GL_n-ПРОСТРАНСТВА

А. Ф. Турбин

Институт математики НАН Украины, Киев
turbin@imath.kiev.ua

Ю. Д. Жданова

Гос. университет информационно-коммуникационных технологий, Киев
yuzhdanova@yandex.ru

GL_n-пространство определяется как векторизованное аффинное пространство, наделённое симметричной относительно действия группы преобразований А. И. Лобанова [8] нормой. В GL_n-пространстве возможна визуализация многомерных тел (внутреннее многомерное зрение).

Мы не можем представить себе вещь, существующую вне трёх пространственных измерений и одномерной временной протяжённости. Может быть после соответствующей тренировки, когда в результате эволюции ум человеческий превратится в более мощный инструмент, мы и смогли бы научиться мыслить в четырёх пространственных измерениях. Сейчас мы этого не умеем. Мы смотрим на мир сквозь пространственно-временные очки, одно стекло которых позволяет нам воспринять одномерное время, другое – трёхмерное пространство. Мы не можем представить себе мысленно образ гиперкуба или какой-нибудь другой четырёхмерной структуры.

М. Гарднер "Этот правый, левый мир" [1].

В первой работе И. Канта "Размышления об истинной оценке живых сил" (1747) можно найти замечательные мысли, предвосхитившие появление n-мерной геометрии.

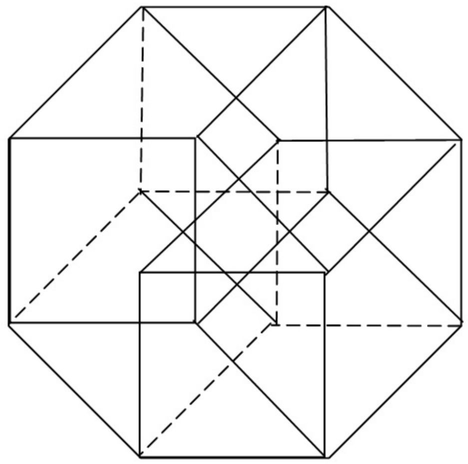
"Почему, – спрашивает он, – наше пространство трёхмерно?" И заключает, что это должно быть как-то связано с тем, что такие силы, как тяготение, распространяются из начальной точки подобно расширяющимся сферам.

"Наука о всевозможных пространствах такого рода (пространствах с числом измерений больше трёх) будет, несомненно, высшим усилием, которое наш ограниченный разум может предпринять в области геометрии".

В "Истории Плэттнера" великий фантаст Герберт Уэллс таинственным образом забрасывает учителя химии по имени Готтшок Плэттнер прямо в четырёхмерное пространство. После девяти дней пребывания в четырёхмерном мире Плэттнер возвращается в привычный евклидовый (?) трёхмерный мир.

Аналог куба – четырёхмерный гиперкуб после возвращения в E^3 Плэттнер мог бы изобразить, например, так[1]:

[1] К сожалению, черно-белая печать приводит к потере части информации на рисунках; см. PDF-версию статьи на сайтах www.polynumbers.ru, www.hypercomplex.info



или так:

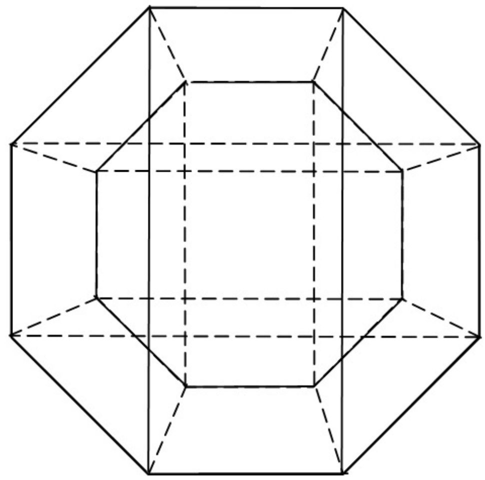
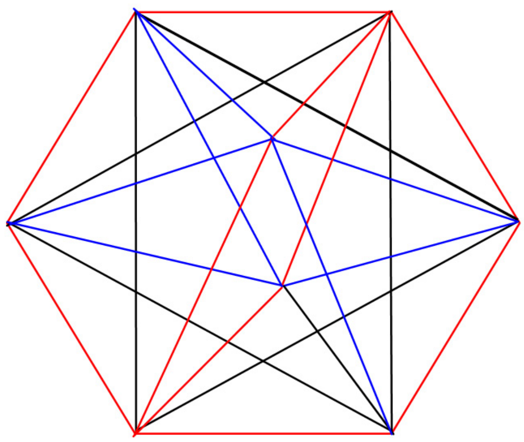


Рис. 1: ([2])

Четырёхмерный аналог октаэдра (8,24,32,16) в одной из проективных версий он показал бы нам так:



либо так:

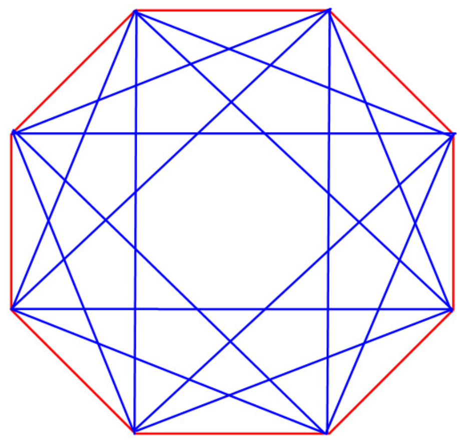


Рис. 2:

Развивая фантазии Г. Уэллса, мы бы узнали от учителя химии, что в формулах

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = 1; \\ x_3^2 + x_4^2 = 1. \end{cases} \tag{1}$$

в 4-пространстве он увидел тор, который в привычном 3-пространстве мы воспринимаем как обыкновенный бублик (метрическое вложение Клиффорда), что целые кватернионы там столь же привычны, как целые гауссовы числа $z = x + iy$, $x, y \in Z$, что единичная сфера

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1$$

в E^4, в отличие от единичной сферы

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$$

в E^3, является компактной группой Ли.

Рассмотрим в $V^4(R)$ квадратичную форму

$$\Delta(\vec{x}) = \left(x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2\right) + \left(x_3^2 - x_3 x_4 + x_4^2\right).$$

Эта положительно определённая форма порождает в $V^4(R)$ дифференцируемое многообразие

$$Ell_4 = \left\{ \vec{x} \in V^4(R) : \Delta(\vec{x}) = 1 \right\}.$$

Это – гиперэллипсоид

$$\left(x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2\right) + \left(x_3^2 - x_3 x_4 + x_4^2\right) = 1.$$

Теорема. *Гиперэллипсоид* Ell_4 *является компактной группой Ли.*

Сечение гиперэллипсоида Ell_4 двумерной плоскостью даёт компактное дифференцируемое многообразие

$$Torell_4 = \left\{ \vec{x} \in Ell_4; x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2 = 1,\ x_3^2 - x_3 x_4 + x_4^2 = 1 \right\}.$$

Теорема. $Torell_4$ *является компактной абелевой группой Ли (эллиптический тор в* E^3*).*

В этой работе мы хотим показать, как можно изобразить образы выпуклых многогранников с достаточно большой группой симметрий в многомерных пространствах, размерность которых может даже превышать 4.

Четырёхмерный аналог тетраэдра (4,6,4) (т. е. многогранника в E^3 с минимально возможным числом вершин) имеет структуру Эйлера-Пуанкаре (5,10,10,5), т. е. у него 5 0-граней (вершин), 10 1-граней (рёбер), 10 2-граней – треугольников и 5 3-граней – тетраэдров.

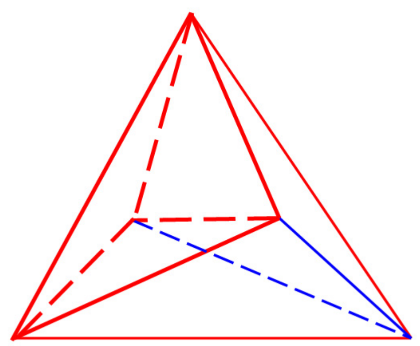


Рис. 3:

Четырёхмерный гиперкуб представлен выше (Рис. 1).

В 1850 году Л. Шлефли показал, что в E^4 имеются в точности шесть типов правильных многогранников:

Симплекс (гипертетраэдр) $\{3,\ 3,\ 3\}$, $(5, 10, 10, 5)$;

Гиперкуб $\{4,\ 3,\ 3\}$, $(16, 32, 24, 8)$;

16-гранник (гипероктаэдр) $\{3,\ 3,\ 4\}$, $(8, 24, 32, 16)$;

24-гранник (мегаоктаэдр) $\{3,\ 4,\ 3\}$, $(24, 96, 96, 24)$;

120-гранник $\{5,\ 3,\ 3\}$, $(600, 1200, 720, 120)$;

600-гранник $\{3,\ 3,\ 5\}$, $(120, 720, 1200, 600)$.

Здесь $\{a, b, c\}$ – символ Шлефли, $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ – структура Эйлера-Пуанкаре $(\alpha - \beta + \gamma - \delta = 0)$.

Были предприняты многочисленные попытки изобразить эти многогранники в виде проекции каркаса (четырёхмерной замкнутой ломаной, образованной 1-гранями) на плоскость.

Поразительно, но спустя более чем 100 лет после того как были созданы изображения 24-, 120-, и 600-гранников, приводимых например в [1, 2, 3], мы обнаружили, что они содержат ошибки.

На рис. 4 воспроизведено изображение самодвойственного 24-вершинника $(24, 96, 96, 24)$, приведённое в "Геометрии" М. Берже со ссылкой на "Regular Polytopes" Г. Кокстера:

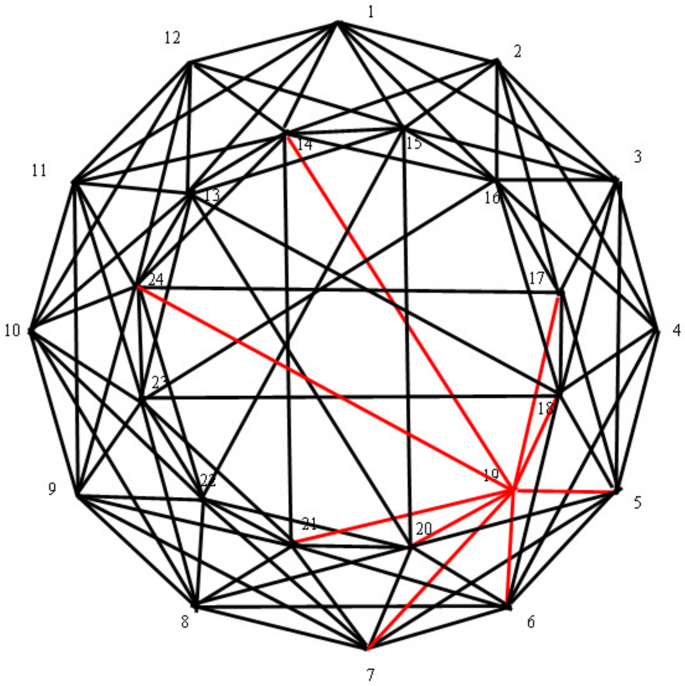


Рис. 4:

Очевидно, что у объекта, проекция каркаса которого представлена на рис. 4, двумерные грани – треугольники. Но легко проверить, что число двумерных граней, которое должно равняться 96, "зашкаливает" за 100! Число двумерных граней, имеющих общую вершину, равно 12 (см. приложение 1).

Определение 1. *Степенью вершины $d_n(k)$ n-мерного выпуклого многогранника относительно k-мерной грани назовём число k-граней с общей вершиной.*

Утверждение 1. $d_n(k) \geq n$.

Например, степени вершин ромбододекаэдра (14,24,12) равны 3 или 4. (И. Кеплер, Г. Вороной, Дж. Конвей и Н. Слоэн)

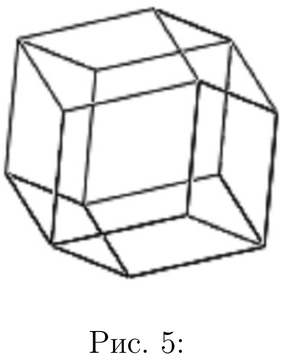


Рис. 5:

У правильного многогранника степени вершин $d_n(k)$ одинаковы для всех вершин. Степень вершины 1 многогранника, изображённого на рис. 4, равна 8; степень вершины 19 равна 9.

У 24-вершинников, заполняющих E^4 ([1], стр.) трёхмерными гранями являются октаэдры. У многогранника на рис. 4 легко различаются трёхмерные грани – тетраэдры.

Анализ изображения четырёхмерного многогранника на рис. 4 делает само его существование проблематичным.

Изображение 24-вершинника $(24, 96, 96, 24)$ (мегаоктаэдра) приведено на рис. 6:

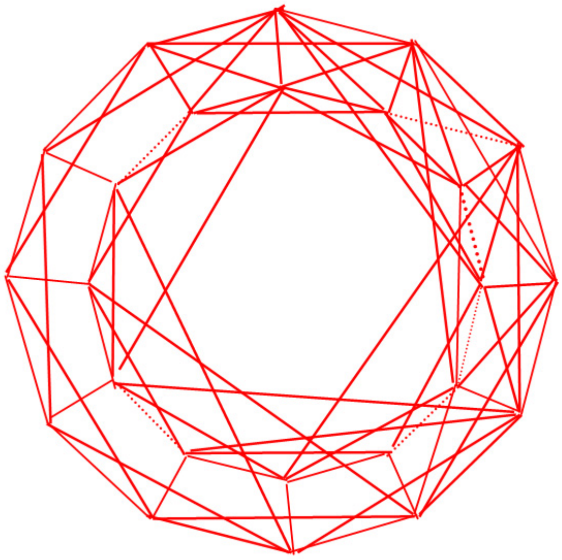


Рис. 6:

Легко видеть, что трёхмерные грани мегаоктаэдра – октаэдры.

Ромбододекаэдр (14,24,12), проекция каркаса которого приведена на рис. 7,

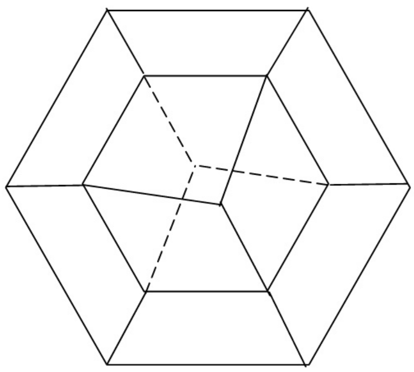


Рис. 7:

– многогранник в E^3 с 14 вершинами, 24 рёбрами и 12 гранями – ромбами, в монографиях по геометрии оказывается изгоем. Он не является правильным и не вписывается в определение полуправильных многогранников (архимедовых тел).

Среди правильных и полуправильных многогранников в E^3 заполняют всё пространство лишь кубы и усечённые октаэдры (рис. 8)

Ромбододекаэдры также заполняют пространство E^3. Английский физиолог С. Хейлз в 1727 г. провёл интересный эксперимент [6]. Насыпав котёл зелёных горошин, он начал осторожно сдавливать образовавшуюся массу "сфер". При увеличении давления горошины деформируются, заполняя пустоты, превращаясь в конечном итоге в ромбододекаэдры. Тот же эксперимент, но уже со свинцовыми шариками проводил в 1939 г. американский ботаник Э. Мацке. И он давлением превратил свинцовые шарики в ромбододекаэдры.

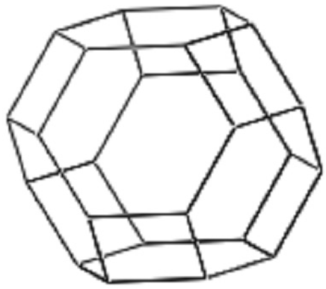


Рис. 8:

Проведём мысленный эксперимент Мацке в четырёхмерном пространстве с четырёхмерными свинцовыми шарами. В результате четырёхмерные шары должны деформироваться в определённые выпуклые многогранники, которыми можно заполнить всё пространство E^4. Подобный мысленный эксперимент можно провести в пространстве любой размерности.

Многогранники в четырёхмерном пространстве E^4, которыми можно его заполнить, – это гиперкубы, гипероктаэдры и мегаоктаэдры.

Четырёхмерный вариант эксперимента Мацке даёт многогранник $Rmb_4\,(30)$ в E^4 с $30 = 2^5 - 2$ вершинами. В n-мерном варианте мы получаем выпуклые многогранники $Rmb_n\,(m)$ с $m = 2^{n+1} - 2$ вершинами, которые заполняют всё пространство.

Теорема. *Гранями гиперромбододекаэдра* $Rmb_n\,(2^{n+1} - 2)$ *являются гиперромбододекаэдры* $Rmb_k\left(2^{k+1} - 2\right)$, $k = 3, ..., n - 1$.

После исследований Л. Шлефли принято считать, что в пространствах размерности $n \geq 5$ имеются три типа многогранников – симплексы (гипертетраэдры), гиперкубы и многомерные аналоги октаэдров.

Мы сожалением констатируем, что аналогов октаэдра в пространствах размерности 5 и выше не существует. У многомерных правильных многогранников в E^n, $n \geq 5$, которые принято считать аналогами октаэдра, все многомерные гранями являются k-мерными симплексами, в частности, трёхмерные грани не октаэдры, как хотелось бы, а правильные тетраэдры.

Пусть x – произвольное действительное число, $|x|$ – модуль этого числа

$$|x| = \begin{cases} x, \ x \geq 0, \\ -x, \ x < 0. \end{cases}$$

Легко видеть, что

$$|x| = x - 2\min\{0, x\}\,. \tag{2}$$

Представление (2) модуля числа x, интерпретируемого как метрика в одномерном пространстве R, допускает обобщение на многомерные векторные пространства.

Пусть $V^n\,(\mathrm{R})$ – n -мерное векторное пространство с полем скаляров R; $\vec{\tau}_1,\ \vec{\tau}_2, ..., \vec{\tau}_n$, – некоторый фиксированный базис пространства $V^n\,(\mathrm{R})$, $\vec{x} = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i\vec{\tau}_i$ – произвольный вектор из $V^n\,(\mathrm{R})$.

Определение. *Функционал*

$$\gamma_n\,(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i - (n+1)\min\{0, x_1, x_2, ..., x_n\} \tag{3}$$

назовём модулем А. С. Галицына вектора $\vec{x}$.

Функционал $\gamma_n(\vec{x})$ был введён в [7] и позволил записать решения обобщённых уравнений Бесселя в явном виде. Модуль А. С. Галицына обладает свойствами псевдометрики [7]:

а) $\gamma_n(\vec{x}) \geq 0$, $\gamma_n(\vec{x}) = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$;

б) $\gamma_n(\vec{x}+\vec{y}) \leq \gamma_n(\vec{x}) + \gamma_n(\vec{y})$;

в) $\gamma_n(\lambda\vec{x}) = \lambda\gamma_n(\vec{x})$, $\lambda \geq R$.

В общем случае

$$\gamma_n(\lambda\vec{x}) \neq |\lambda|\,\gamma_n(\vec{x}) \tag{4}$$

Например, в $V^2(\mathrm{R})$ для $\vec{x} = \vec{\tau}_1 - 3\vec{\tau}_2$ имеем:

$$\gamma_2(\vec{x}) = (1-3) - 3\min\{0,1,-3\} = -2-3(-3) = 7,$$

но

$$\gamma_2(-\vec{x}) = (-1+3) - 3\min\{0,-1,3\} = 2-3(-1) = 5$$

Псевдометрическое пространство $\{V^n(\mathrm{R}), \gamma_n\}$ назовём пространством А. С. Галицына.

Далее под $V^n(\mathrm{R})$ будем понимать векторизованное аффинное пространство.

Введём на $V^n(\mathrm{R})$ норму: $\forall\vec{x} \in V^n(R)$ $\vec{x} = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i\vec{\tau}_i, x_i \in R$

$$\sigma(\vec{x}) = \max\{0, x_1, ..., x_n\} + \max\{0, -x_1, ..., -x_n\} \tag{5}$$

Тот факт, что $\sigma(\cdot)$ является нормой, проверяется непосредственно, доказательство приведено в [7] в общем случае пространств $V^n(R)$. Таким образом, мы имеем новое нормированное пространство $\{V^n(R), \sigma\}$. Заметим, что σ-норма является результатом симметризации псевдонормы – γ-модуля А. С. Галицына.

Рассмотрим в пространстве $\{V^n(R), \sigma\}$ преобразования

$$LG_2 = \left\{L_0, L_1, ..., L_{(n+1)1-1}\right\}.$$

где $L_0(\vec{x}) = \vec{x}$, $\vec{x} = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i\vec{\tau}_i, x_i \in R$ – единичное преобразование.

Например, на плоскости $\{V^2(R), \sigma\}$ преобразования для $\vec{x} = x_1\vec{\tau}_1 + x_2\vec{\tau}_2 \in V^2$

$L_0(\vec{x}) = \vec{x}$.

$L_1(\vec{x}) = -x_1\vec{\tau}_1 + (x_2 - x_1)\vec{\tau}_2$,

$L_2(\vec{x}) = (x_1 - x_2)\vec{\tau}_1 - x_2\vec{\tau}_2$,

$L_3(\vec{x}) = x_2\vec{\tau}_1 + x_1\vec{\tau}_2$,

$L_4(\vec{x}) = -x_2\vec{\tau}_1 + x_1\vec{\tau}_2$,

$L_2(\vec{x}) = (x_2 - x_1)\vec{\tau}_1 - x_1\vec{\tau}_2$.

Указанные L_j-преобразования пространства $\{V^n(R), \sigma\}$ являются простейшими представителями преобразования А. И. Лобанова [8]. Они обладают рядом замечательным свойств.

Теорема. [8]

1. Множество $LG_2 = \left\{L_0, L_1, ..., L_{(n+1)1-1}\right\}$ *относительно композиции преобразований образует группу, изоморфную симметрической группе* S_{n+1} *порядка* $(n+1)!$.

2.

$$\forall\, L_j \sigma(L_j(\vec{x})) = \sigma(\vec{x}). \tag{6}$$

Группу LG_2 назовём *группой преобразований А. И. Лобанова.*

Формула (6) показывает, что σ-норма инвариантна относительно действия группы преобразований А. И. Лобанова.

Определение. *Нормированное пространство* $\{V^n(R), \sigma\}$ *назовём пространством А. Галицына – А. Лобанова или* GL_n*-пространством.*

В отличие от евклидовой метрики, связанной с алгебраическими операциями ($\|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}$), σ-норма изначально арифметико-геометрична.

В структуре GL_n-пространства оказывается возможным визуализировать многие "семиправльные" многомерные многогранники.

Декаэдр. Правильный выпуклый многогранник в E^4 – декаэдр $(10, 30, 30, 10)$

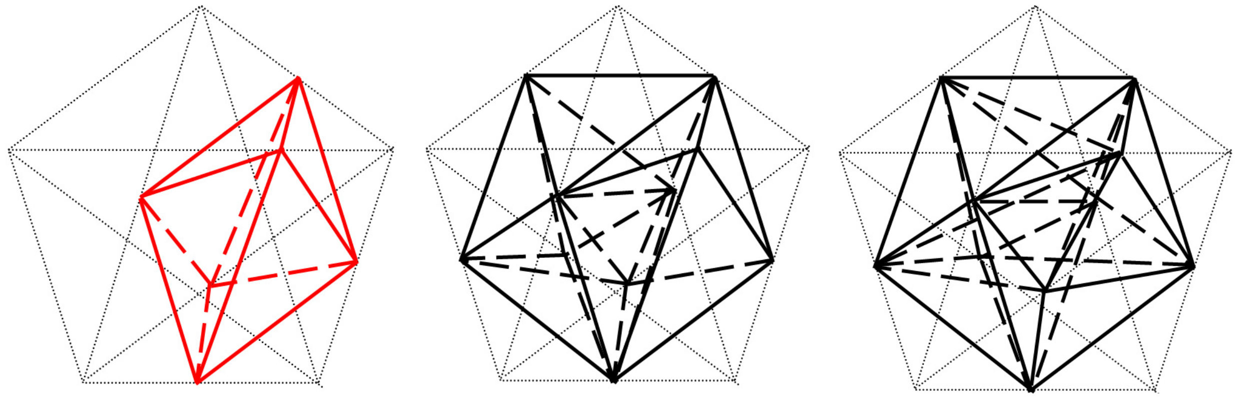


Рис. 9: a), b) , c)

a) – выделена первая 3-мерная грань строящегося декаэдра – правильный октаэдр.
b), c) – выделены две 3-мерные грани строящегося декаэдра – правильные октаэдры.

Гиперкуб в E^5 (32, 80, 64, 24, 10)

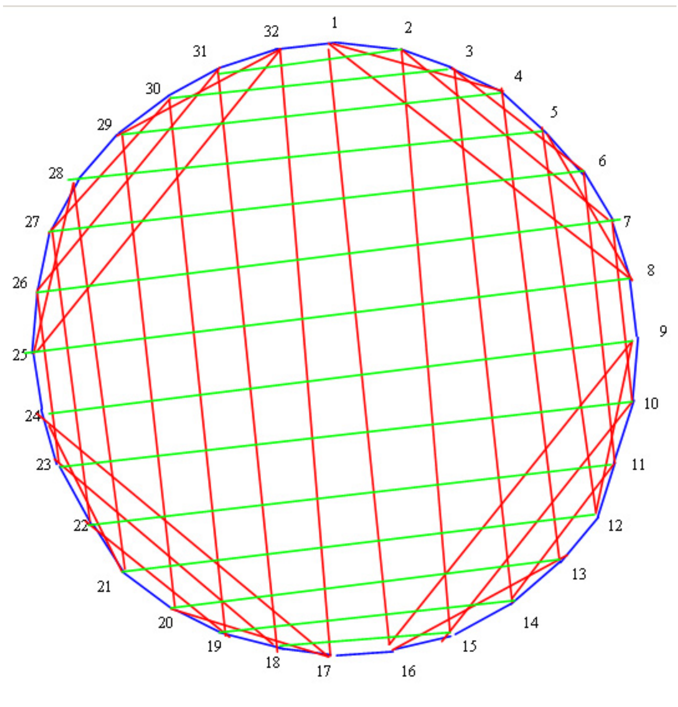


Рис. 10:

На следующих рисунках выделены некоторые 4-мерные грани 5-мерного гиперкуба:

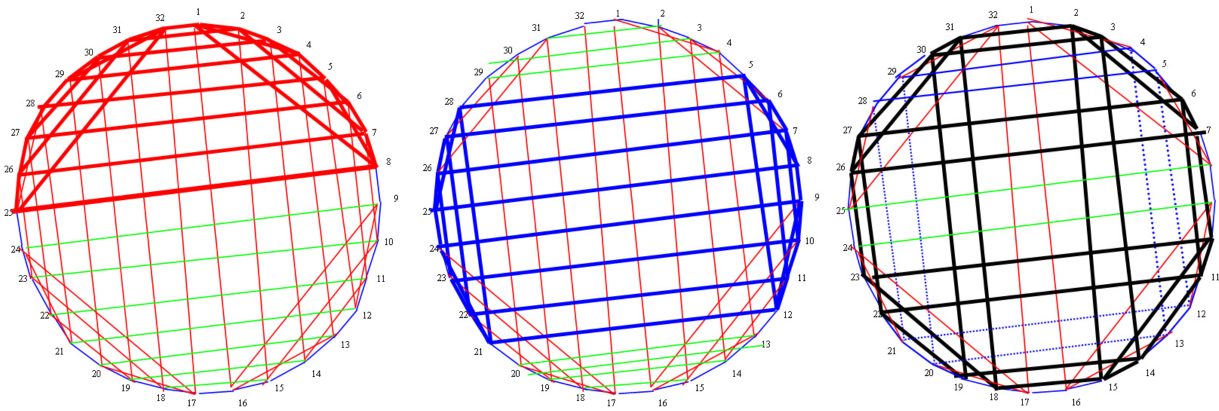


Рис. 11:

Пятимерный гиперкуб можно изобразить ещё так (Рис. 12):

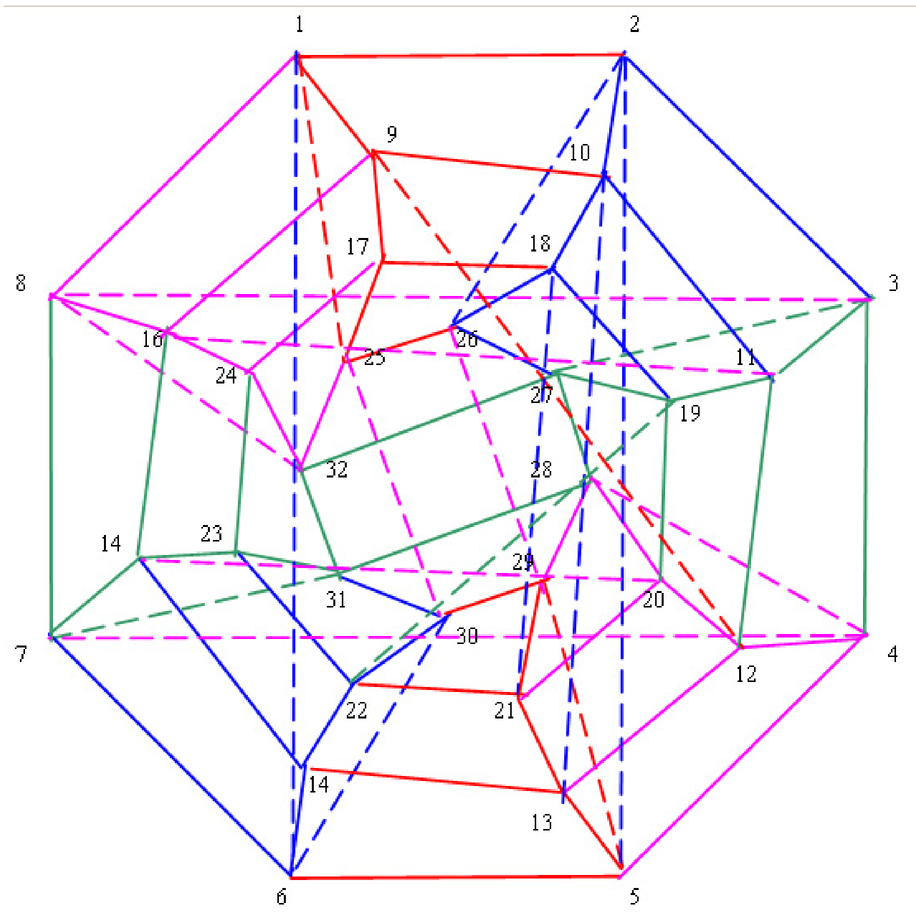


Рис. 12:

Гиперкуб в E^6 (Рис. 13).

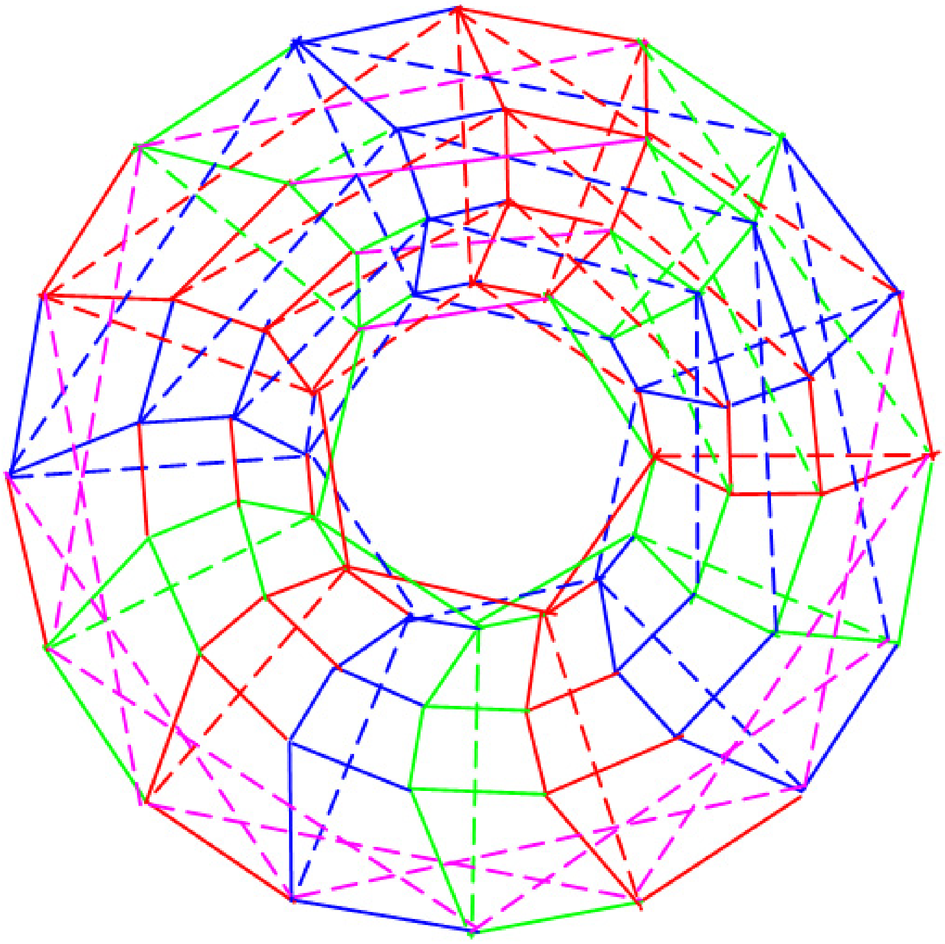


Рис. 13:

Литература

[1] Гарднер М. Этот правый, левый мир. М.: КомКнига, 2007.

[2] Кокстер Г. С. М. Введение в геометрию. М.: Наука, 1966.

[3] Берже М. Геометрия, т. 1. М.: Мир, 1984.

[4] Гильберт Д., Кон-Фоссен С. Наглядная геометрия. М.: Наука, 1981.

[5] Конвей Дж., Слоэн Н. Упаковки шаров, решётки и группы: В 2-х т. Т. 1. М.: Мир, 1990.

[6] Гарднер М. Математические головоломки и развлечения. М.: Мир, 1971.

[7] Турбин А. Ф. Матрицы, реализующие транзитивное действие группы S_{n+1} на границе ромбоэдра в R_n // Наукові записки НПУ ім. М. П. Драгоманова. 1999. 1. С. 234–243.

[8] Великий А. П., Турбин А. Ф. Преобразования А. И. Лобанова // Кибернетика и системный анализ, 2004, №5. С. 160–168.