоением LM.

Редукция структурной группы

Возможна ситуация, когда структурная группа G *редуцирована* к некоторой своей подгруппе $G_0 \subset G$. Это означает, что локальные тривиализации могут быть выбраны так, что все функции перехода принадлежат группе G_0. В частности, главное расслоение будет тривиальным тогда и только тогда, когда его структурная группа может быть редуцирована к тривиальной подгруппе, состоящей из единицы.

Расслоения с редуцируемой структурной группой играют важную роль в физике, где они описывают системы со *спонтанным нарушением симметрии*, например, явление Хиггса в теории элементарных частиц или эффект Мейснера в теории сверхпроводимости. В геометрии главные расслоения, у которых структурная группа редуцирована от $GL(n, \mathbb{R})$ к некоторой подгруппе Ли G, называются *G-структурами.*

Существуют топологические препятствия для редукции структурной группы. Укажем необходимое и достаточное условие редуцируемости G.

Структурная группа G расслоения $P \to M$ редуцируема к своей замкнутой подгруппе G_0 тогда и только тогда, когда ассоциированное расслоение $P/G_0 \to M$ со слоем G/G_0, на который группа G действует слева, допускает глобальное сечение.

Пример. Структурная группа $GL(n, \mathbb{R})$ реперного расслоения и касательного расслоения TM всегда редуцируема к своей максимальной компактной подгруппе $O(n)$, то есть всегда существует атлас касательного расслоения с функциями перехода, принимающими значения в $O(n)$. В следствие этой редукции на любом многообразии можно определить риманову метрику. Отметим, что для ориентируемых многообразий структурная группа касательного расслоения всегда редуцируема к $SO(n)$.

Индуцированные расслоения

Пусть задано расслоение $E \xrightarrow{\pi} M$ со слоем F и структурной группой G и отображение $f : M' \to M$. С помощью этого отображения можно построить новое расслоение $E' \xrightarrow{\pi'} M'$ с тем же слоем F и той же группой G, которое будем называть *индуцированным* расслоением (pullback bundle). Если расслоение E задано атласом $A = \{U_i, \varphi_i, f_{ij}\}$, то структура индуцированного (с помощью отображения f) расслоения с базой M', слоем F и группой G задается так:
1) покрытие $M' = \cup U'_i$, где $U'_i = f^{-1}(U_i)$;
2) функции перехода ${f'}_{ij} : (U'_i \cap U'_j) \times F \to (U'_i \cap U'_j) \times F$ определяются правилом

$$f'_{ij} : (x, y) \to (x, T'_{ij}(x)y), \quad \text{где} \quad T'_{ij}(x) = T_{ij}(f(x))$$

Справедлива коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} E' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "\pi'"'] & E \arrow[d, "\pi"] \\ M' \arrow[r, "f"] & M \end{tikzcd}$$

При индуцировании сохраняются многие важные свойства расслоений. В частности, если пространство M может быть непрерывно стянуто в точку x_0, то расслоение $E \to M$, индуцированное отображением $f : M \to x_0$, эквивалентно прямому произведению.

Касательное и кокасательное расслоения над $E \to M$

В геометрии и физических приложениях важную роль играют касательные TE и кокасательные T^*E расслоения над многообразиями, которые сами являются расслоениями $E \xrightarrow{\pi} M$.

Если на E ввести координаты (x^μ, y^i) с законом преобразования

$$x^\mu \to x'^\mu(x^\nu), \qquad y^i \to y'^i(x^\nu, y^j),$$

то голономными координатами на касательном расслоении $TE \xrightarrow{\pi_E} E$ будут величины $(x^\mu, y^i, \dot{x}^\mu, \dot{y}^i)$, где $(\dot{x}^\mu, \dot{y}^i)$ – координаты на касательных пространствах к E, заданные относительно голономного репера $(\partial_\mu, \partial_i)$. Функции перехода для расслоения TE имеют вид

$$\dot{x}'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}\dot{x}^\nu, \qquad \dot{y}'^i = \frac{\partial y'^i}{\partial y^j}\dot{y}^j + \frac{\partial y'^i}{\partial x^\mu}\dot{x}^\mu$$

Кроме того, справедлива следующая коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} TE \arrow[r, "T\pi"] \arrow[d, "\pi_E"'] & TM \arrow[d, "\pi_M"] \\ E \arrow[r, "\pi"] & M \end{tikzcd}$$

где $T\pi : (x^\mu, y^i, \dot{x}^\mu, \dot{y}^i) \to (x^\mu, \dot{x}^\mu)$ определяет TE также как расслоение над TM. Ядро этого отображения $\mathrm{Ker}\, T\pi$, определяет вложенное подрасслоение, называемое *вертикальным* касательным расслоением VE, состоящее только из векторов, касательных к слоям E. Координатами на VE будут $(x^\mu, y^i, \dot{y}^i)$.

Голономными координатами на кокасательном расслоении $T^*E \xrightarrow{\pi_E} E$ будут величины $(x^\mu, y^i, \dot{x}_\mu, \dot{y}_i)$, где $(\dot{x}_\mu, \dot{y}_i)$ – координаты на кокасательных пространствах к E, заданные относительно голономного репера (dx^μ, dy^i). В отличие от TE кокасательное расслоение T^*E не образует расслоения над T^*M, что видно из закона преобразования координат

$$\dot{x}'_\mu = \frac{\partial y^i}{\partial x'^\mu}\dot{y}_i + \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}\dot{x}_\nu$$

где первая группа слагаемых дает "лишнюю" зависимость функций перехода от координат $\dot{y}_i$. Таким образом справедлива только следующая коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} T^*E \arrow[d, "\pi_E"'] \arrow[dr] & \\ E \arrow[r, "\pi"] & M \end{tikzcd}$$

Формы на расслоениях

Прежде чем рассматривать дифференциальные формы на расслоениях, введем формы, принимающие значения в касательном пространстве многообразия, то есть определим *тангенциально-значную* форму ω как сечение расслоения

$$\bigwedge^k T^*M \bigotimes TM \to M$$

которое в голономных координатах имеет вид $\phi = \phi^\mu_{\nu_1\ldots\nu_k}(x)dx^{\nu_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\nu_k} \otimes \partial_\mu$. В этих терминах векторное поле на многообразии – это тангенциально-значная 0-форма.

Из дифференциальных форм на расслоениях наиболее часто используются следующие.

1. Горизонтальные формы $\phi : E \to \bigwedge^k T^*M$ – все формы на E, ограниченные на подрасслоение $T^*M \subset T^*E$. В координатах они имеют вид

$$\phi = \phi_{\nu_1\ldots\nu_k}(y)dx^{\nu_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\nu_k}$$

2. Тангенциально-значные горизонтальные формы $\phi : E \to \bigwedge^k T^*M \bigotimes TE$ имеют вид

$$\phi = dx^{\nu_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\nu_k} \otimes (\phi^\mu_{\nu_1\ldots\nu_k}(y)\partial_\mu + \phi^i_{\nu_1\ldots\nu_k}(y)\partial_i)$$

3. Тангенциально-значные проектируемые горизонтальные формы имеют вид

$$\phi = dx^{\nu_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\nu_k} \otimes (\phi^\mu_{\nu_1\ldots\nu_k}(x)\partial_\mu + \phi^i_{\nu_1\ldots\nu_k}(y)\partial_i)$$

4. Вертикально-значные горизонтальные формы $\phi : E \to \bigwedge^k T^*M \bigotimes VE$ имеют вид

$$\phi = \phi^i_{\nu_1\ldots\nu_k}(y)dx^{\nu_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\nu_k} \otimes \partial_i$$

Пример. Вертикально-значная горизонтальная 1-форма на E $\sigma : E \to T^*M \otimes VM$, или в компонентах

$$\sigma = \sigma^i_\mu(y)dx^\mu \otimes \partial_i$$

называется *припаивающей* формой. Если $E = TM$, то существует каноническая припаивающая форма $\sigma = dx^\mu \otimes \frac{\partial}{\partial \dot{x}^\mu}$.

4.2 Связности на расслоениях

Сечения расслоений можно складывать между собой и умножать на функции на M. Можно также задать дифференцирование сечений таким образом, чтобы оно не зависело от выбора локальных тривиализаций. Таким образом получается простейшее определение *линейной связности* как *ковариантного дифференцирования.*

Определение. **Ковариантной производной** ∇ на векторном расслоении $E \xrightarrow{\pi} M$ называется дифференциальный оператор 1-го порядка $\nabla : \Gamma(E) \to \Gamma(T^*M \times E)$, удовлетворяющий правилу Лейбница $\nabla(fs) = df \otimes s + f\nabla s$, где s – гладкое сечение $E \to M$, а f – гладкая функция на M.

С общей точки зрения, связность на расслоении E является дополнительной геометрической структурой, которая определяет правило *параллельного переноса* – сопоставление всякому пути γ в базе M семейства отображений слоев F_γ расслоения E над точками этого пути. В инфинитезимальной форме задание связности можно наглядно представить себе как задание в каждой точке расслоения $y \in E$ направления, в котором она будет переноситься в многообразии E, если ее проекция $x = \pi(y)$ переносится в некотором направлении в базе M. Например, для главного расслоения $P \to M$ объект связности будет 1-формой на M со значениями в алгебре $\mathfrak{g}$.

С другой стороны, если говорить на языке касательных пространств, то для каждой точки y расслоения E определяется поднятие касательного пространства T_xM к базе M в касательное пространство T_yE к расслоению E, то есть связность определяет *горизонтальное расщепление* касательного расслоения $TE = HE \oplus VE$, что можно записать как послойное отображение

$$\dot{x}^\mu \partial_\mu + \dot{y}^i \partial_i \mapsto \dot{x}^\mu (\partial_\mu + \Gamma^i_\mu \partial_i)$$

Таким образом, получаем геометрическое определение **связности** как тангенциально-значной проектируемой горизонтальной 1-формы Γ на E такой, что свертка $\Gamma \lrcorner \phi = \phi$ для всех горизонтальных форм ϕ. В голономных координатах на E связность имеет вид

$$\Gamma = dx^\mu \otimes (\partial_\mu + \Gamma^i_\mu(y)\partial_i)$$

с законом преобразования

$$\Gamma'^i_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}\left(\frac{\partial y'^i}{\partial y^j}\Gamma^j_\nu + \frac{\partial y'^i}{\partial x^\nu}\right)$$

Приведенное выше определение линейной связности можно получить из общего определения, если потребовать, чтобы коэффициенты $\Gamma^i_\mu(y)$ линейно зависели от координат слоя y^i. Таким образом, **линейная связность** на векторном расслоении $E \to M$ – это 1–форма

$$\Gamma = dx^\mu \otimes (\partial_\mu - \Gamma_{\mu j}{}^i(x) y^j \partial_i)$$

Далее, если не оговорено противное, мы будем под связностью понимать именно линейную связность.

В физических приложениях связности на векторном расслоении $E \to M$ часто рассматривают как 1-формы на M со значениями в E. Такие формы будем обозначать как $A(x)$. Заметим, что форма связности A не имеет глобального описания на M. Ковариантное дифференцирование, определяемой этой связностью, есть просто линейное отображение $\nabla : \Omega^0(M, E) \to \Omega^1(M, E)$. Если выбрать локальные тривиализации, то есть над каждой окрестностью $U \subset M$ фиксировать репер $f = (e_1, \dots, e_r)$, то мы получим локальное представление связности

$$\nabla e_i = A^j_i e_j$$

где $A_i^j = A_i^j(f, \nabla)$ – $r \times r$-матричнозначная 1-форма над U. Если $s \in \Omega^0(M, E)$, то мы получаем локальное представление ковариантной производной

$$\nabla s = (ds + A \cdot s)^i e_i$$

При замене репера $f \mapsto f' = f \cdot g$, где $g : U \to GL(n)$, мы получим

$$A \mapsto A' = g^{-1} A g + g^{-1} dg$$

Можно расширить определение дифференцирования на формы произвольного порядка и ввести (единственный) оператор $\nabla : \Omega^p(M, E) \to \Omega^{p+1}(M, E)$, удовлетворяющий условию

$$\nabla(\omega s) = d\omega \wedge s + (-1)^q \omega \wedge \nabla s, \qquad \omega \in \Omega^q(M), s \in \Omega^p(M, E)$$

В локальном представлении

$$\nabla s = ds + A \wedge s, \qquad s \in \Omega^p(M, E)$$

Последовательность отображений

$$\Omega^0(M, E) \xrightarrow{\nabla} \Omega^1(M, E) \xrightarrow{\nabla} \Omega^2(M, E) \xrightarrow{\nabla} \dots$$

будет образовывать цепной комплекс (обобщенный комплекс де Рама), только в том случае, если оператор **кривизны** связности $F := \nabla \circ \nabla = \nabla^2 : \Omega^0(M, E) \to \Omega^2(M, E)$ обращается в ноль (связность в этом случае называется *плоской*). Легко проверить, что локально

$$Fs = (dA + A \wedge A) \wedge s, \qquad s \in \Omega^p(M, E)$$

Производные сечений расслоения E не входят в 2-форму кривизны, в следствие этого кривизну можно рассматривать как $\mathrm{End}(E)$-значную 2-форму, где $\mathrm{End}(E)$ – эндоморфизмы слоя.

Кривизна удовлетворяет важному дифференциальному *тождеству Бианки*

$$\nabla F = 0$$

Если на многообразии M задать векторное поле X, то по связности ∇ можно построить оператор $\nabla_X(s) := X \lrcorner \nabla(s) : \Gamma(M, E) \to \Gamma(M, E)$, определяющий ковариантное дифференцирование вдоль поля X. Этот оператор является обобщением обычной производной по направлению. Будучи дифференциальной 2-формой, F_∇ является антисимметричной билинейной формой, действующей на касательном расслоении, поэтому свертка $F(X, Y)$ определяет линейный оператор $F(X, Y) : \Gamma(M, E) \to \Gamma(M, E)$, и мы получаем классическое выражение для кривизны как коммутатора ковариантных дифференциальных операторов:

$$F(X, Y) = \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X,Y]}$$

Связности на главных расслоениях

Опишем более подробно связности на главных расслоениях $P \to M$, где слой и функции перехода принадлежат некоторой группе Ли G. Для простоты изложения будем считать, что эта группа матричная.

Пусть $\mathfrak{g}$ – алгебра Ли структурной группы G. Введем $\mathfrak{g}$-значную 1-форму $g^{-1}dg$ ($g \in G$), которая называется формой Маурера-Картана. Она инвариантна относительно левых сдвигов на постоянный элемент $g_0 \in G$ и ее можно разложить по базису $\{\Phi^a\}$

левоинвариантных 1-форм: $g^{-1}dg = \Phi^a\lambda_a$, где λ_a – постоянные элементы (матрицы) алгебры $\mathfrak{g}$. Базис $\{\Phi^a\}$ удовлетворяет *уравнениям Маурера-Картана*

$$d\Phi^a + \frac{1}{2}c^a{}_{bc}\Phi^b \wedge \Phi^c = 0$$

где $c^a{}_{bc}$ – структурные константы алгебры $\mathfrak{g}$. Аналогично можно работать с базисом левоинвариантных векторных полей

$$e_a = \mathrm{Tr}\,(g\lambda_a\frac{\partial}{\partial g^T}) = g^k_j\|\lambda_a\|^l_k\frac{\partial}{\partial g^l_j}$$

который двойственен базису 1-форм: $e_a\lrcorner\,\Phi^b = \delta^b_a$.

Параллельный перенос будет определяться связностью $A(x) = A_\mu{}^a(x)\lambda_a dx^\mu$ – матричнозначной формой на базовом многообразии M. Эта связность задает инвариантное относительно правых сдвигов расщепление касательного пространства TP к расслоению P на горизонтальную компоненту HP с базисом

$$\nabla_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} - A_\mu{}^a\bar{e}_a$$

и вертикальную компоненту VP с базисом $\bar{e}_a$:

$$TP = HP \oplus VP$$

где $\bar{e}_a = \mathrm{Tr}\,(\lambda_a g\frac{\partial}{\partial g^T})$ – базис правоинвариантных векторных полей на G. Кривизна связности определяется как коммутатор

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] = -F^a_{\mu\nu}\bar{e}_a, \quad F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + c^a_{bc}A^b_\mu A^c_\nu$$

откуда видно, что кривизна имеет только вертикальные компоненты.

При калибровочном преобразовании (автоморфизме главного расслоения), когда координата слоя g над окрестностью U связана с координатой g' над окрестностью U' функцией перехода φ: $g' = \varphi g$, связность на M преобразуется нетензорным образом

$$A' = \varphi A\varphi^{-1} + \varphi d\varphi^{-1}$$

Кривизна, напротив, имеет тензорный закон преобразования $F' = \varphi F\varphi^{-1}$.

В случае, когда структурной группой G является группа $O(n)$, связность называют *ортогональной*, и локально A представима 1-формой со значениями в алгебре $\mathfrak{o}(n)$ антисимметричных матриц $n \times n$. Если же G является группой $U(n)$, то связность называют *унитарной*, и локально A представима 1-формой со значениями в алгебре $\mathfrak{u}(n)$ антиэрмитовых матриц $n \times n$.

Если работать со связностью как с проектируемой формой ω, заданной на кокасательном расслоении T^*P к расслоению P, то связность имеет вид

$$\omega = g^{-1}Ag + g^{-1}dg$$

где форма Маурера-Картана описывает вертикальную компоненту связности. Эта форма преобразуется тензорным образом $\omega \to g_0^{-1}\omega g_0$ при правых сдвигах $g \to gg_0$ (форма A является инвариантной), постоянна на векторах вертикального базиса $e_a\lrcorner\,\omega = \lambda_a$ и обращается в ноль на векторах горизонтального базиса $\nabla_\mu\lrcorner\,\omega = 0$.

Кривизна $\Omega = d\omega + \omega \wedge \omega$ связности ω имеет вид

$$\Omega = g^{-1}Fg, \quad F = dA + A \wedge A = \frac{1}{2}F^a_{\mu\nu}\lambda_a dx^\mu \wedge dx^\nu$$

При калибровочном преобразовании $g' = \varphi g$ 1-форма связности ω и 2-форма кривизны Ω сохраняют свой вид в новых координатах слоя:

$$\begin{aligned}\omega &= g^{-1}Ag + g^{-1}dg = g'^{-1}Ag' + g'^{-1}dg' \\ \Omega &= g^{-1}Fg = g'^{-1}F'g'\end{aligned}$$

являясь объектами, глобально определенными на T^*P.

Связности в калибровочных теориях

В калибровочных теориях элементарных частиц обычно работают не с главными расслоениями $P \to M$, а с ассоциированными с ними расслоениями $E = P \times_G V \to M$. Структурная (калибровочная) группа G расслоения описывает внутренние симметрии частиц, а поля материи, принадлежащие некоторому представлению G, соответствуют сечениям $\phi(x) \in V$ этого расслоения. Линейная связность на расслоении E представляет калибровочное поле, точнее его калибровочный потенциал A.

Обычно используют присоединенное представление группы G, а связность записывают как дифференциальную форму, принимающую значения в алгебре Ли $\mathfrak{g}$, то есть $A(x) \in \Gamma(T^*M \otimes \mathfrak{g})$.

Компоненты ковариантной производной, определяемой связностью, в присоединенном представлении имеют вид

$$\nabla_\mu \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu} + [A_\mu, \phi]$$

а для коммутаторов получаем выражение $[\nabla_\mu, \nabla_\nu]\phi = [F_{\mu\nu}, \phi]$, где

$$F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]$$

Здесь $F_{\mu\nu}$ – компоненты $\mathfrak{g}$-значной 2-формы на M, которая описывает напряженность калибровочного поля.

Электромагнитное поле (поле Максвелла) описывают связностью на расслоении с калибровочной группой $U(1)$, а слабые и сильные ядерные взаимодействия (поля Янга-Миллса) соответствуют группам $SU(2)$ и $SU(3)$.

В слое присоединенного расслоения $P \times_G \mathfrak{g}$ обычно дополнительно вводят скалярное произведение с помощью билинейной симметрической формы Киллинга $(X, Y) = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{ad}_X \cdot \mathrm{ad}_Y)$ на алгебре $\mathfrak{g}$. Для групп $SU(n)$ метрика Киллинга имеет простой вид

$$(X, Y) = \mathrm{Tr}\,(XY)$$

где $X, Y \in \mathfrak{su}(n)$ – бесследовые антиэрмитовы матрицы.

С помощью метрики $g_{\mu\nu}$ на базе(пространстве-времени) M и (невырожденной) метрики Киллинга в слое $\mathfrak{g}$ можно ввести лагранжиан $\mathcal{L}_{YM} := \frac{1}{4}g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}(F_{\mu\nu}, F_{\alpha\beta})$ для функционала действия Янга-Миллса $S_{YM} = \int \mathcal{L}_{YM}\nu_M$. Функция $\mathcal{L}_{YM} := \frac{1}{4}\mathrm{Tr}\,(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})$ корректно определена на всем M в силу ее инвариантности при калибровочных преобразованиях 2-формы кривизны $F \mapsto \varphi F \varphi^{-1}$.

Калибровочное поле F автоматически удовлетворяет тождеству Бианки

$$\nabla F = 0, \quad \text{или} \quad \nabla_{[\alpha}F_{\mu\nu]} = 0$$

в то время как уравнения Эйлера-Лагранжа для функционала S_{YM} дают уравнения Янга-Миллса

$$\nabla \star F = 0, \quad \text{или} \quad \nabla^\mu F_{\mu\nu} = 0$$

где в присоединенном представлении $\nabla_\alpha F_{\mu\nu} = \partial_\alpha F_{\mu\nu} + [A_\alpha, F_{\mu\nu}]$.

Пример. **Монополь Дирака.**
Монополь Дирака представляет собой пример простейшего калибровочного поля, в данном случае поля Максвелла, на топологически нетривиальном многообразии $\mathbb{R}^3/0$. Такое многообразие стягиваемо к S^2, поэтому для описания монополя необходимо классифицировать все $U(1)$ расслоения над сферой. Группы гомологий сферы имеют вид

$$H_0(S^2) = \mathbb{Z}, \quad H_1(S^2) = 0, \quad H_2(S^2) = \mathbb{Z}$$

В силу нетривиальности группы $H_2(S^2) = \mathbb{Z}$ можно ожидать, что мы получим различные неэквивалентные расслоения.

Покроем базу расслоения S^2 двумя картами H_+ (верхняя полусфера) и H_- (нижняя полусфера) с угловыми координатами (θ, α): $0 \leqslant \theta \leqslant \pi, 0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi$. Слоем расслоения является групповое пространство $U(1) \approx S^1$ с координатой $\exp(i\psi)$. Полусферы, пересекающиеся по экватору, являются областями тривиализации расслоения. Над верхней полусферой $U(1)$ расслоение является произведением $H_+ \times U(1)$ с координатами $(\theta, \alpha, \exp(i\psi_+))$, а над нижней – произведением $H_- \times U(1)$ с координатами $(\theta, \alpha, \exp(i\psi_-))$. Функция перехода (склейки слоев) φ: $\exp(i\psi_-) = \varphi \exp(i\psi_+)$ должна принадлежать группе $U(1)$, зависеть только от α и быть по α периодичной. Эти требования приводят к следующим функциям:

$$e^{i\psi_-} = e^{in\alpha} e^{i\psi_+}$$

где целое число n является топологическим инвариантом и позволяет классифицировать неэквивалентные расслоения. При $n = 0$ мы имеем тривиальное расслоение $P_{n=0} = S^2 \times S^1$. При $n \neq 0$ все расслоения только локально-тривиальны, в частности, при $n = 1$ мы получаем известное расслоение Хопфа $P_{n=1} = S^3 \to S^2$.

Введем теперь на этом расслоении линейную связность – дифференциальную 1-форму A со значениями в алгебре Ли $\mathfrak{g} = i\mathbb{R}$ группы $U(1)$. Локальные формы связности над соответствующими областями тривиализации связаны соотношением $A_- = \varphi A_+ \varphi^{-1} + \varphi d\varphi^{-1}$, что после подстановки $\varphi = \exp(in\alpha)$ дает

$$A_- = A_+ - ind\alpha$$

Здесь слагаемое $ind\alpha$ описывает калибровочное преобразование связности (электромагнитного потенциала) при смене тривиализации над пересечением карт H_+ и H_-. Алгебра мнимых чисел $i\mathbb{R}$, очевидно, изоморфна алгебре действительных чисел $\mathbb{R}$, поэтому для удобства мы далее будем считать, что формы $A_\pm$ принимают значения в $\mathbb{R}$, то есть являются обычными вещественными дифференциальными формами.

Мы ищем связности (калибровочные потенциалы), которые удовлетворяют уравнениям Максвелла в пространстве $\mathbb{R}^3/0$ и описывают поле магнитного монополя Дирака. Такое калибровочное поле соответствует связностям, которые локально задаются формами

$$A_\pm = \frac{n}{2}(\pm 1 - \cos(\theta))d\alpha = \frac{n}{2r}\frac{xdy - ydx}{z \pm r}$$

Эти формы связаны полученным выше калибровочным преобразованием и регулярны над своей областью тривиализации. Заметим также, что форму A_+ нельзя регулярно продолжить в область нижней полусферы H_-, где она становится сингулярной на струне $z < 0, x = y = 0$ (“дираковская струна”).

Калибровочное поле (2-форма кривизны связности) имеет вид

$$F = dA_{\pm} = \frac{n}{2}\sin(\theta)d\theta \wedge d\alpha = \frac{n}{2r^3}(xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy)$$

Оно удовлетворяет уравнениям Максвелла $dF = 0$, $\delta F = 0$ в $\mathbb{R}^3/0$ и описывает поле точечного магнитного заряда величины n. Сделаем несколько замечаний.
1) В силу коммутативности калибровочной группы $U(1)$ форма кривизны остается инвариантной при калибровочных преобразованиях: $F_- = \varphi F_+ \varphi^{-1} = F_+ = F$.
2) 2-форма кривизны F является замкнутой ($dF = 0$), но не является точной, так как не существует *глобально* определенной на $\mathbb{R}^3/0$ 1-формы A такой, что $F = dA$. Это следствие нетривиальности группы гомологий $H_2(S^2) = \mathbb{Z}$.
3) Квантование магнитного заряда n связано с нетривиальной топологической структурой самого расслоения P_n, что в свою очередь обусловлено топологией базы S^2.

4.3 Характеристические классы

При изучении расслоений естественным образом возникает два вопроса. Во-первых, сколько неэквивалентных расслоений E можно построить для заданных многообразий базы M и слоя F? Во-вторых, существуют ли какие-либо критерии, которые говорили бы нам, насколько сильно данное расслоение E отличается от тривиального $M \times F$?

Для ответа на второй вопрос заметим, что топология расслоения фактически определяется топологией базового многообразия. Например, любое расслоение над стягиваемой базой всегда тривиально. Можно сказать, что для того, чтобы получить нетривиальное векторное расслоение, нужно иметь нетривиальную топологию базового многообразия. В свою очередь, расслоение можно использовать как инструмент для исследования и описания топологических свойств базы. Такими топологическими инвариантами, определенными с помощью расслоений, являются характеристические классы. Можно сказать, что характеристический класс измеряет отклонение структуры локального произведения от структуры глобального произведения слоя и базы.

Характеристические классы – это алгебраические конструкции, элементы групп когомологий базового многообразия M, заданные с помощью расслоения $E \to M$. Такие конструкции сопоставляют расслоению замкнутую форму в базе, интегралы от которой по циклам являются топологическими инвариантами.

Общий подход к построению характеристических классов для главного $P \to M$ или ассоциированного $P \times_G V$ расслоения основан на изучении так называемого универсального расслоения EG. Для фиксированной размерности n и группы G универсальное расслоение – это, грубо говоря, такое расслоение, к которое можно вложить любое другое расслоение над многообразием размерности n и с группой G.

Определение. Главное расслоение $EG \to M$ с группой G называется **универсальным** для данной группы G, если EG стягиваемо (или все гомотопические группы $\pi_i(EG) = 0$).

Справедлива следующая *классификационная теорема*: множество $S(M, G)$ расслоений с данной базой M и группой G (с точностью до эквивалентности) совпадает с множеством гомотопических классов отображений базы M в базу BG универсального расслоения, которая называется *классифицирующим пространством.*

Таким образом для заданной группы G множество $S(M, G)$ зависит только от гомотопического типа пространства M и является гомотопическим инвариантом. Фактически все расслоения получаются из отображений $f : M \to BG$ в классифицирующее пространство как индуцированные расслоения.

Характеристические классы для расслоения $E \to M$ представляют собой элементы когомологий $c(E) \in H^*(M, R)$ с коэффициентами в кольце R. Можно доказать, что на самом деле они однозначно определяются классами $c(EG) \in H^*(BG)$ универсального расслоения $EG \to BG$. Построение этих классов основывается на следующих рассуждениях.

Неэквивалентные расслоения с группой G могут быть классифицированы гомотопическими классами отображений $f : M \to BG$. Далее, гомотопические группы $\pi_{k+1}(BG)$ и $\pi_k(G)$ изоморфны в силу стягиваемости EG. Теорема Гуревича устанавливает связь между когомологиями $H^*(BG)$ и $H^*(G)$. Поскольку когомологии группы Ли определяются когомологиями ее алгебры Ли, то нам необходимо найти отображение "$H^*(\mathfrak{g}) \to H^*(M)$", соответствующее $f^* : H^*(BG) \to H^*(M)$.

Обозначим через $I^k(G)$ множество симметричных полилинейных отображений

$$f : \underbrace{\mathfrak{g} \times \ldots \times \mathfrak{g}}_{k} \to \mathbb{R}$$

и определим однородный полином $p(X) = f(X, \ldots, X)$ степени k от элементов $X \in \mathfrak{g}$. Функции $f(X_1, \ldots, X_k)$ называются поляризациями для полинома $p(X)$. Значения этих функций могут быть восстановлены по значениям полинома p, например при $k = 2$: $f(X, Y) = \frac{1}{2}(p(X+Y) - p(X) - p(Y))$. Далее будем рассматривать только инвариантные полиномы и, соответственно, поляризации, для которых

$$p(gXg^{-1}) = p(x), \qquad g \in G$$

Введем на расслоении $E \to M$ связность, и пусть 2-форма F – кривизна этой связности. Эта форма не определена глобально на M, так как при калибровочных преобразованиях она изменяется по закону $F \mapsto gFg^{-1}$. Напротив, если p – определенный выше инвариантный полином, то $p(F) \in \Omega^{2k}(M)$ – глобально определенная $(2k)$-форма на M. Эта форма обладает двумя важными свойствами:

1) $p(F)$ – замкнутая форма, то есть $dp(F) = 0$;

2) если F_1 и F_2 – две формы кривизны, соответствующие двум различным связностям, то существует $(2k-1)$-форма χ на M такая, что $p(F_1) - p(F_2) = d\chi$.

Таким образом *характеристическая форма* $p(F)$ определяет класс когомологий де Рама, независящий от связности на M. Это дает нам алгебраический *гомоморфизм Вейля* $I(G) = \sum I^k(G) \to H^*(M, \mathbb{R})$.

Классы Чженя

Классы Чженя являются характеристическими классами для комплексных расслоений с группой $GL(n, \mathbb{C})$. Инвариантный полином $p(X)$ можно построить следующим образом. Пусть матрица $X \in \mathfrak{g}$ имеет собственные значения $\lambda = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$, тогда полином $p(X)$ является симметричной функцией от λ_i. Если ввести симметричные однородные полиномы

$$S_j(\lambda) = \sum_{i_1 < \ldots < i_j} \lambda_{i_1} \ldots \lambda_{i_j}$$

то инвариантный полином можно записать в виде следующего разложения

$$p(X) = a + bS_1(\lambda) + cS_2(\lambda) + \ldots$$

Примером инвариантного полинома будет

$$\det(I + X) = 1 + S_1(\lambda) + \ldots + S_k(\lambda)$$

Используя $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$-значную форму кривизны F на расслоении, определим *полную форму Чженя* (инвариантный полином) как

$$c(F) = \det(I + \frac{i}{2\pi}F) = 1 + c_1(F) + c_2(F) + \dots$$

где $(2j)$-формы $c_j(F)$ (полиномы степени j по F) называются *формами Чженя.* Классы когомологий этих форм являются характеристическими классами Чженя расслоения E и не зависят от выбора связности.

Для форм Чженя можно получить явные формулы, если использовать разложение по однородным полиномам для $X = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$:

$$\det(I + \frac{i}{2\pi}X) = (1 + \frac{i}{2\pi}\lambda_1)\dots(1 + \frac{i}{2\pi}\lambda_k) = 1 + \frac{i}{2\pi}S_1(\lambda) + \dots$$

где, например, $S_1(\lambda) = \mathrm{Tr}\, X$, $S_2(\lambda) = \sum\limits_{i<j}^{n} \lambda_i\lambda_j = \frac{1}{2}((\mathrm{Tr}\, X)^2 - \mathrm{Tr}\,(X^2))$ и т. д. Таким образом, получаем следующие выражения

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{i}{2\pi}\mathrm{Tr}\, F \\ c_2 &= \frac{1}{8\pi^2}(\mathrm{Tr}\,(F \wedge F) - \mathrm{Tr}\, F \wedge \mathrm{Tr}\, F) \\ &\dots \end{aligned}$$

Поскольку $c_i(F) \in \Omega^{2i}(M)$, то все $c_j = 0$ при $(2j) > n = \dim M$.

Заметим, что для групп $GL(n, \mathbb{C})$ и $U(n)$ инвариантные полиномы могут быть отождествлены, и характеристические классы таких расслоений совпадают. Для $SU(n)$ расслоений $c_1 = 0$, поэтому если для комплексного векторного расслоения $c_1 \neq 0$, то не существует ассоциированного ним главного $SU(n)$ расслоения. Обратное утверждение неверно, так как существуют расслоения с $c_1 = 0$, которые не допускают $SU(n)$ структуру.

Классы когомологий, к которым принадлежат классы Чженя, в действительности являются элементами целочисленных групп когомологий, поэтому можно проинтегрировать $(2i)$-форму $c_i(F)$ по $(2i)$-циклу на M с целыми коэффициентами и получить целое число, не зависящее от выбора связности. В случае компактной базы расслоения можно определить *числа Чженя*, как результат интегрирования инвариантных полиномов по всему многообразию M. Например, для 4-мерного пространства получается два числа Чженя

$$C_2(E) = \int\limits_M c_2(F) \quad \text{и} \quad C_1^2(E) = \int\limits_M c_1(F) \wedge c_1(F)$$

Пример. Построим полную форму Чженя $c(F)$ и найдем числа Чженя для $U(1)$ расслоения над сферой S^2, описывающего магнитный монополь Дирака. База расслоения двумерна, поэтому отлична от нуля только 2-форма Чженя $c_1(F)$. Используя форму кривизны $F = i\frac{n}{2}\sin(\theta)d\theta \wedge d\alpha$ получаем

$$c(F) = 1 + c_1(F), \quad c_1(F) = \frac{i}{2\pi}\mathrm{Tr}\, F = -\frac{n}{4\pi}\sin\theta d\theta \wedge d\alpha$$

Число Чженя

$$C_1 = \int\limits_{S^2} c_1 = -\frac{n}{4\pi}\int\limits_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int\limits_0^{2\pi} d\alpha = -n$$

В этом примере число Чженя $C_1 = -n$ параметризует неэквивалентные $U(1)$ расслоения над S^2, причем для тривиального расслоения $E = S^2 \times U(1)$ число Чженя $C_1 = 0$. С физической точки зрения число Чженя здесь – магнитный заряд монополя.

5 Дополнительные структуры на многообразиях

В этом разделе будут перечислены некоторые дополнительные геометрические структуры, которые находят приложения в физике. Список их, безусловно, далеко не полон. Каждая из этих структур подробно описана в доступной учебной литературе, примерный список которой приведен в конце обзора.

5.1 Риманова метрика в теории гравитации

Пусть задано многообразие M, и в каждой его точке определена билинейная форма $g(v,w) : T_xM \times T_xM \to \mathbb{R}$, то есть определено скалярное произведение с помощью симметричного невырожденного тензора $g_{\mu\nu}(x)$. Тогда M называется *римановым многообразием*, а $g_{\mu\nu}(x)$ – римановой метрикой. Она определяет расстояние ds между двумя бесконечно-близкими точками с координатами x^μ и $x^\mu + dx^\mu$ по формуле

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu$$

Компоненты метрики $g_{\mu\nu}$ заданы относительно голономного (координатного) базиса $\{\partial_\mu\} = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$. Часто используют общий неголономный базис касательного пространства

$$e_a(x) = h_a^\mu(x)\partial_\mu$$

где невырожденные матрицы (компоненты припаивающих форм) $h_a^\mu(x)$ называются тетрадными функциями. Неголономный базис кокасательного пространства обозначают

$$\omega^a(x) = \tilde{h}_\mu^a(x)dx^\mu$$

где $h_a^\mu \tilde{h}_\nu^a = \delta_\nu^\mu$ и $h_a^\mu \tilde{h}_\mu^b = \delta_a^b$. Тетрады связаны с метрикой соотношениями

$$g_{\mu\nu} = \eta_{ab}h_\mu^a h_\nu^b, \qquad \eta^{ab} = g^{\mu\nu}h_\mu^a h_\nu^b$$

где матрица $g^{\mu\nu}$ обратна матрице $g_{\mu\nu}$. Для собственно римановых пространств с положительно определенной метрикой обычно используют ортонормированный базис, в котором $\eta_{ab} = \delta_{ab}$. Для пространства-времени с псевдоевклидовой метрикой $\eta_{ab} = diag(1,-1,-1,-1)$ (метрика Минковского).

В точке x_0 метрика $g_{\mu\nu}(x_0)$ всегда может быть приведена к диагональному виду с помощью диффеоморфизма многообразия. В окрестности точки этого сделать в общем случае невозможно, препятствием является кривизна многообразия.

Формы $\omega^a(x)$ должны удовлетворять *структурным уравнениям Картана*

$$d\omega^a + \omega^a{}_b \wedge \omega^b = T^a$$
$$d\omega^a{}_b + \omega^a{}_c \wedge \omega^c{}_b = R^a{}_b$$

где $\omega^a{}_b = \Gamma^a{}_{bc}\omega^c$ – 1-форма связности на касательном расслоении, $T^a = \frac{1}{2}T^a{}_{bc}\omega^b \wedge \omega^c$ – 2-форма *кручения*, $R_b^a = \frac{1}{2}R^a{}_{bcd}\omega^c \wedge \omega^d$ – 2-форма кривизны на многообразии.

Связность $\omega^a{}_b$ в общем случае не зависит от метрики. Если потребовать, чтобы связность была без кручения,

$$T^\mu{}_{\alpha\beta} = \Gamma^\mu{}_{[\alpha\beta]} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad d\omega^a + \omega^a{}_b \wedge \omega^b = 0$$

и метрической, то есть ковариантная производная метрики обращалась бы в ноль

$$\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = \partial_\alpha g_{\mu\nu} - \Gamma^\gamma{}_{\mu\alpha} g_{\gamma\nu} - \Gamma^\gamma{}_{\nu\alpha} g_{\mu\gamma} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \omega_{(ab)} = 0$$

то можно доказать, что такая связность существует и притом единственная. Она называется *связностью Леви-Чивита* и ее компоненты в голономном базисе (символы Кристоффеля) $\left\{ {\alpha \atop \mu\nu} \right\}$ однозначно определяются метрикой:

$$\left\{ {\alpha \atop \mu\nu} \right\} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (\partial_\mu g_{\nu\beta} + \partial_\nu g_{\mu\beta} - \partial_\beta g_{\mu\nu})$$

Общая линейная связность в голономных координатах допускает следующее разложение

$$\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} = \left\{ {\alpha \atop \mu\nu} \right\} + T^\alpha{}_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}{}^\alpha + T_{\nu\mu}{}^\alpha + C^\alpha{}_{\mu\nu} + C_\nu{}^\alpha{}_\mu - C_{\nu\mu}{}^\alpha$$

где тензор неметричности $C_{\mu\nu\alpha} = -\frac{1}{2}(\partial_\alpha g_{\mu\nu} - \Gamma^\gamma{}_{\mu\alpha} g_{\gamma\nu} - \Gamma^\gamma{}_{\nu\alpha} g_{\mu\gamma})$. В этом (общем) случае геометрия многообразия определяется метрикой, ее ковариантной производной и тензором кручения.

В *общей теории относительности* используется связность Леви-Чивита, поэтому в ОТО 1-форма связности всегда удовлетворяет условиям

$$d\omega^a = -\omega^a{}_b \wedge \omega^b, \qquad \omega_{(ab)} = 0, \qquad d\omega^a{}_b + \omega^a{}_c \wedge \omega^c{}_b = R^a{}_b$$

Используя тензор кривизны $R^a{}_{bcd}$, определим тензор Риччи $R_{ab} = R^c{}_{acb}$ и скалярную кривизну $R = R^a{}_a$.

Метрика $g_{\mu\nu}(x)$, описывающая гравитационное поле, должна удовлетворять *уравнениям Эйнштейна*

$$R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} + \Lambda g_{ab} = T_{ab}$$

где Λ – космологическая постоянная, а T_{ab} – тензор энергии-импульса материи. Уравнения Эйнштейна инвариантны относительно диффеоморфизмов (общековариантных преобразований) многообразия M.

5.2 Финслеровы многообразия

Длина элемента дуги $ds = F(x^1, \ldots, x^n; dx^1, \ldots, dx^n)$ в римановой геометрии описывается функцией $F^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$. Если отказаться от требования квадратичности и рассматривать на расслоении $TM \backslash M = \{(x, y) \in TM | x \in M, y \in T_x M \backslash \{0\}\}$ произвольные гладкие функции $F(x, y)$, однородные степени 1 по y: $F(x, \lambda y) = \lambda F(x, y)$, то мы получим *финслерову метрику* на M. Часто к условию однородности добавляют еще условие положительности гессиана $\frac{1}{2}\partial^2(F^2)/(\partial y^\mu \partial y^\nu)$.

Тензор $g_{\mu\nu}(x, y) := \frac{1}{2}(F^2)_{y^\mu y^\nu} = F F_{y^\mu y^\nu} + F_{y^\mu} F_{y^\nu}$, где $F_{y^\mu} := \partial F / \partial y^\mu$, называется *фундаментальным тензором* финслерова пространства. Он однороден по y^μ и, следовательно, определен на проективном касательном расслоении PTM. Очевидно, что если $F^2(x, y) = g_{\mu\nu}(x) y^\mu y^\nu$, то мы имеем обычную риманову метрику, заданную на M:

$$g_{\mu\nu}(x, y) := \frac{1}{2} \frac{\partial^2(F^2)}{\partial y^\mu \partial y^\nu} = g_{\mu\nu}(x)$$

Фундаментальный тензор определяет скалярное произведение векторов касательного пространства $T_x M$, так как в силу условия однородности $F^2(x, y) = g_{\mu\nu}(x, y) y^\mu y^\nu$. Гиперповерхность в $T_x M$, определяемая при фиксированном x уравнением $F^2(x, y) = 1$, называется *индикатрисой*. В случае собственно римановой метрики индикатриса – это $(n-1)$-мерная единичная сфера евклидовой геометрии.

Пример. Рассмотрим функцию $F(x,y) = \sqrt[n]{(h^1_\mu y^\mu)\dots(h^n_\mu y^\mu)}$, где $\omega^a = h^a_\mu(x)dx^\mu$ – базис 1-форм в кокасательном пространстве $T^*_x M$. Она определяет *метрическую функцию Бервальда-Моора* в касательном пространстве $T_x M$ по формуле $F(y) = \sqrt[n]{y^1 \dots y^n}$.

Над $TM\backslash M$ строится индуцированное расслоение π^*TM в соответствии с диаграммой

$$\begin{array}{ccc} \pi^*TM & \longrightarrow & TM \\ \downarrow & & \downarrow \\ TM\backslash M & \xrightarrow{\pi} & M \end{array}$$

Его слоем над точкой (x,y), $y \neq 0$ является копия n-мерного пространства $T_x M$. Заметим, что в силу однородности по y, часто удобно работать не с индуцированным расслоением над $2n$-мерным расслоением $TM\backslash M$, а над $(2n-1)$-мерным проективным расслоением PTM.

Индикатриса определяет выделенное сечение π^*TM – векторное поле $v = \dfrac{y^\mu}{F(x,y)}\dfrac{\partial}{\partial x^\mu}$, на котором фундаментальный тензор $g(v,v) = 1$. Дуальным объектом к v (сечением расслоения π^*T^*M) является *гильбертова форма* $\Omega = \Omega_\mu dx^\mu$ такая, что $\Omega(v) = 1$, где $\Omega_\mu = g_{\mu\nu}v^\nu = \partial F/\partial y^\mu$. Если на M взять гладкую кривую $\sigma : [a,b] \to M$, то ее длина $L(\sigma)$ в финслеровой метрике будет определяться интегралом $L(\sigma) := \int_a^b F(\sigma, \frac{d\sigma}{dt})dt$, который равен интегралу от гильбертовой формы:

$$L(\sigma) = \int\limits_\sigma \Omega$$

В случае римановой метрики, когда $F = \sqrt{g_{\mu\nu}(x)y^\mu y^\nu}$, $\Omega = \frac{1}{F}g_{\mu\nu}(x)y^\mu dx^\nu$, и мы получаем обычную длину

$$L(\sigma) = \int_a^b \sqrt{g_{\mu\nu}(x(t))\frac{dx^\mu}{dt}\frac{dx^\nu}{dt}}dt$$

На касательном расслоении к $TM\backslash M$ можно стандартным способ определить связность через расщепление

$$T(TM\backslash M) = V(TM\backslash M) \oplus H(TM\backslash M)$$

с вертикальным касательным расслоением $V(TM\backslash M) = \mathrm{Ker}\,\pi^*$. Слои $V_{(x,y)}$ вертикального подрасслоения имеют базис вертикальных векторов $\partial_{y^\mu} := \partial/\partial y^\mu$, а слои горизонтального подрасслоения $H_{(x,y)}$ имеют базис $D_\mu = \partial_{x^\mu} - \Gamma^\nu_\mu \partial_{y^\nu}$, где $\Gamma^\nu_\mu(x,y)$ – коэффициенты *нелинейной* связности. Вектора $\partial/\partial y^\mu$ и D_μ образуют базис касательного пространства $T_{(x,y)}(TM\backslash M)$.

Используя финслерову функцию $F(x,y)$, можно определить каноническую нелинейную связность

$$\Gamma^\nu_\mu = \frac{1}{2}\frac{\partial G^\mu}{\partial y^\nu}$$

где коэффициенты пульверизации $G^\mu = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}((F^2)_{y^\nu x^\alpha}y^\alpha - (F^2)_{x^\nu})$.

Несмотря на то, что на π^*TM не существует канонической *линейной* связности, часто удобно ввести такую связность, исходя из различных дополнительных требований.

Например, известная *связность Чженя* $\omega^a{}_b(x,y)$ определяется условиями, аналогичными условиям для связности Леви-Чивита в римановой геометрии:
1) отсутствие кручения: $d\omega^a + \omega^a{}_b \wedge \omega^b = 0$, что в координатном базисе эквивалентно отсутствию dy^α в разложении $\omega^\mu{}_\nu(x,y) = \Gamma^\mu{}_{\nu\alpha}(x,y)dx^\alpha$ и симметричности $\Gamma^\mu{}_{\nu\alpha} = \Gamma^\mu{}_{\alpha\nu}$;
2) $dg_{\mu\nu} - \omega^\alpha{}_\mu g_{\alpha\nu} - \omega^\alpha{}_\nu g_{\mu\alpha} = 2C_{\mu\nu\alpha}\delta y^\alpha$, где введен тензор Картана $C_{\mu\nu\alpha}(x,y) = \frac{1}{4}(F^2)_{y^\mu y^\nu y^\alpha}$ и $\delta y^\alpha = dy^\alpha + \Gamma^\alpha_\nu dx^\nu$.

5.3 Симплектическая и пуассонова структуры

Симплектическая структура – это замкнутая невырожденная дифференциальная 2-форма Ω, заданная на четномерном многообразии, которое в этом случае называется симплектическим многообразием.

Пример. Кокасательное расслоение T^*M с координатами $(x^\mu, \dot{x}_\mu)$ над многообразием M является симплектическим многообразием с канонической 2-формой

$$\Omega = d\dot{x}_\mu \wedge dx^\mu$$

В механике M называется конфигурационным пространством, а T^*M – фазовым пространством. Локальные координаты x^μ на M называются каноническими координатами, а координаты $\dot{x}_\mu$ в кокасательном пространстве относительно голономного базиса dx^μ – обобщенными импульсами. Симплектические многообразия описывают геометрию автономной механики консервативных систем.

Диффеоморфизм симплектических многообразий, переводящий симплектическую структуру одного в симплектическую структуру другого, называется *симплектоморфизмом*(каноническим преобразованием).

Условие замкнутости ($d\Omega = 0$) в определении Ω связывает кососкалярные произведения $(\dot{x}, \dot{y}) = \Omega_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{y}^\nu$ в касательных пространствах к соседним точкам таким образом, что локальная геометрия симплектических многообразий оказывается универсальной, а именно стандартной геометрией евклидова пространства. Все симплектические многообразия одинаковой размерности локально симплектоморфны (теорема Дарбу). Другими словами, на $(2n)$-мерном многообразии всегда существуют такие координаты (q^i, p_i), $q^i = x^i, p_i = x_{n+i}$, $i = 1, \ldots, n$, что симплектическая структура *в окрестности* любой точки имеет вид

$$\Omega = dp_i \wedge dq^i$$

Таким образом, в симплектической геометрии не существует локальных инвариантов, как это имеет место в геометрии римановой, где локальным инвариантом является тензор кривизны, который ограничивает группу изометрий и приводит к существованию бесконечномерного множества неэквивалентных римановых метрик. В симплектической геометрии вместо этого мы имеем бесконечномерную группу симплектоморфизмов и дискретный набор неэквивалентных *глобальных* симплектических структур.

В пространстве гладких функций на многообразии можно ввести структуру алгебры Ли – скобку Пуассона. В общем случае **скобка Пуассона** определяется как $\mathbb{R}$-билинейное отображение на $C^\infty(M)$ такое, что для любых функций $f, g, h \in C^\infty(M)$ выполняются условия
1) $\{f, g\} = -\{g, f\}$ (антисимметричность)
2) $\{\{f, g\}, h\} + \{\{g, h\}, f\} + \{\{h, f\}, g\} = 0$ (тождество Якоби)
3) $\{f, gh\} = \{f, g\}h + \{f, h\}g$ (правило Лейбница).

Локально скобка Пуассона задается антисимметричным тензором 2-го ранга $w^{\mu\nu}(x)$, удовлетворяющим условию

$$w^{\mu\alpha}\partial_\mu w^{\beta\gamma} + w^{\mu\beta}\partial_\mu w^{\gamma\alpha} + w^{\mu\gamma}\partial_\mu w^{\alpha\beta} = 0$$

Бивекторное поле $w = \frac{1}{2} w^{\mu\nu} \partial_\mu \wedge \partial_\nu$ называется *пуассоновой структурой.* Скобка Пуассона имеет вид

$$\{f, g\} = w^{\mu\nu}(x) \partial_\mu f \partial_\nu g$$

На многообразии тензор Пуассона определяет скалярное произведение ковекторов, например, градиентов функций.

Если тензор Пуассона невырожден ($\det w^{\mu\nu} \neq 0$) в каждой точке многообразия, то обратная матрица $\|w_{\mu\nu}\| = \|w^{\mu\nu}\|^{-1}$ будет определять симплектическую структуру, так как тождество Якоби для w эквивалентно условию замкнутости $d\Omega = 0$, где теперь $\Omega_{\mu\nu} = w_{\mu\nu}$. Таким образом, симплектические многообразия – это частный случай пуассоновых многообразий, когда тензор Пуассона невырожден.

Пример. На симплектическом многообразии с координатами Дарбу (q^i, p_i), когда $\Omega = dp_i \wedge dq^i$, скобка Пуассона имеет вид

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q^i} - \frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial g}{\partial p_i}$$

Пусть $f(x)$ – некоторая функция на пуассоновом многообразии, тогда векторное поле

$$v = w^{\mu\nu} \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \partial_\nu$$

называется гамильтоновым векторным полем, ассоциированным с $f(x)$.

Пример. Пусть $H(x)$ – гамильтониан механической системы на многообразии M. Если на кокасательном расслоении T^*M ввести канонические координаты Дарбу, то траектории гамильтонова векторного поля, ассоциированного с $H(x)$,

$$\frac{dq^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q^i}$$

определяют эволюцию системы.

5.4 Комплексные многообразия

Пусть M – многообразие размерности $2n$. Определим изоморфизм касательных расслоений $J : TM \to TM$ такой, что в каждой точке $x \in M$ $J_x^2 = -I$, где I – тождественный изоморфизм,действующий на TM. Тогда J называется **почти комплексной структурой** на многообразии M. Почти комплексная структура вводит в касательном пространстве $T_x M$, являющемся $2n$-мерным действительным линейным пространством, структуру n-мерного комплексного пространства, определяя правило умножения вектора v на комплексные числа по формуле

$$(a + ib)v = av + bJv, \quad a, b \in \mathbb{R},\ i = \sqrt{-1}$$

Почти комплексная структура существует на любом четномерном ориентируемом многообразии.

Пример. Определим в $M = \mathbb{R}^{2n}$ с координатами (x^i, y^i), $i = 1, \dots, n$ почти комплексную структуру J по правилу

$$J(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n) = (-y^1, \dots, -y^n, x^1, \dots, x^n)$$

Тогда отображение $J : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ будет эквивалентно умножение на i в $\mathbb{C}^n$ с координатами $z^i = x^i + iy^i$. Тензор почти комплексной структуры J^μ_ν в этом примере имеет вид

$$J^\mu_\nu = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}$$

где $I = \delta^i_j$ – единичная матрица $n \times n$; очевидно, что $J^\alpha_\mu J^\mu_\beta = -\delta^\alpha_\beta$. Такая структура называется стандартной комплексной структурой на $\mathbb{R}^{2n}$.

Выберем в качестве базиса касательного пространства T_xM координатный базис $\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}, \frac{\partial}{\partial y^1} \ldots, \frac{\partial}{\partial y^n}\}$, тогда над полем $\mathbb{C}$ мы получим комплексифицированное касательное пространство $T^{\mathbb{C}}_x M$ с базисом

$$\frac{\partial}{\partial z^i} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^i} - i\frac{\partial}{\partial y^i}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial \bar{z}^i} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^i} + i\frac{\partial}{\partial y^i}\right)$$

Если коммутатор любых двух комплексных касательных векторов вида $v = v^i\frac{\partial}{\partial z^i}$ в любой точке многообразия есть тоже комплексный вектор, то почти комплексная структура называется интегрируемой. В общем случае произвольного почти комплексного многообразия коммутатор может давать комплексно-сопряженные векторы вида $w = \bar{w}^i\frac{\partial}{\partial \bar{z}^i}$. Условие интегрируемости эквивалентно обращению в ноль тензора кручения почти комплексной структуры (тензора Нейенхейса)

$$N^\alpha_{\beta\gamma} = J^\mu_\beta(\partial_\mu J^\alpha_\gamma - \partial_\gamma J^\alpha_\mu) - J^\mu_\gamma(\partial_\mu J^\alpha_\beta - \partial_\beta J^\alpha_\mu)$$

Для интегрируемости почти комплексной структуры необходимо и достаточно, чтобы многообразие M было комплексным многообразием, то есть на нем существовал атлас с голоморфными функциями перехода (теорема Ньюлендера-Ниренберга).

Для любой комплекснозначной p-формы ω возможно разложение

$$\omega = \sum \omega_{i_1 \ldots i_r \bar{j}_1 \ldots \bar{j}_s} dz^{i_1} \wedge \ldots \wedge dz^{i_r} \wedge d\bar{z}^{j_1} \wedge \ldots \wedge d\bar{z}^{j_s}$$

Такие формы $\omega_{r,s} \in \Omega^{r,s}(M)$ называются формами (r, s) типа. На комплексном многообразии внешний дифференциал раскладывается в сумму $d = \partial + \bar{\partial}$, где $\partial : \Omega^{r,s} \to \Omega^{r+1,s}$, $\bar{\partial} : \Omega^{r,s} \to \Omega^{r,s+1}$. Эти операторы удовлетворяют соотношениям

$$\partial^2 = \partial\bar{\partial} + \bar{\partial}\partial = \bar{\partial}^2 = 0$$

Соответствующие им группы когомологий называются когомологиями Дольбо:

$$H^{r,s}_\partial = \frac{\operatorname{Ker}\partial}{\operatorname{Im}\partial}, \qquad H^{r,s}_{\bar{\partial}} = \frac{\operatorname{Ker}\bar{\partial}}{\operatorname{Im}\bar{\partial}}$$

На комплексном многообразии можно ввести *эрмитову метрику* $h(v, w) \in \mathbb{C}$, инвариантную относительно комплексной структуры: $h(v, w) = h(Jv, Jw)$. В комплексных координатах $(z^1, \ldots, z^n)$ эрмитова метрика $h = h_{i\bar{k}} dz^i \otimes d\bar{z}^{\bar{k}}$ задается тензором $h_{i\bar{k}}$, который определяет эрмитово скалярное произведение касательных векторов:

$$h(v, w) = h_{i\bar{k}} v^i \bar{w}^{\bar{k}}$$

Матрица тензора $h_{i\bar{k}}$ является эрмитовой: $h_{i\bar{k}} = \overline{h_{k\bar{\imath}}}$. Ее вещественная часть симметрична и определяет риманову метрику $g = \frac{1}{2}(h + \bar{h})$ на касательном пространстве, а мнимая часть антисимметрична и определяет $(1, 1)$-форму

$$\omega = \frac{i}{2} h_{i\bar{k}} dz^k \wedge d\bar{z}^{\bar{k}}$$

Риманова метрика g и форма ω инвариантны относительно комплексной структуры J и связаны с ней соотношениями

$$g(v, w) = \omega(v, Jw), \qquad \omega(v, w) = g(Jv, w)$$

Если форма ω замкнута – $d\omega = 0$, то комплексное многообразие называется *кэлеровым*, а форма ω – кэлеровой. Условие $d\omega = 0$ эквивалентно ковариантному постоянству комплексной структуры $\nabla J = 0$ относительно связности Леви-Чивита, построенной по римановой метрике $g = \frac{1}{2}(h + \bar{h})$, то есть параллельный перенос индуцирует комплексно-линейное отображение на касательных пространствах. На кэлеровом многообразии форма ω определяет также симплектическую структуру, поэтому каждое кэлерово многообразие является симплектическим. Обратное неверно, существуют симплектические многообразия не являющиеся кэлеровыми.

Пример. На комплексном проективном пространстве $\mathbb{C}P^n$ с однородными координатами $[z^0 : \ldots : z^n]$ определим эрмитову *метрику Фубини-Штуди* $h = h_{i\bar{k}} dw^i \otimes d\bar{w}^{\bar{k}}$ в координатах аффинной карты $w^i = z^i/z^0$ соотношением

$$h_{i\bar{k}} = \frac{(1 + |w|^2)\delta_{i\bar{k}} - w_i \bar{w}_{\bar{k}}}{(1 + |w|^2)^2}$$

Поскольку форма $\omega = \frac{i}{2} h_{i\bar{k}} dw^i \wedge d\bar{w}^{\bar{k}}$ замкнута, то $\mathbb{C}P^n$ является кэлеровым. В частности, для комплексной проективной прямой $\mathbb{C}P^1 \approx S^2$ получаем обычную сферическую метрику $g = (1 + |w|^2)^{-2} dw d\bar{w} = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2$ и

$$\omega = \frac{i}{2} \frac{dw \wedge d\bar{w}}{(1 + w\bar{w})^2}$$

6 Современные геометрические структуры

В заключение рассмотрим некоторые современные геометрические структуры, которые привлекли внимание физиков-теоретиков в последние десятилетия. Изложение по необходимости будет крайне сжатым и неполным.

6.1 Некоммутативная геометрия

Некоммутативная геометрия представляет собой достаточно разветвленный раздел современной математики, главной целью которого является описание геометрии пространства в терминах алгебры функций, определенной на нем, и обобщение соответствующих результатов дифференциальной геометрии на некоммутативные алгебры функций. Главной чертой перехода от коммутативных алгебр к некоммутативным является отсутствие обычного понятия точки пространства. В классической геометрии, которая может быть описана в терминах коммутативных ассоциативных алгебр, пространство понимается как множество точек, снабженное дополнительной структурой, например, топология задается набором открытых множеств, а гладкая структура – соответствующим атласом. Пространства некоммутативной геометрии, которые иногда называют квантовыми пространствами, не могут быть интерпретированы таким же образом, в частности, они могут вообще не содержать точек. Это дает потенциальные возможности для описания геометрии физического пространства на микроуровне, где должны быть существенными “квантовые флуктуации” геометрии, приводящие к “квантовой неопределенности” понятия точки пространства.

Для обобщения классической геометрии на некоммутативный случай, необходимо два основных этапа. Во-первых, необходимо перевести все понятия геометрии на язык коммутативной алгебры, а во-вторых, сделать некоммутативное обобщение алгебраических конструкций, получив в результате так называемое квантовое пространство. Заметим, что квантовое пространство, в отличие от обычных пространств классической геометрии, является вторичным понятием, которое возникает в формализме некоммутативной геометрии через соответствующие $*$-алгебры.

Для иллюстрации первого шага, рассмотрим множество V конечного числа элементов. Множество всех комплекснозначных функций на V образует конечномерную коммутативную ассоциативную алгебру. Если определить норму $\|f\| := max|f|$, то для нее будет выполняться условия $\|fg\| \leqslant \|f\|\|g\|$ и $\|ff^*\| = \|f\|^2$, где f^* означает комплексное сопряжение функции f. Нормированная алгебра с инволюцией $f \to f^*$, удовлетворяющая этим двум требованиям, называется C^*-алгеброй. Обратное утверждение заключается в том, что любую конечномерную коммутативную алгебру, являющуюся C^*-алгеброй, можно рассматривать как алгебру функций на конечном числе точек. Здесь число точек определяется размерностью алгебры. Этот пример можно расширить на пространства с топологией. А именно, можно показать что любая коммутативная C^*-алгебра с единицей является алгеброй функций над компактным пространством, то есть теория компактных топологических пространств эквивалентна теории коммутативных C^*-алгебр с единицей.

Дифференциально-геометрические объекты также допускают описание на алгебраическом языке. Преобразованиям симметрии пространства, например, диффеоморфизмам многообразия, соответствуют автоморфизмы C^*-алгебры гладких функций $\mathfrak{A}$. Векторные поля (действительные) эквивалентны эрмитовым дифференцированиям алгебры $\mathfrak{A}$, а все возможные дифференцирования $\operatorname{Der}\mathfrak{A}$ алгебры соответствуют комплексным векторным полям на многообразии. Векторное расслоение является конечным проективным модулем над $\mathfrak{A}$.

Все функции, принадлежащие алгебре $\mathfrak{A}$ и обращающиеся в ноль в некоторой точке x, образуют идеал алгебры функций. Можно показать, что они являются максимальными идеалами. Таким образом, можно не вводить исходное пространство точек и функции над ними, а работать сразу с дифференциальной алгеброй, и пространство определять как множество всех максимальных идеалов алгебры.

Некоммутативное обобщение конструкций классической геометрии не является однозначным, и может быть проведено многими существенно различными способами. Мы рассмотрим только два примера.

Простейшим вариантом некоммутативной геометрии является так называемая *матричная геометрия*, где $*$-алгеброй является конечномерная алгебра комплексных матриц $M_n(\mathbb{C})$. Эта алгебра состоит из n^2 комплексных функций, а “многообразие” содержит только две точки: алгебру $M_n(\mathbb{C})$ и 0. Заметим, что в силу конечного числа измерений все вычисления сводятся к чистой алгебре, и во многих отношениях матричная геометрия аналогична классической геометрии компактных групп Ли. Алгебра векторных полей ∂_i – это алгебра дифференцирований $\operatorname{Der} M_n(\mathbb{C})$, которые все являются внутренними, то есть образованы коммутаторами с элементами $M_n(\mathbb{C})$. Всего есть $n^2 - 1$ независимых дифференцирований, которые можно выбрать в виде

$$\partial_k E_j = \operatorname{ad}_{iE_k} E_j = i[E_k, E_j] = 2C^l_{kj} E_l, \quad \partial_k I_n = 0$$

где iE_k – стандартные генераторы алгебры $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ с константами C^l_{kj}, а I_n – единичная матрица. Эти векторные поля образуют алгебру Ли с коммутатором $[\partial_k, \partial_j] = 2C^l_{kj}\partial_l$, но в отличие от классического случая они не образуют модуль над алгеброй функций, то есть производные нельзя умножать на функции, так как $(E_k\partial_j)E_l = E_k(\partial_j E_l)$ не является производной $M_n(\mathbb{C})$. Это характерная черта некоммутативной геометрии.

Внешняя алгебра дифференциальных форм вводится аналогично классическом случаю по формуле $\theta^k\partial_j = \delta^k_j I_n$. 1-формы образуют модуль над алгеброй. Внешнее произведение определяется обычным соотношением

$$(\theta^k \wedge \theta^j)(\partial_l, \partial_m) = \frac{1}{2}(\theta^k(\partial_l)\theta^j(\partial_m) - \theta^j(\partial_l)\theta^k(\partial_m))$$

Внешний дифференциал определяется на функциях (0-формах) как $df(X) = Xf$, где $X \in \mathrm{Der}\,(M_n)$, так что $dI_n = 0$, $dE_k = 2C^l_{kj}E_l\theta^j$. 1-формы dE_k не коммутируют с функциями E_j. Дифференциалы 1-форм θ^k удовлетворяют тождеству

$$d\theta^k = -C^k_{jl}\theta^j \wedge \theta^l$$

Далее можно определить метрику, оператор дуальности Ходжа и оператор Лапласа, причем спектр лапласиана получается конечным. Также можно ввести симплектическую структуру, используя алгебру функций. Скобка Пуассона двух матричных функций оказывается их коммутатором, поэтому в некоммутативной геометрии нет разницы между классической и квантовой механикой.

Вторым примером может служить некоммутативная геометрия А. Кона, которая позволяет описать Стандартную Модель элементарных частиц на языке геометрии. В этом случае переход к некоммутативным структурам аналогичен переходу от классической механики к квантовой.

Рассмотрим пример классического одномерного гармонического осциллятора. Его фазовое пространство $\mathbb{R}^2$ с координатами x и p. Полная энергия $E = p^2/(2m) + kx^2/2$ образует алгебру $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ коммутативных ассоциативных дифференцируемых функций на $\mathbb{R}^2$ (алгебру классических наблюдаемых). В квантовой механике мы имеем ассоциативную инволютивную алгебру $\mathfrak{A}$ с единицей (алгебру квантовых наблюдаемых), причем больше нет классического пространства, на котором $\mathfrak{A}$ была бы алгеброй функций. Действительно, координаты исходного фазового пространства теперь подчиняются соотношению неопределенности Гейзенберга $\Delta x \Delta p \geqslant \hbar/2$. Для вычисления наблюдаемой $a \in \mathfrak{A}$ необходимо построить точное представление $\mathfrak{A}$ в некотором гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ волновых функций. Для осциллятора $\mathcal{H} = \mathcal{L}_2(\mathbb{R})$, его элементы – это функции $\psi(x)$ интегрируемые с квадратом на конфигурационном пространстве. Время здесь является внешним параметром, и динамика определяется гамильтонианом $H \in \mathfrak{A}$ посредством уравнения Шредингера $(i\hbar\partial_t - \hat{H})\psi(t,x) = 0$, где $\hat{H}$ – оператор представления H. В релятивистской квантовой механики уравнение Шредингера заменяется уравнением Дирака $\eth\psi = 0$, где $\psi(x)$ – четырехкомпонентный дираковский спинор. В отличие от гамильтониана, оператор Дирака не принадлежит представлению $\mathfrak{A}$, но является оператором в $\mathcal{H}$.

В подходе Кона некоммутативная геометрия над компактным римановым спиновым многообразием строится аналогично квантовой механике над фазовым пространством. Некоммутативная структура задается тремя чисто алгебраическими объектами $(\mathfrak{A}, \mathcal{H}, \eth)$, которые называются спектральной тройкой. Здесь $\mathfrak{A}$ – ассоциативная инволютивная алгебра с единицей, $\mathcal{H}$ – комплексное гильбертово пространство представления $\mathfrak{A}$, $\eth$ – самосопряженный оператор на $\mathcal{H}$. Аксиомы, связывающие элементы этой тройки, и которые здесь не приводятся, мотивированы релятивистской квантовой механикой.

В "почти коммутативной" геометрии, которая описывает Стандартную Модель, используется прямое произведение четырехмерной обычной геометрии (пространства-времени) и нольмерной некоммутативной геометрии (внутреннего пространства). Если в качестве последней взять коммутативную структуру, например двухточечное пространство, тогда прямое произведение будет описывать двулистную вселенную, то есть пространство Калуцы-Клейна с дискретным пятым измерением. Оператор Дирака из спектральной тройки для внутреннего пространства в этой модели есть в точности массовая матрица фермионов, что позволяет описать поколения кварков и лептонов.

Некоммутативная геометрия возникает также и в связи с другими разделами математики. В качестве первого примера приведем теорию слоений. При расслаивании некоторого многообразия на подмногообразия-слои, пространство слоев уже может не обладать структурой многообразия. Например, это имеет место в эргодических слоениях, описывающих пространство орбит эргодической динамической системы. В подобном случае естественно использовать некоммутативную $*$-алгебру для описания пространства слоев.

Другим примером служит теория квантовых групп. С их помощью можно построить квантовые главные расслоения по аналогии главными расслоениями классической теории. Все основные ингредиенты: дифференциальное исчисление, формализм связностей, теория характеристических классов и т. д. могут быть естественным образом обобщены в некоммутативном контексте.

6.2 Многообразия Фробениуса

Многообразия Фробениуса были введены в начале 90-х годов в работах Б. Дубровина в связи с исследованиями по двумерной квантовой топологической теории поля. Неожиданным образом эта геометрическая структура оказалась тесно связана с самыми различными областями математики, в частности, с теорией интегрируемых систем и методом изомонодромной деформации, с теорией особенностей, с теорией дискретных групп, с алгебраической геометрией (топология пространства модулей алгебраических кривых). Геометрия многообразий Фробениуса играет важную роль в создаваемой сейчас теории квантовых когомологий.

Многообразие Фробениуса представляет собой многообразие M со структурой алгебры Фробениуса на касательных пространствах T_xM, зависящей (гладко, аналитично и т. п.) от точки $x \in M$. Эта конструкция должна удовлетворять ряду аксиом, но прежде, чем их перечислять, напомним определение алгебры Фробениуса.

Алгебра Фробениуса – это коммутативная ассоциативная алгебра $\mathfrak{A}$ над $\mathbb{C}$ ($\mathbb{R}$) с единицей $e \in \mathfrak{A}$ и билинейной симметричной невырожденной формой

$$< a, b >: \mathfrak{A} \times \mathfrak{A} \to \mathbb{C}, \qquad a, b \in \mathfrak{A}$$

такой что

$$< ab, c >=< a, bc >$$

Если определить линейный функционал $\omega \in \mathfrak{A}^*$ по формуле $\omega(a) :=< e, a >$, то форма $< a, b >= \omega(ab)$. В координатах алгебру Фробениуса можно задать с помощью структурных констант c_{ij}^k, удовлетворяющих условиям ассоциативности и коммутативности, и ковектора (линейного функционала) ω_i такого, что симметричный тензор $g_{ij} = \omega_k c_{ij}^k$ невырожден.

Структура Фробениуса на многообразии соответствует решениям *уравнений ассоциативности WDVV* (Witten-Dijkgraaf-Verlinde-Verlinde), описывающих пространство модулей топологических конформных теорий поля. Уравнения WDVV представляют собой следующие условия на функцию $F(v^1, \ldots, v^n)$ от n переменных.

1. Матрица $\eta_{ij} := \dfrac{\partial^3 F(v)}{\partial v^1 \partial v^i \partial v^j}$ является постоянной, симметричной и невырожденной.
2. Функции $c_{ij}^k = \eta^{ks} \dfrac{\partial^3 F(v)}{\partial v^s \partial v^i \partial v^j}$, где $\eta^{ks} = (\eta_{ks})^{-1}$, должны быть структурными константами некоторой ассоциативной алгебры, поэтому функция $F(v)$ должна удовлетворять переопределенной системе нелинейных дифференциальных уравнений ассоциативности

$$\frac{\partial^3 F(v)}{\partial v^i \partial v^j \partial v^k} \eta^{ks} \frac{\partial^3 F(v)}{\partial v^s \partial v^p \partial v^q} = \frac{\partial^3 F(v)}{\partial v^q \partial v^j \partial v^k} \eta^{ks} \frac{\partial^3 F(v)}{\partial v^s \partial v^p \partial v^i}$$

3. Условие квазиоднородности

$$E^i \partial_i F = (3-d)F + \frac{1}{2} A_{ij} v^i v^j + B_i v^i + C$$

где векторное поле $E = (a^i_j v^j + b^i)\partial_i$ для постоянных a^i_j, b^i, удовлетворяющих условиям $a^i_1 = \delta^i_1$, $b^1 = 0$. Поле E называется эйлеровым полем, а величина d – зарядом фробениусовой структуры.

Инвариантная формулировка этих условий приводит к следующим аксиомам *структуры Фробениуса* $(M, e, < \cdot, \cdot >, E, d)$ на n-мерном многообразии M.

1. Метрика $< \cdot, \cdot >$ является плоской. Векторное поле e (единица алгебры Фробениуса) должно быть ковариантно постоянным относительно связности Ливи-Чивита для метрики $< \cdot, \cdot >$.
2. Тензоры $c(u, v, w) :=< uv, w >$ и $\nabla_t c(u, v, w)$ являются симметричными для всех $t, u, v, w \in T_x M$.
3. Эйлерово векторное поле E удовлетворяет условию $\nabla\nabla E = 0$. Соответствующая однопараметрическая группа диффеоморфизмов действует конформными преобразованиями метрики: $\mathcal{L}_E < \cdot, \cdot >= (2-d) < \cdot, \cdot >$ и

$$\mathcal{L}_E(v \cdot w) = v \cdot w + \mathcal{L}_E v \cdot w + v \cdot \mathcal{L}_E w$$

Эту конструкцию можно обобщить, отказавшись от существования плоской инвариантной метрики. Такие многообразия называются F-многообразиями.

* * *

В заключение необходимо отметить, что многие важные темы остались за пределами предлагаемого обзора. В первую очередь, это модели супергеометрии, обобщающие обычные геометрические конструкции на случай пространств с антикоммутирующими координатами. Отдельного рассмотрения требуют также геометрические вопросы многомерного комплексного анализа. Здесь ключевым средством является понятие пучка, которое можно рассматривать как обобщение понятия расслоения, на случай, когда, грубо говоря, размерность слоев может меняться. Не рассматривались теория слоений и тесно связанная с ней теория алгеброидов и группоидов Ли, теория узлов и алгебраическая геометрия. Из геометрических задач математической физики, не упомянутых в статье, необходимо в первую очередь отметить описание пространства модулей связностей на расслоениях, $Spin^{\mathbb{C}}$-структур и уравнений Зайберга-Виттена, а также теорию твисторов. Все это заинтересованный читатель может найти в имеющейся современной литературе.

Автор благодарен Д. Г. Павлову за предложение написать этот обзор и поддержку; А. А. Элиовичу за обсуждение представленного материала.

Литература

[1] Атья М. *Геометрия полей Янга-Миллса* // в *Геометрия и физика узлов* - М.: Мир, 1995

[2] Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. *Современная геометрия: Методы и приложения.* - М.: Наука, 1986

[3] Кобаяси Ш., Номидзу К. *Основы дифференциальной геометрии*: в 2-х т. - М.: Наука, 1981

[4] Монастырский М. И. *Топология калибровочных полей и конденсированных сред.* - М.: ПАИМС, 1995

[5] Новиков С. П., Тайманов И. А. *Современные геометрические структуры и поля.* - М.: МЦНМО, 2005

[6] Сарданашвили Г. А. *Современные методы теории поля. т. 1: Геометрия и классические поля.* - М.: УРСС, 1996

[7] Шапиро И. С., Ольшанецкий М. А. *Лекции по топологии для физиков.* - Ижевск: НИЦ РХД, 2001

[8] Asselmeyer-Maluga T., Brans C. *Exotic smoothness and physics. Differential topology and spacetime models.* - Singapore: World Scientific, 2007

[9] Bao D., Chern S.-S., Shen Z. *An introduction to Riemann-Finsler geometry.* - New-York: Springer, 2000

[10] Dubrovin B. *Geometry of 2D topological field theories* // в Springer *Lecture Notes in Mathematics*, vol. 1620, p. 120 (1993)

[11] Eguchi T., Gilkey P. B., Hanson A. J. *Gravitation, gauge theories and differential geometry* // Physics Reports, v. 66 (1980), p. 213-393

[12] Nash C., Sen S. *Topology and geometry for physicists.* - London: Academic Press, 1983

[13] Madore J. *An introduction to noncommutative differential geometry and its physical applications.* - Cambridge: CUP, 1995

[14] Marathe K. B., Martucci G. *The mathematical foundations of gauge theories.* - Amsterdam: North-Holland, 1992

[15] Ward R. S., Wells R. O. *Twistor geometry and field theory.* - Cambridge: CUP, 1990