ГРУППА ЛОРЕНЦА КАК ПОДГРУППА КОМПЛЕКСИФИЦИРОВАННЫХ ГРУПП КОНФОРМНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ПРОСТРАНСТВ С МЕТРИКОЙ БЕРВАЛЬДА-МООРА

Д. Г. Павлов

Московский Государственный Технический Университет им. Н. Э. Баумана
geom2004@mail.ru

Г. И. Гарасько

ГУП ВЭИ, Россия, Москва
gri9z@mail.ru

Показано, что группа Лоренца является подгруппой комплексифицированной группы конформных преобразований пространств поличисел H_n с $n \geq 2$, которым соответствуют финслеровы геометрии с метрической функцией Бервальда-Моора.

"Я убежден, что посредством чисто математических конструкций мы можем найти те понятия и закономерные связи между ними, которые дадут нам ключ к пониманию явлений природы."

Альберт Эйнштейн

"Важны не вещи, а принципы симметрии."
Стивен Вайнберг

1 Введение

Группы симметрии играют в математике и физике исключительно важную роль [1] – [4]. Особое место среди всех симметрий современной физики занимает группа Лоренца [5]. Обычно группа Лоренца ассоциируется у физиков с преобразованиями, оставляющими инвариантными интервалы. Роль этой ассоциации трудно переоценить, ведь именно благодаря ей многочисленные эксперименты и наблюдения, в которых природа демонстрирует нам свою явную предрасположенность к лоренц-инвариантности, трактуются как указания на непосредственную связь реального пространства-времени с псевдоевклидовыми геометриями, поскольку именно в таких пространствах группа Лоренца выступает как подгруппа движений. Однако класс изометрических преобразований не является единственным в геометриях с метрическими функциями. Даже в пространствах с квадратичным типом метрики, кроме изометрий фигурируют еще и конформные преобразования, при которых инвариантами оказываются уже не интервалы, а углы. В финслеровых же пространствах набор инвариантов, а, следовательно, и групп фундаментальных непрерывных симметрий, похоже, еще более разнообразен [6]. По этой причине регистрируемая в экспериментах лоренц-инвариантность вполне может оказаться связанной (по крайней мере, гипотетически) не только с изометрическими симметриями пространства-времени, но и с его более сложными преобразованиями, в частности, с конформными. Таким образом, чисто математический вопрос: "Может ли группа Лоренца вне всякой связи с движениями некоторых пространств, являться подгруппой их более сложных групп симметрий?" – становится весьма интересным для возможных физических приложений. В настоящей работе авторы показывают, что плоское финслерово пространство с метрической функцией Бервальда-Моора (поличисловое пространство H_4) как раз и относится к такому типу геометрий, для которых группа Лоренца оказывается столь же "родной" , как для пространства Минковского, и содержится в качестве подгруппы комплексифицированной конформной группы этого пространства. При этом подгруппой группы движений пространства H_4 группа Лоренца не является [7].

Итак, в математике и физике важную роль играют не только группы изометрических симметрии, но и конформных. Первый класс симметрий связан с инвариантностью элемента длины метрического пространства, а второй класс симметрий – с инвариантностью углов. Часто, но далеко не всегда, эти группы однозначно определяют саму геометрию. В физике особое место занимает группа Лоренца как группа изометрической симметрии пространства Минковского x^0, x^1, x^2, x^3 с элементом длины

$$ds_{Min} = \sqrt{(dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2}\,. \tag{1}$$

В работах [8] была выдвинута гипотеза о том, что каждой точке четырехмерного пространства событий можно сопоставить гиперкомплексное число

$$X = x^0 \cdot 1 + x^1 \cdot j + x^2 \cdot k + x^3 \cdot jk \quad \in \quad H_4\,, \tag{2}$$

где символьные элементы $1, j, k, jk$ образуют базис, который будем называть "ортонормированным" , или физическим. Для этих базисных элементов имеют место следующие правила умножения:

×	**1**	**j**	**k**	**jk**
1	1	j	k	jk
j	j	1	jk	k
k	k	jk	1	j
jk	jk	k	j	1

. (3)

Система гиперкомплексных чисел H_4 ассоциативна, коммутативна и изоморфна алгебре действительных диагональных матриц четыре на четыре, то есть

$$H_4 = R \oplus R \oplus R \oplus R\,.$$

Пространство H_4 является метрическим, а именно финслеровым с метрикой Бервальда-Моора. Аналогично определяются [7] пространства поличисел H_n с произвольным $n \geq 2$ как прямая сумма n множеств действительных чисел. При $n \neq 4$ пространства $H_{n\geq 2}$ также являются финслеровыми пространствами с метрическими функциями, имеющими вид аналогичный виду метрической функции пространства Бервальда-Моора, поэтому для краткости ниже мы будем говорить, что пространства $H_{n\geq 2}$ обладают метрикой Бервальда-Моора.

Многие формула и рассуждения упрощаются, если работать не в "ортонормированном" , а так называемом изотропном базисе, для пространства H_4 это базис e^1, e^2, e^3, e^4:

$$\left.\begin{aligned} e_1 &= \frac{1}{4}(1 + j + k + jk)\,, \\ e_2 &= \frac{1}{4}(1 + j - k - jk)\,, \\ e_3 &= \frac{1}{4}(1 - j + k - jk)\,, \\ e_4 &= \frac{1}{4}(1 - j - k + jk)\,. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Координаты в таком базисе будем обозначать $\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4$. Элемент длины в этих координатах в пространстве H_4 имеет вид:

$$ds_{H_4} = \sqrt[4]{d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3 d\xi^4}\,. \tag{5}$$

Для базисных элементов e^1, e^2, e^3, e^4 имеют место следующие правила умножения:

$\times$	$\mathbf{e_1}$	$\mathbf{e_2}$	$\mathbf{e_3}$	$\mathbf{e_4}$
$\mathbf{e_1}$	e_1	0	0	0
$\mathbf{e_2}$	0	e_2	0	0
$\mathbf{e_3}$	0	0	e_3	0
$\mathbf{e_4}$	0	0	0	e_4

. (6)

Никаким преобразованием координат элемент длины ds_{H_4} (5) нельзя перевести в элемент длины ds_{Min} (1). Группой изометрической симметрии пространства Минковского является 6-ти параметрической, в то время как группой изометрической симметрии пространства H_4 является 3-х параметрической абелевой группой.

Произвольная аналитическая функция $F(X)$ переменной H_4 однозначно определяется четырьмя произвольными действительными гладкими функциями $f^i(\xi)$ одной действительной переменной ξ следующим образом:

$$F(X) = f^1(\xi^1)\, e_1 + f^2(\xi^2)\, e_2 + f^3(\xi^3)\, e_3 + f^4(\xi^4)\, e_4\,. \tag{7}$$

Если якобиан

$$\frac{D(f^1, f^2, f^3, f^4)}{D(\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4)} \equiv \frac{\partial f^1}{\partial \xi^1}\frac{\partial f^2}{\partial \xi^2}\frac{\partial f^3}{\partial \xi^3}\frac{\partial f^4}{\partial \xi^4} > 0\,, \tag{8}$$

то преобразование

$$\xi^{i'} = f^i(\xi^{i_-})\,, \tag{9}$$

$i \equiv i_-$, но по ним не идет суммирование, является конформным в обычном смысле, то есть при таком преобразовании

$$ds_{H_4} \qquad \rightarrow \qquad \kappa(\xi)\; ds_{H_4}\,, \tag{10}$$

где $\kappa(\xi)$ – действительная положительная функция координат,

$$\kappa(\xi) \equiv \sqrt[4]{\frac{\partial f^1}{\partial \xi^1}\frac{\partial f^2}{\partial \xi^2}\frac{\partial f^3}{\partial \xi^3}\frac{\partial f^4}{\partial \xi^4}}\,. \tag{11}$$

Из неравенства (8) следует знакопостоянство всех четырех производных и четность числа производных, сохраняющих отрицательное значение. Полная группа конформных преобразований пространства H_4 включает в себя также подстановки координат и изменение знака сразу у пары координат. Таким образом, представление однопараметрического непрерывного конформного преобразования $\hat{T}(\alpha)$ в пространстве бесконечно дифференцируемых функций $\varphi(\xi^1,\xi^2,\xi^3,\xi^4)$ в рамках теории представлений групп Ли возможно в виде:

$$\hat{T}(\alpha)\varphi = \exp(\alpha\hat{g})\varphi\,, \tag{12}$$

где генератор $\hat{g}$ однопараметрического преобразования $\hat{T}(\alpha)$ определяется формулой

$$\hat{g} = g^1(\xi^1)\frac{\partial}{\partial\xi^1} + g^2(\xi^2)\frac{\partial}{\partial\xi^2} + g^3(\xi^3)\frac{\partial}{\partial\xi^3} + g^4(\xi^4)\frac{\partial}{\partial\xi^4}\,, \tag{13}$$

g^i – четыре произвольные бесконечно дифференцируемые функции одной действительной переменной, а α – действительный параметр.

Если известны четыре функции g^i, то есть генератор (13), то функции f^i в конформном преобразовании (9) формально записываются следующим образом:

$$f^i = \exp(\alpha\cdot\hat{g})\cdot\xi^i\,, \tag{14}$$

причем

$$\frac{\partial f^i}{\partial\alpha} = \hat{g}f^i\,. \tag{15}$$

Понятие конформных преобразований будем понимать ниже в более широком смысле: либо позволим коэффициенту κ в формуле (10) принимать любые комплексные значения; либо перейдем от элемента длины ds_{H_4} к элементу длины $ds_{|H_4|_C}$, то есть

$$ds_{|H_4|_C} = \sqrt[4]{|d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3 d\xi^4|_C}\,, \tag{16}$$

где $|z|_C$ означает модуль комплексного числа. Тогда функции f^i в формулах (9) и функции g^i в формуле (13) будут уже комплексными функциями одной действительной переменной, а условие (8) заменится требованием

$$\frac{D(f^1,f^2,f^3,f^4)}{D(\xi^1,\xi^2,\xi^3,\xi^4)} \equiv \frac{\partial f^1}{\partial\xi^1}\frac{\partial f^2}{\partial\xi^2}\frac{\partial f^3}{\partial\xi^3}\frac{\partial f^4}{\partial\xi^4} \neq 0\,. \tag{17}$$

При некоторых дополнительных условиях такую более широкую группу естественно назвать комплексифицированной группой конформных преобразований. Эта группа более естественно вводится, если работать не с метрической функцией, а с формами [9], через которые выражаются метрические функции. В этом случае вместо формулы (10) приходится рассматривать переход

$$(ds_{H_4})^4 \qquad \to \qquad \Lambda(\xi)\ (ds_{H_4})^4\,, \tag{18}$$

где

$$\Lambda(\xi) = \frac{\partial f^1}{\partial\xi^1}\frac{\partial f^2}{\partial\xi^2}\frac{\partial f^3}{\partial\xi^3}\frac{\partial f^4}{\partial\xi^4}\,. \tag{19}$$

Алгебра Ли точного представления группы Лоренца в пространстве бесконечно дифференцируемых функций на четырехмерном пространстве Минковского состоит из 6 генераторов:

$$\left.\begin{array}{c} \hat{B}_i = x^i\dfrac{\partial}{\partial x^0} + x^0\dfrac{\partial}{\partial x^i}\,, \\ \hat{L}_1 = x^3\dfrac{\partial}{\partial x^2} - x^2\dfrac{\partial}{\partial x^3}\,,\ \hat{L}_2 = -x^3\dfrac{\partial}{\partial x^1} + x^1\dfrac{\partial}{\partial x^3}\,,\ \hat{L}_3 = x^2\dfrac{\partial}{\partial x^1} - x^1\dfrac{\partial}{\partial x^2}\,, \end{array}\right\} \tag{20}$$

которые подчиняются следующим коммутационным соотношениям:

$[\hat{\mathbf{X}}, \hat{\mathbf{Y}}]$	$\hat{\mathbf{B}}_1$	$\hat{\mathbf{B}}_2$	$\hat{\mathbf{B}}_3$	$\hat{\mathbf{L}}_1$	$\hat{\mathbf{L}}_2$	$\hat{\mathbf{L}}_3$
$\hat{\mathbf{B}}_1$	0	$-\hat{L}_3$	$\hat{L}_2$	0	$\hat{B}_3$	$-\hat{B}_2$
$\hat{\mathbf{B}}_2$	$\hat{L}_3$	0	$-\hat{L}_1$	$-\hat{B}_3$	0	$\hat{B}_1$
$\hat{\mathbf{B}}_3$	$-\hat{L}_2$	$\hat{L}_1$	0	$\hat{B}_2$	$-\hat{B}_1$	0
$\hat{\mathbf{L}}_1$	0	$\hat{B}_3$	$-\hat{B}_2$	0	$\hat{L}_3$	$-\hat{L}_2$
$\hat{\mathbf{L}}_2$	$-\hat{B}_3$	0	$\hat{B}_1$	$-\hat{L}_3$	0	$\hat{L}_1$
$\hat{\mathbf{L}}_3$	$\hat{B}_2$	$-\hat{B}_1$	0	$\hat{L}_2$	$-\hat{L}_1$	0

. (21)

Если найдутся 6 генераторов вида (13), образующие алгебру Ли, изоморфную алгебре Ли 6-ти генераторов (20), то тем самым будет доказано существование подгруппы комплексифицированной группы конформных преобразований четырехмерного пространства Бервальда-Моора, изоморфной непрерывной группе Лоренца.

2 Точные представления алгебр Ли в пространстве бесконечно дифференцируемых функций одной действительной переменной

Любой генератор $\hat{g}$ представления алгебры Ли в пространстве бесконечно дифференцируемых функций $\mathfrak{F}_1 \ni \varphi(\xi)$, вообще говоря, комплексных одной действительной переменной $\xi \in R$ имеет вид:

$$\hat{g} = g(\xi)\frac{d}{d\xi}\,, \tag{22}$$

где $g(\xi)$ – действительная или комплексная функция одной действительной переменной. Соответствующее преобразование определяется следующим образом:

$$\hat{T}(\alpha)\varphi(\xi) = e^{\alpha\hat{g}}\varphi(\xi)\,. \tag{23}$$

Подчеркнём: достаточным условием того, чтобы оставаться в рамках понятия комплексификации групп Ли, есть требование – комплексные функции $g(\xi)$ в формуле (22) должны являться произведением комплексного числа на действительную функцию действительной переменной.

Преобразование единственной координаты ξ определяется формулами

$$\xi' = f(\xi) \qquad \Rightarrow \qquad f(\xi) = e^{\alpha\hat{g}}\xi \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial f}{\partial\alpha} = g\,\frac{\partial f}{\partial\xi}\,. \tag{24}$$

Откуда следует, что

$$f(\xi;\alpha) = \Psi\left(\alpha + \int^{\xi}\frac{d\xi}{g(\xi)}\right)\,, \tag{25}$$

где функция Φ находится из условия

$$\Psi\left(\alpha + \int^{\xi}\frac{d\xi}{g(\xi)}\right)\Bigg|_{\alpha=0} = \xi\,. \tag{26}$$

Пространство $R \ni \xi$ будем считать метрическим с элементом длины

$$ds = |d\xi|_C \,. \tag{27}$$

Тогда все преобразования (24) являются конформными, так как

$$|d\xi'|_C = \left|\frac{\partial f}{\partial \xi}\right|_C |d\xi|_C \,. \tag{28}$$

• Пусть в рассматриваемой алгебре Ли имеются два коммутирующих генератора, в этом случае точное представление такой алгебры Ли в пространстве $\mathfrak{F}_1$ невозможно.

Докажем это утверждение. Если $[\hat{g}_1, \hat{g}_2] = 0$, то

$$g_1(\xi)\frac{dg_2}{d\xi} - g_2(\xi)\frac{dg_1}{d\xi} = 0 \,. \tag{29}$$

Интегрируя это уравнение, получим

$$g_2(\xi) = const \cdot g_1(\xi) \,, \tag{30}$$

то есть генераторы линейно зависимы. Что и требовалось доказать.

Рассмотрим алгебру Ли группы непрерывных преобразований, сохраняющих элемент длины

$$ds = \sqrt{(dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2} \,. \tag{31}$$

Такая алгебра, является подалгеброй алгебры Ли непрерывной группы Лоренца и содержит три генератора $\hat{B}_1, \hat{B}_2, \hat{L}_3$ (20), которые коммутируют (21) следующим образом:

$$[\hat{B}_1, \hat{B}_2] = -\hat{L}_3 \,, \qquad [\hat{B}_1, \hat{L}_3] = -\hat{B}_2 \,, \qquad [\hat{B}_2, \hat{L}_3] = \hat{B}_1 \,. \tag{32}$$

Согласно выше изложенному представление рассматриваемой алгебры Ли будем искать в виде трех операторов вида:

$$\hat{b}_1 = b_1(\xi)\frac{d}{d\xi} \,, \qquad \hat{b}_2 = b_2(\xi)\frac{d}{d\xi} \,, \qquad \hat{l}_3 = l_3(\xi)\frac{d}{d\xi} \,, \tag{33}$$

где b_1, b_2, l_3 – три неизвестные функции одной действительной переменной. Для этих функций из коммутационных соотношений (32) получим систему трех обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$b_1\frac{db_2}{d\xi} - b_2\frac{db_1}{d\xi} = -l_3 \,, \qquad b_1\frac{dl_3}{d\xi} - l_3\frac{db_1}{d\xi} = -b_2 \,, \qquad b_2\frac{dl_3}{d\xi} - l_3\frac{db_2}{d\xi} = b_1 \,. \tag{34}$$

Эта система уравнений решается в квадратурах, общее решение содержит одну произвольную функцию одной действительной переменной. Приведем одно их частных решений:

$$b_1 = -\sqrt{a^2 + \xi^2} \,, \qquad b_2 = \frac{\xi\sqrt{a^2 + \xi^2}}{a} \,, \qquad l_3 = \frac{a^2 + \xi^2}{a} \,, \tag{35}$$

где a – постоянная. При таких функциях b_1, b_2, l_3 коммутационные соотношения (32) выполняются, и генераторы (33) линейно не зависимы.

Итак, в конформных группах пространств $R \equiv H_1, H_2, ..., H_n, ...$ содержится в качестве подгруппы группа $SO(1, 2)$.

Рассмотрим алгебру Ли группы непрерывных преобразований $SO(3)$, сохраняющих элемент длины

$$ds = \sqrt{(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2}\,. \tag{36}$$

Такая алгебра является подалгеброй алгебры Ли группы Лоренца и содержит три генератора $\hat{L}_1, \hat{L}_2, \hat{L}_3$ (20), которые коммутируют (21) следующим образом:

$$[\hat{L}_1, \hat{L}_2] = \hat{L}_3\,, \qquad [\hat{L}_1, \hat{L}_3] = -\hat{L}_2\,, \qquad [\hat{L}_2, \hat{L}_3] = \hat{L}_1\,. \tag{37}$$

Представление рассматриваемой алгебры Ли будем искать в виде трех операторов вида:

$$\hat{l}_1 = l_1(\xi)\frac{d}{d\xi}\,, \qquad \hat{l}_2 = l_2(\xi)\frac{d}{d\xi}\,, \qquad \hat{l}_3 = l_3(\xi)\frac{d}{d\xi}\,, \tag{38}$$

где l_1, l_2, l_3 – три неизвестные функции одной действительной переменной. Для этих функций из коммутационных соотношений (37) получим систему трех обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$l_1\frac{dl_2}{d\xi} - l_2\frac{dl_1}{d\xi} = l_3\,, \qquad l_1\frac{dl_3}{d\xi} - l_3\frac{dl_1}{d\xi} = -l_2\,, \qquad l_2\frac{dl_3}{d\xi} - l_3\frac{dl_2}{d\xi} = l_1\,. \tag{39}$$

Эта система уравнений решается в квадратурах, общее решение содержит одну произвольную функцию одной действительной переменной. Приведем одно их частных решений:

$$l_1 = i\,\frac{\xi\sqrt{a^2+\xi^2}}{a}\,, \qquad l_2 = i\,\sqrt{a^2+\xi^2}\,, \qquad l_3 = \frac{a^2+\xi^2}{a}\,, \tag{40}$$

где a – постоянная. При таких функциях l_1, l_2, l_3 коммутационные соотношения (37) выполняются, и генераторы (38) линейно не зависимы. Генератор l_3 – действительный дифференциальный оператор, а генераторы l_1, l_2 представляют собой действительные дифференциальные операторы, умноженные на комплексную мнимую единицу i.

Итак, в комплексифицированных конформных группах пространств $R \equiv H_1$, $H_2, ..., H_n, ...$ содержится в качестве подгруппы группа $SO(3)$.

3 Группа Лоренца

Группа Лоренца не может быть подгруппой в комплексифицированной конформной группе пространства $R \equiv H_1$, так как в соответствующей алгебре Ли содержится три пары коммутирующих генераторов:

$$[\hat{B}_1, \hat{L}_1] = 0\,, \qquad [\hat{B}_2, \hat{L}_2] = 0\,, \qquad [\hat{B}_3, \hat{L}_3] = 0\,. \tag{41}$$

Поэтому попытаемся реализовать группу Лоренца в качестве подгруппы в комплексифицированной конформной группе пространства H_2. Если это удастся, то в этом случае можно будет утверждать, что группа Лоренца содержится в качестве подгруппы в комплексифицированных конформных группах пространств H_n, если $n \geq 2$.

Любой генератор $\hat{g}$ представления алгебры Ли в пространстве комплексных бесконечно дифференцируемых функций $\mathfrak{F}_2 \ni \varphi(\xi^1, \xi^2)$ двух действительных переменных $\xi^1, \xi^2 \in R$, определяющий представление однопараметрического преобразования Ли в комплексифицированной группе конформных преобразований пространства H_2, имеет вид:

$$\hat{g} = g^1(\xi^1)\frac{\partial}{\partial\xi^1} + g^2(\xi^2)\frac{\partial}{\partial\xi^2}\,, \tag{42}$$

где $g^a(\xi)$ – действительные или комплексные функции одной действительной переменной. Для того, чтобы генераторы (42) определяли преобразования из некоторой комплексифицированной группы Ли, достаточно, если они будут либо действительными дифференциальными операторами, либо действительными дифференциальными операторами, умноженными на комплексную мнимую единицу i.

Исходя из результатов предыдущего раздела и учитывая, что в двумерном векторном пространстве векторы

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{43}$$

линейно независимы, сконструируем точное представление алгебры Ли группы Лоренца:

$$\left.\begin{aligned}
\hat{L}_1 &= \quad i\sqrt{a^2+(\xi^1)^2}\,\frac{\partial}{\partial\xi^1} + i\sqrt{a^2+(\xi^2)^2}\,\frac{\partial}{\partial\xi^2}\,, \\
\hat{L}_2 &= i\,\frac{\xi^1\sqrt{a^2+(\xi^1)^2}}{a}\,\frac{\partial}{\partial\xi^1} + i\,\frac{\xi^2\sqrt{a^2+(\xi^2)^2}}{a}\,\frac{\partial}{\partial\xi^2}\,, \\
\hat{L}_3 &= \quad -\frac{a^2+(\xi^1)^2}{a}\,\frac{\partial}{\partial\xi^1} - \frac{a^2+(\xi^2)^2}{a}\,\frac{\partial}{\partial\xi^2}\,, \\
\hat{B}_1 &= \quad \sqrt{a^2+(\xi^1)^2}\,\frac{\partial}{\partial\xi^1} - \sqrt{a^2+(\xi^2)^2}\,\frac{\partial}{\partial\xi^2}\,, \\
\hat{B}_2 &= \frac{\xi^1\sqrt{a^2+(\xi^1)^2}}{a}\,\frac{\partial}{\partial\xi^1} - \frac{\xi^2\sqrt{a^2+(\xi^2)^2}}{a}\,\frac{\partial}{\partial\xi^2}\,, \\
\hat{B}_3 &= \quad i\,\frac{a^2+(\xi^1)^2}{a}\,\frac{\partial}{\partial\xi^1} - i\,\frac{a^2+(\xi^2)^2}{a}\,\frac{\partial}{\partial\xi^2}\,,
\end{aligned}\right\} \tag{44}$$

где a – постоянная. Эти генераторы подчиняются коммутационным соотношениям (21), являются линейно не зависимыми, и каждый из них либо действительный дифференциальный оператор, либо действительный дифференциальный оператор, умноженный на комплексную мнимую единицу i.

Итак, группа Лоренца содержится в качестве подгруппы в комплексифицированных конформных группах пространств H_n, если $n \geq 2$.

То, что группа Лоренца содержится в качестве подгруппы именно в комплексифицированных конформных группах пространств $H_{n\geq 2}$, по-видимому, говорит о том, что важную роль в физике может играть не только пространство H_4, которое является четырехмерным поличисловым пространством над полем действительных чисел, но и аналогичное поличисловое пространство над полем комплексных чисел, то есть

$$H_{4,4} \equiv C \oplus C \oplus C \oplus C$$

– восьмимерное поличисловое пространство над полем действительных чисел.

4 Заключение

В свое время Герман Вейль, приступая к решению задачи геометризации гравитационного и электромагнитного полей, воспользовался принципом, который, по его мнению, должен лежать в основе выбора физиками конкретной фундаментальной метрической функции. Этот принцип провозглашал преимущество геометрий, обладающих максимальным разнообразием симметрий при одной и той же размерности пространства [10]. Следуя этой идее, Вейль сформулировал теоретико-групповую постановку проблемы и получил ее решение в одном простом частном случае. Из этого следовал вывод, что самые богатые группы движений присутствуют в геометриях с квадратичным типом метрической функции и именно на них физик должен остановить свое внимание в первую очередь. Поразительно, но если бы великий математик не стал ограничиваться лишь изометрическими преобразованиями, а расширил список симметрий хотя бы до конформных, его выбор мог оказаться иным. В частности, обсуждавшиеся выше плоские финслеровы пространства с метрической функцией Бервальда-Моора (при $n > 2$), явно уступая в плане группы движений квадратичным пространствам, на уровне преобразований сохраняющих углы, оставляют их далеко позади, так как вместо конечнопараметрического множества конформных симметрий конформные преобразования в пространствах Бервальда-Моора образуют бесконечнопараметрическую группу. Еще более поразительно, что за год до смерти, выступая с докладом в Лозанне [11], Вейль обмолвился о своих серьезных сомнениях в правильности, некогда сделанного им в пользу пифагорейства, выборе метрики. Думал ли он тогда о конформных симметриях, как естественных обобщениях групп движений, или имел в виду нечто иное, скорее всего, для нас так и останется тайной.

Литература

[1] Г. Вейль. Симметрия. М.: Наука, 1968.

[2] Ф. Бахман. Построение геометрии на основе понятия симметрии. Пер. с нем. Р. И. Пименова под ред. И. М. Яглома. - М.: Наука, 1969.

[3] Е. Вигнер. Инвариантность и законы сохранения. Этюды о симметрии: Пер. с англ. Под ред. Я. А. Смородинского. - М.: Едиториал УРСС, 2002.

[4] В. Д. Ляховский, А. А. Болохов. Группы симметрии и элементарные частицы: Учебное пособие. - Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1983.

[5] Ф. И. Федоров. Группа Лоренца. М.: Едиториал УРСС, 2003.

[6] Д. Г. Павлов. Метафизика симметрий. В сборнике: Метафизика. Под ред. Ю. С. Владимирова. М.: БИНОМ, 2007.

[7] Д. Г. Павлов, Г. И. Гарасько: Геометрия невырожденных поличисел, Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **1 (7)**, том 4 (2005), 3–25.

[8] Д. Г. Павлов: Хронометрия трёхмерного времени, Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **1 (1)** (2004), 20–32. Четырёхмерное время, Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **1 (1)** (2004), 33–42.

[9] Д. Г. Павлов: Обобщение аксиом скалярного произведения, Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **1 (1)** (2004), 5–19.

[10] Г. Вейль. Пространство, время, материя. Лекции по общей теории относительности. - М.: "Янус", 1996.

[11] Г. Вейль. Математическое мышление. Пер. с англ. и нем./ Под ред. Б. В. Бирюкова и А. Н. Паршина. - М.: Наука, 1989.

Статья поступила 19 апреля 2008 г.