КВАЗИКОНФОРМНЫЕ ФУНКЦИИ ОКТОНИОННЫХ ПЕРЕМЕННЫХ И ИХ НЕКОММУТАТИВНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ТИПА ЛАПЛАСА И МЕЛЛИНА

С. В. Людковский

Московский Государственный Технический Университет МИРЭА
sludkowski@mail.ru

Данная статья посвящена голоморфным и мероморфным функциям кватернионных и октонионных переменных. Исследованы различные свойства подобных функций такие как их вычеты и принцип аргумента. Доказано, что семейство всех квазиконформных диффеоморфизмов области является топологической группой относительно композиции отображений. В частности, изучены случаи, когда они являются конечномерными группами Ли над **R**. Исследованы соотношения между квазиконформностью функций и интегральными преобразованиями функций над кватернионами и октонионами. Изучены и использованы некоммутативные аналоги преобразования Меллина. Также даются примеры таких функций. В конце обсуждаются приложения к проблемам комплексного анализа.

1 Введение

Польза кватернионов и октонионов в квантовой механике и квантовой теории поля обсуждается в ряде статей и книг, например, [1,7,9,11,12,16,28]. Некоммутативный анализ становится очень важной частью математики и теоретической физики [2,4–6,14,26], но он остается слабо развитым по сравнению с классическим анализом, особенно его несуперкоммутативная часть. Для абстрактных алгебр широко используются дифференцирования и часто трактовка функций на алгебрах связана с их представлениями словами и фразами [3, 27].

В предшествующих работах автора были исследованы голоморфные (иными словами супердифференцируемые) функции переменных Кэли-Диксона [17–19], так что они обобщают теорию комплексно голоморфных функций. В частном случае комплексных функций понятие супердифференцируемости сводится к обычной комплексной дифференцируемости, но над алгебрами Кэли-Диксона это конечно дает специфические особенности и в некотором смысле их семейство относительно велико. В этих статьях супер-дифференцируемость была определена как дифференцирование алгебры, и принимая в расчет специфические особенности алгебры Кэли-Диксона. Некоммутативность алгебры Кэли-Диксона $\mathcal{A}_r$ с $2 \le r$ приводит к тому факту, что теория функций над ними является не только обычной теорией функций, но также она наследует алгебраическую структуру и естественно связана с представлениями функций с помощью слов и фраз переменных Кэли-Диксона.

Необходимо отметить, что существуют естественные вложения θ_k^r алгебры $\mathcal{A}_r$ в $\mathcal{A}_k$ для любого $1 \le r < k \in \mathbf{N}$ ассоциированные с последовательными процедурами удвоения, хотя имеются другие алгебраические вложения. Это хорошая особенность, что алгебра $\mathcal{A}_\infty$ полученная пополнением строго индуктивного предела $str{-}ind\{\mathcal{A}_r, \theta_k^r, \mathbf{N}\}$ относительно l_2 нормы не имеет никаких внутренних анти-автоморфизмов $z \mapsto z^*$, так как он является внешним, где $zz^* = |z|^2$. Естественно рассматривать голоморфные функции $\mathcal{A}_r$ переменных с $2 \le r < \infty$ как ограничения функций $\mathcal{A}_\infty$ переменных на соответствующие области. Хотя гиперкомплексная алгебра Кэли-Диксона $\mathcal{A}_\infty$ некоммутативна и неассоциативна, но относительно отсутствия внутреннего анти-автоморфизма $z \mapsto z^*$ она напоминает этим свойством поле комплексных чисел $\mathbf{C}$.

Супер-дифференцируемые функции локально аналитичны по их переменным Кэли-Диксона, но ряды для них более сложны по сравнению с комплексным случаем благодаря некоммутативности для $r \geq 2$ или неассоциативности при $r \geq 3$ алгебры $\mathcal{A}_r$. Также был изучен некоммутативный аналог преобразования Лапласа [25]. Потом псевдоконформные отображения над кватернионами и октонионами имеющие свойства более тесные к свойствам комплексно голоморфных функций были определены и исследованы в [22,23]. В общем псевдоконформные функции могут быть неизометрическими отображениями над некоммутативным телом кватернионов $\mathbf{H}$ или над алгеброй октонионов $\mathbf{O}$ и они аналогичны комплексным конформным функциям, но уже в некоммутативной ситуации (смотри определение 2.1).

Данная статья продолжает эти исследования используя предыдущие результаты. Здесь вводятся естественные продолжения комплексно голоморфных функций над кватернионами и октонионами, так что определено понятие квазиконформных отображений. Их семейство образует отличный класс от семейства псевдоконформных отображений. Кортоко можно сказать, что квазиконформные отображения на областях U в $\mathcal{A}_b$ образованы из псевдоконформных функций на областях W в подалгебре Кэли-Диксона $\mathcal{A}_r$, $1 \leq r < b \leq 3$, с помощью операторов, которым соответствует вращение действительной тени $\mathbf{R}^{2^b}$.

Второй параграф посвящен новым классам квазиконформных и квазимероморфных отображений, где они определяются и исследуются. Изучаются их свойства такие, как вычеты и принцип аргумента. Более того, доказано, что семейство всех квазиконформных диффеоморфизмов области образует топологическую группу относительно композиции отображений. Далее изучены случаи, когда она является конечномерной группой Ли над $\mathbf{R}$.

В третьем параграфе установлены соотношения между квазиконформностью функций и интегральными преобразованиями функций над кватернионами и октонионами. Для этого, в частности, исследуются и используются некоммутативные аналоги преобразований Меллина. С их помощью даются примеры таких функций. Применимость анализа над кватернионами и октонионами демонстрируется для проблем комплексного анализа.

Многие результаты данной статьи получены впервые.

2 Квазиконформные функции

1. Определения и обозначения. Рассмотрим алгебру Кэли-Диксона $\mathcal{A}_r$ размерности 2^r над $\mathbf{R}$, где в частности $\mathbf{C} = \mathcal{A}_1$ – это поле комплексных чисел, $\mathbf{H} = \mathcal{A}_2$ – это тело кватернионов, $\mathbf{O} = \mathcal{A}_3$ – это алгебра октонионов. Пусть U является открытым подмножеством в $\mathcal{A}_r$, $2 \leq r \leq 3$. Функцию f на U мы назовем псевдоконформной в точке ξ в U, если f является $\mathcal{A}_r$ голоморфной (супер-дифференцируемой) в окрестности точки ξ и удовлетворяет условиям $(P1-3)$:

$(P1)$ $\partial f(z)/\partial \tilde{z} = 0$ для $z = \xi$;

$(P2)$ $Re\{[(\partial f(z)/\partial z).h_1][(\partial f(z))/\partial z).h_2]^*\}|h_1||h_2|$
$= |(\partial f(z)/\partial z).h_1||(\partial f(z)/\partial z).h_2|Re(h_1\tilde{h}_2)$ для $z = \xi$ для любых $h_1, h_2 \in \mathcal{A}_r$,

$(P3)$ $(\partial f(z)/\partial z)|_{z=\xi}.h \neq 0$ для всякого $h \neq 0$ из $\mathcal{A}_r$, где $\tilde{z} = z^*$ обозначает сопряженное число для $z \in \mathcal{A}_r$, так что $z\tilde{z} = |z|^2$, $Re(z) := (z + \tilde{z})/2$; для f используется или кратчайшая фраза совместимая с этими условиями, или в ниже лежащем действительном пространстве (тени) $\mathbf{R^4}$ или $\mathbf{R^8}$ исключены несобственные вращения $[f']$ ассоциированные с f'. То есть, $[f'] \in SO(2^b, \mathbf{R})$, где $b = 2$ или $b = 3$, $SO(n, \mathbf{R})$ обозначает специальную ортогональную группу для $\mathbf{R}^n$, $[f']$ обозначает оператор в действительной тени соответствующий супер-производной f' над $\mathcal{A}_r$. Часто кратко пишут $f(z, \tilde{z})$ как $f(z)$ благодаря биективности между $z \in \mathcal{A}_r$ и $\tilde{z}$.

Если f псевдоконформна в каждой точке $\xi \in U$, то она называется псевдоконформной в области U.

Для отображений комплексных чисел, $r = 1$, каждая голоморфная функция, удовлетворяющая условию $(P3)$ удовлетворяет этому определению, поэтому мы можем включить также этот случай.

Мы скажем, что функция ϕ в точке ζ или на V является p-псевдоконформной, если $\phi(z) = f(z^p)$ и f является псевдоконформной в ξ или на U, где $\zeta^p = \xi$ или $U = \{z^p : z \in V\}$, $p \in \mathbf{N}$. Функция нескольких переменных $\ _1z, ..., \ _nz$ называется псевдоконформной или $(p_1, ..., p_n)$-псевдоконформной, если она псевдоконформной или p_j-псевдоконформна по $\ _jz$ для любых $j = 1, ..., n$.

Предположим, что U открыто в $\mathcal{A}_b$, а $W = U \cap \mathcal{A}_r \neq \emptyset$ открыто в $\mathcal{A}_r$ и непустое, где $1 \leq r < b \leq 3$. Рассмотрим естественное вложение $\mathcal{A}_r$ в $\mathcal{A}_b$ ассоциированное со стандартной процедурой удвоения.

Пусть f – это голоморфная функция на U со значениями в $\mathcal{A}_b$ удовлетворяющая следующим условиям:

$(Q1)$ функция $g(z) := f(y_0 + z)$ имеет p-псевдоконформное ограничение $g|_{W-y_0}$ на $W - y_0 := \{z : z = x - y_0, x \in W\}$ для некоторой отмеченной точки $y_0 \in W$ и $g(W - y_0) \subset \mathcal{A}_r$,

$(Q2)$ существует семейство автоморфизмов $\hat{R}_{z,x} = \hat{R}^f_{z,x} : \mathcal{A}_b \to \mathcal{A}_b$ для любой $z \in U - y_0$ и $x \in W - y_0$ с $Re(z) = Re(x)$, так что каждому $\hat{R}_{z,x}$ соответствует собственное вращение $T = [\hat{R}_{z,x}] \in SO(2^b, \mathbf{R})$ действительной тени $\mathbf{R}^{2^b}$, так что для любого $z \in U - y_0$ существует $x \in W - y_0$, для которой $z = \hat{R}_{z,x}x$, где $SO(n, \mathbf{R})$ обозначает специальную ортогональную группу Евклидова пространства $\mathbf{R}^n$,

$(Q3)$ $\hat{R}_{z,x}|_{\mathbf{R}} = id|_{\mathbf{R}}$ для любого $z \in U - y_0$ и каждого $x \in W - y_0$, то есть, $T = [\hat{R}_{z,x}] \in SO_{\mathbf{R}}(2^b, \mathbf{R})$, где $SO_{\mathbf{R}}(n, \mathbf{R}) := \{T : T \in SO(n, \mathbf{R}); T|_{\mathbf{R}} = I\}$,

$(Q4)$ $\hat{R}_{z,x} = id$ для любого $z \in W - y_0$ и каждого $x \in W - y_0$,

$(Q5)$ $\hat{R}_{z,x}$ зависит $\mathcal{A}_b$ голоморфно от $z \in U - y_0$ и $\mathcal{A}_r$ аналитично от $x \in W - y_0$ в подходящем (z, x)-представлении,

$(Q6)$ $g(z) = \hat{R}_{z,x}g(x)$ для любого $x \in W - y_0$ и каждого $z \in U - y_0$, так что $Re(z) = Re(x)$ и $z = \hat{R}_{z,x}x$,

$(Q7)$ $g'(\hat{R}_{z,y}y).(\hat{R}_{z,y}h) := g'(\eta).w|_{(\eta=\hat{R}_{z,y}y, w=\hat{R}_{z,y}h)} = \hat{R}_{z,y}[g'(y).h]$ для любого $z \in U - y_0$ и $y \in W - y_0$, так что $Re(z) = Re(y)$ и $z = \hat{R}_{z,y}y$ и каждого $h \in \mathcal{A}_r$, где $g'(z)$ – это оператор (супер)дифференцирования над $\mathcal{A}_b$.

Мы назовем такую функцию (p, r, b)-квазиконформной. Если функция f является $\mathcal{A}_b$ голоморфной на U и удовлетворяет Условиям $(Q1 - Q6)$ на U и f является (p, r, b)-квазиконформной на $U \setminus \mathcal{S}_A$, где $\mathcal{S}_A := \bigcup\{z + y_0 : z = \hat{R}_{z,x}x; x \in A - y_0, z \in U - y_0, Re(z) = Re(x)\}$, причем $A := A_f := \{y + y_0 : y \in W - y_0, g'(y) = 0\}$ является дискретным подмножеством в W состоящим из изолированных точек, так что для любого $y_1 \in A$ существует $\delta > 0$, для которого $\inf_{y \in A, y \neq y_1} |y - y_1| \geq \delta$, тогда мы назовем

f (p, r, b)-квазирегулярной функцией на U. В частном последнем случае $U = \mathcal{A}_b$ мы назовем f (p, r, b)-квазицелой функцией.

Если f является (p, r, b)-квазирегулярной функцией на $U \setminus \mathcal{S}_C$, где C – это дискретное подмножество изолированных точек в W, в которых f имеет полюсы (конечных порядков), тогда мы назовем f (p, r, b)-квазимероморфной функцией на U.

Для $p = 1$ для сокращения обозначений мы будем писать, что f является (r, b)-квазиконформной или (r, b)-квазирегулярной на U или (r, b)-квазицелой соответственно. Функция нескольких переменных ${}_1z, ..., {}_nz$ называется $(p_1, ..., p_n; r, b)$-квазиконформной или $(p_1, ..., p_n; r, b)$-квазирегулярной на U открытом в $\mathcal{A}_b^n$ или $(p_1, ..., p_n; r, b)$-квазицелой, если она (p_j, r, b)-квазиконформна или (p_j, r, b)-квазирегулярна или (p_j, r, b)-квазицелая по ${}_jz$ для любого $j = 1, ..., n$. Если M канонически замкнуто, M является замыканием U, тогда f является квазиконформной или квазирегулярной на M, если она такова на U и $f(z)|_{\partial M}$ и $f'(z)|_{\partial M}$ являются непрерывными пределами f и f' в U, где ∂M является границей M, так что $M \cap \mathcal{A}_r^n$ – это псевдоконформное многообразие.

2. Предложение. *Существует семейство автоморфизмов $\hat{R}_{z,x}$ алгебры $\mathcal{A}_b$, удовлетворяющих условиям 1$(Q2 - Q5)$ для $U = \mathcal{A}_b$ и $W = \mathcal{A}_r$ с $y_0 = 0$, где $1 \le r < b \le 3$. Более того для $r = 1$ и $2 \le b \le 3$ это семейство можно выбрать удовлетворяющим дополнительным условиям:*

(i) $R_{vz,wy} = R_{z,y}$ для любого v и $w \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, так что $vw > 0$ и

(ii) $R_{z,y} = R_{a,x}$ для любого $Im(z) = Im(a)$ и $Im(y) = Im(x)$, где $Im(z) := z - Re(z)$.

Доказательство. Каждое $z \in \mathcal{A}_b$ имеет полярное разложение $z = |z| \exp(Arg(z))$, где $Arg(z) \in \mathcal{I}_b := \{y \in \mathcal{A}_b : Re(y) = 0\}$ (смотри §3 в [17, 18]). Фиксируем ветвь $Arg(z)$, выбирая одну определенную ветвь Ln над $\mathcal{A}_b$, так что $Arg(z) = Ln(z/|z|)$ и $Arg(z) = 0$ для любого действительного $z \ge 0$. Тогда

(A) $Arg(z) = M\phi = M(z)\phi(z)$, где $M \in \mathcal{I}_b$, $|M| = 1$, $\phi \in \mathbf{R}$, $|\phi| = |Arg(z)|$, $M = M(z)$, $\phi = \phi(z)$.

Возьмем без ограничения общности $y_0 = 0$. Для пары $(\mathbf{C}, \mathcal{A}_b)$ с $2 \le b \le 3$, использование полярного разложения $z - Re(z) = |z - Re(z)| \exp(M\psi)$ для $z \in \mathcal{A}_b$, где $Re(M) = 0$, $M = M(z - Re(z)) \in \mathcal{A}_b$, $|M| = 1$, $\psi = \psi(z) = \phi(z - Re(z)) \in \mathbf{R}$, дает семейство автоморфизмов $\hat{R}_{z,x}$ для любого $z \in \mathcal{A}_b$ и любого $x \in \mathbf{C}$ удовлетворяющего равенству

(1) $\hat{R}_{z,x}(i_1) = R_{z,x}(i_1) = M$ с $M = M(z - x - Re(z - x))$ и $\phi = \phi(z - x - Re(z - x))$ даваемого Уравнением (A) и $\hat{R}_{z,x}(u) = R_{z,x}(u) = u$ для любого $u \in \mathbf{R}$ и $R_{z,y}y = y$ для любого $z \in \mathbf{C}$ и каждого $y \in \mathbf{C}$, следовательно,

$\hat{R}_{z,x}(x) = |x| \exp(M\phi)$ для любого $x = |x| \exp(\mathbf{i}\phi) \in \mathbf{C}$,
где $\phi = \phi(x) \in \mathbf{R}$, $z \in \mathcal{A}_b \setminus \mathbf{C}$. Это основано на том факте, что алгебра изоморфная $\mathcal{A}_b$ может быть построена последовательной процедурой удвоения начиная с M также вместо $\mathbf{i} = i_1$, выбирая генератор M_2 вместо i_2 ортогональный к M и беря $\hat{R}_{z,x}(i_2) = M_2$, $\hat{R}_{z,x}(i_3) = MM_2$, где M_2 голоморфно зависит от z и x (смотри также предложение 3.2 и следствие 3.5 [18] и [12]), где $\{i_0, i_1, ..., i_{2^r-1}\}$ – это генераторы $\mathcal{A}_r$, так что $i_0 = 1$, $i_j^2 = -1$ и $i_ji_k = -i_ki_j$ для любого $1 \le j \ne k \le 2^r - 1$. Тогда для $b = 3$ возьмем генератор удвоения $L \in \mathcal{I}_b$ ортогональный M, M_2 и MM_2, так что L голоморфно зависит от z и x, и положим $R_{z,x}(i_4) = L$. Запишем $z \in \mathcal{A}_b$ в виде

(2) $z = \sum_{s \in \mathbf{b}} w_s s$,
где $w_s \in \mathbf{R}$ для любого $s \in \mathbf{b} := \{1, i_1, ..., i_{2^b-1}\}$, $\mathbf{b}$ – это базис генераторов в $\mathcal{A}_b$, положим

$\hat{b} := \mathbf{b} \setminus \{1\}$, следовательно,

(3) $z^* = (2^b - 2)^{-1}\{-z + \sum_{s\in\hat{b}} s(zs^*)\}$. Поэтому,

(4) $|z| = (zz^*)^{1/2} = [z(2^b - 2)^{-1}\{-z + \sum_{s\in\hat{b}} s(zs^*)\}]^{1/2}$ и

(5) $Re(z) = (z + z^*)/2 = \{(1 - (2^b - 2)^{-1})z + (2^b - 2)^{-1} \sum_{s\in\hat{b}} s(zs^*)\}$ являются голоморфными функциями на $\mathcal{A}_b \setminus \{0\}$ в этих z-представлениях $(4, 5)$. Тогда

(6) $M(z)\phi(z) = Ln(z/|z|)$ для $z \neq 0$ и для $\phi(z) > 0$ с $z \in \mathcal{A}_b \setminus \mathbf{R}$ мы имеем

(7) $M(z) = Ln(z/|z|)/|Ln(z/|z|)|$

предполагается записанной в z-представлении с помощью Формулы (4), полагая $\phi(z) = 0$ для любого действительного неотрицательного z. В силу условия $(Q2)$ достаточно рассматривать $\phi(z) > 0$ в полупространстве $\mathcal{A}_b \setminus \mathbf{R}$. Логарифмическая функция $Ln(z)$ голоморфна на $\mathcal{A}_b \setminus \{0\}$ с некоммутативным неассоциативным аналогом римановой поверхности описанным в разделе 3.7 в [17, 18]. В силу Формул $(4, 5)$ автоморфизм $\hat{R}_{z,x}$ данный уравнением (1) зависящий от параметров (z, x) становится голоморфным по $z \in \mathcal{A}_b$ и аналитическим (голоморфным) по $x \in \mathbf{C}$ в (z, x)-представлении, где $\mathbf{C}$ естественно вложено в $\mathcal{A}_b$ в соответствии с каноническим базисом генераторов.

Для пары $(\mathcal{A}_q, \mathcal{A}_{q+1})$, где $1 \leq q \in \mathbf{N}$, используя итерированную экспоненту, получим

(8) $\exp(\ _3M\phi(\xi)) = \exp\{\ _2M\phi_1(\xi)\exp(-N\phi_2(\xi)\exp(-\ _2M\phi_3(\xi)))\}$,

где $\xi = |\xi|\exp(\ _3M\phi(\xi))$, $_3M = M(\xi) \in \mathcal{I}_{q+1}$, $\phi_1(\xi), \phi_2(\xi), \phi_3(\xi) \in \mathbf{R}$, $z = z_1 + i_{2^q}z_2$, $z \in \mathcal{A}_{q+1}$, $z_1, z_2 \in \mathcal{A}_q$, $|\ _3M| = |\ _2M| = |N| = 1$, $\xi = z - x - Re(z - x)$, $N = N(\xi) \perp\ _2M =\ _2M(\xi)$, то есть, $Re(\ _2MN) = 0$; N и $_2M \in \mathcal{I}_{q+1}$, $l = i_{2^q}$. Рассмотрим (8) для $q = 1$ и потом для $q = 2$. Это дает семейство автоморфизмов $\hat{R}_{z,x}$ для любого $z \in \mathbf{O} = \mathcal{A}_3$ и каждого $x \in \mathbf{H} = \mathcal{A}_2$, так что

(9) $\hat{R}_{z,x}(u) = R_{z,x}(u) = u$ для любого $u \in \mathbf{R}$, $\hat{R}_{z,x}(i_1) = R_{z,x}(i_1) =\ _2M$ и $\hat{R}_{z,x}(i_2) = R_{z,x}(i_2) = N$ и $\hat{R}_{z,x}(i_3) = R_{z,x}(i_3) =\ _2MN$, $R_{z,y}y = y$ для любого $y \in \mathbf{H}$ и каждого $z \in \mathbf{H}$.

Для этого воспользуемся тем, что алгебра изоморфная с $\mathcal{A}_3$ может быть построена, стартуя с M, N, MN вместо i_1, i_2, i_3 и используя процедуру удвоения и выбирая $L \perp \mathbf{R} \oplus \mathbf{R}M \oplus \mathbf{R}N \oplus \mathbf{R}MN$, $|L| = 1$ (смотри также замечание 2.4 [18] и [12]).

Поскольку $e^M = \cos|M| + M(\sin|M|)/|M|$ для любого $M \in \mathcal{I}_b \setminus \{0\}$, $e^0 = 1$, тогда уравнение (8) дает

$_3M\phi(\xi) =\ _2M\phi_1\cos\phi_2 + N\phi_1\sin\phi_2\sin\phi_3 + N\ _2M\phi_1\sin\phi_2\cos\phi_3$, следовательно, можно взять $\phi_1 = \phi(\xi)$. Тогда

(10) $w_s = (-zi_s + i_s(2^b - 2)^{-1}\{-z + \sum_{k=1}^{2^b-1} i_k(zi_k^*)\})/2$ для любого $s = 1, ..., 2^b - 1$.

С начальными условиями $_2M(0) = i_1$ и $N(0) = i_3$ это дает семейство решений зависящее $\mathcal{A}_3$-голоморфно от z и $\mathcal{A}_2$-голоморфно от x с помощью уравнений $(3 - 10)$. Например, возьмем $_2M \in i_1\mathbf{R} \oplus i_5\mathbf{R} \oplus i_7\mathbf{R}$, $N \in i_3\mathbf{R} \oplus i_4\mathbf{R} \oplus i_6\mathbf{R}$. Тогда выберем генератор процедуры удвоения $L \in \mathcal{I}_b$ ортогональный к $_2M$ и N, и $_2MN$, так что L зависит голоморфно от z и x. В силу формул $(2 - 7)$ автоморфизм $\hat{R}_{z,x}$ голоморфен по $z \in \mathbf{O}$ и по $x \in \mathbf{H}$ в (z, x)-представлении.

Это выполняется для любой (r, b) пары, используя последовательность вложений $\mathcal{A}_r \hookrightarrow \mathcal{A}_{r+1} \hookrightarrow ... \hookrightarrow \mathcal{A}_b$ и рассматривая с помощью $(2-7)$ последовательные голоморфные решения (8) для $\mathcal{A}_q \hookrightarrow \mathcal{A}_{q+1}$ в соответствующем (z, x)-представлении для любого $q = r, ..., b - 1$. Если $R_{z,x}(i_{2^q})$ выделены для $q = 0, 1, ..., b - 1$, тогда их умножение в $\mathcal{A}_b$ дает $R_{z,x}(i_j)$ для любого $1 \leq j \leq 2^b - 1$ (смотри также [12]). Это очевидно, так как $\mathcal{A}_b = \{z \in \mathcal{A}_b : \exists x \in \mathcal{A}_{b-1}$ и $\exists T \in SO_{\mathbf{R}}(2^b, \mathbf{R})$, так что $[z] = T[x]\}$ и $SO_{\mathbf{R}}(2^b, \mathbf{R})$ – это вещественно аналитическая группа Ли изоморфная с $SO(2^b - 1, \mathbf{R})$, где $[x] \in \mathbf{R}^{2^b}$,

$[x] = (x_0, x_1, ..., x_{2^{b-1}-1}, 0, 0, ...)$, $x = x_0 i_0 + x_1 i_1 + ... + x_{2^{b-1}-1} i_{2^{b-1}-1}$, $[z] = (z_0, ..., z_{2^b-1})$, $x_j, z_j \in \mathbf{R}$ для любого j, $2 \le b \in \mathbf{N}$.

Из построения $R_{z,x}$ следует, что для $(\mathbf{C}, \mathbf{H})$ и $(\mathbf{C}, \mathbf{O})$ пар, то есть, $r = 1$ и $b = 2, 3$, существует $R_{z,x}$ удовлетворяющий условиям:

(11) $R_{vz,wy} = R_{z,y}$ для любых v и $w \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, так что $vw > 0$ и

(12) $R_{z,y} = R_{a,x}$ для любых $Im(z) = Im(a)$ и $Im(y) = Im(x)$, где $Im(z) := z - Re(z)$. Поэтому, если $R_{z,y} y = z$, тогда $R_{\tilde{z},\tilde{y}} \tilde{y} = \tilde{z}$.

2.1. Определение. Для любого $p \in \mathbf{H} = \mathcal{A}_2$ пусть

(1) $E_2(p) := E(p) := p_0 + p_1 i_1 \exp(-p_2 i_3 \exp(-p_3 i_1))$, тогда как для любого $p \in \mathbf{O} = \mathcal{A}_3$ положим

(2) $E_6(p) := E(p) = p_0 + p_1 i_1 \exp(-p_2 i_3 \exp(-p_3 i_1$
$\exp(-p_4 i_7 \exp(p_5 i_1 \exp(-p_6 i_3 \exp(-p_7 i_1))...)$,
где $p = p_0 i_0 + p_1 i_1 + ... + p_{2^b-1} i_{2^b-1}$, $p \in \mathcal{A}_b$, $p_0, ..., p_{2^b-1} \in \mathbf{R}$, $2 \le b \le 3$, $i_1 i_2 = i_3$, $i_1 i_4 = i_5$, $i_2 i_4 = i_6$, $i_3 i_4 = i_7$, $i_1 i_6 = -i_7$, $i_1 i_7 = i_6$, $i_2 i_5 = i_7$, $i_2 i_7 = -i_5$, $i_3 i_5 = -i_6$, $i_3 i_6 = i_5$, $i_5 i_6 = -i_3$, $i_5 i_7 = i_2$, $i_6 i_7 = -i_1$, $i_k i_l = -i_l i_k$ для любого $1 \le k < l$, $i_k^2 = -1$ для любого $1 \le k$, $i_0 = 1$, $z(zy) = (z^2)y$ и $(yz)z = y(z^2)$ для любого $z, y \in \mathcal{A}_3$; $i_0, ..., i_{2^b-1}$ – это стандартные генераторы алгебры $\mathcal{A}_b$, $\mathbf{R}$ – это центр $\mathcal{A}_b$. Предполагается, что $E_2(p)$ и $E_6(p)$ записаны в p-представлении над $\mathcal{A}_2$ и $\mathcal{A}_3$ соответственно с помощью формул $2.(2-5)$.

Если f^s является $\mathcal{A}_b$-голоморфной функцией в области V и $V = E^{-1}(U)$, где U – это область в $\mathcal{A}_b$, $f = f^s \circ E^{-1}$ является $(p, 1, b)$-квазиконформной или квазирегулярной (или квазицелой), или квазимероморфной на U, тогда мы назовем f^s $(p, 1, b)$-квазиконформной или квазирегулярной (или квазицелой для $V = \mathcal{A}_b$), или квазимероморфной функцией в сферических $\mathcal{A}_b$-координатах на V соответственно.

2.2. Замечание. Далее с точностью до $\mathcal{A}_b$-псевдоконформного диффеоморфизма ξ области U будет предполагаться такая конструкция семейства $\hat{R}_{z,x}$ в доказательстве предложения 2 при $1 \le r < b \le 3$, $R_{z,x} \mapsto \hat{R}_{\xi(z),\xi(x)}$, где $\xi(U) = U$, $\xi(W) = W$, $\xi(\mathbf{R} \cap W) = \mathbf{R} \cap W$, $R_{z,x}$ – это семейство даваемое уравнениями $(1-10)$.

Каждая $\mathcal{A}_r$-псевдоконформная (в частности, комплексно голоморфная) функция с действительными коэффициентами разложения в степенной ряд сходящийся по $x \in W - y_0$ очевидно имеет (r, b)-квазиконформное продолжение благодаря условию $(Q3)$.

Пусть функция g является $\mathcal{A}_r$ голоморфной и, следовательно, локально аналитической. Она локально имеет разложение в ряд ограничения $g|_{W-y_0}$ с коэффициентами из $\mathcal{A}_r$ и по переменной $x \in W - y_0$, так что этот ряд сходится в открытом шаре $B(\mathcal{A}_r, \xi, R^-) := \{x \in \mathcal{A}_r : |x - \xi| < R\}$ для любого $\xi \in W - y_0$, где $0 < R = R(\xi) \le \infty$. Тогда оператор $\hat{R}_{z,x}$ действует на $g(x)$ посредством локального разложения в ряд ограничения $g|_{W-y_0}$ с коэффициентами из $\mathcal{A}_r$ и с переменной $x \in W - y_0$, так как $\hat{R}_{z,x}$ – это автоморфизм алгебры Кэли-Диксона $\mathcal{A}_b$. Поэтому, g имеет $\mathcal{A}_b$ продолжения по переменной $z \in B(\mathcal{A}_b, \xi, R^-)$, так что $U = \bigcup_{\xi \in W - y_0} B(\mathcal{A}_b, \xi, R^-)$. Хотя это продолжение удовлетворяет условиям $(Q1 - Q6)$, но оно не обязано удовлетворять $(Q7)$ в общем случае.

Формулы $2.1(1, 2)$ дают канонические сферические $\mathcal{A}_b$-координаты, хотя может быть сделан другой выбор базисных генераторов или другой порядок в итерированной экспоненте. Далее функции E_2 и E_6 даются относительно канонических базисов генераторов, если не предполагается что-либо иное.

2.3. Предложение. *Для пары $(\mathbf{C}, \mathcal{A}_b)$, $2 \le b \le 3$, существует семейство*

$R_{E(t(p-y_0)),E(t(y-y_0))}$ *автоморфизмов* $\mathcal{A}_b$ *(смотри предложение 2) независимо от* $t \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$*:*

(1) $R_{E(t(p-y_0)),E(t(y-y_0))} = R_{E(p-y_0),E(y-y_0)}$
для любого $p \in \mathcal{A}_b$*, every* $y \in \mathbf{C}$ *и всякого действительного ненулевого* $t \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$*, где* $y_0 \in \mathbf{C}$ *– это отмеченная точка,* $E = E_2$ *для* $b = 2$*, и* $E = E_6$ *для* $b = 3$*.*

Доказательство. Поскольку $z \mapsto z - y_0$ – это аффинный псевдоконформный диффеоморфизм алгебры $\mathcal{A}_b$ на $\mathcal{A}_b$, тогда возьмем без ограничения общности $y_0 = 0$ в предложении 2. Мы имеем $E(\mathcal{A}_b) = \mathcal{A}_b$, так как всякое $z \in \mathcal{A}_b$ имеет полярное разложение. Тогда существует $R_{z,x}$ удовлетворяющее условию (1) этого предложение благодаря дополнительным условиям $2(1, 2)$, так как $E(y) = y$ для любого $y \in \mathbf{C}$, тогда как $\exp(p_0 + p_S S) = \exp(p_0)(\cos(p_S) + S\sin(p_S))$ для любого $p \in \mathcal{A}_b$ и $sign(\sin(p_s t)\sin(p_y t)) = sign(p_s p_y)$ для любого $t \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, где $p_0 = Re(p - y_0)$, $p_S S = Im(p - y_0) := p - y_0 - Re(p - y_0)$, $p_0, p_S \in \mathbf{R}$, $S \in \mathcal{I}_b$, $|S| = 1$, $sign(t) = 1$ при $t > 0$, $sign(t) = -1$ при $t < 0$ и $sign(0) = 0$. В самом деле, группа $SO_{\mathbf{R}}(2^b, \mathbf{R})$ изоморфна с $SO(2^b - 1, \mathbf{R})$ и $E(t(p - y_0)) \in \mathbf{R} \oplus S\mathbf{R}$ для любого $t \in \mathbf{R}$. Поэтому,

$R_{E(t(p-y_0)),E(t(y-y_0))} = R_{E(p-y_0),E(y-y_0)}$
для любого $p \in \mathcal{A}_b$, $y \in \mathbf{C}$ и всякого действительного ненулевого $t \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, где $y_0 \in \mathbf{C}$ – это отмеченная точка.

3. Теорема. *Предположим, что* $U \subset \mathcal{A}_r^n$ *– это открытое подмножество, также* $F = ({}_1f, ..., {}_mf) : U \to \mathcal{A}_r^m$ *является голоморфным отображением, где либо* $2 \le r \in \mathbf{N}$*, либо* $r = \Lambda$*,* $card(\Lambda) \ge \aleph_0$*,* $1 \le m \le n \in \mathbf{N}$*. Если* $z_0 \in U$*,* $F(z_0) = 0$ *и оператор* $(\partial\, {}_kf/\partial\, {}_jz)_{1\le j,k\le m}$ *обратим в* z_0*, где* $z = ({}_1z, ..., {}_nz)$*,* ${}_jz \in \mathcal{A}_r$ *для любого* $j = 1, ..., n$*, тогда существует открытая окрестность* W *точки* x_0 *в* $\mathcal{A}_r^m$ *и окрестность* V *точки* $y_0 \in \mathcal{A}_r^{n-m}$ *с* $W \times V \subset U$ *и голоморфное отображение* $G = ({}_1g, ..., {}_mg) : V \to \mathcal{A}_r^m$*, так что* $W \cap \{z \in U : F(z) = 0\} = \{z = (G(y), y) : y \in V\}$ *и* $g(x_0) = y_0$*, где* $z_0 = (x_0, y_0)$*.*

Доказательство. Возьмем отображение $H = ({}_1f, ..., ..., {}_mf, {}_{m+1}z, ..., {}_nz) : U \to \mathcal{A}_r^n$. Мы имеем, что оператор $L(z) := (\partial\, {}_kh/\partial\, {}_jz)_{1\le j,k\le n}$ обратим в z_0, следовательно, он обратим в окрестности U_0 точки z_0, так как $L(z)$ супердифференцируем, где $({}_1h, ..., {}_nh) = H$. Поэтому, $L^{-1}(z)$ является супердифференцируемым в U_0, так как $L^{-1}(z)L(z) = L(z)L^{-1}(z) = I$ для любого $z \in U_0$, где I является единичным оператором. Тогда операторы $A(z) := (\partial\, {}_kf/\partial\, {}_jz)_{1\le j,k\le m}$ и $A^{-1}(z)$ локально аналитичны в окрестности точки z_0. Рассмотрим отображение $q_y(x) := x - A^{-1}(z_0)F(x, y)$ в окрестность точки z_0, где $(x, y) = z$, $x = ({}_1z, ..., {}_mz)$, $y = ({}_{m+1}z, ..., {}_nz)$.

Без ограничения общности используя сдвиги, мы можем рассмотреть $z_0 = 0$. Поэтому $q_y(x) = x$ тогда и только тогда, когда $F(x, y) = 0$. Мы имеем тождество: $\partial q_y(x)/\partial x = I - A^{-1}(0)(\partial F(x, y)/\partial x) = A^{-1}(0)(A(0) - \partial F(x, y)/\partial x)$. Из непрерывности $\partial F(x, y)/\partial x$ следует, что существуют $a > 0$ и $b > 0$ такие, что $\|\partial q_y(x)/\partial x\| \le \|A^{-1}(0)\|\|A(0) - \partial F(x, y)/\partial x\| < 1/2$ для любого $z = (x, y)$ с $\|x\| < a$ и $\|y\| < b$.

Применяя теорему о неподвижной точке к этому сжимающему отображению $q_y(x)$, мы получим решение $G(y)$ в окрестности 0 (смотри также общую теорему о неявной функции в §X.7 [32] и теоремы II.IV.4.2, 5.1 и 6.1 в [10]). Тогда решение является локально аналитическим по $(z, \tilde{z})$, так как $f(z)$ и $A^{-1}(z)$ и $L(z)$ локально аналитичны. Таким образом, в окрестности точки $({}_{m+1}z_0, ..., {}_nz_0)$ выполняются тождества ${}_kf({}_1g, ..., {}_mg, {}_{m+1}z, ..., {}_nz) = 0$ для $k = 1, ..., m$ и они являются $(z, \tilde{z})$-дифференцируемыми и дифференцирование по ${}_j\tilde{z}$ дает:
$\sum_{l=1}^m (\partial\, {}_kf/\partial\, {}_lz).(\partial\, {}_lg/\partial\, {}_j\tilde{z}).h + \sum_{l=1}^m (\partial\, {}_kf/\partial\, {}_l\tilde{z}).(\partial\, {}_lg/\partial\, {}_jz)^*.h + (\partial\, {}_kf/\partial\, {}_j\tilde{z}).h = 0$
для любого $h \in \mathcal{A}_r$, но $\partial\, {}_kf/\partial\, {}_l\tilde{z} = \partial\, {}_kf/\partial\, {}_j\tilde{z} = 0$, так как f является $\mathcal{A}_r$-голоморфной

и
$(\partial\ {}_kf/\partial\ {}_jz)_{1\le j,k\le m}$ обратимо в силу условий этой теоремы, где $z^*=\tilde{z}$ обозначает сопряженное число для z в алгебре Кэли-Диксона $\mathcal{A}_r$. Поэтому, $\partial\ {}_lg/\partial\ {}_j\tilde{z}=0$ для любого $l=1,...,m$ и $j=m+1,...,n$, следовательно, G голоморфно.

4. Следствие. *Предположим, что* U *– это открытое подмножество в* $\mathcal{A}_p^n$, $1\le m\le n\in\mathbf{N}$, $F=(\ {}_1f,...,\ {}_mf):U\to\mathcal{A}_p^m$ *– это* (r,p)*-квазиконформное отображение, где* $1\le r<p\le 3$. *Если* $z_0\in U$, $F(z_0)=0$ *и оператор* $(\partial\ {}_kf/\partial\ {}_jz)_{1\le j,k\le m}$ *обратим в* z_0, *где* $z=(\ {}_1z,...,\ {}_nz)$, ${}_jz\in\mathcal{A}_r$ *для любого* $j=1,...,n$, *тогда существует открытая окрестность* W_p *точки* x_0 *в* $\mathcal{A}_p^m$ *и окрестность* $V=V_p$ *точки* y_0 *в* $\mathcal{A}_p^{n-m}$ *такие, что* $(W_p\times V_p)\subset U$, *и голоморфное отображение* $G=(\ {}_1g,...,\ {}_mg):V_p\to\mathcal{A}_p^m$ *такое, что* $W_p\cap\{z\in U:F(z)=0\}=\{z=(G(y),y):y\in V_p\}$ *с* $g(x_0)=y_0$.

Доказательство. Функция F является (r,p)-квазиконформной, следовательно, она голоморфна на U, удовлетворяя условиям $(Q1{-}Q7)$ с $W=U\cap\mathcal{A}_r^n\subset U$, где $\mathcal{A}_r\hookrightarrow\mathcal{A}_p$ – естественное вложение. В силу Теоремы 3 существует голоморфное решение.

5. Следствие. *Предположим, что* F *удовлетворяет условиям следствия 4 и* $n=2$, *и* $m=1$. *Тогда* G *является* (r,p)*-квазиконформной в окрестности точки* y_0 *в каждой точке* $y\in V=V_p$, *так что* $F(G(y),y)=0$.

Доказательство. Функция G голоморфна благодаря следствию 4, следовательно, она удовлетворяет условию $(P1)$. Мы имеем, что

(1) $G'(y).h=-(F'_x(x,y))^{-1}.[(F'_y(x,y)).h]$ для всех $x=G(y)$ и всякого $h\in\mathcal{A}_p$, когда $F(G(y),y)=0$, так как тело кватернионов $\mathbf{H}=\mathcal{A}_2$ ассоциативно, а алгебра октонионов $\mathbf{O}=\mathcal{A}_3$ альтернативна.
Ограничение F на $U\cap\mathcal{A}_r^2$ псевдоконформно, следовательно, $F'_x(x,y)$ и $F'_y(x,y)$ для $(x,y)\in U\cap\mathcal{A}_r^2$ удовлетворяют условиям $(P2,P3)$. В силу теоремы 2.4 [23]

(2) $F'_x(x,y).h=a(x,y)hb(x,y)$ и $F'_y(x,y).h=c(x,y)he(x,y)$
для любого $h\in\mathbf{H}$ и всякого $(x,y)\in U\cap\mathcal{A}_r^2$, при $r=2$, где $a(x,y),b(x,y),c(x,y),e(x,y)$ – это ненулевые $\mathcal{A}_r$-голоморфные функции на $U\cap\mathcal{A}_r^2$. Для $r=1$, над $\mathbf{C}$, очевидно благодаря коммутативности поля $\mathbf{C}$ мы берем как обычно $b=1$ и $e=1$.

Поэтому, из уравнения (1) следует, что ограничение $G'(y)$ на $V\cap\mathcal{A}_r$ удовлетворяет условиям $(P2,P3)$, так как тело кватернионов $\mathbf{H}$ и поле комплексных чисел $\mathbf{C}$ ассоциативны. Но $\hat{R}_{z,x}$ – это автоморфизмы алгебры $\mathcal{A}_p$, так что выполняются условия $(Q1-Q6)$. Для простоты обозначений возьмем нулевую отмеченную точку. Мы имеем $\bigcup_{s\in V}\{\hat{R}_{s,y}y:y\in V\cap\mathcal{A}_r\}=V$, следовательно, $\{q\in V:\exists y\in V\cap\mathcal{A}_r$, так что $\hat{R}_{q,y}y=q\}=V$ (смотри также $(Q2)$). Пусть $q\in V\setminus\mathcal{A}_r$ и $y\in V\cap\mathcal{A}_r$ таковы, что $\hat{R}_{q,y}y=q$, тогда $\hat{R}_{q,y}F(x,y)=F(\hat{R}_{q,y}x,q)$, но $F(\zeta,q)=0$ в W эквивалентно $(\zeta,q)=(G(q),q)$ и $q\in V$. Поэтому, $\hat{R}_{q,y}F(G(y),y)=F(G(q),q)=0$ и $\hat{R}_{q,y}G'(y).h=G'(q).(\hat{R}_{q,y}h)$ в силу (1) для любого $h\in\mathcal{A}_r$ и каждого $y\in V\cap\mathcal{A}_r$, и всякого $q\in V$, так что $\hat{R}_{q,y}y=q$ и $Re(y)=Re(q)$, следовательно, $\hat{R}_{q,y}G(y)=G(q)$ для любого $(q,y)\in V\times(V\cap\mathcal{A}_r)$, так что $\hat{R}_{q,y}y=q$ и $Re(y)=Re(q)$, так как $F'_x(x,y)$ обратим для $x=G(y)$ и F является локально аналитической и используя разложение $F(x,y)$ по (x,y) с $x=G(y)$.

Положим $H=G'(y).h$, тогда $h=(G'(y))^{-1}.H$, так как F является псевдоконформной и $kerF'_x(x,y)=0$, и $kerF'_y(x,y)=0$ для всяких $(x,y)\in U\cap\mathcal{A}_r^2$, тогда как $\mathcal{A}_p$ является конечномерной алгеброй над $\mathbf{R}$. Если оператор $F'_x(x,y):\mathcal{A}_p\to\mathcal{A}_p$ удовлетворяет условию $(Q7)$ и имеет обратный, тогда его обратный также удовлетворяет $(Q7)$, так как ограничение $F'_x(x,y)|_{\mathcal{A}_r}$ имеет вид (2) и всякое ненулевое число в $\mathcal{A}_p$ обратимо, где $1\le p\le 3$. Так как правая часть уравнения (1) удовлетворяет условию $(Q7)$, тогда левая часть его также удовлетворяет $(Q7)$.

6. Следствие. *Если $f : U \to \mathcal{A}_p$ является (r,p)-квазиконформной функцией, где U открыто в $\mathcal{A}_p$ и $f(U) = V$ открыто в $\mathcal{A}_p$, и f биективно на U, тогда обратная функция $f^{-1} : V \to \mathcal{A}_p$ является (r,p)-квазиконформной.*

Доказательство. Рассмотрим функцию $F(x,y) = f(x) - y$, тогда она (r,p)-квазиконформна и удовлетворяет условиям следствия 5. Поскольку $f(U) = V$ и $f : U \to V$ биективно, то существует отображение $g = f^{-1} : V \to U$, которое (r,p)-квазиконформно в силу следствия 5.

7. Теорема. *Предположим, что f и g являются (p,r,b)- и (q,r,b)-квазиконформными отображениями на окрестностях U точки z_0 и V точки y_0 соответственно, так что $f(U) \supset V$ и $f(z_0) = y_0$, где $1 \leq r < b \leq 3$, y_0 и $z_0 \in \mathcal{A}_r$, тогда их композиция $g \circ f$ является (pq,r,b)-квазиконформной на окрестности W точки z_0.*

Доказательство. Композиция псевдоконформных отображений является псевдоконформной, поэтому в соответствии с определением 1 достаточно взять окрестность W точки z_0, так что $W = f^{-1}(V)$ открыто, так как f непрерывна (смотри [22] и теорему 2.6 [23]). Поэтому, $g \circ f$ является pq-псевдоконформной во всякой точке в $W \cap \mathcal{A}_r$, так как y_0 и $z_0 \in \mathcal{A}_r$. Композиция голоморфных отображений является голоморфной, композиция $T_1 T_2$ собственных элементов $T_1, T_2 \in SO(2^b, \mathbf{R})$ является собственным элементом $T_1 T_2 \in SO(2^b, \mathbf{R})$, так как $SO(2^b, \mathbf{R})$ – это специальная ортогональная группа. Если вращения T_1 и T_2 имеют общую ось, тогда их композиция сохраняет эту ось, следовательно, $SO_{\mathbf{R}}(n, \mathbf{R})$ – это подгруппа в $SO(n, \mathbf{R})$. Возьмем семейства автоморфизмов $\hat{R}^g$ и $\hat{R}^f$ для g и f соответственно в согласно определению 1. Поэтому, композиция $\hat{R}^{g \circ f}_{z,x} := \hat{R}^g_{(\hat{R}^f_{z,x}(f(x+z_0)-y_0)),(f(x+z_0)-y_0)}$ определена для любого $x \in (W - z_0) \cap \mathcal{A}_r$ и каждого $z \in W - z_0$ и это дает ограничение $\hat{R}_{z,x} = id$ для любых x и $z \in (W - z_0) \cap \mathcal{A}_r$, так как $f(U \cap \mathcal{A}_r) \subset \mathcal{A}_r$. Таким образом, семейство операторов $\hat{R}^{g \circ f}(z,x)$ удовлетворяет условиям $(Q2-Q5)$. Таким образом, $g \circ f(z+z_0) = \hat{R}^{g \circ f}_{z,x} h \circ f(x+z_0)$ для любого $x \in (W - z_0) \cap \mathcal{A}_r$ и каждого $z \in W - z_0$ с $Re(z) = Re(x)$ и $z = \hat{R}_{z,x} x$, где $h(y) := g(y + y_0)$, следовательно, $g \circ f$ удовлетворяет $(Q6)$. Поскольку $(g \circ f)'(z + z_0).h = g'(f(z + z_0)).(f'(z + z_0).h)$ для всяких $z \in W - z_0$ и $h \in \mathcal{A}_b$, тогда как g и f удовлетворяют $(Q6, Q7)$ с $\hat{R}^g$ и $\hat{R}^f$ соответственно, тогда $(g \circ f)'$ удовлетворяет $(Q7)$ с $\hat{R}^{g \circ f}$ и неизбежно $g \circ f$ является (pq,r,b)-квазиконформной на W.

8. Следствие. *Предположим, что U – это открытая область в $\mathcal{A}_b$ с отмеченной точкой $y_0 \in U \cap \mathcal{A}_r$, $1 \leq r < b \leq 3$, тогда семейство всех (r,b)-квазиконформных диффеоморфизмов f из U на U сохраняющих отмеченную точку y_0 имеет структуру группы.*

Доказательство. В силу теоремы 7 композиции (r,b)-квазиконформных отображений g, f являются (r,b)-квазиконформными, так как $f(y_0) = y_0$ и $g(y_0) = y_0$. Согласно следствию 6 обратное отображение к f также (r,b)-квазиконформно. Очевидно, что тождественное отображение $id(x) = x$ для любого $x \in U$ псевдоконформно, следовательно, оно является (r,b)-квазиконформным. Поскольку $f \circ id = id \circ f = f$ для любого гомеоморфизма $f : U \to U$, тогда $id = e$ является единичным элементом семейства (r,b)-квазиконформных диффеоморфизмов.

8.1. Замечание. На семействе $H(M,P)$ всех $\mathcal{A}_b$ голоморфных отображений из области M в $\mathcal{A}_b^n$ в область P в $\mathcal{A}_b^k$ рассмотрим компактно-открытую топологию (локально) аналитических отображений как в доказательстве теоремы 3.18 [23], где $n, k \in \mathbf{N}$. Эта топология на $H(M,P)$ индуцирует топологию на группе $\mathcal{A}_b$ голоморфных диффеоморфизмов $DifH(M)$ многообразия M. Для этого семейства (r,b)-квазиконформных диффеоморфизмов f многообразия M предположим, что $f(M \cap \mathcal{A}_r^n) = M \cap \mathcal{A}_r^n$.

8.2. Теорема. *Семейство всех (r,b)-квазиконформных диффеоморфизмов $DifQ(M)$ компактной канонической замкнутой области M в $\mathcal{A}_b^n$ сохраняющих отмеченную точку y_0 (смотри 8.1), $1 \le r < b \le 3$, $n \in \mathbf{N}$, образует топологическую метризуемую группу, которая полна относительно своей метрики и локально компактно. Группа $DifQ(M)$ является аналитической группой Ли над $\mathbf{R}$.*

Доказательство. В соответствии с теоремами 3.24,25 [23] группа $DifP(M \cap \mathcal{A}_r^n)$ всех псевдоконформных диффеоморфизмов $M \cap \mathcal{A}_r^n$ является топологической метризуемой локально компактной аналитической группой Ли над $\mathbf{R}$. Рассмотрим без ограничения общности $y_0 = 0$. С другой стороны, всякое $f \in DifQ(M)$ получается из соответствующего $q \in DifP(M \cap \mathcal{A}_r^n)$ с помощью операторов $\hat{R}_{z,x}$ подчиненных условиям $(Q1 - Q7)$ определения 1. В свою очередь, всякое $\hat{R}_{z,x}$ – это автоморфизм алгебры $\mathcal{A}_b$ зависящий $\mathcal{A}_b$ и $\mathcal{A}_r$ голоморфно от z и x соответственно (смотри предложение 2). Таким образом, f^{-1} получается из q^{-1} с помощью $\hat{R}_{\zeta,y}$, $\zeta = f(z)$, $y = q(x)$, но q^{-1} псевдоконформна, следовательно, f^{-1} является (r,b)-квазиконформным благодаря условиям $(Q6, Q7)$ для f, так как $(f^{-1})' = (f')^{-1}$ и всякое $\hat{R}_{z,x}$ обратимо. Поскольку для любых $f_1, f_2 \in DifQ(M)$ мы имеем соответствующие $q_1, q_2 \in DifP(M \cap \mathcal{A}_r^n)$ и $DifP(M \cap \mathcal{A}_r^n)$ – это группа, то $f_1 \circ f_2 \in DifQ(M)$ благодаря $(Q1-Q7)$. Группа $DifP(M \cap \mathcal{A}_r)$ является конечно-мерной локально компактной аналитической группой Ли над $\mathbf{R}$ и семейство $\hat{R}_{z,x}$ также образует конечно-мерное аналитическое семейство над $\mathbf{R}$, следовательно, $DifQ(M)$ является конечно-мерной аналитической группой Ли над $\mathbf{R}$ и неизбежно она локально компактна, метризуема и полна.

9.1. Предложение. *Если q_1 и q_2 – голоморфные функции области W в $\mathbf{C}$, q_1 и q_2 имеют $(1,b)$-квазиконформные продолжения f_1 и f_2 на U, $1 < b \le 3$, с тем же семейством $\hat{R}_{z,x}$ и той же отмеченной точкой $y_0 \in W$ для f_1 и f_2 (смотри $(Q1-Q7)$ в определении 1) и $(q_1q_2)(x)' \ne 0$ во всякой точке $x \in W$, тогда их произведение q_1q_2 имеет $(1,b)$-квазиконформное продолжение f_1f_2 на U.*

Доказательство. Условия $(Q1 - Q6)$ очевидно удовлетворяются для f_1f_2, так как $\hat{R}_{z,x}$ – это автоморфизм алгебры $\mathcal{A}_b$ для любых $z \in U - y_0$ и $x \in W - y_0$. С другой стороны, произведение комплексно голоморфных функций является комплексно голоморфным, произведение $\mathcal{A}_b$ голоморфных функций является $\mathcal{A}_b$ голоморфным. Условия $(Q6, Q7)$ выполнены для f_1 и f_2, следовательно,

$$(g_1g_2)'(\hat{R}_{z,y}y).(\hat{R}_{z,y}h) := g_1(z)[(g_2)'(\hat{R}_{z,y}y).(\hat{R}_{z,y}h)] + [(g_1)'(\hat{R}_{z,y}y).(\hat{R}_{z,y}h)]g_2(z) =$$
$$= \hat{R}_{z,y}[(g_1g_2)'(y).h]$$

для любого $z \in U - y_0$ и $y \in W - y_0$, так что $Re(z) = Re(y)$ и $z = \hat{R}_{z,y}y$ и каждого $h \in \mathcal{A}_r$, где $g'(z)$ является оператором (супер)производной над $\mathcal{A}_b$, следовательно, $(Q7)$ выполняется для f_1f_2.

9.2. Следствие. *Предположим, что q_1 и q_2 являются голоморфными функциями на область W в $\mathbf{C}$ с изолированными нулями для q_1' и q_2', q_1 и q_2 имеют $(1,b)$-квазирегулярные продолжения f_1 и f_2 на U, $1 < b \le 3$, с одним и тем же семейством $\hat{R}_{z,x}$, и одной и той же точкой $y_0 \in W$ для f_1 и f_2 (смотри $(Q1-Q7)$ в определении 1), тогда их произведение q_1q_2 имеет $(1,b)$-квазирегулярное продолжение f_1f_2 на U.*

Доказательство. В силу теоремы 9.1 f_1f_2 является $(1,b)$-квазиконформным на $U \setminus S_A$, где $S_A = \{z+y_0 : z = \hat{R}_{z,x}x, z \in U-y_0, x \in W-y_0, q_1'(x+y_0) = 0$ или $q_2'(x+y_0) = 0\}$, $S_A \cap W$ является дискретным подмножеством состоящим из изолированных точек в W. Условия $(Q1-Q6)$ выполняются для f_1f_2, так как всякое $\hat{R}_{z,x}$ является автоморфизмом алгебры $\mathcal{A}_b$. Таким образом, f_1f_2 является $(1,b)$-квазирегулярным на U.

9.3. Замечание. Отметим, что в общем теорема 9.1 и следствие 9.2 могут не выполняться для $((a_1f_1)(a_2f_2))$ вместо f_1f_2, когда f_j берутся с постоянными недействительными множителями $a_j \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$ (смотри также замечания 13).

9.4. Теорема. *Предположим, что q_n – это последовательность комплексно голоморфных функций на открытой связной выпуклой области W в $\mathbf{C}$, так что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} q'_n(y)$ равномерно сходится на W к функции $q'(y)$ с $q'(y) \neq 0$ для любого $y \in W$ (или $y \in W \setminus A$ с дискретным подмножеством A состоящим из изолированных точек в W) и $\sum_{n=1}^{\infty} q_n(y_0)$ сходится в отмеченной точке в W к $q(y_0)$ тогда как всякое q_n имеет $(1,b)$-квазиконформное (или $(1,b)$-квазирегулярное) продолжение f_n на область U в $\mathcal{A}_b$ с одним и тем же семейством $\{\hat{R}_{z,x} : z \in U - y_0, x \in W - y_0\}$. Тогда ряд $\sum_{q=1}^{\infty} q_n(y)$ сходится на W к функции $q(y)$, которая имеет $(1,b)$-квазиконформное (или $(1,b)$-квазирегулярное соответственно) продолжение f на U.*

Доказательство. В силу теоремы XVI.3.4 [32] ряд $\sum_{q=1}^{\infty} q_n(y)$ сходится на W к функции $q(y)$ и эта сходимость является равномерной на компактных подмножествах в W. Поскольку $q'(y) = \sum_{n=1}^{\infty} q'_n(y)$ на W, то существует $\partial q(y)/\partial y_1$ и $\partial q(y)/\partial y_2$, где $y = y_1 + \mathbf{i}y_2$, $y_1, y_2 \in \mathbf{R}$, $\mathbf{i} = (-1)^{1/2}$. Поэтому, существует $\partial q(y)/\partial \bar{y} = \sum_{n=1}^{\infty} \partial q_n(y)/\partial \bar{y} = 0$ на W, так как всякая q_n голоморфна на W. Мы имеем, что $\hat{R}_{z,x}$ – это автоморфизм алгебры $\mathcal{A}_b$ зависящий голоморфно от $z \in U - y_0$ и аналитически от $x \in W - y_0$, тогда ряды $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(y)$ и $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(y)$ сходятся на U к $f(y)$ и $f'(y)$ соответственно и эта сходимость равномерна на P и $P \times B$ для любого компактного подмножества P в U, где $B = B(\mathcal{A}_b, 0, 1) := \{z \in \mathcal{A}_b : |z| \leq 1\}$. Таким образом, существует $\partial f(y)/\partial \tilde{y} = 0$, так как $\partial f_n(y)/\partial \tilde{y} = 0$ для всякого $n \in \mathbf{N}$ и неизбежно $f(y)$ является $\mathcal{A}_b$ голоморфной на U. Условия $(Q1 - Q6)$ выполняются для любой f_n на U, а $(Q7)$ на $U \setminus S_{A_n}$, где $S_{A_n} = \emptyset$ в $(1,b)$-квазиконформном случае, следовательно, $(Q1 - Q6)$ выполнены для $f(y)$ на U и $(Q7)$ на $U \setminus S_A$, где $A = \emptyset$ в $(1,b)$-квазиконформном случае, так как ряды $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(y)$ и $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(y)$ сходятся на U к $f(y)$ и $f'(y)$ соответственно, а $f'(y).h \neq 0$ для любого $(y,h) \in (U \setminus S_A) \times (\mathcal{A}_b \setminus \{0\})$.

9.5. Примеры. 1. Возьмем функции $q_n(y) = c_n(y - y_0)^n$, коэффициенты которых действительны $c_n \in \mathbf{R}$, в то время как $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| R^n < \infty$ для любого $n \in \mathbf{N}$, где $0 < R < \infty$, $W = \{y \in \mathbf{C} : |y - y_0| < R\}$, $y_0 \in \mathbf{C}$, так что $\sum_{n=1}^{\infty} c_n n(y - y_0)^{n-1} \neq 0$ на W, положим $U = \{z \in \mathcal{A}_b : |z - y_0| < R\}$ и возьмем $\{\hat{R}_{z,x}\}$ из предложения 2. Тогда условия теоремы 9.4 выполнены, так как $\hat{R}_{z,x} c_n = c_n$ для любого n. В частности, возьмем $c_n = 1$ для любого n, $0 < R < 1$, $y_0 = 0$, тогда $f(y) = 1/(1-y)$ и $q'(y) = (1-y)^{-2} \neq 0$ на W. Если $q(y) = \sin(y)$ или $q(y) = \cos(y)$, тогда q имеет $(1,b)$-квазицелое продолжение. Очевидно, если $a = const \neq 0$, $a \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $f(z)$ является (r,b)-квазирегулярной на U или (r,b)-квазицелой, тогда $q(z) = f(az)$ является (r,b)-квазирегулярной на $U/a = \{z/a : z \in U\}$ или (r,b)-квазицелой соответственно.

2. Рассмотрим функции $q_n(y) = c_n \exp(a_n(y - y_0))$, где $c_n \in \mathbf{R}$, $a_n \in \mathbf{R}$, $a_n \neq 0$ для любого $n \geq 2$, $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится и $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n c_n| \exp(|a_n| R) < \infty$, так что $\sum_{n=1}^{\infty} a_n c_n \exp(a_n(y - y_0)) \neq 0$ на $W := \{y \in \mathbf{C} : |y - y_0| < R\}$, $0 < R < \infty$, $y_0 \in \mathbf{C}$, $U := \{z \in \mathcal{A}_b : |z - y_0| < R\}$ и $\hat{R}_{z,x}$ из предложения 2. Тогда выполнены условия теоремы 9.4, так как $\hat{R}_{z,x} c_n = c_n$ и $\hat{R}_{z,x} a_n = a_n$ для любого n, в то время как $\exp(a(y - y_0))$ является $\mathcal{A}_b$-псевдоконформной на $\mathcal{A}_b$ для $a \neq 0$ из $\mathcal{A}_b \setminus \{0\}$ (смотри [22, 23]).

В частности, для $c_n = 1$ и $q_n(y) = n^{-y} = \exp(-y \ln n)$ для любого $n \geq 1$, $y_0 = 0$, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} q_n(y)$ и $\sum_{n=1}^{\infty} q'_n(y)$ сходятся равномерно на $W_R := \{y \in \mathbf{C} : Re(y) > R\}$ для $1 < R < \infty$ к голоморфной функции $\zeta(y)$ и положим $U_R := \{z \in \mathcal{A}_b : Re(z) > R\}$. Поэтому, возьмем $W = \{y \in W_R : \zeta'(y) \neq 0, 1 < R < \infty\}$ и $U = U_1 \setminus \bigcup \{S'_y : y \in W_1 \setminus W\}$, где $S'_y := \{z : z = \hat{R}_{z,y} y; z \in U_1, Re(z) = Re(y)\}$ для $y \in W_1 \setminus W$. Таким образом,

$\zeta(y)$ имеет $(1,b)$-квазиконформное продолжение на U с W для $b=2$ и для $b=3$. Поскольку производная $\zeta'(y)$ голоморфна на W_1 с изолированными нулями, тогда $\zeta(y)$ имеет $(1,b)$-квазирегулярное продолжение на U_1 с W_1 для $b=2$ и для $b=3$.

Если мы возьмем

(1) $q_n(y)=c_n\exp(v_nE(t_n(y-y_0)))$
с $v_nt_n=a_n$, где $v_n,t_n\in\mathbf{R}\setminus\{0\}$, тогда эти примеры поставляют $(1,b)$-квазиконформные или квазирегулярные продолжения в сферических $\mathcal{A}_b$-координатах (смотри определение 2.1). Для этого выберем семейство $R_{E(t(p-y_0)),E(t(y-y_0))}$ для $(\mathbf{C},\mathcal{A}_b)$ пары удовлетворяющей уравнению 2.3(1) в предложении 2.3. Поэтому,

(2) $R_{E(t(p-y_0)),E(t(y-y_0))}=R_{E(p-y_0),E(y-y_0)}$
для любого $p\in\mathcal{A}_b$, $y\in\mathbf{C}$ и всякого действительной ненулевого $t\in\mathbf{R}\setminus\{0\}$, где $y_0\in\mathbf{C}$ - это отмеченная точка. Тогда

(3) $R_{E(p-y_0),E(y-y_0)}\sum_{n=1}^\infty q_n(y)=$
$\sum_{n=1}^\infty R_{E(t_n(p-y_0)),E(t_n(y-y_0))}\exp(v_nE(t_n(y-y_0)))=$
$\sum_{n=1}^\infty \exp(v_nE(t_n(p-y_0)))=f(p)$
для любого $Re(E(p-y_0))=Re(E(y-y_0))$ с $R_{E(p-y_0),E(y-y_0)}E(y-y_0)=E(p-y_0)$, так как $R_{z,x}(tx)=tR_{z,x}x$ для любого $t\in\mathbf{R}$ и $E(y)=y$ для любого $y\in\mathbf{C}$. Таким образом, $q(y)=\sum_{n=1}^\infty q_n(y)$ имеет $(1,b)$-квазиконформное в сферических $\mathcal{A}_b$-координатах продолжение f с q на V, так что $E(V)=W$ и f на P, так что $E(P)=U$ выбирая соответствующую ветвь Ln.

3. Гамма функция $\Gamma(z)$ голоморфна на $\mathbf{C}\setminus\{0,-1,-2,-3,...\}$, имея полюсы первого порядка в точках $0,-1,-2,-3,...$ с вычетами $res_{z=-n}\Gamma(z)=(-1)^n/n!$, $n=0,1,2,...$. Более того,

(1) $1/\Gamma(z+1)=e^{Cz}\prod_{k=1}^\infty[(1+z/k)e^{-z/k}]$ и это произведение сходится всюду на $\mathbf{C}$, где $C=\lim_{n\to\infty}(\sum_{k=1}^n 1/k-\ln n)=0.5772157...$ – это постоянная Эйлера (смотри §VII.1 [15]). В произведении в формуле (1) все коэффициент действительны. Можно рассмотреть для этой функции различные голоморфные продолжения над $\mathcal{A}_b$ (смотри параграф 4 в [18]). Применяя операторы $\hat{R}_{z,y}$ из предложения 2 с $y_0=0$ и предложение 9.1 и теорему 9.4 к уравнению (1) дает $(1,b)$-квазимероморфное продолжение $\Gamma(z)$, которое является $(1,b)$-квазиконформным на $\mathcal{A}_b\setminus\{S_0,S_{-1},S_{-2},...\}$ для $2\le b\le 3$, где $S_{-n}=S^\Gamma_{-n}$. В частности, для $y_0=0$ мы имеем $S^\Gamma_{-n}=\{-n\}$, так как рассматриваются лишь вращения вокруг действительной оси, $T=\hat{R}_{z,y}\in SO_{\mathbf{R}}(2^b,\mathbf{R})$. Более того, $1/\Gamma(z)$ является $(1,b)$-квазицелой, следовательно, $\Gamma(z)$ не имеет нулей в $\mathcal{A}_b$.

10. Определение. Пусть $a_1,...,a_n,z\in\mathcal{A}_r$, положим

$Exp_1(a_1;z):=\exp(a_1z)$, $Exp_n(a_1,...,a_n;z):=Exp_{n-1}(a_1,...,a_{n-1};Exp_1(a_n;z))$
для $n>1$, где $2\le r$. Для $a_1\ne 0,...,a_n\ne 0,z\ne 0$ положим $Ln_1(a_1;z):=a_1^{-1}Ln(z)$, $Ln_n(a_1,...,a_n;z):=Ln_{n-1}(a_1,...,a_{n-1};Ln_1(a_n;z))$ для $n>1$, где $Exp_0(z):=id(z)=z$ и $Ln_0(z):=id(z)=z$ для любого $z\in\mathcal{A}_r$, $1\le r$. Здесь $a_1,...,a_{n-1}$ могут быть константами, но более общим образом $\mathcal{A}_r$-псевдоконформными функциями $a_1(z)\ne 0$,...,$a_{n-1}(z)\ne 0$, $a_n\ne 0$ – это постоянная в $\mathcal{A}_r$, $2\le r$.

Пусть $\gamma(t):=z_0+\rho Exp_n(a_1,...,a_n;\xi(t))$ – это кривая в открытой области U в $\mathcal{A}_r$ и пусть f является голоморфной функцией $f:U\to\mathcal{A}_r$, где $a_1=a_1(t)\ne 0,...,a_{n-1}=a_{n-1}(t)\ne 0$ – это постоянные или псевдоконформные функции со значениями в $\mathcal{A}_r$ на открытой области $V_a\supset[0,1]$ или $V_a\supset\mathbf{R}$ в $\mathcal{A}_r$, $a_n\ne 0$, $\xi(t)$ – это спрямляемая кривая в $\mathcal{A}_r$, $t\in[0,1]\subset\mathbf{R}$, $f(z)\ne 0$ для любого $z=\gamma(t)$, где $0<\rho<\infty$. Тогда положим

$\Delta_\gamma Arg_nf:=\Delta_\gamma Arg_n(a_1,...,a_n;f):=\int_{z\in\gamma}dLn_n(a_1,...,a_{n-1},1;f(z))$
с выбранной ветвью Ln.

10.1. Замечание. В частности, для $n = 1$ и $\xi(t) = t$ с $M \in \mathcal{A}_r$, $Re(M) = 0$, $|M| = 1$, $a_n = 2\pi M$, $\{\gamma(t) : t \in [0,1]\}$ – это окружность. Если $n = 1$ и $a_1 = 2\pi M$, тогда $\Delta_\gamma Arg_1(f) = \Delta_\gamma Arg(f)$ является обычным изменением аргументом функции f вдоль кривой γ (смотри также параграф 3 в [17, 18] и теорему 2.23 [23]).

10.2. Предложение. *Логарифмическая функция* Ln *на* $\mathcal{A}_r \setminus \{0\}$, *где* $1 \le r \le \infty$, *имеет счетное число ветвей.*

Доказательство. Для $r = 1$ мы имеем $\mathcal{A}_1 = \mathbf{C}$ и в этом случае утверждение этого предложения хорошо известно. Поэтому рассмотрим $2 \le r \le \infty$.

Всякое ненулевое $z \in \mathcal{A}_r \setminus \{0\}$ может быть записано в полярных форме

(1) $z = |z| \exp(M\phi + 2\pi n M)$,
где $M \in \mathcal{I}_r := \{z \in \mathcal{A}_r : Re(z) = 0\}$, $|M| = 1$, $\phi \in [0, 2\pi)$, $n \in \mathbf{Z}$, $Arg(z) = M\phi + 2\pi n M$ (смотри параграф 3 в [17, 18]). Если $K \in \mathcal{I}_r$, $|K| = 1$, K не является параллельной M, то есть, $|Re(MK^*)| < 1$, тогда M и K не коммутируют. Когда $0 < \phi < \pi$, тогда $\exp(M\phi + \pi K s) \ne \exp(M\phi + \pi n M)$ для любого $s \ne 0$, $s \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$, и всякого $n \in \mathbf{Z}$, так как $\exp(M\phi + \pi K s) = \cos|M\phi + \pi K s| + (M\phi + \pi K s)(\sin|M\phi + \pi K s|)/|M\phi + \pi K s|$ при этом $\exp(M\phi + \pi n M) = \cos|\phi + \pi n| + M(\phi + \pi n)(\sin|\phi + \pi n|)/|\phi + \pi n|$ и $|M\phi + \pi K s|^2 = \phi^2 + (\pi s)^2 + 2Re(MK^*)\phi\pi s$ и $(\phi + \pi n) \notin \pi\mathbf{Z}$ и K не параллельно M, где $\mathbf{Z} := \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$. С другой стороны, $Im(z) := z - Re(z)$ параллельно M в уравнении (1), следовательно, единственными решениями (1) являются $Arg(z) = M(\phi + 2\pi n)$, где $\phi \in [0, 2\pi)$, $n \in \mathbf{Z}$, M параллельно $Im(z)$. Поэтому, Ln имеет только счетное число ветвей, которые могут быть занумерованы $n \in \mathbf{Z}$.

Более детально, можно построить следующий некоммутативный аналог римановой 2^r-мерной поверхности $\mathcal{R}$ для Ln, так что $Ln : \mathcal{A}_r \setminus \{0\} \to \mathcal{R}$ является однозначным отображением, где $2 \le r \le \infty$, $2^\infty = \infty$. Рассмотрим копии $(\mathcal{A}_r, ni_1)$ алгебры $\mathcal{A}_r$ вложенной в $\mathcal{A}_r^2$, где $ni_1 \in i_1\mathbf{R}$ принадлежит второму множителю $\mathcal{A}_r$, $n \in \mathbf{Z}$. Положим $P_j := \{z \in \mathcal{A}_r : z_0 < 0, z_j = 0, z_k \in \mathbf{R} \forall 0 < k \ne j\}$ и рассмотрим сечения $\mathcal{A}_r$ (первого сомножителя) посредством P_j для любого $1 \le j \in \mathbf{Z}$, где $z = \sum_{j=0}^{2^r-1} z_j i_j$, $z_j \in \mathbf{R}$, i_j являются стандартными генераторами алгебры $\mathcal{A}_r$. Тогда множество $\{z \in \mathcal{A}_r : z_0 < 0\}$ разбито на подмножества $S(k_1, k_2, ...)$ соответствующие определенным комбинациям знаков чисел z_j: или $z_j \ge 0$, или $z_j \le 0$ с $k_j = 1$ и $k_j = -1$ соответственно. Для конечного r число таких частей равно 2^q с $q = 2^r - 1$, так как $j = 1, ..., 2^r - 1$, для $r = \infty$ это семейство бесконечно и несчетно мощности $\mathsf{c} = 2^{\aleph_0}$.

Тогда вложим каждую подразделенную (разбитую) копию $(\mathcal{A}_r, ni_1)$ в $\mathcal{A}_r^2$ и слегка выгнем всякое подмножество $(\{z \in \mathcal{A}_r : z_0 < 0\}, ni_1)$ в направлениях $\nu_1, \nu_2, ...$ перпендикулярных $(i_1, ni_1), (i_2, ni_1), ...$, используя мнимую часть $\mathcal{I}_r$ второго множителя, так что после этой процедуры $\{({}_1z, {}_2z) \in (S(k_1, k_2, ...), ni_1) \cap (S(l_1, l_2, ...), mi_1) : {}_1z_0 < 0\} = \emptyset$ для любого или $n \ne m$ с произвольными k, l, или $n = m$ с $k \ne l$, где $l = (l_1, l_2, ...)$, $z = ({}_1z, {}_2z) \in \mathcal{A}_r^2$, ${}_1z$ и ${}_2z \in \mathcal{A}_r$. Тогда отождествим грани $Q_j := P_j \setminus (\bigcup_{m, m \ne j} P_m)$ двух копий n и $n+1$ для $(S(k), ni_1)$ и $(S(k - 2e_j), (n+1)i_1)$ посредством соответствующих прямых лучей двух копий (Q_j, ni_1) и $(Q_j, (n+1)i_1)$, где $k = (k_1, k_2, ...)$, $k_1, k_2, ... \in \{-1, 1\}$, $k_j = 1$, $e_j = (0, ..., 0, 1, 0, ...) \in \mathbf{R}^{2^r-1}$, $2^\infty - 1 = \mathsf{c}$. Осуществим это отношение эквивалентности для всех $n \in \mathbf{Z}$, всякого $1 \le j \in \mathbf{Z}$ и любого k с $k_j = 1$. Рассмотрим после такой идентификации Q_j как часть из $(\mathcal{A}_r, (n+1)i_1)$. Обозначает через $\mathcal{L}$ 2^r-мерную поверхность в $\mathcal{A}_r^2$ полученную такой процедурой.

Для всякого перпендикулярного перехода через грань Q_j из $(S(k), ni_1)$ в $(S(k - 2e_j), (n+1)i_1)$ присвоим изменение $2\pi i_j$ аргумента числа Кэли-Диксона, где $k_j = 1$, $1 \le j \in \mathbf{Z}$. Перпендикулярному к Q_j переходу в противоположном направлении из $(S(k - 2e_j), (n+1)i_1)$ в $(S(k), ni_1)$ с $k_j = 1$ присвоим противоположное изменение аргумента

$-2\pi i_j$.

Рассмотрим сферические координаты $(a, \theta_1, ..., \theta_m)$ в Евклидовом пространстве $\mathbf{R}^{m+1}$, которые связаны с декартовыми координатами $x_1, ..., x_{m+1} \in \mathbf{R}$ вектора $x = (x_1, ..., x_{m+1}) \in \mathbf{R}^{m+1}$ уравнениями:

(2) $x_1 = a\cos(\theta_1)$, $x_2 = a\sin(\theta_1)\cos(\theta_2)$,...,$x_m = a\sin(\theta_1)...\sin(\theta_{m-1})\cos(\theta_m)$, $x_{m+1} = a\sin(\theta_1)...\sin(\theta_m)$,
где $0 \le a = |x| < \infty$, $0 \le \theta_1 \le 2\pi$, $0 \le \theta_2 \le \pi$,...,$0 \le \theta_m \le \pi$ (смотри §XII.1 [32]). Тогда это дает сферические координаты в $\mathcal{A}_r$ беря $x_{j+1} = z_j$ для любого $j = 0, 1, 2, ..., 2^r - 1$ и $m = 2^r - 1$, где $z = \sum_{j=0}^{2^r-1} z_j i_j \in \mathcal{A}_r$. Сравнение уравнений (1) и (2) дает:

(3) $M = i_1\cos(\theta_2) + i_2\sin(\theta_2)\cos(\theta_3) + ... + i_{2^r-2}\sin(\theta_2)...\sin(\theta_{2^r-2})\cos(\theta_{2^r-1})$
$+ i_{2^r-1}\sin(\theta_2)...\sin(\theta_{2^r-1})$ и $\theta_1 = \phi$.
Для $\mathcal{A}_\infty$ предел (2) при r стремящемся к бесконечности дает сферические координаты в $\mathcal{A}_\infty$, так как для любого $z \in \mathcal{A}_\infty$ норма $|z| := (\sum_{j=0}^{\infty} z_j^2)^{1/2} < \infty$ конечна. Поэтому, всякое ненулевое $z = |z|\exp(M\phi_1)$ периодично (инвариантно) при замене $\theta_j \mapsto \theta_j + 2\pi m_j$ для любого j, более того, z инвариантно относительно парных замен: $\theta_j \mapsto 2\pi m_j - \theta_j$ и $\theta_{j+1} \mapsto \theta_{j+1} + (2m_{j+1} + 1)\pi$ для любого отмеченного j, где $m_1, ..., m_{2^r-1} \in \mathbf{Z}$.

Всяким сферическим координатам $(\theta_1 + 2\pi m_1, \theta_2 + \pi m_2, ..., \theta_{2^r-1} + \pi m_{2^r-1}) =: \psi$ присвоим два вектора $m^+ = (m_1^+, m_2^+, ...)$ и $m^- = (m_1^-, m_2^-, ...)$, где $m_j^+ := \max(0, m_j)$, $m_j^- := \min(0, m_j)$, $|\psi|^2 := \sum_j \psi_j^2 < \infty$, множество $\{j : m_j \ne 0\}$ конечно, так как рассматриваются лишь спрямляемые кривые в $\mathcal{A}_r$. Тогда $m = m^+ + m^-$ и положим $n^+ := \sum_j m_j^+$, $n^- := \sum_j m_j^-$, следовательно, $0 \le n^+ \in \mathbf{Z}$ и $0 \ge n^- \in \mathbf{Z}$. Поэтому, всякому такому ψ соответствует единственный $Arg(z)$ и z однозначно характеризуемый двумя точками (y_1, y_2), где y_1 в $(\mathcal{L}, 1)$ принадлежит $(\mathcal{A}_r, n^+)$, а y_2 в $(\mathcal{L}, 2)$ принадлежит $(\mathcal{A}_r, n^-)$, чьи сферические координаты равны $(|z|, \psi^+)$ и $(|z|, \psi^-)$ соответственно, где $\psi_1^+ = \theta_1 + 2\pi m_1^+$, $\psi_1^- = \theta_1 + 2\pi m_1^-$, $\psi_j^+ = \theta_j + \pi m_j^+$ и $\psi_j^- = \theta_j^- + \pi m_j^-$ для любого $j \ge 2$, $(\mathcal{L}, 1)$ и $(\mathcal{L}, 2)$ - это две копии $\mathcal{L}$. Тогда вложим $\mathcal{R} := \{(y_1, y_2) : y_1 \in (\mathcal{L}, 1)$ с $n_1 \ge 0, y_2 \in (\mathcal{L}, 2)$ с $n_2 \le 0\}$ в $\mathcal{A}_r^2$, что возможно, так как $\mathcal{L} \subset \mathcal{A}_r \times \mathcal{I}_r$. Точки y_1 и y_2 эквивалентны тогда и только тогда, когда $n^+ = n^- = 0$. Тогда $\mathcal{R}$ является некоммутативным для $2 \le r$ и неассоциативным для $3 \le r$ аналогом римановой поверхности, так что $Ln : \mathcal{A}_r \setminus \{0\} \to \mathcal{R}$ – однозначное отображение и Ln имеет счетное число ветвей, так что $Ln(z) = ln|z| + Arg(z)$, где $ln : (0, +\infty) \to \mathbf{R}$ – это обычный действительный натуральный логарифм.

11. Лемма. *Предположим, что U и V – это открытые области в $\mathcal{A}_r$, $2 \le r \le 3$, $f : U \to \mathcal{A}_r$, $\psi : V \to \mathcal{A}_r$, f – голоморфна на U и ψ – это голоморфный диффеоморфизм из V на U, γ – это спрямляемая кривая в U, где $\gamma(t) = z_0 + Exp_n(a_1, ..., a_n; t)$ для любого $t \in [0, 1]$, $a_1, ..., a_{n-1} \in \mathcal{A}_r \setminus \{0\}$ – это ненулевые постоянные или $\mathcal{A}_r$ псевдоконформные функции, $a_n = const \in \mathcal{A}_r \setminus \{0\}$, $Re(a_n) = 0$, $|a_n| = 2\pi$, $f(\gamma(t)) \ne 0$ для любого $t \in [0, 1]$. Тогда $\Delta_\gamma Arg_n f = \Delta_\eta Arg_n f \circ \psi$ и $\Delta_\gamma Arg_n f$ не зависит от $a_1, ..., a_{n-1}$, когда $n \ge 2$, где $\phi(z) := Ln_n(a_1, ..., a_n; \psi^{-1}(z))$ на U и $\eta(t) := Exp_n(a_1, ..., a_n; \phi(\gamma(t))$ для любого $t \in [0, 1]$.*

Доказательство. Композиции псевдоконформных функций являются псевдоконформными, обратное к псевдоконформному отображению является псевдоконформным (смотри [22] и теорему 2.6 [23]). Поскольку exp и Ln псевдоконформны, отображения $z \mapsto az$ и $z \mapsto za$ псевдоконформны для $a \ne 0$, тогда Exp_n и Ln_n также псевдоконформны для $a_1 \ne 0$,...,$a_n \ne 0$. Выберем ветвь логарифмической функции (смотри предложение 10.2) и рассмотрим $\phi(z) := Ln_n(a_1, ..., a_n; \psi^{-1}(z))$ и положим $\eta(t) := Exp_n(a_1, ..., a_n; \phi(\gamma(t))$, следовательно, $\psi(\zeta) = \gamma(t) = z$ тогда и только тогда, когда $\zeta = \eta(t)$. С другой стороны, $\phi(z)$ является голоморфным отображением как композиция голоморфных отображений. Поэтому, η является спрямляемой кривой, так как γ является спрямляемой кривой. Спрямляемая кривая γ компактна в $\mathcal{A}_r$, следовательно, она может быть покрыта конечным числом шаров на всяком из которых f не имеет нулей, так как f непрерывна и не имеет нулей на γ. Поскольку $\int_a^b dg(z) = g(b) - g(a)$ для голоморфной функции на шаре W в $\mathcal{A}_r$ (смотри теорему 2.18 [23]), тогда

$\Delta_\gamma Arg_n f = \int_\gamma dLn_n(a_1, ..., a_{n-1}, 1; f(z)) = \int_\eta dLn_n(a_1, ..., a_{n-1}, 1; f\circ\psi(\zeta)) = \Delta_\eta Arg_n f\circ \psi$.

Поскольку $Ln_{n-1}(a_1, ..., a_{n-1}; z)$ – это обратная функция к $Exp_{n-1}(a_1, ..., a_{n-1}; y)$, тогда $\Delta_\gamma Arg_n f$ не зависит от $a_1, ..., a_{n-1}$, когда $n \geq 2$. Это выполняется для всякой фразы μ представляющей f и для любой ветви криволинейного интеграла, например, описанной с помощью левого или правого алгоритма (смотри лемму 2.16 и теоремы 2.17, 2.18 в [23] и [18]). Фразы соответствующие f согласуются для канонических (аналитических) элементов, которые являются аналитическими продолжениями друг друга в области в силу теоремы о монодромии 2.1.5.4 [24] и 2.45 [23].

12. Лемма. *Предположим, что f является (p, r, b)-квазиконформной функцией на открытой связной области U в $\mathcal{A}_b$ с нулем $z_0 \in U \cap \mathcal{A}_r$, $f(z_0) = 0$, где $1 \leq r < b \leq 3$, $0 < p \in \mathbf{Z}$. Тогда f имеет связную поверхность $S = S_{z_0}$ в $\mathcal{A}_b$ нулей функции f, так что $z_0 \in S$ и ее размерность над $\mathbf{R}$ равна $dim_{\mathbf{R}} S = 2^b - 2^r$.*

Доказательство. Поскольку $f(z + y_0) = \hat{R}_{z,x} f(y_0 + x)$ для любых $x \in (U - y_0) \cap \mathcal{A}_r$ и $z \in U - y_0$ таких, что $Re(z) = Re(x)$ и $z = \hat{R}_{z,x} x$, где y_0 – это отмеченная точка в $U \cap \mathcal{A}_r$, тогда $f(z) = \hat{R}_{z-y_0,z_0-y_0} f(z_0) = 0$ для любого $z \in U$, так что $Re(z) = Re(z_0)$ и $z - y_0 = \hat{R}_{z-y_0,z_0-y_0}(z_0 - y_0)$, так как $f(z) = \hat{R}_{z-y_0,z_0-y_0} f(z_0)$ получается из $f(z_0)$ с помощью автоморфизма $\hat{R}_{z-y_0,z_0-y_0}$ алгебры Кэли-Диксона $\mathcal{A}_b$, которая является телом кватернионов $\mathbf{H}$ для $b = 2$ или алгеброй октонионов $\mathbf{O}$ для $b = 3$ (смотри определение 1). Семейство автоморфизмов $\hat{R}_{z,x}$ голоморфно и удовлетворяет условиям $(Q2 - Q5)$, так что когда z стремится к точке ζ в $(U - y_0) \cap \mathcal{A}_r$, тогда $\hat{R}_{z,x}$ стремится к единичному оператор для данного $x \in (U - y_0) \cap \mathcal{A}_r$, следовательно, $S_{z_0} := S := \{z : z - y_0 = \hat{R}_{z-y_0,z_0-y_0}(z_0 - y_0), z \in U, Re(z) = Re(z_0)\}$ является связной. В частности, $\hat{R}_{z_0-y_0,z_0-y_0}(z_0 - y_0) = z_0 - y_0$, так как $z_0 \in U \cap \mathcal{A}_r$, следовательно, $z_0 \in S$. Ее размерность над $\mathbf{R}$ равна: $dim_{\mathbf{R}} S = 2^b - 2^r$, так как $dim_{\mathbf{R}} \mathcal{A}_b = 2^b$, $dim_{\mathbf{R}} \mathcal{A}_b \ominus \mathcal{A}_r = 2^b - 2^r$ для $\mathcal{A}_b \ominus \mathcal{A}_r$ рассматриваемого как $\mathbf{R}$-линейное пространство.

13. Замечания. В общем случае произведение (r, b)-квазиконформных функций (с данным порядком умножения для $b = 3$) даже при $r = 1$, где $1 \leq r < b \leq 3$ не обязано быть (r, b)-квазиконформным, так как оператор производной произведения является суммой операторов (смотри определение 2.2(11) [17,18]). В самом деле, сумма псевдоконформных или квазиконформных функций может быть непсевдоконформной или неквазиконформной соответственно даже, когда оператор производной ненулевой, уже при $r = 2$, так как имеются операторы проектирования π_j из $\mathcal{A}_b$ в $i_j\mathbf{R}$ для любых $j = 0, 1, ..., 2^b - 1$ и каждого $2 \leq b$, где $\pi_0(z) = (z + (2^b - 2)^{-1}\{-z + \sum_{k=1}^{2^b-1} i_k(zi_k)^*)\})/2$, $\pi_j(z) = (-zi_j + i_j(2^b - 2)^{-1}\{-z + \sum_{k=1}^{2^b-1} i_k(zi_k)^*)\})/2$ для любого $j \in \{1, ..., 2^b - 1\}$, $\pi_j(z) = z_j$ для всякого $z \in \mathcal{A}_b$, где $z = z_0 i_0 + ... + z_{2^b-1} i_{2^b-1}$. Это является эффектом некоммутативности алгебр Кэли-Диксона для $2 \leq b$. Более того, старт с комплексных констант $a = a_0 + \mathbf{i}a_1$ с $a_0, a_1 \in \mathbf{R}$ дает $\hat{R}_{z,y} a = a_0 + Ma_1$, где $M \in \mathcal{A}_b$ зависит от $z \in \mathcal{A}_b$, $y \in \mathcal{A}_r$, как описано формулами $2(4, 6)$ в z-представлении, следовательно,

(1) $(\partial \hat{R}_{z,y} a/\partial z).h = ha_1$ для любого $h \in \mathcal{I}_b$, $z \in \mathcal{A}_b \setminus \mathcal{A}_r$.

По аналогичной причине сумма псевдоконформных или квазиконформных отображений может быть непсевдоконформным или неквазиконформным отображением соответственно для $2 \leq b$, даже когда его производная ненулевая, уже для $r = 2$. Всякая комплексно голоморфная функция f на $\mathbf{C}$ (целая функция) может быть разложена в соответствии с теоремой Вейерштрасса V.72 [15] как $f(z) = z^m \exp[g(z)] \prod_{n=1}^{\infty} (1 - z/a_n) \exp(z/a_n + (z/a_n)^2/2 + ... + (z/a_n)^{p_n}/p_n)$, где p_n – это последовательность натуральных чисел и $g(z)$ – это целая функция, m – кратность $z = 0$ как нуля функции $f(z)$. Но ее продолжение с помощью автоморфизмов удовлетворяющих условиям $(Q2 - Q5)$ может быть неквазиконформной функцией в силу описанных выше препятствий.

Когда семейство $\hat{R}_{z,x}$ дается как $\hat{R}_{\xi(z),\xi(x)} = R_{\xi(z),\xi(x)}$ (смотри предложение 2), тогда фразы соответствующие каноническим (аналитическим) элементам функции f, которые являются аналитическими продолжениями друг друга в области, определены согласованным образом в силу теоремы о монодромии 2.1.5.4 [24] и 2.45 [23], где ξ является псевдоконформным диффеоморфизмом области U. Это в общем проще, когда $\xi = id$ – тождественное отображение. Если f является $(1, b)$-квазирегулярной, $2 \leq b \leq 3$, тогда $q = g|_{W-y_0}$ является комплексно голоморфной функцией и фразы аналитических элементов для q коммутируют над $\mathbf{C}$.

14. Замечания и определения. 1. Нули и полюсы комплексно голоморфных функций определяются классически стандартным образом. Для алгебры $\mathcal{A}_r$ и p-псевдоконформной функции f на открытой области V мы назовем точку $z_0 \in V$ нулем функции f, если $f(z_0) = 0$, где $2 \leq r \leq 3$, $1 \leq p \in \mathbf{Z}$. В силу теоремы 2.5 [23] и §1 его порядок равен p. Для алгебры $\mathcal{A}_r$ p-псевдоконформная функция f на $V \setminus \{z_0\}$, где $2 \leq r \leq 3$, V открыто в $\mathcal{A}_r$ и $z_0 \in \mathcal{A}_r$ – это точка, тогда мы назовем z_0 полюсом функции f, если $g(z) := 1/f(z)$ является $\mathcal{A}_r$ p-псевдоконформной на $V \setminus \{z_0\}$ и z_0 – это нуль функции g.

Определим f голоморфной на окрестности V для ∞ или (p, r)-псевдоконформной, или (p, r, b)-квазиконформной в ∞ тогда и только тогда, когда $g(z) := f(1/z)$ голоморфна в $U := \{z : 1/z \in V\}$ или (p, r)-псевдоконформна, или (p, r, b)-квазиконформна в нуле соответственно. Мы скажем, что $y = \infty$ является нулем или полюсом функции f тогда и только тогда, когда $g(z) = f(1/z)$ имеет нуль или полюс в $z = 0$ соответственно.

2. Рассмотрим естественное вложение алгебры $\mathcal{A}_r$ в $\mathcal{A}_b$ ассоциированное со стандартной процедурой удвоения, где $1 \leq r < b \leq 3$. Пусть U – это открытая связная область в $\mathcal{A}_b$ и $W = U \cap \mathcal{A}_r$ – открытая связная область в $\mathcal{A}_r$, так что U псевдоконформно диффеоморфна с областью V, где V получается из W с помощью всех тех $\hat{R}_{z,x}$, которым соответствуют вращения во всех плоскостях $\mathbf{R}i_v \oplus \mathbf{R}i_u$ с $v = 1, ..., 2^r - 1$ и $u = 2^r, ..., 2^b - 1$ на углы $\phi \in (0, 2\pi)$ с действительной осью вращения в действительной тени, так как всякий оператор $T \in SO(2^b, \mathbf{R})$ может быть представлени как конечное произведение однопараметрических подгрупп и здесь рассматривается ее подгруппа $SO_{\mathbf{R}}(2^b, \mathbf{R})$ операторов ограничения, которых на действительную ось $\mathbf{R}$ являются тождественными.

Предположим, что f является (p, r, b)-квазиконформным или (p, r, b)-квазирегулярным отображением на U, может быть кроме конечного числа поверхностей $S_y := \{y_0 + z : z = \hat{R}_{z,y-y_0}(y - y_0), z \in U - y_0, Re(z) = Re(y - y_0)\}$ полюсов $y \in W$, которые могут быть только в W, где $0 < p \in \mathbf{Z}$.

Положим для любого $z_0 \in S_y$ по определению:

(1) $(2\pi)^{-1} \int_{\gamma} f(z)dz =: res(z_0, f).N$ – оператор вычета функции f в точке z_0, где $N \in \mathcal{A}_b$, $Re(N) = 0$, $|N| = 1$, $\gamma(t) = z_0 + \rho \exp(2\pi t N) \subset V$, $t \in [0, 1]$, $\rho > 0$ достаточно мало, так что $f|_{B\setminus\{z_0\}}$ – это локально аналитическая, и γ не охватывает других полюсов функции f в множестве $\{y_0 + z : z \in \hat{R}_{q,y-y_0}\mathcal{A}_r; |z - y| < \rho + \epsilon\}$ для некоторого $0 < \epsilon < \infty$ и некоторого $q \in \mathcal{A}_b$, так что $N \in \hat{R}_{q,y-y_0}\mathcal{A}_r$ с $Re(q) = Re(y - y_0)$, $B = B(\mathbf{R} \oplus N\mathbf{R}, z_0, 2\rho^-)$,

$B(X, z, R^-) := \{x \in X : d_X(x, z) < R\}$ обозначает открытый шар в метрическом пространстве X с метрикой d_X. Для $a \in \mathbf{R}$ положим $res(z_0, f).(aN) := a\ res(z_0, f).N$ и $res(z_0, f).0 = 0$.

Предположим также, что $z_0 \in W$ – это нуль или полюс функции f и $S = S_{z_0}$ – поверхность соответствующая z_0 из леммы 12, где W может содержать только конечное число нулей или полюсов z_l, которые могут быть только точками. Для подмножества G в $\mathcal{A}_r$, пусть $\pi_{s,q,t}(G) := \{u : z \in G, z = \sum_{v \in \mathbf{b}} w_v v,\ u = w_s s + w_q q, w_v \in \mathbf{R} \forall v \in \mathbf{b}\}$ для любого $s \neq q \in \mathbf{b}$, где $t := \sum_{v \in \mathbf{b} \setminus \{s,q\}} w_v v \in \mathcal{A}_{r,s,q} := \{z \in \mathcal{A}_r : z = \sum_{v \in \mathbf{b}} w_v v, w_s = w_q = 0, w_v \in \mathbf{R}\ \forall v \in \mathbf{b}\}$. То есть, геометрически $\pi_{s,q,t}(G)$ является проекцией на комплексную плоскость $\mathbf{C}_{s,q}$ пересечения G с плоскостью $\tilde{\pi}_{s,q,t} \ni t$, $\mathbf{C}_{s,q} := \{as + bq : a, b \in \mathbf{R}\}$, так как $sq^* \in \hat{b}$, где $\mathbf{b} := \{i_0, i_1, ..., i_{2^r-1}\}$ – это семейство стандартных генераторов алгебры Кэли-Диксона $\mathcal{A}_r$, $\hat{b} := \mathbf{b} \setminus \{i_0\}$, $i_0 = 1$.

Пусть ω – это спрямляемая петля, то есть, замкнутая кривая, $\omega(0) = \omega(1)$, в открытой подобласти J, $z_0 \in J \subset W$ in $\mathcal{A}_r$, так что ω охватывает z_0, где J не содержит каких-либо других нулей или полюсов функции f, J является (2^r-1)-связной и $\pi_{s,q,t}(J)$ односвязна в $\mathbf{C}$ для любого $t \in \mathcal{A}_{r,s,q}$ и $u \in \mathbf{C}_{s,q}$, $s = i_{2k}$ и $q = i_{2k+1}$, $k = 0, 1, ..., 2^{r-1} - 1$, для которых существует $\zeta = u + t \in J$. При вычислении некоммутативных криволинейных интегралов выберем их ветви. Для некоммутативных преобразований типа Лапласа или Меллина воспользуемся, например, левым алгоритмом вычисления интегралов вдоль кривых.

15. Теорема. *Предположим, что f – псевдоконформная функция на $V \setminus \{y\}$ с полюсом в точке y в V, также F – это однозначная ветвь ее (r, b)-квазиконформного продолжения в $W \setminus S_y$ относительно отмеченной точки y_0, где W – это открытое подмножество в $\mathcal{A}_b$, так что $W \cap \mathcal{A}_r = V$. Тогда операторы вычетов $res(y, f)$ и $res(z, F)$ таковы, что $res(z, F).M = \hat{R}_{z-y_0,y-y_0}[res(y, f).N]$ для любого $z \in S_y \cap W$ и каждого $N \in \mathcal{A}_r$ с $Re(N) = 0$, где $M = \hat{R}_{z-y_0,y-y_0}N$. Более того, $res(z_0, f).N$ является $\mathbf{R}$ гомогенным и $\mathcal{A}_b$ аддитивным по f.*

Доказательство. Если y – это конечная точка, тогда $z \in S_y$ является конечной точкой и

(1) $(2\pi)^{-1} \int_\gamma f(z)dz = res(y, f).N$, где $\gamma(t) = y + \rho \exp(2\pi t N)$ и $\rho > 0$ достаточно мало, так что γ не охватывает других полюсов функции f в множестве $\{y_0 + z : z \in \hat{R}_{q,y-y_0}\mathcal{A}_r; |z - y| < \rho + \epsilon\}$ для некоторого $0 < \epsilon < \infty$ и некоторого $q \in \mathcal{A}_b$ с $Re(q) = Re(y - y_0)$, так что $N \in \hat{R}_{q,y-y_0}\mathcal{A}_r$. Используя условия $(Q6, Q7)$ и действуя $\hat{R}_{z-y_0,y-y_0}$ на обе части уравнения (1) дает

(2) $\hat{R}_{z-y_0,y-y_0}[res(y, f).N] = (2\pi)^{-1} \int_\eta F(s)ds$ для $Re(z) = Re(y)$,

где $\eta(t) = \hat{R}_{z-y_0,y-y_0}\gamma(t)$ для любого t.

Поскольку всякое $z \in S_y$ является полюсом функции F ограниченной на соответствующую подалгебру $\hat{R}_{z-y_0,y-y_0}(\mathcal{A}_r)$ в $\mathcal{A}_b$, тогда определен $\mathcal{A}_b$-аддитивный и $\mathbf{R}$-гомогенный оператор $res(z, F).M = (2\pi)^{-1} \int_\eta F(s)ds$ для $M \in \mathcal{A}_b$, $Re(M) = 0$ (смотри теорему 3.23 [17, 18]).

Поэтому, первое утверждение этой теоремы следует из уравнения (2) и условий $(Q6, Q7)$, §14 выше и теоремы 2.5 [23].

Поскольку $\int_\gamma (a_1 f_1(z) + a_2 f_2(z))dz = a_1 \int_\gamma f_1(z) + a_2 \int_\gamma f_2(z))dz$ для любых $a_1, a_2 \in \mathbf{R}$ и $\mathcal{A}_b$ голоморфных функций f_1 и f_2 на области U содержащей спрямляемую кривую γ (смотри теорему 2.7 [17, 18]), тогда $res(z_0, f).N$ является $\mathbf{R}$-гомогенным и $\mathcal{A}_b$-аддитивным по f: $res(z_0, a_1 f_1 + a_2 f_2) = a_1 res(z_0, f_1) + a_2 res(z_0, f_2)$.

Если $y = \infty$, тогда рассмотрим $g(z) = f(1/z)$, и g имеет полюс в $z = 0$, следовательно, в этом случае утверждение этой теоремы следует из первой части доказательства.

15.1. Пример. Если функция f может быть записана в виде $f(z) = (a(z)((b(z)1/(z-y))c(z)))e(z)$ в окрестности точки $y \in \mathcal{A}_r$, где $a(z)$, $b(z)$, $c(z)$ и $e(z)$ являются $\mathcal{A}_r$-голоморфными и $a(y) \ne 0$, $b(y) \ne 0$, $c(y) \ne 0$ и $e(y) \ne 0$, $2 \le r \le 3$. Тогда $res(y,f).N = (2\pi)^{-1} \lim_{0<\rho\to 0} \int_\gamma (a(z)((b(z)(1/(z-y))c(z)))e(z)dz = (a(y)((b(y)N)c(y))e(y)$. В частности, для γ из определения 10 с $a_n = 2\pi M$, $M \in \mathcal{A}_b$, $Re(M) = 0$, $|M| = 1$, $z_0 = 0$, $\xi(t) = t$ для любого t, мы имеем $\Delta_\gamma Arg_n \gamma = 2\pi M$.

16. Теорема. *Предположим, что U – это собственное открытое подмножество в $\mathcal{A}_b$, также f_1 и f_2 – две непрерывные функции из замыкания $\bar{U} := cl(U)$ для U в $\hat{\mathcal{A}}_b$, так что на топологической границе $Fr(U)$ области U они удовлетворяют неравенствам $|f_1(z)| < |f_2(z)| < \infty$ для любого $z \in Fr(U)$, где $\hat{\mathcal{A}}_b := \mathcal{A}_b \cup \{\infty\}$ – это одно-точечная (Александровская) компактификация $\mathcal{A}_b$. Пусть $q_2 := f_2$ и $q_1 := f_1 + f_2$ являются (p,r,b)-квазимероморфными функциями в U, а нули и полюсы ограничений $f_j|_W$ изолированные, где $W = U \cap \mathcal{A}_r$, $1 \le r < b \le 3$, $j = 1, 2$. Предположим также, что q_j являются (p,r,b)-квазиконформными в окрестности U_{z_0} в U всякого ее нуля z_0 и $1/q_j(z)$ являются (p,r,b)-квазиконформными в $U_{z_0} \setminus \{z_0\}$ для любого полюса z_0, где $p \in \mathbf{N}$ может зависеть от z_0, для $j = 1$ и $j = 2$. Пусть также γ из определения 10 является петлей, где $\gamma(0) = \gamma(1)$, не пересекающей какой-либо поверхности $S_y(q_j)$ для нуля или полюса y функции q_j для $j = 1$ и $j = 2$, где $\gamma \subset Fr(U)$, $1 \le n$. Тогда $\Delta_\gamma Arg_n q_1 = \Delta_\gamma Arg_n q_2$.*

Доказательство. Отображения $z \mapsto z - y_0$ и $z \mapsto \rho z$ для $0 < \rho < \infty$ являются псевдоконформными диффеоморфизмами $\mathcal{A}_b$. Поэтому, положим без ограничения общности $z_0 = 0$ и $\rho = 1$ для тех из определения 10. Если $n > 1$, то рассмотрим $h_j := q_j \circ Exp_{n-1}(a_1,...,a_{n-1};z)$ вместо q_j для $j = 1$ и $j = 2$, так как композиции отображений ассоциативны в теоретико-множественном смысле. С другой стороны, $Exp_{n-1}(a_1,...,a_{n-1};z)$ – это псевдоконформное отображение для $a_1 \ne 0$,...,$a_{n-1} \ne 0$. В силу теоремы 8.2 h_j удовлетворяют предположениям этой теоремы. Заменяя q_j на h_j, мы можем свести доказательство к случаю $n = 1$, так как $Ln_{n-1}(a_1,...,a_{n-1};\gamma(t)) = \xi(t)$ для ветви Ln такой, что $Ln(1) = 0$. Например, можно взять $a_n = 2\pi M$ и $\xi(t) = t$, $t \in [0,1]$, $M \in \mathcal{A}_b \ominus \mathcal{A}_r$, $|M| = 1$, $Re(M) = 0$ в определении 10. Поэтому, рассмотрим q_j для $n = 1$, где $j = 1, 2$.

Кривая γ спрямляема, следовательно, компактна. Нули и полюсы ограничений $f_j|_W$ изолированные, следовательно, существует последовательность $\{\psi_m : m \in \mathbf{N}\}$ спрямляемой петли в U сходящейся к γ равномерно, когда m стремится к бесконечности и, так что всякое ψ_m не пересекает никакой $S_y(q_j)$ для $j = 1$ и $j = 2$ для нулей или полюсов y функций f_j. Таким образом, рассмотрим интеграл $\int_\gamma dLn(q_j(z))$ вдоль γ как предел интегралов $\int_{\psi_m} dLn(q_j(z))$, когда m стремится к бесконечности, так как f_j непрерывна в окрестности V границы $Fr(U)$ в $\bar{U}$ и $\psi_m \subset U$ для любых m и j, где V не содержит какого-либо нуля или полюса функций q_1 и q_2. Последнее V существует, так как $|f_1(z)| < |f_2(z)| < \infty$ для любого $z \in Fr(U)$.

Если z_0 – это полюс q_j в z_0, тогда $1/q_j(z)$ имеет нуль в z_0. Нет никаких нулей или полюсов функций q_1 и q_2 на $Fr(U)$, так как $|f_1(z)| < |f_2(z)| < \infty$ на $Fr(U)$.

Для любой выбранной ветви логарифмической функции имеется равенство $Ln(1/q_j) = -Ln(q_j)$ (смотри предложение 10.2). Более того, $q_1 = f_1 + f_2 = f_2 + f_2[(1/f_2)f_1] = f_2(1 + (1/f_2)f_1)$, так как $\mathcal{A}_3 = \mathbf{O}$ альтернативна, и $|(1/f_2)f_1| < 1$ на $Fr(U)$. Рассмотрим треугольник образованный векторами $q_1(z)$, $q_2(z)$ и $q_1(z) - q_2(z) = f_1(z)$ для $z \in Fr(U)$, тогда $Arg\ q_1(z) = Arg\ q_2(z) + \phi(z)$, так что $|\phi(z)| < \pi/2$ для любого $z \in Fr(U)$ для выбранной ветви Ln, где $Arg\ q_j$ и $\phi(z) \in \mathcal{I}_b$. Поэтому, $\Delta_\xi Arg\ q_1 = \Delta_\xi Arg\ q_2 + \Delta_\xi \phi = \Delta_\xi Arg\ q_2$, так как $\xi(0) = \xi(1)$ и $|\phi(z)| < \pi/2$ для любого $z \in \xi([0,1]) \subset Fr(U)$, так что $\Delta_\xi \phi = 0$. В самом деле, точка $w(z) = (1/f_2(z))f_1(z)$ принадлежит единичному открытому шару $B(\mathcal{A}_b, 0, 1^-) := \{w \in \mathcal{A}_b : |w| < 1\}$. Поэтому вектор $v = 1 + w$ не может повернуться на 2π вокруг нуля. Таким образом, числа оборотов для q_1 и q_2 вокруг нуля одинаковы. Из соотношений h_j с q_j для $n > 1$ следует утверждение этой теоремы также при $n > 1$: $\Delta_\gamma Arg_n q_1 = \Delta_\gamma Arg_n q_2$.

16.1. Теорема. *Пусть выполнены предположения замечания 14.2, когда $W = B(\mathcal{A}_r, y_0, R^-) \setminus A$, где $A := \{y \in B(\mathcal{A}_r, y_0, R^-) : f'(y) = 0\}$ состоит из изолированных точек, $0 < R < \infty$. Пусть также W содержит либо нули, либо полюсы (q, r, b)-квазирегулярной функции f, но не одновременно нули и полюсы, $1 \le r < b \le 3$. Тогда для любой спрямляемой кривой ω в J охватывающей z_0 и всякого $2^r \le n \le 2^b - 1$ существует семейство спрямляемых кривых γ в U охватывающих $S = S_{z_0}$, так что $\gamma \cap S_{z_l} = \emptyset$ для любого нуля или полюса z_l функции f в W и, так что γ не содержится в $\mathcal{A}_r$ и*

$$\Delta_\gamma Arg_n f = pK\Delta_\omega Arg_1 f$$

для некоторого $K \in \mathcal{A}_b$, $|K| = 1$, $Re(K) = 0$, $K = K(\gamma)$, $1 \le p \in \mathbf{Q}$.

Доказательство. В силу предположений этой теоремы нули или полюсы z_0 функции f изолированы в W, следовательно, $f(z) \ne 0$ в $Y \setminus \{z_0\}$ для достаточно малой окрестности Y точки z_0 в $\mathcal{A}_r$. Если z_0 – это полюс функции f, тогда z_0 – это нуль функции $1/f$ и обратно. Если $z \in Y \setminus \{z_0\}$, тогда $f(z) \ne 0$ и применим автоморфизмы $\hat{R}_{\zeta - y_0, z - y_0}$ к $f(z)$ по всем $\zeta \in U$ с $Re(\zeta) = Re(z)$ и $(\zeta - y_0) = \hat{R}_{\zeta - y_0, z - y_0}(z - y_0)$. Возьмем ограничения общности $y_0 = 0$, так как $z \mapsto z + y_0$ – это биективное псевдоконформное отображение из $\mathcal{A}_b$ на $\mathcal{A}_b$. Это дает замкнутую поверхность $S_{f(z)}$ аналогичную $S = S_{z_0}$. В соответствии с леммой 12 $dim_{\mathbf{R}} S_{z_0} = dim_{\mathbf{R}} S_{f(z)} = 2^b - 2^r$.

Если $z_k \in \mathcal{A}_r$ получается из $z_l \in \mathcal{A}_r$ с $l \ne k$ благодаря вращению вокруг действительной оси в плоскости $\pi^{k,l}$ содержащейся в $\mathcal{A}_b \ominus \mathcal{A}_r$, которой соответствует однопараметрическая над $\mathbf{R}$ подгруппа вращений в $SO_{\mathbf{R}}(2^b, \mathbf{R})$, тогда z_k и z_l одновременно или нули, или полюсы благодаря условиям этой теоремы, так как f является (q, r, b)-квазирегулярной.

Имеются следующие разложения алгебр как $\mathbf{R}$-линейных пространств благодаря процедуре удвоения: $\mathbf{H} = \mathbf{C} \oplus i_2\mathbf{C}$, $\mathbf{O} = \mathbf{H} \oplus i_4\mathbf{H}$ и $\mathbf{O} = \mathbf{C} \oplus i_2\mathbf{C} \oplus i_4\mathbf{C} \oplus i_6\mathbf{C}$ соответствующие (r, b) парам равным $(1, 2)$, $(2, 3)$ и $(1, 3)$ соответственно, что дает вложение геометрии в $\mathcal{A}_r$ в геометрию в $\mathcal{A}_b$. Рассмотрим пересечение поверхности S с плоскостью π содержащей z_0 и перпендикулярной действительной оси $\mathbf{R}$, $\pi = z_0 + i_s\mathbf{R} \oplus i_q\mathbf{R}$, где $2^r \le s < q \le 2^b - 1$. Тогда $\eta := S \cap \pi$ – это спрямляемая петля содержащая z_0 и η имеет число поворотов 1 относительно любой внутренней точки в области P_η охватываемой η в π с границей $\partial P_\eta = \eta$.

Рассмотрим спрямляемую петлю γ состоящую из следующих частей: петли γ_+ outside P_η, петли γ_- внутри P_η, ψ, где $\gamma(t) = \gamma_+(3t)$ для $0 \le t \le 1/3$, $\gamma(t) = \psi(6t - 2)$ для $1/3 < t < 1/2$, $\gamma(t) = \gamma_-(3t - 3/2)$ для $1/2 \le t \le 5/6$, $\gamma(t) = \psi(6 - 6t)$ для $5/6 < t \le 1$, так что ψ соединяет γ_+ с γ_-, так что ψ обходится дважды в одном и противоположном направлениях, γ_+ и γ_- содержатся в π, для которых $|\gamma_+(t)| > |\eta(t)|$ и $|\gamma_-(1 - t)| < |\eta(t)|$, и $|\gamma_+(t) - \eta(t)| < \delta$, и $|\gamma_-(1 - t) - \eta(t)| < \delta$ для любого $t \in [0, 1]$, и $\gamma(t) \in U$, и $\gamma(t)$ не нуль или полюс функции f для любого $t \in [0, 1]$, $\delta > 0$ – это достаточно малая постоянная, так что γ_- и η охватывает те же нули и полюсы кроме тех, которые принадлежат S_{z_0}, γ_+ и γ_- имеют противоположные ориентации (смотри также теорему 16 и уравнения $(1, 2)$ ниже более детально). Поскольку множество A

в W состоит из изолированных точек, тогда петля γ может быть выбрана так, чтобы $\gamma([0,1]) \cap (\bigcup\{S_y : y \in A\}) = \emptyset$. Это охватывание подчинено в $\mathcal{A}_b$ свойствам Ln (смотри теоремы 2.23 и 2.24 [23]). Возьмем $0 < \rho_+ - \rho_-$ достаточно малыми и используем приближение $f(z_0+h) = f(z_0) + f'(z_0).h + O(h^2)$ и свойства 1.$(P1-P3)$ в окрестности нуля z_0 функции f в $\mathcal{A}_r$ и свойства 1.$(Q1-Q7)$ в окрестности точки z_0 в $\mathcal{A}_b$, где $f(z_0) = 0$ для нуля z_0 функции f (смотри также теоремы 2.4 и 2.5 [23]). Если оператор T на $\mathcal{A}_r$ имеет вид $T(h) = ahb$, где $a = a(z) \neq 0$, $b = b(z) \neq 0$, a и $b \in \mathcal{A}_r$, тогда $T^{-1}(h) = a^{-1}hb^{-1}$, так как $T^{-1} \circ T(h) = h$ для любого $h \in \mathcal{A}_r$, где $r = 1$ или $r = 2$, возьмем $b = 1$ для $r = 1$. С другой стороны, отображения $\exp(z)$ и $Ln(z)$ являются псевдоконформными для $r = 2$ или голоморфными для $r = 1$ на их областях, так что $Ln \circ \exp(z) = z$ для соответствующей ветви Ln и $(\partial Ln(s)/\partial s).h = (\partial \exp(z)/\partial z)^{-1}.h$ для любого $h \in \mathcal{A}_r$, где $s = \exp(z)$, $f'(z) = \partial f(z)/\partial z$ и $\partial f(z)/\partial \tilde{z} = 0$ для псевдоконформной функции f. В то же время $(\partial(z-z_0)^p/\partial z).h = p\alpha h\beta$ для $1 \leq p \in \mathbf{Z}$ и всякого $h \in \mathcal{A}_r$, где $z \neq z_0$, $\alpha = \alpha(z-z_0)$, $\beta = \beta(z-z_0)$, α и $\beta \in \mathcal{A}_r$, $|\alpha\beta| = |z-z_0|^{p-1}$ для $r = 2$, или $\alpha = (z-z_0)^{p-1}$ и $\beta = 1$ для $r = 1$.

Выберем ψ в плоскости π_1 содержащей $\mathbf{R}$ и точку $\zeta' \in \mathcal{A}_b \ominus \mathcal{A}_r$, так что ψ не пересекает никакой S_{z_l}. Следовательно, γ не пересекает никакой S_{z_l} и охватывает $S = S_{z_0}$. Направление γ является естественным, так что в плоскости π петля γ_+ проходится против часовой стрелке и γ_- проходится по часовой стрелке, если смотреть с положительной оси $M_\pi \mathbf{R}_+$, где $\mathbf{R}_+ := (0,\infty)$, $M_\pi \in \mathcal{I}_b$, $M_\pi \perp \pi$, M_π соответствует вектору, который является векторным произведением в действительной тени базисных векторов плоскости π. Хотя вместо описания ориентации достаточно записать аналитические формулы для кривых, что сделано ниже.

Для $r = 1$ если $\bar{z}_0$ – это нуль или полюс вместе с z_0, тогда γ охватывает z_0 и $\bar{z}_0$ симметрично, так как $\bar{z}_0$ получается из z_0 вращением на угол π вокруг действительной оси. Для $r = 2$, если $z_j = \sum_{k=0}^{3} z_{j,k} i_k$ и $z_l \in S_{z_0}$, тогда z_j и z_l оба или нули или полюсы благодаря условиям наложенным в замечании 14.2 и в этой теореме, например, когда $z_{j,k} = -z_{l,k}$ для некоторого $1 \leq k \leq 3$, где $z_{j,k} \in \mathbf{R}$ для любого j, k.

Используя итерированные экспоненты выберем $\gamma(t)$ с точностью до $\mathcal{A}_b$-псевдоконформного диффеоморфизма области U в виде

(1) $\gamma_+(t) = Re(z_0) + \rho_+ Exp_{n-1}(a_1, ..., a_{n-1}; \xi(t))$,

(2) $\gamma_-(t) = Re(z_0) + \rho_- Exp_{n-1}(a_1, ..., a_{n-1}; \xi(1-t))$,

где $0 < \rho_- < \rho_+ < R$, $1 \leq n \leq 2^b - 2^r$, $a_1, ..., a_{n-1} \in \mathcal{A}_b$ – это ненулевые постоянные, $\xi([0,1])$ – это петля, например, $\xi(t) = \exp(2\pi M t)$, $t \in [0,1]$, $M \in \mathcal{A}_b \ominus \mathcal{A}_r$, $|M| = 1$, $Re(M) = 0$. Поскольку S – это гладкое C^∞ компактное многообразие имеющее C^∞ действительную тень, тогда оно имеет $2^b - 2^r$ локальных координат. Более того, S гомеоморфна поверхности вращения, так что S может быть параметризована углами $\theta_1, ..., \theta_m$, где $0 \leq \theta_1 \leq 2\pi$ и $0 \leq \theta_j \leq \pi$ для $j = 2, ..., m$, $m = 2^b - 2^r$, так что $z \in S$ является функцией $z = z(\theta_1, ..., \theta_m)$ (смотри формулы 10.2(2)).

В силу следствие 3.5 [18] сфера $S(\mathcal{A}_b, y_0, R)$ в $\mathcal{A}_b$ радиуса $0 < R < \infty$ с центром в y_0 может быть параметризована с помощью итерированных экспоненциальных функций. Пусть $\{i_0, i_1, i_2, i_3\}$ – это стандартные генераторы тела кватернионов $\mathbf{H}$, где $i_0 = 1$, $i_1^2 = i_2^2 = i_3^2 = -1$, $i_1 i_2 = -i_2 i_1 = i_3$, $i_2 i_3 = -i_3 i_2 = i_1$, $i_3 i_1 = -i_1 i_3 = i_2$, тогда

(3) $\exp(i_1(p_1 t + \zeta_1)\exp(-i_3(p_2 t + \zeta_2)\exp(-i_1(p_3 t + \zeta_3)))) = \exp(i_1(p_1 t + \zeta_1)\exp(-(p_2 t + \zeta_2)(i_3\cos(p_3 t + \zeta_3) - i_2 \sin(p_3 t + \zeta_3))))$

$= \exp(i_1(p_1 t + \zeta_1)(\cos(p_2 t + \zeta_2) - \sin(p_2 t + \zeta_2)(i_3 \cos(p_3 t + \zeta_3) - i_2 \sin(p_3 t + \zeta_3))))$

$= \exp((p_1 t + \zeta_1)(i_1 \cos(p_2 t + \zeta_2) + i_2 \sin(p_2 t + \zeta_2)\cos(p_3 t + \zeta_3) + i_3 \sin(p_2 t + \zeta_2)\sin(p_3 t +$

$\zeta_3))) = \cos(p_1 t + \zeta_1) + i_1 \sin(p_1 t + \zeta_1) \cos(p_2 t + \zeta_2) + i_2 \sin(p_1 t + \zeta_1) \sin(p_2 t + \zeta_2) \cos(p_3 t + \zeta_3) + i_3 \sin(p_1 t + \zeta_1) \sin(p_2 t + \zeta_2) \sin(p_3 t + \zeta_3)$,
где $p_j, \zeta_j \in \mathbf{R}$ для любого j.

Далее по индукции выполнено равенство:

(4) $\exp({}_{q+1}M(p,t;\zeta)) =$
$\exp\{ {}_qM((i_1p_1 + ... + i_{2^q-1}p_{2^q-1}), t; (i_1\zeta_1 + ... + i_{2^q-1}\zeta_{2^q-1}) \exp(-i_{(2^{q+1}-1)}(p_{2^q}t + \zeta_{2^q}) \exp(- {}_qM((i_1p_{2^q+1} + ... + i_{2^q-1}p_{2^{q+1}-1}), t; (i_1\zeta_{2^q+1} + ... + i_{2^q-1}\zeta_{2^{q+1}-1})))\}$,
где i_{2^q} – это генератор удвоения алгебры $\mathcal{A}_{q+1}$ из алгебры $\mathcal{A}_q$, так что $i_ji_{2q} = i_{2^q+j}$ для любого $j = 0, ..., 2^q - 1$, функция $M(p,t;\zeta)$ записана с нижним индексом ${}_qM$ и она дается уравнением

(5) $M(p,t) = M(p,t;\zeta) = (p_1t + \zeta_1)[i_1 \cos(p_2t + \zeta_2) + i_2 \sin(p_2t + \zeta_2) \cos(p_3t + \zeta_3) + ... + i_{2^q-2} \sin(p_2t + \zeta_2) ... \sin(p_{2^q-2}t + \zeta_{2^q-2}) \cos(p_{2^q-1}t + \zeta_{2^q-1}) + i_{2^q-1} \sin(p_2t + \zeta_2) ... \sin(p_{2^q-2}t + \zeta_{2^q-2}) \sin(p_{2^q-1}t + \zeta_{2^q-1})]$
для алгебры Кэли-Диксона с $2 \le q < \infty$, где $\zeta = \zeta_1 i_1 + ... + \zeta_{2^q-1} i_{2^q-1} \in \mathcal{A}_q$ – это параметр начальной фазы, $\zeta_j \in \mathbf{R}$ для любого $j = 0, 1, ..., 2^q - 1$. Когда $t = 1$ и p_j являются переменными $p_1 \in [0, 2\pi]$ и $p_j \in [0, \pi)$ для всякого $j = 2, ..., 2^q - 1$, тогда образ итерированной экспоненты даваемой уравнением (4) для $2 \le q \le 3$ или, в частности, формулой (3) является единичной сферой в $\mathcal{A}_q$, где ζ_j фиксировано для любого $j = 1, ..., 2^q - 1$ и может быть, в частности, взято нулем. Это дает однолистное накрытие сферы в $\mathcal{A}_q$. Если p_j и ζ_j, $j = 1, ..., 2^q - 1$ фиксированы и t – это переменная, тогда формулы (3) or $(4,5)$ дают кривые в $\mathcal{A}_q$. Это сводит петлю, когда $p_1 = 2\pi$ и $p_j = 0$ или $p_j = \pi$ для любого $j = 2, ..., 2^q - 1$, $t \in [0, 1)$. В частности, если $\zeta_j = 0$ для любого $j > n$, $\zeta_1 \ne 0$,...,$\zeta_n \ne 0$ и $p_k = 0$ для любого $k \ne n$, тогда итерированная экспонента в формулах (3) или $(4,5)$ сводится к Exp_n.

Тогда S диффеоморфна пересечению $S(\mathcal{A}_b, y_0, R) \cap (i_{2^r}\mathbf{R} \oplus i_{2^r+1}\mathbf{R} \oplus ... \oplus i_{2^b-1}\mathbf{R})$.

В соответствии с теоремой Римана об отображении 4.12.40 над $\mathbf{C}$ [29] или теоремами 2.1.5.7 и 2.47 [23, 24] над $\mathbf{H}$ и $\mathbf{O}$, если P – это открытое подмножество в $\mathcal{A}_q$, $q = 1$ или $q = 2$, или $q = 3$, удовлетворяющие условиям замечания 14 и с границей ∂P состоящей более, чем из одной точки, тогда P псевдоконформно эквивалентна открытому единичному шару в $\mathcal{A}_q$.

В пределах всякой подобласти P в U в $\mathcal{A}_b$ удовлетворяющей условиям замечания 14 применима теорема о гомотопии 2.11 [17,18] для интеграла вдоль кривой над $\mathcal{A}_b$. В силу лемма 11 выше мы можем рассмотреть область U и, следовательно, кривую γ в ней относительно псевдоконформного диффеоморфизма. Поэтому, остаток доказательства относительно псевдоконформного диффеоморфизма сводится к случаю шаров и сфер благодаря условиям $(P1 - P3)$.

Поэтому, существуют $n, a_1, ..., a_{n-1}$ и ξ такие, что γ_+ и γ_- даются формулами $(1, 2)$ и $\Delta Arg_1 \xi \ne 0$, следовательно, $\Delta_\gamma Arg_n \gamma \ne 0$, например, $a_n = 2\pi M$, $M \in \mathcal{A}_b \ominus \mathcal{A}_r$, $|M| = 1$, $Re(M) = 0$. Это применимо к обеим S_{z_0} и $S_{f(z)}$ полученным из z_0 и $f(z)$ семействами автоморфизмов. Если мы возьмем $\chi = \pi \cap S_z$ с $Re(z) = Re(z_0)$, $|Im(z)| > |Im(z_0)|$, $z \ne z_0$, так что S_z не содержит никакого полюса или нуля функции f, тогда всякое $\zeta \in (\pi - z_0 + f(z)) \cap S_{f(z)}$ имеет вид $\zeta = f(\chi(t))$ и отображение $[0, 2\pi) \ni t \mapsto \zeta \in (\pi - z_0 + f(z)) \cap S_{f(z)}$ биективно, следовательно, $\Delta_\chi Arg_n f \ne 0$. Это возможно, так как множество A полюсов или нулей функции f в W состоит из изолированных точек, $\forall z_0 \in A$: $\min\{|y - z_0| : y \in A \setminus \{z_0\}\} > 0$. В силу условия $(Q7)$ для $a_n = 2\pi M$ и $\xi(t) = \exp(2\pi Mt)$ в формулах $(1, 2)$ мы имеем $\Delta_\chi Arg_n f = 2\pi ukM$, где $|M| = 1$, $Re(M) = 0$, $M \in \mathcal{A}_b$, k – число обходов χ, которое мы возьмем равным 1, u – это сумма порядков всех либо полюсов, либо нулей из W охватываемых S_z (смотри также теорему 16). Для достаточно малого $|Im(z)| - |Im(z_0)| = \epsilon > 0$ число u равно сумме порядков всех либо полюсов, либо нулей принадлежащих $S = S_{z_0}$ и $B(\mathcal{A}_r, Re(z_0), |Im(z_0|) := \{y \in \mathcal{A}_r : |y - Re(z_0)| \le |Im(z_0)|\}$.

Тогда $u \ne 0$, так как все z_l принадлежащие S одновременно являются либо нулями, либо полюсами вместе с z_0 (смотри выше). Можно взять $\gamma = \chi$, что дает $u = u_\chi$. Если взять γ состоящую из γ_+ и γ_-, и ψ как выше, тогда $u = u_{\gamma_+} - u_{\gamma_-} > 0$, так как $S_{z_0} \subset B(\mathcal{A}_b, Re(z_0), \rho_+) \setminus B(\mathcal{A}_b, Re(z_0), \rho_-)$. С другой стороны, $\Delta_\omega Arg_1 f = 2\pi v N$, где $|N| = 1$, $Re(N) = 0$, $N \in \mathcal{A}_r$, v – порядок z_0, $v \ge 1$ для нуля, $v \le -1$ для полюса. Таким образом, $1 \le p = u/v \in \mathbf{Q}$, также $M = KN$ для $K = MN^*$ благодаря альтернативности алгебры $\mathcal{A}_r$ для $2 \le r \le 3$, так как u и v имеют один и тот же знак, и $|u| \ge |v|$, $|M|^2 = MM^* = M^*M = -M^2$ для чисто мнимой $M \in \mathcal{A}_b$, и неизбежно следует утверждение этой теоремы.

16.2. Замечание. Если выполнены предположения теоремы 16.1, кроме того, что S_{z_0} содержит как нули, так и полюсы, то может случиться, что $p = 0$ благодаря $N - P = 0$, где $N = \sum_k N_k$ – это число нулей, и $P = \sum_k P_k$ – это число полюсов принадлежащих $S \cap \mathcal{A}_r$, где всякий нуль или полюс считается согласно его порядку N_k и P_k соответственно.

17. Теорема. *Предположим, что f – это $(1,b)$-квазицелая функция такая, что $f(\tilde{z}) = \tilde{f}(z)$ для любого $z \in \mathcal{A}_b$, также $f^s(p) = f^s(-p)$ для любого $p \in \mathcal{A}_b$ с $Re(p) \ne 0$, где f^s – это $(1,b)$-квазицелая функция в сферических $\mathcal{A}_b$-координатах с $f = f^s \circ E^{-1}$ (смотри определения 2 и 2.1), $2 \le b \le 3$, $0 < q < \infty$, каждый нуль z_0 ограничения $f|_{\mathbf{C}}$ может быть только в полосе $\{z \in \mathbf{C} : -q \le Re(z) \le q\}$, $f(z)$ не имеет никакого действительного нуля. Тогда все нули ограничения $f|_{\mathbf{C}}$ функции f на поле комплексных чисел $\mathbf{C}$ являются комплексными и принадлежат прямой $Re(z) = 0$.*

Доказательство. Предположим, что z_0 – это комплексный нуль ограничения $f|_{\mathbf{C}}$, $f(z_0) = 0$, тогда $-q \le Re(z_0) \le q$ и $Im(z_0) \ne 0$ согласно предположению этой теоремы. Положим $v_0 := Re(z_0)$. В случае $v_0 = 0$ доказывать нечего. Поэтому рассмотрим $v_0 \ne 0$, тогда $f(-z_0) = 0$, $f(\tilde{z}_0) = 0$ и $f(-\tilde{z}_0) = 0$ благодаря свойствам симметрии функции f, так как $f^s(p) = f^s(-p)$ для любого $p \in \mathcal{A}_b$ с $Re(p) \ne 0$, $E(y) = y$ для любого $y \in \mathbf{C}$, $f = f^s \circ E^{-1}$. Таким образом, без ограничения общности рассмотрим $0 < v_0 \le q$. Следовательно, поверхности нулей $(1,b)$-квазиконформного продолжения функции $f(z)$ таковы: $S^f_{z_0} =: S_{z_0}$ и $S^f_{-z_0} =: S_{-z_0}$ (смотри лемму 12), так как $z_0, \tilde{z}_0 \in S^f_{z_0}$ и $-z_0, -\tilde{z}_0 \in S^f_{-z_0}$. Эти поверхности S_{z_0} и S_{-z_0} симметричны относительно гиперплоскости $\pi_0 := \{z \in \mathcal{A}_b : Re(z) = 0\}$. Без ограничения общности положим $im(z_0) > 0$, где $im(z_0) = i_1^* Im(z_0)$, $Im(z_0) = z_0 - Re(z_0) = i_1 im(z_0)$.

Поскольку тело кватернионов $\mathbf{H} = \mathcal{A}_2$ имеет естественное вложение в алгебру октонионов $\mathbf{O} = \mathcal{A}_3$, тогда достаточно доказать эту теорему для $b = 2$. Отметтим, что Ln имеет счетное число ветвей с некоммутативной римановой поверхностью $\mathcal{R}$ данной в §10.2. Поэтому, $Ln_n(z_1, ..., z_{n-1}, 1; z_n)$ имеет некоммутативную риманову поверхность вложенную в $\mathcal{R}^n$, так как $z \mapsto a^{-1}z$ – это псевдоконформное отображение по z для $a \ne 0$ в $\mathcal{A}_b$, $z \mapsto 1/z$ является также псевдоконформным для $z \ne 0$ (смотри следствие 2.7 [23]), где $z_j \ne 0$ и $z_j \in \mathcal{A}_b$ для любого $j = 1, ..., n$, следовательно, E^{-1} имеет некоммутативную риманову поверхность $\mathcal{R}_E$ размерности 2^b над $\mathbf{R}$ вложенную в $\mathcal{R}^n$ (смотри уравнения 2.1(1, 2)).

Возьмем $b = 2$ и рассмотрим петли

(1) $q_j(t) = v_j + \rho_j \exp(\pi K_j \exp(2\pi N_j t)/2)$

охватывающую S_{z_j} параметризованную $t \in [0, 1) \subset \mathbf{R}$, где $j = 0$ или $j = 1$, $v_1 = -v_0$, $K = i_1 = \mathbf{i}$, $N = i_3$, $|N| = 1$, N – это отмеченный чисто мнимый кватернион ортогональный K, $Re(NK^*) = 0$, $0 < \rho_j - |Im(z_0)|$ достаточно мало, $\rho_0 = \rho_1$ (смотри теорему 16.1). Для $j = 0$ возьмем $K_0 = K$ и $N_0 = N$, и для $j = 1$ возьмем $K_1 = -K$, и $N_1 = -N$. Рассмотрим сферы $S(\mathbf{H}, v_0, |Im(z_0)|)$ и $S(\mathbf{H}, -v_0, |Im(z_0)|)$, где $S(\mathcal{A}_b, x, R) := \{y \in \mathcal{A}_b : |y - x| = R\}$, $0 < R < \infty$.

В силу теоремы I.20.2 [15], если D – это открытая связная область в $\mathbf{C}$ и функции f_1 и f_2 голоморфны на D, так что $f_1(x_n) = f_2(x_n)$ для любого $n \in \mathbf{N}$ и существует предельная точка $x \in D$ последовательности $\{x_n : n \in \mathbf{N}\} \subset D$, тогда $f_1(y) = f_2(y)$ для любого $y \in D$. Функция f голоморфна на $\mathbf{C}$ и $(1, b)$-квазицелая, следовательно, в силу последней теоремы нули функции f и f' в $\mathbf{C}$ изолированы. Поэтому, существует $0 < \rho < \infty$ и $0 < \delta < |Im(z_0)|$, так что для любого другого комплексного нуля $z_2 \notin \{z_0, -z_0, \tilde{z}_0, -\tilde{z}_0\}$ не принадлежащего $S(\mathbf{C}, v_0, |Im(z_0)|) \cup S(\mathbf{C}, -v_0, |Im(z_0)|)$, либо $\{z_2, -z_2, \tilde{z}_2, -\tilde{z}_2\} \subset B(\mathcal{A}_b, v_0, |Im(z_0)| - \delta) \cup B(\mathcal{A}_b, -v_0, |Im(z_0)| - \delta)$ or $\{z_2, -z_2, \tilde{z}_2, -\tilde{z}_2\} \subset \mathcal{A}_b \setminus [B(\mathcal{A}_b, v_0, \rho+\delta) \cup B(\mathcal{A}_b, -v_0, \rho+\delta)]$. Возьмем $\rho_+ = \rho_0$ и $\rho_- = \rho - \delta$ в формулах 16.1(1, 2) с $v_0 = Re(z_0)$ и $v_1 = -v_0 = Re(-z_0)$ как данные вместо $Re(z_0)$ для γ там и возьмем две петли γ_0 и γ_1 соответствующие петлям даваемых уравнениями $(1, 2)$ для ρ_+ и ρ_-, обозначим их через $\gamma_{j,+}$ и $\gamma_{j,-}$ для $j = 0, 1$ соответственно. Тогда γ_0 и γ_1 соединим спрямляемой кривой η не содержащей никакого нуля функции f, так что η обходится дважды в одном и противоположном направлениях.

Выполняется тождество

$K\exp(2\pi Nt) = K\cos(2\pi t) + KN\sin(2\pi t) = \exp(\pi K \exp(2\pi Nt)/2)$,
так как $|K\cos(2\pi t) + KN\sin(2\pi t)| = 1$ и $e^M = \cos(|M|) + M\sin(|M|)/|M|$ для любого $M \in \mathcal{I}_b \setminus \{0\}$, $\sin(\pi/2) = 1$, следовательно, $q_j(t)$ ортогонально $\mathbf{R}$ в $\mathbf{H}$ относительно скалярного произведения $(z, \xi) := Re(z\xi^*)$, более того, $q_0(0) = z_0 + (\rho_0 - \rho')i_1$, $q_1(0) = -z_0 - (\rho_0 - \rho')i_1$, так как без ограничения общности положим $im(z_0) = \rho' > 0$, где $z_0 = v_0 + im(z_0)i_1$. Рассмотрим также окружности $q_{2+j}(t) = v_j + \rho_2 \exp(\pi K_j \exp(2\pi N_j t)/2)$. Предполагается, что γ записано в z-представлении с помощью формул $2(2-5)$.

Положим $p_w(t) := v_0 + \rho_w i_1 - 2\pi i_2 t$, где $\rho_0 := \rho_+$ и $\rho_2 := \rho_-$, $w = 0$ и $w = 2$, тогда $E_2(p_w(t)) = q_w(t)$ и $E_2(-p_w(t)) = q_{1+w}(t)$ для всякого $t \in [0, 1]$ (смотри определение 2.1 и формулу 2.1(1)), так как $v_1 = -v_0 \neq 0$.

Поэтому,

(2) $f(q_w(t)) = f(q_{1+w}(t))$
для любого $t \in [0, 1]$ и для $w = 0, 2$, так как $f^s(p) = f^s(-p)$ для любого $p \in \mathcal{A}_b$ с $Re(p) \neq 0$, $f = f^s \circ E_2^{-1}$ согласно условиям этой теоремы.

Рассмотрим петлю γ состоящую из $q_j(t)$ и пути соединяющего их дважды проходимого в одном и обратном направлениях, так что γ проходится по часовой стрелке в частях q_1 и q_2^-, и против часовой стрелке в частях q_0 и q_3^- в плоскостях $v_j + K\mathbf{R} \oplus KN\mathbf{R}$, если смотреть с отрицательной оси $((-\infty, 0)N)$ перпендикулярной действительной оси: $\gamma(t) = \gamma_0(4t)$ для $0 \le t < 1/4$, $\gamma(t) = \gamma_2(4(t - 1/4))$ для $1/4 \le t < 1/2$, $\gamma(t) = \gamma_1(4(t - 1/2))$ для $1/2 \le t < 3/4$ и $\gamma(t) = \gamma_2(1 - 4(t - 3/4))$ для $3/4 \le t < 1$, где $\gamma_0(t)$ и $\gamma_1(t)$ составлены из q_0, q_2^- и q_1, q_3^- для S_{z_0}, и S_{-z_0} соответственно, и соединяющих их путей проходимых дважды в одном и противоположном направлениях как в доказательстве теоремы 16.1, спрямляемая кривая $\{\gamma_2(t) : 0 \le t \le 1\}$ joins $q_0(1)$ с $q_1(0)$ такая, что $\gamma([0, 1]) \subset V := \{z \in \mathbf{H} : -q \le Re(z) \le q\}$, где $\gamma(0) = \gamma(1)$, $\gamma_{0,+} = q_0$, $\gamma_{1,+} = q_1$, $\gamma_{0,-} = q_2^-$, $\gamma_{1,-} = q_3^-$, так как $K(KN) = -N$. Вместо того, чтобы говорить об ориентациях достаточно записать аналитические формулы для кривых, что сделано в этом разделе.

Поскольку q и $|z|$ конечны, то кривая γ может быть выбрана спрямляемой. Если z_2

– некоторый другой нуль внутри окружностей $S(\mathbf{C}, v_0, |Im(z_0)|) \cup S(\mathbf{C}, -v_0, |Im(z_0)|)$, то S_{z_2} и S_{-z_2} охватываются также кривой γ в смысле теоремы 16. Их добавочное значение к p в $\Delta_\gamma Arg_2 f$ будет положительным вместе с z_0 и $-z_0$ согласно теореме 16.1. Пусть p_0 – это часть p, которая соответствует $z_2 \in S(\mathbf{C}, v_0, |Im(z_0)|) \cup S(\mathbf{C}, -v_0, |Im(z_0)|)$ с $Re(z_2) = 0$. Обозначим множество таких нулей функции f через Z, $Z := \{z \in S(\mathbf{C}, v_0, |Im(z_0)|) \cup S(\mathbf{C}, -v_0, |Im(z_0)|) : Re(z) = 0, f(z) = 0\}$. Тогда Z конечно и может оказаться пустым, так как $Re(z_0) = v_0 \neq 0$ по предположению сделанному выше. Если $z \in \mathbf{C}$ и $f(z) = 0$, тогда мнимая часть числа z ненулевая, $Im(z) \neq 0$, так как f не имеет никакого действительного нуля по предположению этой теоремы.

Нет никакого другого нуля функции f вне полосы $-q \leq Re(z) \leq q$ в $\mathbf{C}$, следовательно, нет никаких цепей пересекающихся сфер вокруг нулей функции f рассмотренного выше типа, кроме может быть пар сфер с центрами в v_0 и $-v_0$ с $0 < v_0 \leq q$. В самом деле, для $z_0 \in \mathbf{C}$ с $|Im(z_0)| > q$ может быть только две такие сферы с данным z_0, $Re(z_0) = v_0$. В области $V_q := \{x \in \mathbf{C} : |Re(x)| \leq q$ и $|im(x)| \leq q\}$ может быть только конечное число нулей функции f и рассмотрение сводится к паре сфер, если существует нуль $z_0 \in V_q$ функции f. Если $z_3 \in \mathbf{C}$ – это нуль функции f, тогда существует открытая окрестность W точки z_3, так что W может пересекать не более, чем конечное семейство окружностей $S(\mathbf{C}, v_j, |im(z_0)|)$, где $v_0 = Re(z_0)$, $v_1 = -v_0$, $j = 0$ или $j = 1$, z_0 – это нуль ограничения $f|_{\mathbf{C}}$ отличный от нулей соответствующих z_3, $z_0 \notin \{z_3, -z_3, \bar{z}_3, -\bar{z}_3\}$. Поэтому, объявленная петля γ существует для любого комплексного нуля z_0 функции f.

Для любого нуля $z_2 \in S(\mathbf{C}, v_0, |im(z_0)|) \cup S(\mathbf{C}, -v_0, |im(z_0)|) \setminus Z$ существует, и для отмеченного z_0 функции f симметрия наложенная на f приводит к противоречию, когда $Re(z_0) \neq 0$. Для доказательства этого обозначим семейство таких нулей z_2 и z_0 функции f через Y, $Y := \{z \in S(\mathbf{C}, v_0, |im(z_0)|) \cup S(\mathbf{C}, -v_0, |im(z_0)|) : Re(z) \neq 0, f(z) = 0\}$. Для $z \in Y$ пусть $k(z) \in \mathbf{N}$ обозначает его порядок. Тогда Y – конечное множество, так как f – нетривиальная целая функция на $\mathbf{C}$. Если $z \in Y$, тогда $-z, \bar{z}, -\bar{z} \in Y$ также и $k(z) = k(-z) = k(\bar{z}) = k(-\bar{z})$. Тогда $p = p_0 + p_Y$, где $p_Y \geq 1$ и $p_0 \geq 0$ ($p_0 \geq 1$, когда $Z \neq \emptyset$) отвечает множествам Y и Z соответственно. Применяя теоремы 16 и 16.1 для $r = 1$ и $b = 2$, мы получим для γ, что

(3) $\Delta_\gamma Arg_2 f = \Delta_{\gamma_0} Arg_2 f + \Delta_{\gamma_1} Arg_2 f = 0$,

так как $\Delta_{\gamma_0} Arg_2 f$ и $\Delta_{\gamma_1} Arg_2 f$ независимы от $a_1 = K$ и $a_1 = -K$ соответственно, но $N_0 = -N_1$. С другой стороны,

(4) $\int_{\gamma_0} dLn_2(\pi K_0/2, 1; f(z)) = \int_{\gamma_1} dLn_2(\pi K_1/2, 1; f(z))$,

так как $\int_{q_j} dLn_2(\pi K_j/2, 1; f(z)) = \int_0^1 dLn_2(\pi K_j/2, 1; f(q_j(t))$ и выполняется равенство (2). Поэтому, применение теорем 16 и 16.1 только лишь к γ_0 благодаря уравнению (4) дает

(5) $|\Delta_\gamma Arg_2 f| = k\pi$,

где $k = k_0 + k_Y$, $k_0 \geq 0$ соответствует нулям из Z, в то время как $k_Y = \sum_{z \in Y} k(z) \geq 4$ соответствует нулям функции f из Y. Это дает противоречие уравнения (3) с (5), следовательно, все комплексные нули функции f могут лежать лишь на прямой $Re(z) = 0$.

17.1. Замечания. Примеры квазирегулярных и квазицелых функций даются с помощью предложения 9.1, следствия 9.2 и теоремы 9.4 и параграфа 9.5. Конечно всякая псевдоконформная функция на $U \setminus A$ или $\mathcal{A}_b \setminus A$, кроме множества A, состоящего из изолированных точек нулей его производных $A := \{z \in U : f'(z) = 0\}$ является в то же время квазирегулярной на U или квазицелой на $\mathcal{A}_b$ соответственно (смотри о псевдоконформных функциях в [22, 23]).

С другой стороны, если $a > 0$, $q > 0$, тогда положим $P(x) = (x - a - qi)(\bar{x} - a +$

$qi)(x+a-qi)(\bar{x}+a+qi)$ для $x \in \mathbf{C}$. Полином P удовлетворяет необходимым свойствам симметрии на $\mathbf{C}$, но он не имеет квазирегулярного продолжение на U открытое в $\mathcal{A}_b$ с $W = U \cap \mathbf{C}$ открытым в $\mathbf{C}$ для $2 \le b \le 3$, так как левые и правые части формулы $(Q7)$ для $\hat{R}_{z,y}P$ отличаются на члены такие, как $-q^2(Mv+vM)(z+a-qM)(\tilde{z}+a+qM)-(z-a-qM)(\tilde{z}-a+qM)q^2(Mv+vM)+q(zv-v\tilde{z})(z+a-qM)(\tilde{z}+a+qM)+q(z-a-qM)(\tilde{z}-a+qM)(zv-v\tilde{z})$, где $z \in \mathcal{A}_b \setminus \mathbf{C}$, $z - Re(z) := Im(z) \ne 0$, $M = Im(z)/|Im(z)|$, $v \ne 0$, $v \| M$, $v \in \mathcal{I}_b \setminus \mathbf{C}$, $Re(v) = 0$, что следует из z-представления с помощью формул $2.(1-9)$. Тогда функции вида $(f_1P)f_2$ также не обязаны удовлетворять условиям теоремы 17 даже, когда f_1 и f_2 квазицелые. Поэтому, класс функций удовлетворяющих условиям теоремы 17 довольно узок. График $\{(z, f(z)) : z \in \mathcal{A}_b\} \subset \mathcal{A}_b^2$ функции f удовлетворяющей условиям теоремы 17 имеет естественную интерпретацию. С другой стороны, в силу следствия 9.2 степень f^n функции f удовлетворяет условиям теоремы 17 для любого $n = 2, 3, 4, ...$, если f им удовлетворяет.

Проблема существования функций удовлетворяющих условиям теоремы 17 рассмотрена в следующем параграфе вместе со свойствами их некоммутативных интегральных преобразований типа Лапласа и Меллина.

3 Квазиконформность некоммутативных интегральных преобразований

Рассмотрим сначала предварительные необходимые утверждения и определения.

1. Теорема. *Предположим, что* $f(z,t)$ *является* $\mathcal{A}_b$ *значной функцией на* $W := U \times [a, \infty)$ *и существует* $(\partial f(z,t)/\partial z).h$ *непрерывная на* $W \times B(\mathcal{A}_b, 0, 1)$, *где* $U = \{z \in \mathcal{A}_b : z_j \in [a_j, b_j], j = 0, 1, ..., 2^b - 1\}$, $z = z_0 i_0 + ... + z_{2^b-1} i_{2^b-1}$, $a_j < b_j$, $B(\mathcal{A}_b, y, R) := \{z \in \mathcal{A}_b : |z - y| \le R\}$. *Предположим также, что* $x \in U$ *таково, что* $F(x) := \int_a^\infty f(x,t)dt$ *сходится, в то время как несобственный интеграл зависящий от параметра* $z \in U$: $G(z,h) := \int_a^\infty (\partial f(z,t)/\partial z).hdt$ *сходится равномерно на* $U \times B(\mathcal{A}_b, 0, 1)$. *Тогда несобственный интеграл* $F(z) := \int_a^\infty f(z,t)dt$ *зависящий от параметра* $z \in U$ *сходится равномерно на* U *и для любого* $z \in U$ *существует* $D_z F(z).h = \int_a^\infty (\partial f(z,t)/\partial z).hdt = G(z,h)$ *для любого* $h \in B(\mathcal{A}_b, 0, 1)$.

Доказательство. Запишем $(\partial f(z,t)/\partial z).h$ в виде $(\partial f(z,t)/\partial z).h = g_0 i_0 + ... + g_{2^b-1} i_{2^b-1}$, где $g : W \times \mathcal{A}_b \to \mathbf{R}$. Поскольку $(\partial f(z,t)/\partial z).h$ непрерывна на $W \times B(\mathcal{A}_b, 0, 1)$ и несобственный интеграл $G(z,h) := \int_a^\infty (\partial f(z,t)/\partial z).hdt$ сходится равномерно на $U \times B(\mathcal{A}_b, 0, 1)$, тогда

$$\int_x^z G(y,h)dy = \int_x^z (\int_a^\infty (\partial f(y,t)/\partial y).hdt)dy = \int_a^\infty dt (\int_x^z (\partial f(y,t)/\partial y).hdy)$$

и несобственный интеграл справа сходится равномерно на $U \times B(\mathcal{A}_b, 0, 1)$, так как t – это действительный параметр и $\mathbf{R}$ – это центр алгебры $\mathcal{A}_b$. Возьмем $h = w$, $|w| = 1$, так что $z = x + vw$, где $v > 0$. Тогда $\int_a^\infty dt(\int_x^z (\partial f(y,t)/\partial y).wdy) = \int_a^\infty f(z,t)dt - \int_a^\infty f(x,t)dt = F(z) - F(x)$, следовательно, несобственный интеграл $F(z) := \int_a^\infty f(z,t)dt$ сходится равномерно на U и $F(z) - F(x) = \int_x^z G(y,w)dy$. Используя аддитивность интеграла, мы имеем $F(z) - F(\eta) = \int_\eta^z G(y,h)dy$ для любых $z, \eta \in U$, где $z - \eta = vh$, $v > 0$. Таким образом, $\partial z(v)/\partial v = h$ и $\int_\eta^z G(y,h)dy = \int_0^v G(\eta + qh, h)dq$, где $q \in [0, v]$. Поэтому, $D_z F(z).h = G(z,h)$ для любых $z \in U$ и $h \in \mathcal{A}_b$, так как $(\partial f(z,t)/\partial z).(sh) = s(\partial f(z,t)/\partial z).h$ для любого $s \in \mathbf{R}$, каждого $h \in \mathcal{A}_b$ и всякого $t \in [a, \infty)$ (смотри для сравнения коммутативный случай в §IV.2.4 [13]).

2. Определение. Рассмотрим функции-оригиналы для некоммутативных двусторонних преобразований Лапласа, удовлетовряющих условиям $(1-3)$ ниже:

(1) $f(t)$ удовлетворяет условию Гёлдера: $|f(t+h)-f(t)| \le A|h|^\alpha$ для любого $|h|<\delta$ (где $0<\alpha\le 1$, $A=const>0$, $\delta>0$ – это постоянные для данного t) всюду на $\mathbf{R}$ может быть кроме точек разрыва первого рода. На всяком конечном интервале в $\mathbf{R}$ функция f может иметь только конечное число точек разрыва и только первого рода;

(2) $|f(t)| < C_1\exp(-s_1 t)$ для любого $t<0$, где $C_1 = const > 0$, $s_1 = s_1(f) = const \in \mathbf{R}$;

(3) $|f(t)| < C_2\exp(s_0 t)$ для любого $t \ge 0$, то есть, $f(t)$ растет на быстрее, чем экспоненциальная функция, где $C_2 = const > 0$, $s_0 = s_0(f) \in \mathbf{R}$.

Двустороннее преобразование Лапласа над алгебрами Кэли-Диксона $\mathcal{A}_r$ с $2 \le r \le 3$ определяется по формуле:

(4) $\mathcal{F}^s(f;p) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\exp(-u(p,t;q))dt$
для всех чисел $p \in \mathcal{A}_r$, для которых существует интеграл, где $q \in \mathcal{A}_r$ – это параметр, или $u(p,t;q) = pt+q$, или $u(p,t;q) = E(pt+q)$ (смотри определение 2.2.1). Обозначим для краткости $\mathcal{F}^s(f;p)$ через $F^s(p)$. Для базиса генераторов $\{N_0,...,N_{2^r-1}\}$ в $\mathcal{A}_r$ мы запишем более детально ${}_N\mathcal{F}^s(f;p)$ или ${}_NF^s_u(p)$ в случае необходимости.

3. Замечание. Естественно, что двусторонний интеграл Лапласа может быть записан как сумма двух односторонних интегралов
(1) $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\exp(-u(p,t;q))dt = \int_{-\infty}^{0} f(t)\exp(-u(p,t;q))dt + \int_0^\infty f(t)\exp(-u(p,t;q)dt$
$= \int_0^\infty f(-t)\exp(-u(p,-t;q)))dt + \int_0^\infty f(t)\exp(-u(p,t;q))dt.$
Второй интеграл сходится для $Re(p) > s_0$. Поскольку $u(p,-t;q) = u(-p,t;q)$, тогда первый интеграл сходится для $Re(-p) > -s_1$, то есть, для $Re(p) < s_1$. Тогда имеется область сходимости $s_0 < Re(p) < s_1$ двустороннего интеграла Лапласа. Для $s_1 = s_0$ область сходимости сводится к вертикальной гиперплоскости в $\mathcal{A}_r$ над $\mathbf{R}$. Для $s_1 < s_0$ нет никакой общей области сходимости и $f(t)$ не может преобразована с помощью двустороннего преобразования 5(4).

4. Замечание. Если f – это функция-оригинал двустороннего преобразования Лапласа над алгеброй Кэли-Диксона $\mathcal{A}_r$ и $g(\tau) = f(\ln\tau)$ для любого $0<\tau<\infty$, тогда условия $5(1-3)$ для f эквивалентны следующим условиям M(1–3):

$M(1)$ $g(\tau)$ удовлетворяет условию Гёльдера: $|g(\tau+h) - g(\tau)| \le A|h|^\alpha$ для любого $|h|<\delta$ (где $0<\alpha\le 1$, $A = const > 0$, $\delta > 0$ – это постоянные для данного τ) везде на $\mathbf{R}$ может быть кроме точек разрывов первого рода. На всяком конечном сегменте $[a,b]$ в $(0,\infty)$ функция g может иметь только конечное число точек разрыва и только первого рода;

$M(2)$ $|g(\tau)| < C_1\tau^{s_0}$ для любого $0<\tau<1$, где $C_1 = const > 0$, $s_0 = s_0(g) = const \in \mathbf{R}$;

$M(3)$ $|g(\tau)| < C_2\tau^{-s_1}$ для любого $\tau \ge 1$, то есть, $g(\tau)$ растет не быстрее, чем степенная функция, где $C_2 = const > 0$, $s_1 = s_1(g) \in \mathbf{R}$.

5. Определение. Определим некоммутативное преобразование Меллина по формуле:

(1) $\mathcal{M}(g;p) := \int_0^\infty f(\ln\tau)\exp(-u(-p,\ln\tau;-q))\tau^{-1}d\tau$
всякий раз, когда оно существует, где f – функция-оригинал удовлетворяющая условиям $M(1-3)$, $g(\tau) = f(\ln\tau)$ для любого $0<\tau<\infty$.

Для специфического базиса $\{N_0,N_1,...,N_{2^r-1}\}$ генераторов алгебры Кэли-Диксона $\mathcal{A}_r$ мы можем записать обозначения более детально ${}_N\mathcal{M}_u(g;p;q) = {}_N\mathcal{M}(g,u;p;q)$, если это необходимо.

6. Теорема. *Если функция-оригинал $g(\tau)$ удовлетворяет условиям 4.M(1-3), где*

$s_0 < s_1$, *тогда его образ* $\mathcal{M}(g;p;q)$ *является голоморфным по* p *в области* $\{z \in \mathcal{A}_r : s_0 < Re(z) < s_1\}$, *где* $2 \le r \le 3$.

Доказательство. Доказательство основано на соответствующих свойствах некоммутативного преобразования Лапласа. Интеграл 2(4) абсолютно сходится для $Re(p) > s_0$, так как он мажорируется сходящимся интегралом

$|\int_0^\infty f(t)\exp(-u(p,t;q))dt| \le \int_0^\infty C\exp(-(s-s_0)t)dt = C(s-s_0)^{-1}$,
так как $|e^z| = \exp(Re(z))$ для любого $z \in \mathcal{A}_r$ в силу следствия 3.3 [17,18], где $s = Re(p)$, $C > 0$ не зависит от p и t. В то же время интеграл, получаемый дифференцированием интеграла по p (смотри теорему 1) также равномерно сходится:

(i) $|\int_0^\infty f(t)[\partial\exp(-u(p,t;q))/\partial p].hdt| \le |h|\int_0^\infty Ct\exp(-(s-s_0)t)dt = |h|C(s-s_0)^{-2}$
для любого $h \in \mathcal{A}_r$, так как всякое $z \in \mathcal{A}_r$ может быть записано в виде $z = |z|\exp(M)$ согласно предложению 3.2 [17,18], где $|z|^2 = z\tilde{z} \in [0,\infty) \subset \mathbf{R}$, $M \in \mathcal{A}_r$, $Re(M) := (M + \tilde{M})/2 = 0$. Поэтому,

$[\partial(\int_0^\infty f(t)\exp(-u(p,t;q)dt)/\partial\tilde{p}].h = 0$
для любого $h \in \mathcal{A}_r$, так как $u(p,t;q)$ записано в (p,q)-представлении. В силу сходимости интегралов данных выше $F(p)$ (супер)дифференцируема по p, более того, $\partial F(p)/\partial\tilde{p} = 0$ в рассматриваемом p-представлении, следовательно, $F(p)$ голоморфна по $p \in \mathcal{A}_b$ с $Re(p) > s_0$ благодаря теореме 4.

Поэтому, применение вышеприведенного доказательства к $\int_0^\infty f(-t)\exp(-u(-p,t;q))dt$ и $\int_0^\infty f(t)\exp(-u(p,t;q))dt$ дает, что если оригинал $f(t)$ удовлетворяет условиям $5(1-3)$, и более того, $s_0 < s_1$, тогда его образ $\mathcal{F}^s(f;p)$ голоморфен по p в области $\{z \in \mathcal{A}_r : s_0 < Re(z) < s_1\}$, где $2 \le r \le 3$. В итоге, замена переменных p на $-p$, q на $-q$ и $g(\tau) = f(\ln\tau)$ дает утверждение этой теоремы.

7. Теорема. *Предположим, что* $g(\tau)$ *– это функция-оригинал, удовлетворяющая* $4.M(1-3)$, *так что*

${}_N\mathcal{M}(g;p;q) := \sum_{j=0}^{2^r-1} {}_NG_{u,j}(p;q)N_j$ *– это его образ, где функция* g *записана в виде*

$g(\tau) = \sum_{j=0}^{2^r-1} g_j(\tau)N_j$, $g_j : (0,\infty) \to \mathbf{R}$ *для всякого* $j = 0,1,...,2^r-1$, $g((0,\infty)) \subset \mathcal{A}_r$ *для* $2 \le r \le 3$,

${}_NG_{u,j}(p;q) := \int_0^\infty g_j(\tau)\exp(-u(-p,\ln\tau;-q))\tau^{-1}d\tau$. *Тогда во всякой точке* τ, *где* $g(\tau)$ *удовлетворяет условию Гёльдера выполняется равенство:*

(i) $g(\tau) = (2\pi N_1)^{-1}Re(S\tilde{N}_1)\sum_{j=0}^{2^r-1}(\int_{a-S\infty}^{a+S\infty} {}_NG_{u,j}(p;q)\exp(u(-p,\ln\tau;-q))dp)N_j$
в области $s_0(g) < Re(p) < s_1(g)$, *где или* $u(p,t;q) = pt + q$ *с* $S = N_1$ *для* $Im(q) = 0$, *или* $u(p,t;q) = E(pt+q)$ *(смотри §2.2.1) и интеграл берется вдоль прямой линии* $p(\theta) = a + S\theta \in \mathcal{A}_r$, $\theta \in \mathbf{R}$, $S \in \mathcal{A}_r$, $Re(S) = 0$, $|S| = 1$, $Re(S\tilde{N}_1) \ne 0$ *не равно нулю, причем интеграл понимается в смысле главного значения.*

Доказательство. Сначала рассмотрим соответствующее некоммутативное преобразование Лапласа. Пусть $f(t)$ дана в виде g заменой переменной $t = \ln(\tau)$ и с ограничением $t \in [0,\infty)$, где $\tau > 0$. В силу разложения функции f в виде $f(t) = \sum_{j=0}^{2^r-1} f_j(t)N_j$ достаточно рассмотреть обратное преобразование действительно значной функции f_j, которая обозначается для простоты через f. Поскольку $t \in \mathbf{R}$, тогда $\int_0^\infty f(\tau)d\tau$ – это интеграл Римана. Если w является голоморфной функцией переменной Кэли-Диксона, тогда локально в односвязной области U во всяком шаре $B(\mathcal{A}_r, z_0, R)$ с центром в z_0 радиуса $R > 0$ содержащемся во внутренности $Int(U)$ области U выполняется равенство

$(\partial\int_{z_0}^z w(\zeta)d\zeta/\partial z).1 = w(z)$,
где интеграл зависит только от начальной z_0 и конечной z точек спрямляемого пути в

$B(\mathcal{A}_r, z_0, R)$. С другой стороны, вдоль прямой линии $a + S\mathbf{R}$ ограничение антипроизводной имеет вид $\int_{\theta_0}^{\theta} w(a + S\tau)d\tau$, так как

$\int_{z_0=a+S\theta_0}^{z=a+S\theta} w(\zeta)d\zeta = \int_{\theta_0}^{\theta} \hat{w}(a + S\tau).Sd\tau,$
причем $\partial f(z)/\partial\theta = (\partial f(z)/\partial z).S$ для супердифференцируемой по $z \in U$ функции $f(z)$, более того, антипроизводная единственна с точностью постоянной из $\mathcal{A}_r$ с данными представлением функции и ветвью некоммутативного криволинейного интеграла (например, заданной с помощью левого или правого алгоритма) [17, 18].

Интеграл $g_B(t) := \int_{a-SB}^{a+SB} {}_NF_{u,j}(p; q) \exp(u(p, t; q))dp$ для любого $0 < B < \infty$ с помощью генераторов алгебры $\mathcal{A}_r$ и теоремы Фубини для действительнозначных компонент функции может быть записан в виде:

$g_B(t) = (2\pi N_1)^{-1} Re(S\tilde{N}_1) \int_0^\infty f(\tau)d\tau \int_{a-SB}^{a+SB} \exp(u(p, t; q)) \exp(-u(p, \tau; q))dp,$
так как интеграл $\int_0^\infty f(\tau) \exp(-u(p, \tau; q))d\tau$ равномерно сходится относительно p в полупространстве $Re(p) > s_0$ в $\mathcal{A}_r$ (смотри предложение 2.18 [25]). В силу альтернативности алгебры $\mathcal{A}_r$ (здесь $2 \le r \le 3$) воспользуемся автоморфизмом v из леммы 2.17 [25]. Это дает изменение базиса генераторов, следовательно, вместо ${}_NF_u(p; q)$ рассмотрим ${}_KF_u(p; q)$, где $K_j = v(N_j)$ – это новый базис генераторов алгебры $\mathcal{A}_r$, $j = 1, ..., 2^r - 1$, $N_0 = K_0 = 1$. Тогда с такой v функция $u_K(p, t; q) = v(E(pt + q))$ имеет вид даваемый формулой:

(1) $v(u_N(p, t; q)) = u_K(p, t; q) = (p_0 t + q_0) + (p'_1 t + q'_1)K$, где

(2) $K = [K_1 \cos(q'_2) + K_2 \sin(q'_2) \cos(q'_3) + K_3 \sin(q'_2) \sin(q'_3)]$ для кватернионов;

(3) $K = [K_1 \cos(q'_2) + K_2 \sin(q'_2)\ \cos(q'_3) + ... + K_6 \sin(q'_2)... \sin(q'_6) \cos(q'_7)$
$+K_7 \sin(q'_2)... \sin(q'_6) \sin(q'_7)]$ для октонионов, где $p_0, p'_1, q_0, q'_1, ..., q'_{2^r-1} \in \mathbf{R}$, $t \in \mathbf{R}$, $K_1, ..., K_{2^r-1} \in \mathcal{A}_r$ – это новые генераторы с $Re(K_j) = 0$ для любого $j = 1, ..., 2^r - 1$, где $K_0 = N_0 = 1$, $p'_0 = p_0$ и $q'_0 = q_0$, $p = p_0N_0 + p_1N_1 + ... + p_{2^r-1}N_{2^r-1} = p_0K_0 + p'_1K_1 + ... + p'_{2^r-1}K_{2^r-1}$, $q = q_0N_0 + q_1N_1 + ... + q_{2^r-1}N_{2^r-1} = q_0K_0 + q'_1K_1 + ... + q'_{2^r-1}K_{2^r-1}$, так как $v(1) = 1$ и, следовательно, $v(t) = t$ для любого $t \in \mathbf{R}$. Формула (i) выполняется тогда и только тогда, когда она удовлетворяется после применения автоморфизм v к обеим частям равенства, так как $v(z) = v(\zeta)$ для $z, \zeta \in \mathcal{A}_r$ эквивалентно тому, что $z = \zeta$.

Тогда с точностью до автоморфизма алгебры $\mathcal{A}_r$ доказательство сводится к случаю $p = (p_0, p_1, 0, ..., 0)$, $N = (N_0, N_1, N_2, ..., N_{2^r-1})$, где $N_0 = 1$, так как $\mathbf{R}$ – это центр алгебры $\mathcal{A}_r$. Но это дает $p_1 = p_1(t) = Re(S\tilde{N}_1)t$ для любого $t \in \mathbf{R}$. Для $u(p, t; q_0) = pt + q_0$ с $Im(q) = 0$ возьмем просто $S = N_1$. Рассмотрим частный случай $c := Re(S\tilde{N}_1) \ne 0$, тогда частный случай $Re(S\tilde{N}_1) = 0$ получается, беря предел когда $Re(S\tilde{N}_1) \ne 0$ стремится к нулю. Таким образом,

$g_B(t) = (2\pi N_1)^{-1} c \int_0^\infty f(\tau)d\tau \int_{a-SB}^{a+SB} \exp(at + c(q_1 + t)K_1) \exp(-(a\tau + c(q_1 + \tau)K_1)dp,$
так как $q_0, a \in \mathbf{R}$, где K_1 или дается формулами $(2, 3)$ для $u_N(p, t; q) = E(pt + q)$ или $K_1 = N_1 = S_1$ можно взять для $u_N(p, t; q) = pt + q_0$. Тогда

$g_B(t) = (\pi N_1)^{-1} c \int_0^\infty f(\tau)e^{a(t-\tau)}[\sin(Bc(t - \tau))](ct - c\tau)^{-1}$

$= (\pi)^{-1} e^{at} \int_{-t}^\infty f(\zeta + t)e^{-a(\zeta+t)}[\sin(B\zeta)]\zeta^{-1}d\zeta,$
где можно воспользоваться заменой $\tau - t = \zeta$. Положим $w(t) := f(t)e^{-at}$, где $w(t) = 0$ для любого $t < 0$. Поэтому,

$g_B(t) = (\pi)^{-1} e^{at} \int_{-\infty}^\infty [w(\zeta + t) - w(t)]\zeta^{-1} \sin(B\zeta)d\zeta + (\pi)^{-1} f(t) \int_{-\infty}^\infty \zeta^{-1} \sin(B\zeta)d\zeta$. Интеграл во втором члене известен как интеграл Эйлера: $\int_{-\infty}^\infty \zeta^{-1} \sin(B\zeta)d\zeta = \pi$ для любого $B > 0$, следовательно, второй член равен $f(t)$. Тогда $\lim_{B\to\infty} \int_{-\infty}^\infty [w(\zeta + t) - w(t)]\zeta^{-1} \sin(B\zeta)d\zeta = 0$ (смотри также лемму 2.20 [25]).

Для данного $\epsilon > 0$ выполняется равенство:

$\int_{-\infty}^{\infty}[w(y+t)-w(t)]y^{-1}\sin(By)dy = \int_{-B}^{B}[w(y+t)-w(t)]y^{-1}\sin(By)dy + \int_{|y|>B} w(y+t)y^{-1}\sin(By)dy - w(t)\int_{|y|>B}\sin(By)y^{-1}dy$. Второй и третий члены являются сходящимися интегралами и поэтому для достаточно большого $B>0$ они по абсолютной величине меньше, чем $\epsilon/3$. В силу условия Гёльдера $|[w(y+t)-w(t)]y^{-1}| \le A|y|^{1-c}$, где $c>0$, $A>0$, y принадлежит окрестности нуля. Тогда существует $B_0>0$ такое, что

$|\int_{-B}^{B}[w(y+t)-w(t)]y^{-1}\sin(By)dy| < \epsilon/3$ для любого $B>B_0$. Таким образом„

$\lim_{B\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[w(y+t)-w(t)]y^{-1}\sin(By)dy = 0$.

Эта теорема для общих функций $u_N(p,t;q) = E(pt+q)$ в базисе генераторов $\{N_0,...,N_{2^r-1}\}$ непосредственно следует из вычисления появляющихся интегралов по действительным переменным t и τ с помощью интегралов вычисленных в [25].

Некоммутативное двустороннее преобразование Лапласа в базисе генераторов $N=\{N_0,N_1,...,N_{2^r-1}\}$ может быть записано в виде

$\mathcal{F}^s(f;p;q) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\exp(-u(p,t;q))dt = \mathcal{F}^s(fU(t);p;q) + \mathcal{F}^s(f(1-U)(t);p;q)$,
где индекс N опущен, $U(t)=1$ для $t>0$, $U(0)=1/2$, $U(t)=0$ для $t<0$, также

$\mathcal{F}^s(f(1-U)(t);p;q) = \int_0^{\infty} f(-t)U(t)\exp(-u(-p,t;q))dt$,
так как $u(p,-t;q) = u(-p,t;q)$, где $|f(-t)| \le C_1\exp(s_1 t)$ для любого $t>0$. Общая область существования
$\int_0^{\infty} f(-t)U(t)\exp(-u(-p,t;q))dt$ и $\int_0^{\infty} f(t)U(t)\exp(-u(p,t;q))dt$ такова $s_0(f) < Re(p) < s_1(f)$, так как неравенство $Re(-p) > -s_1(f)$ эквивалентно неравенству $Re(p) < s_1(f)$. Тогда применение данного выше доказательства к $f(t)U(t)$ и к $f(-t)U(t)$ дает формулу обращения. Положим $t=\ln\tau$ и заменяя p на $-p$, мы получим утверждение этой теоремы для некоммутативного преобразования Меллина.

8. Теорема. *Пусть функция ${}_NG_u(p)$ аналитична по переменной $p\in\mathcal{A}_r$ в области $W := \{p\in\mathcal{A}_r : s_0 < Re(p) < s_1\}$, где $2\le r\le 3$, $g((0,\infty))\subset\mathcal{A}_r$, или $u(p,t)=pt$, или $u(p,t) := E(pt)$. Предположим также, что ${}_NG_u(p)$ может быть записана в виде ${}_NG_u(p) = {}_NG_u^0(p) + {}_NG_u^1(p)$, где ${}_NG_u^0(p)$ голоморфна по p в области $s_0 < Re(p)$, также ${}_NG_u^1(p)$ голоморфна по p в области $Re(p) < s_1$, $S\in\mathcal{I}_r$, $|S|=1$, Более того, для любых $a>s_0$ и $b<s_1$ существуют постоянные $C_a>0$, $C_b>0$ и $\epsilon_a>0$ и $\epsilon_b>0$ такие, что*

(1) $|{}_NG_u^0(p)| \le C_a\exp(-\epsilon_a|p|)$ *для любого $p\in\mathcal{A}_r$ с $Re(p)\ge a$,*

(2) $|{}_NG_u^1(p)| \le C_b\exp(-\epsilon_b|p|)$ *для любого $p\in\mathcal{A}_r$ с $Re(p)\le b$, где s_0 и s_1 фиксированы, причем интеграл*

(3) $\int_{w-S\infty}^{w+S\infty} {}_NG_u^k(p)dp$
абсолютно сходится для $k=0$ и $k=1$ для $s_0<w<s_1$. Тогда ${}_NG_u(p)$ является образом функции

(4) $g(\tau) = (2\pi)^{-1}\tilde{S}\int_{w-S\infty}^{w+S\infty} {}_NG_u(p)\exp(u(-p,\ln\tau))dp$.

Доказательство. Сначала рассмотрим соответствующее некоммутативное одностороннее преобразование Лапласа. Случай $u(p,t)=pt$ следует из $u(p,t) := E(pt)$, когда $p=(p_0,p_1,0,...,0)$, но интеграл вдоль прямой линии $a+St$, $t\in\mathbf{R}$, с таким p в базисе генераторов $(N_0,...,N_{2^r-1})$ может быть получен из общего интеграла автоморфизмом v, $z\mapsto v(z)$, алгебры $\mathcal{A}_r$, $2\le r\le 3$. То есть, достаточно доказать равенство типа (4) после применения автоморфизма v.

Пусть $Re(p)=a>s_0$, тогда

$|\int_{a-S\infty}^{a+S\infty} {}_NF_u(p)\exp(u(p,t))dp| \le \int_{-\infty}^{\infty}|{}_NF_u(a+S\theta)|d\theta$.
В силу предположения этой теоремы этот интеграл сходится равномерно относительно $t\in\mathbf{R}$. Для $f(t)$ полученной из g заменой переменных $t=\ln(\tau)$ с $\tau>0$ и ограничением

на $t \in [0, \infty)$ для $Re(\eta) =: \eta_0 > s_0$ и $(\eta - Re(\eta)) =: Im(\eta)$ параллельным S, мы получим

$\int_0^\infty f(t)\exp(-\eta t)dt$
$= (2\pi)^{-1}\tilde{S}\sum_{j=0}^{2^r-1}\int_0^\infty(\int_{a-S\infty}^{a+S\infty} N_j\ {}_N F_{u,j}(p)\exp(u(p,t))dp)\exp(-\eta t)(dt)$,
в котором можно изменить порядок интегрирования, так как $t \in \mathbf{R}$. Тогда в силу альтернативности алгебр $\mathbf{H}$ и $\mathbf{O}$, в то время как f действительно значна для $r \geq 4$, мы получим:

$\int_0^\infty f(t)\exp(-\eta t)dt = (2\pi)^{-1}\tilde{S}\sum_{j=0}^{2^r-1}\int_{a-S\infty}^{a+S\infty}(\int_0^\infty N_j\ {}_N F_{u,j}(p)\exp((p-\eta)t)dt)(dp)$,
так как $e^v \in \mathbf{R}$ для любого $v \in \mathbf{R}$, $e^{aM}e^{bM} = e^{(a+b)M}$ для любого $a, b \in \mathbf{R}$. В силу $a < \eta_0$ и

$\int_0^\infty e^{(p-\eta)t}dt = -(p-\eta)^{-1}$,
тогда

$\int_0^\infty f(t)\exp(-\eta t)dt = -(2\pi)^{-1}\tilde{S}\sum_{j=0}^{2^r-1}(\int_{a-S\infty}^{a+S\infty} N_j\ {}_N F_{u,j}(p)(p-\eta)^{-1}dp)$

$= -(2\pi)^{-1}\tilde{S}(\int_{a-S\infty}^{a+S\infty}\ {}_N F_u(p)(p-\eta)^{-1}dp.$

В силу леммы 2.22 [25]

$|\int_{\psi_R} F(p)(p-\eta)^{-1}dp| \leq u(R)\pi R/(R-|\eta|)$,
где $0 < u(R) < \infty$ и существует $\lim_{R\to\infty} u(R) = 0$, причем ψ_R – это дуга окружности $|p| = R$ в плоскости $\mathbf{R} \oplus S\mathbf{R}$ с $Re(p) > a$, следовательно,

$\lim_{R\to\infty}\int_{\psi_R} F(p)(p-\eta)^{-1}dp = 0$,
так как $u(R) \leq u_0\exp(-\delta R)$ для любого $R > R_0$, где $u_0 = const > 0$.

Тогда прямая линия $a + S\theta$ с $\theta \in \mathbf{R}$ может быть заменена замкнутым контуром ϕ_R, составленным из ψ_R и сегмента $[a + Sb, a - Sb]$ проходимого сверху вниз. Таким образом,

$\int_0^\infty f(t)\exp(-\eta t)dt = (2\pi)^{-1}\tilde{S}\int_{\phi_R} F(p)(p-\eta)^{-1}dp$,
где знак перед интегралом изменяется благодаря изменению направления обхода петли ϕ_R. Напомним, что в случае алгебры Кэли-Диксона $\mathcal{A}_r$ вычет функции является оператором $\mathbf{R}$-гомогенным и $\mathcal{A}_r$-аддитивным по аргументу $L \in \mathcal{A}_r$ с $Re(L) = 0$, где вычет естественно зависит от функции и точки. В области $\{p \in \mathcal{A}_r : Re(p) \geq a, |p| \leq R\}$ аналитическая функция $F(p)$ имеет только одну точку сингулярности $p = \eta$, которая является полюсом первого порядка с вычетом $res(\eta; F(p)(p-\eta)^{-1}).L = LF(\eta)$ для любого $L \in \mathcal{A}_r$ с $Re(L) = 0$ при использовании левого алгоритма вычисления интеграла, следовательно,

$\int_0^\infty f(t)\exp(-\eta t)dt = F(\eta)$, так как $L = S$ в данном случае и $S\tilde{S} = 1$.

Для $t < 0$ в силу вышеупомянутой $\mathcal{A}_r$ леммы 11 мы получим, что

$\lim_{R\to\infty}\int_{\phi_R} F(p)e^{u(p,t)}dp = 0$,
так как $Re(p) = a > 0$, следовательно, прямая линия $a + S\theta$, $\theta \in \mathbf{R}$, может быть заменена на петлю ϕ_R как выше. Тогда для $t < 0$ мы получим:

$f(t) = (2\pi)^{-1}\int_{\phi_R} F(p)e^{u(p,t)}dp = 0$,
так как $F(p)$ аналитична по p вместе с $e^{u(p,t)}$ во внутренности области $\{p : p \in \mathcal{A}_r; |p| \leq R', Re(p) > s_0\}$, $a > s_0$, $0 < R < R' \leq \infty$. Тогда выполнено условие 2(2) для оригинала. С другой стороны,

$|f(t)| \leq (2\pi)^{-1}e^{at}\int_{-\infty}^\infty |F(a+S\theta)|d\theta = Ce^{at}$,
где $C = (2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^\infty |F(a+S\theta)|d\theta < \infty$, следовательно, условие 2(3) выполнено. Также $f(t)$ непрерывна, так как функция $F(p)$ в интеграле непрерывна и

$\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma(\theta):|\theta|\geq R} F(p)dp = 0$. Более того, интеграл

$\int_{a-S\infty}^{a+S\infty} {}_N F(p)[\partial \exp(u(p,t))/\partial t]dp$
сходится благодаря условию $(1,2)$ и доказательства выше, следовательно, функция $f(t)$ дифференцируема и, следовательно, выполнено условие Липшица. В доказательстве выше можно использовать также аффинное преобразование $p \mapsto p - z$, так чтобы отмеченная η была бы действительный.

Рассмотрим теперь некоммутативное двустороннее преобразование Лапласа ${}_N F^s_u(p)$, которое аналитическое по переменной $p \in \mathcal{A}_r$ в области $W := \{p \in \mathcal{A}_r : s_0 < Re(p) < s_1\}$, где $2 \le r \le 3$, $f(\mathbf{R}) \subset \mathcal{A}_r$, или $u(p,t) = pt$, или $u(p,t) := E(pt)$. Запишем ${}_N F^s_u(p)$ в виде ${}_N F^s_u(p) = {}_N F^{s,0}_u(p) + {}_N F^{s,1}_u(p)$, где ${}_N F^{s,0}_u(p)$ голоморфна по p в области $s_0 < Re(p)$, также ${}_N F^{s,1}_u(p)$ голоморфна по p в области $Re(p) < s_1$, $S \in \mathcal{I}_r$, $|S| = 1$. В силу условия этой теоремы для любых $a > s_0$ и $b < s_1$ существуют постоянные $C_a > 0$, $C_b > 0$ и $\epsilon_a > 0$, и $\epsilon_b > 0$ такие, что

(i) $|{}_N F^{s,0}_u(p)| \le C_a \exp(-\epsilon_a |p|)$ для любого $p \in \mathcal{A}_r$ с $Re(p) \ge a$,

(ii) $|{}_N F^{s,1}_u(p)| \le C_b \exp(-\epsilon_b |p|)$ для любого $p \in \mathcal{A}_r$ с $Re(p) \le b$, где s_0 и s_1 фиксированы, также интеграл

(iii) $\int_{w-S\infty}^{w+S\infty} {}_N F^{s,k}_u(p)dp$
сходится абсолютно для $k = 0$ и $k = 1$ для $s_0 < w < s_1$.

Для функции ${}_N F^{s,1}_u(p)$ мы рассмотрим замену переменной $p = -g$, $-s_1 < Re(g)$. Тогда из доказательства выше существуют оригиналы f^0 и f^1 для функций ${}_N F^{s,0}_u(p)$ и ${}_N F^{s,1}_u(p)$ при выборе $w \in \mathbf{R}$ в общей области $s_0 < Re(p) < s_1$, то есть, $s_0 < w < s_1$. В то же время носитель функций f^0 и f^1 содержится в $[0,\infty)$ и $(-\infty, 0]$ соответственно. Тогда $f = f^0 + f^1$ – это оригинал для ${}_N F^s_u(p)$ при $q = 0$, так как

$f(t) = f^0(t) + f^1(t) = (2\pi)^{-1} \tilde{S} \int_{w-S\infty}^{w+S\infty} {}_N F^{s,0}_u(p) \exp(u(p,t))dp +$
$(2\pi)^{-1} \tilde{S} \int_{w-S\infty}^{w+S\infty} {}_N F^{s,1}_u(p) \exp(u(p,t))dp = (2\pi)^{-1} \tilde{S} \int_{w-S\infty}^{w+S\infty} {}_N F^s_u(p) \exp(u(p,t))dp$
благодаря дистрибутивности умножения в алгебре $\mathcal{A}_r$. Таким образом, ${}_N F^s_u(p)$ – это образ функции

(iv) $f(t) = (2\pi)^{-1} \tilde{S} \int_{w-S\infty}^{w+S\infty} {}_N F^s_u(p) \exp(u(p,t))dp.$

Замена переменной p на $-p$ и замена $t = \ln \tau$ для $\tau > 0$ в (iv) дает утверждение этой теоремы.

9. Теорема. *Оригинал $g(\tau)$ с $g((0,\infty)) \subset \mathcal{A}_r$ для $r = 2, 3$ полностью определяется своим образом ${}_N G_u(p)$ с точностью до значений в точках разрыва.*

Доказательство. В силу теорем 7 и 8 значение $g(\tau)$ во всякой точке τ непрерывности $g(\tau)$ выражается через ${}_N G_u(p)$ по формулам $7(i)$ и $8(4)$. В то же время значения оригинала в точках разрыва не влияют на образ ${}_N G_u(p)$, так как на всяком ограниченном интервале число точек разрыва конечно.

10. Теорема. *Предположим, что f – это функция-оригинал из определения или 2.1, или 2, или 5. Пусть F – это образ некоммутативного или Лапласа, или двустороннего Лапласа, или Меллина преобразований для или $u(p,t) = pt$, или $u(p,t) = E(pt)$ в области $V := \{z \in \mathcal{A}_b : s_0 < Re(z) < s_1\}$, $b = 2$ или $b = 3$, где $s_1 = \infty$ для некоммутативного одностороннего преобразования Лапласа. Тогда F или $(1,b)$-квазирегулярна, или $(1,b)$-квазирегулярна в сферических $\mathcal{A}_b$-координатах соответственно в V с $y_0 = 0$ тогда и только тогда, когда его оригинал действителен $f(t) \in \mathbf{R}$ для любой точки непрерывности t функции f или в $[0,\infty)$, или $\mathbf{R}$, или $(0,\infty)$ соответственно.*

Доказательство. Некоммутативное преобразование Меллина получается из двустороннего преобразования Лапласа с помощью гладкой замены действительных переменных $t = \ln(\tau)$ с $\tau > 0$ и одностороннее преобразование Лапласа является частным случаем двустороннего. Поэтому, достаточно доказать эту теорему для двустороннего некоммутативного преобразования Лапласа. Тогда рассмотрим

$F(p) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\exp(-u(p,t))dt$,

так как $q = 0$, $y_0 = 0$ согласно условиям этой теоремы. Мы имеем, что $\hat{R}_{p,x} = R_{w(p),w(x)}$, где w – псевдоконформный диффеоморфизм области V, $R_{p,x}$ дается предложениями 2.2 и 2.2.3. Всякому автоморфизму $\hat{R}_{p,x}$ отвечает оператор принадлежащий группе Ли $SO_{\mathbf{R}}(2^b, \mathbf{R})$ действительной тени $\mathbf{R}^{2^b}$. Поэтому,

(1) $\hat{R}_{p,y}F_u(y) = \int_{-\infty}^{\infty}[R_{w(p),w(y)}f(t)]\exp(-(R_{w(p),w(y)}y)t)dt$ для $u = pt$, для всякого $p \in V$ и каждого $y \in V \cap \mathbf{C}$, так что $Re(p) = Re(y)$ и $R_{w(p),w(y)}y = p$, так как $\hat{R}_{p,y}|_{\mathbf{R}} = id$. Тогда

(2) $\hat{R}_{E(p),E(y)}F_u(y) = \int_{-\infty}^{\infty}[R_{w(E(p)),w(E(y))}f(t)]\exp(-R_{w(E(tp)),w(E(ty))}E(ty))dt$
для $u(p,t) = E(pt)$ соответственно благодаря формуле 2.2.3(1) для любого $p \in V$ и каждого $y \in V \cap \mathbf{C}$, так что $Re(E(p)) = Re(E(y))$ и $R_{w(E(p)),w(E(y))}E(y) = E(p)$. Таким образом,

(3) $F_u(p) = \hat{R}_{p,y}F_u(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\exp(-pt)dt = \int_{-\infty}^{\infty}[\hat{R}_{p,y}f(t)]\exp(-pt)dt$
для $u = pt$, для любого $p \in V$ и каждого $y \in V \cap \mathbf{C}$, так что $Re(p) = Re(y)$ и $R_{w(p),w(y)}y = p$. С другой стороны,

(4) $R_{w(E(p)),w(E(y))}\exp(E(ty)) = R_{w(E(tp)),w(E(ty))}\exp(E(ty)) = \exp(E(tp))$
для $u(p,t) = E(pt)$, для любого $Re(E(p)) = Re(E(y))$ с $R_{w(E(p)),w(E(y))}E(y) = E(p)$, так как $R_{z,x}(tx) = tR_{z,x}x$ для всякого $t \in \mathbf{R}$ и $E(y) = y$ для любого $y \in \mathbf{C}$. Следовательно,
(5) $F_u(p) = \hat{R}_{E(p),E(y)}F_u(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\exp(-E(tp))dt = \int_{-\infty}^{\infty}[\hat{R}_{E(p),E(y)}f(t)]\exp(-E(tp))dt$
для $u(p,t) = E(pt)$. В частности, можно взять $w = id$.

Двустороннее преобразование Лапласа инъективно, так что $\mathcal{F}^s(f_1; z) = \mathcal{F}^s(f_2; z)$ для всякого $z \in V$ тогда и только тогда $f_1(t) = f_2(t)$ для всякой точки t из $\mathbf{R}$, где $f_1(t)$ и $f_2(t)$ непрерывны (смотри теоремы 2.19, 2.21, 2.22, 3.15 и 3.16 [25] и 7, 8 и 9 выше). Таким образом, благодаря формулам $(3, 4)$ $F(z)$ или $(1, b)$-квазирегулярна, или $(1, b)$-квазирегулярна в сферических $\mathcal{A}_b$-координатах соответственно тогда и только тогда, когда или $\hat{R}_{p,y}f(t) = f(t)$, или $\hat{R}_{E(p),E(y)}f(t) = f(t)$ соответственно для любой точки непрерывности $t \in \mathbf{R}$ функции f и всякого $p \in V$ и любого $y \in V \cap \mathbf{C}$, так что $Re(p) = Re(y)$ и либо $\hat{R}_{p,y}(y) = p$, либо $\hat{R}_{E(p),E(y)}(E(y)) = E(p)$ соответственно. Это означает, что $f(t) \in \mathbf{R}$, так как если $Im(s) \neq 0$ для некоторого $s \in \mathcal{A}_b$, тогда существует $p \in V \setminus \mathbf{C}$ и $y \in V \cap \mathbf{C}$ такие, что или $(\hat{R}_{p,y}s) \neq s$, или $(\hat{R}_{E(p),E(y)}E(s)) \neq E(s)$ соответственно (смотри 2.1$(Q2 - Q5)$). Поскольку f непрерывна кроме точек разрывов первого рода, тогда используя пределы слева или справа переопределим f в точках разрывов, так что f будет действительной всюду на $\mathbf{R}$.

Если f действительно-значна, тогда F_u удовлетворяет условиям 2.1$(Q1 - Q5)$ по построению F_u. Тогда F_u удовлетворяет 2.1$(Q6, Q7)$ также благодаря теореме 1, так как функция $e^{ap} = v(p)$ псевдоконформна для $a \neq 0$ на $\mathcal{A}_b$, $p \in \mathcal{A}_b$.

11. Теорема. *Пусть выполнены предположения теоремы 10 для некоммутативного преобразования двустороннего Лапласа или Меллина. Если f действительно-значна, тогда*

(1) $F_u(\tilde{p}) = \tilde{F}_u(p)$ *для* $u(p,t) = pt$ *или*

(1′) $F_u(p_0 - p_1 i_1 + p_2 i_2 + ... + p_{2^b-1} i_{2^b-1}) = \tilde{F}_u(p)$ *для* $u(p,t) = E(pt)$ *соответственно для любого* $p \in V$. *Более того, или* $f(t) = f(-t)$ *является четной для любого* $t \in \mathbf{R}$, *или* $f(t) = f(1/t)$ *для любого* t > 0 *в каждой точке непрерывности функции* f *тогда и только тогда, когда ее некоммутативное преобразование двусторонне Лапласа или*

Меллина $F_u(p)$ для $u(p,t)=pt$ или $u(p,t)=E(pt)$ удовлетворяет условию:

(2) $F_u(-p)=F_u(p)$ для любого $p\in V$ для обоих типов u.

Доказательство. Если оригинал f действительнозначен, тогда

$[\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\exp(-u(p,t))dt]^* = \int_{-\infty}^{\infty}[\exp(-u(p,t))]^*[f(t)]^*dt$
$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\exp(-[u(p,t)]^*)dt,$
но $[u(p,t)]^*=u(p^*,t)$ для $u=pt$ и $[u(p,t)]^*=u((p_0-p_1i_1+p_2i_2+...+p_{2^b-1}i_{2^b-1}),t)$ для $u(p,t)=E(pt)$ (смотри формулы 2.2.1(1,2) или 2.16.1(3,5)), где $p=p_0+p_1i_1+...+p_{2^b-1}i_{2^b-1}$, $p_j\in\mathbf{R}$ для любого $j=0,...,2^b-1$. Поэтому выполняется или (1), или $(1')$ соответственно.

Оригинал f четен на $\mathbf{R}$ тогда и только тогда, когда

$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\exp(-u(p,t))dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(-t)\exp(-u(p,t))dt$
$= -\int_{\infty}^{-\infty} f(t)\exp(-u(p,-t))dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\exp(-u(-p,t))dt$
для обоих вариантов $u(p,t)=pt$ и $u(p,t)=E(pt)$, так как $u(p,-t)=u(-p,t)$, причем двустороннее преобразование Лапласа инъективно, так что $\mathcal{F}^s(f_1;z)=\mathcal{F}^s(f_2;z)$ для любого $z\in V$ тогда и только тогда, когда $f_1(t)=f_2(t)$ во всякой точке t в $\mathbf{R}$, где $f_1(t)$ и $f_2(t)$ непрерывны (смотри теоремы 2.19, 2.21, 2.22, 3.15 и 3.16 [25] и 14 выше). Следовательно, условие (2) эквивалентно $f(t)=f(-t)$ для любого $t\in\mathbf{R}$ для некоммутативного двустороннего преобразования Лапласа.

Заменяя t на $\ln(\tau)$ и p на $-p$ дает, что (2) эквивалентно $f(\tau)=f(1/\tau)$ для любого $\tau>0$ для некоммутативного преобразования Меллина в силу теорем 7 и 8.

12. Предложение. *Предположим, что f или $(1,b)$-квазирегулярная, или $(1,b)$-квазирегулярная в сферических $\mathcal{A}_b$-координатах функция на области V, $f(z)\ne 0$ для любого $z\in V$, где $2\le b\le 3$. Тогда $1/f(z)$ или $(1,b)$-квазирегулярная, или $(1,b)$-квазирегулярная в сферических $\mathcal{A}_b$-координатах функция соответственно на V.*

Доказательство. Возьмем без ограничения общности $y_0=0$. Поскольку $\hat{R}_{z,x}$ и $\hat{R}_{E(z),E(x)}$ – это автоморфизмы алгебры $\mathcal{A}_b$, тогда $1/f$ или $1/f\circ E^{-1}$ соответственно удовлетворяют условиям $2.1(Q1-Q6)$ на V (смотри также определение 2.2.1). Поскольку f является $\mathcal{A}_b$ голоморфной, тогда $1/f$ также $\mathcal{A}_b$ голоморфная, $(\partial(1/f(z))/\partial\tilde{z}).h=0$ для любого $h\in\mathcal{A}_b$ и всех $z\in V$ (смотри [17, 18]). С другой стороны, $f(z)[1/f(z)]=1$ для всякого $z\in V$, следовательно,

(1) $[\partial(1/f(x))/\partial x].h=-f(x)[(f'(x).h)(1/f(x))]$
для любого $h\in\mathcal{A}_b$ и каждого $x\in V$, так как $\mathbf{O}=\mathcal{A}_3$ альтернативна, $\mathbf{H}=\mathcal{A}_2$ ассоциативна, где $f'(z).h=(\partial f(z)/\partial z).h$. Тогда действие на обе части уравнения (1) посредством или $\hat{R}_{z,x}$, или $\hat{R}_{E(z),E(x)}$ дает $(Q7)$ для $1/f(z)$ или $1/f\circ E^{-1}$ соответственно, так как $f(z)$ или $f\circ E^{-1}$ соответственно удовлетворяет $(Q1-Q7)$.

13. Пример. Рассмотрим теперь дзета функцию на $\mathcal{A}_b$ (смотри пример 9.5.2). В силу теоремы 2.1 [31] дзета функция $\zeta(s)$ имеет голоморфное продолжение в $\mathbf{C}\setminus\{1\}$ с полюсом в $s=1$ с вычетом 1, более того, она удовлетворяет функциональному уравнению $\zeta(s)=2^s\pi^{s-1}\sin(s\pi/2)\Gamma(1-s)\zeta(1-s)$.

Построим для $\zeta(s)$ $(1,b)$-квазиконформные в примерах 13 и 14, и $(1,b)$-квазиконформные в сферических $\mathcal{A}_b$-координатах в примере 15 продолжения в $\mathcal{A}_b\setminus\{1\}$. Для этого положим $z=x+yM$, где $x,y\in\mathbf{R}$, $Re(M)=0$, $|M|=1$, $r=1$, $y_0=0$. Тогда z получается из $s=x+\mathbf{i}y$ посредством автоморфизма $\hat{R}_{z,s}$, так что $\hat{R}_{z,s}(i)=M$, где $\mathbf{i}=i_1$. Тогда $\mathbf{R}\oplus M\mathbf{R}=:\mathbf{C}_M$ – это подалгебра в $\mathcal{A}_b$ изоморфная с $\mathbf{C}$. Пусть a и q – это положительные числа, $q>a$, $z\ne 1$, тогда

(1) $\sum_{n=a+1}^{q} n^{-z}=(q^{1-z}-a^{1-z})/(1-z)-z\int_a^q(x-[x]-1/2)x^{-z-1}dx+(q^{-z}-a^{-z})/2,$

где $[x]$ обозначает наибольшее число не превышающее x. Для $Re(z) =: \sigma > 1$ и $a = 1$ рассмотрим $q \to \infty$, тогда из формулы (1) мы получим

(2) $\zeta(z) = z\int_1^\infty([x] - x + 1/2)x^{-z-1}dx + 1/(z-1) + 1/2$.

Функция $[x] - x + 1/2$ ограниченная, следовательно, этот интеграл сходится для $\sigma > 0$ и равномерно сходится в области $\sigma > \delta$ в $\mathcal{A}_b$, где $\delta > 0$ – это постоянная. Поэтому, этот интеграл определяет голоморфную функцию переменной z $(1, b)$-квазирегулярную для $\sigma > 0$, $z \neq 1$, в силу теоремы 11. Правая часть уравнения (2) таким образом, дает $\mathcal{A}_b$ голоморфное продолжение функции $\zeta(z)$ при $\sigma = 0$, причем имеется простой полюс в $z = 1$ с вычетом 1.

Для $0 < \sigma < 1$ формула (2) может быть записана

$\zeta(z) = z\int_0^\infty([x] - x)x^{-z-1}dx$,

так как $\int_0^1([x]-x)x^{-z-1}dx = -\int_0^1 x^{-z}dx = 1/(z-1)$ и $z\int_1^\infty x^{-z-1}dx/2 = 1/2$. Рассмотрим $f(x) = [x] - x + 1/2$, $f_1(x) = \int_1^x f(y)dy$, тогда $f_1(y)$ ограничена, так как $\int_k^{k+1} f(y)dy = 0$ для любого целого числа k. Следовательно, $\int_{x_1}^{x_2} f(x)x^{-z-1}dx = f_1(x)x^{-z-1}|_{x_1}^{x_2} + (z+1)\int_{x_1}^{x_2} f_1(x)x^{-z-2}dx$, который стремится к нулю при $x_1 \to \infty$ и $x_2 \to \infty$, при $\sigma > -1$. Поэтому, интеграл в (2) сходится для $\sigma > -1$, следовательно, (2) дает голоморфное продолжение функции $\zeta(z)$ для $\sigma > -1$. Поскольку $z\int_0^1([x] - x + 1/2)x^{-z-1}dx = 1/(z-1) + 1/2$ для $\sigma < 0$. Следовательно,

(3) $\zeta(z) = z\int_0^\infty([x] - x + 1/2)x^{-z-1}dx$ для $-1 < \sigma < 0$. В силу предложения 2.9.1 и теоремы 10 и формул $(2, 3)$, и используя непрерывное продолжение с $\{z \in \mathcal{A}_b : -1 < Re(z) < 0$ или $0 < Re(z)\}$ функции $\zeta(z)$ является $(1, b)$-квазирегулярной в области $\{z \in \mathcal{A}_b : -1 < Re(z), z \neq 1\}$.

Рассмотрим $\int_R^\infty \sin(2\pi nx)x^{-z-1}dx =$

$[-\cos(2\pi nx)/(2\pi nx^{z+1})]|_R^\infty - (z+1)(2\pi n)^{-1}\int_R^\infty \cos(2\pi nx)x^{-z-2}dx$

$= O(1/(nR^{\sigma+1})) + O(n^{-1}\int_R^\infty x^{-\sigma-2}dx) = O(1/(nR^{\sigma+1}))$, где $R > 0$, следовательно, $\lim_{R\to\infty}\sum_{n=1}^\infty n^{-1}\int_R^\infty \sin(2\pi nx)x^{-z-1}dx = 0$ для $-1 < \sigma < 0$. Поскольку существует разложение в ряд Фурье: $[x]-x+1/2 = \sum_{n=1}^\infty \sin(2\pi nx)(\pi n)^{-1}$ для нецелых действительных x, тогда интегрируя в (3) почленно ряд, мы получим

(4) $\zeta(z) = z(\pi)^{-1}\sum_{n=1}^\infty n^{-1}\int_0^\infty \sin(2\pi nx)x^{-z-1}dx =$

$z\pi^{-1}\sum_{n=1}^\infty(2\pi n)^z n^{-1}\int_0^\infty \sin(y)y^{-z-1}dy = z\pi^{-1}(2\pi)^z\{-\Gamma(-z)\}\sin(z\pi/2)\zeta(1-z)$,

где для $\Gamma(z)$ используется $(1, b)$-квазиконформное продолжение примера 2.9.5.3. Формула (4) исходно выполняется для $-1 < \sigma < 0$, но правая часть (4) выполняется также для любого $\sigma < 0$, где $\sigma = Re(z)$. Таким образом, это поставляет $(1, b)$-квазирегулярное продолжение $\zeta(z)$ на $\mathcal{A}_b \setminus \{1\}$ и выполняется следующая формула:

(5) $\zeta(1-z) = 2^{1-z}\pi^{-z}\cos(z\pi/2)\Gamma(z)\zeta(z)$.

Уравнение (5) преобразуется в

(6) $\zeta(z) = \chi(z)\zeta(1-z)$, где

$\chi(z) = 2^z\pi^{z-1}\sin(\pi z/2)\Gamma(1-z)$

заменой z на $1-z$. Тогда $\chi(z) = \pi^{z-1/2}\Gamma(1/2-z/2)/\Gamma(z/2)$, следовательно, $\chi(z)\chi(1-z) = 1$. Поэтому $\xi(z) = \xi(1-z)$ для любого $Re(z) \neq 1/2$, где $\xi(z) = z(z-1)\pi^{-z/2}\Gamma(z/2)\zeta(z)/2$, следовательно,

(7) $\Upsilon(z) = \Upsilon(-z)$ для любого $Re(z) \neq 0$,

где $\Upsilon(z) = \xi(z+1/2)$. Поскольку $(2^z)^* = 2^{z^*}$, $(\pi^{z-1})^* = \pi^{z^*-1}$, $\sin(\pi z^*/2) = (\sin(\pi z/2))^*$, $\Gamma(1-z^*) = (\Gamma(1-z))^*$ для любого $z \in \mathcal{A}_b$, тогда

(8) $(\Upsilon(z))^* = \Upsilon(z^*)$ для любого $z \in \mathcal{A}_b$,

где $z^* := \tilde{z}$.

Для $\sigma > 0$ мы имеем $\int_0^\infty x^{z-1}e^{-nx}dx = n^{-z}\int_0^\infty y^{z-1}e^{-y}dy = n^{-z}\Gamma(z)$, так как n и y действительны, и η^{z-1} определена как $Exp((z-1)Ln(\eta))$ с ветвью логарифма $Ln(R)$ действительной для $R > 0$, так что n^{-z} и y^{z-1} коммутируют. Для $\sigma > 1$ мы имеем сходимость ряда $\sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty x^{\sigma-1}e^{-nx}dx = \Gamma(\sigma)\zeta(\sigma)$. Поэтому, $\Gamma(z)\zeta(z) = \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty x^{z-1}e^{-nx}dx$ $= \int_0^\infty x^{z-1}\sum_{n=1}^\infty e^{-nx}dx = \int_0^\infty x^{z-1}(e^x-1)^{-1}dx$.

Рассмотрим интеграл $J(z) = \int_C \eta^{z-1}(e^\eta - 1)^{-1}d\eta$, где контур C начинается в бесконечности на положительной действительной оси, охватывает начало системы координат в плоскости $\mathbf{R} \oplus M\mathbf{R}$ в положительном направлении, кроме точек $2\pi Mk$, где $0 \neq k \in \mathbf{Z}$ и возвращается к положительной бесконечности. Поэтому, $Arg(Ln(\eta))$ варьируется от 0 до $2\pi M$ вдоль контура. Поэтому мы возьмем C состоящей из действительный оси от ∞ до $0 < R < 2\pi$, окружности $|z| = R$, и действительной оси от R до ∞. Таким образом, на окружности $|\eta^{z-1}| = \exp((\sigma-1)ln|\eta| - t\ arg(\eta)) \leq |\eta|^{\sigma-1}\exp(2\pi|t|)$ и $|Exp(\eta) - 1| > A|\eta|$, где $arg(\eta) = M^*Arg(\eta)$, $z = \sigma + tM$, $\sigma = Re(z)$, $t \in \mathbf{R}$. Следовательно, интеграл вдоль окружности стремится к нулю при $R \to 0$ для $\sigma > 1$. Взятие предела при $R \to 0$ дает $J(z) = -\int_0^\infty x^{z-1}(e^x-1)^{-1}dx + \int_0^\infty (xExp(2\pi M))^{z-1}(e^x-1)^{-1}dx = (exp(2\pi Mz) - 1)\Gamma(z)\zeta(z) = 2\pi M Exp(\pi z M)(\Gamma(1-z))^{-1}\zeta(z)$, следовательно,

(9) $\zeta(z) = \Gamma(1-z)Exp(-\pi Mz)(2\pi)^{-1}M^*\int_C \eta^{z-1}(Exp(\eta)-1)^{-1}d\eta$.

Последняя формула была доказана для $\sigma > 1$. Но интеграл $J(z)$ равномерно сходится в G_M для любой ограниченной области G_M в $\mathbf{R} \oplus M\mathbf{R}$ плоскости и равномерно по чисто мнимой составляющей $M \in \mathcal{A}_b$, $Re(M) = 0$, $|M| = 1$, где $G_M = \hat{R}_{M,\mathbf{i}}G_{\mathbf{i}}$. Таким образом, формула (9) определяет $(1,b)$-квазирегулярную функцию на $\mathcal{A}_b \setminus \{1\}$.

Формулы $(4,9)$ были получены одним и тем же семейством $R_{z,x}$ предложений 2.2 и 2.2.3. Если полюс комплексно мероморфной функции принадлежит действительной оси, тогда для ее квазиконформного продолжения с отмеченной точкой $y_0 = 0$ ее полюс останется тем же действительным полюсом, так как осью вращения является $\mathbf{R}$. Таким образом, единственными возможными сингулярностями дзета функции $\zeta(z)$ могут быть лишь полюсы функции $\Gamma(1-z)$, $z = 1, 2, 3, ...$ В силу (4) $\zeta(z)$ регулярна в $z = 2, 3, ...$, более точно $J(z)$ исчезает в этих точках (смотри [31] и теорему 2.11 [17, 18]). В точке $z = 1$ мы имеем $J(1) = \int_C (Exp(z)-1)^{-1}dz = 2\pi M$ и $\Gamma(1-z) = -(z-1)^{-1} + ...$, следовательно, вычет в этом полюсе равен 1.

14. Пример. Для логарифмической производной $\psi(1+z) = dLn\Gamma(1+z)/dz$ гамма функции имеется выражение $\psi(1+z) = -C - \sum_{k=1}^\infty((z+k)^{-1} - k^{-1})$ (смотри формулу VII.89(9) в [15]). Следовательно, она выполняется для ее $(1,b)$-квазимероморфного продолжения с операторами $\hat{R}_{z,y}$ как в предложениях 2.2 и 2.2.3, где $y_0 = 0$, $2 \leq b \leq 3$. Возьмем $-1 < a < 0$, тогда в силу некоммутативного $\mathcal{A}_b$ аналога леммы Жордана 11 и замечаний 12 выше, 2.47 [25] с $-W := \{z : Re(z) < s_0\}$ вместо W и с $a < s_0 < 0$ и теоремы 3.9 о вычетах [17, 18] мы имеем

(1) $\zeta(z) = \exp(M\pi z)(2\pi)^{-1}M^*\int_{a-M\infty}^{a+M\infty}\{\psi(1+\eta) - Ln(\eta)\}\eta^{-z}d\eta$ для любого $\sigma > 1$, где $M \in \mathcal{A}_b$, $Re(M) = 0$, $|M| = 1$, $z \in \mathcal{A}_b$, $\sigma = Re(z)$, $z = \sigma + Mv$, $\sigma, v \in \mathbf{R}$, $-1 < a < 0$.

Функция $\{\psi(1+\eta) - Ln(\eta)\}\eta^{-z}$ асимптотически является $O(|\eta|^{-1-\sigma})$, следовательно, интеграл в (1) сходится и формула (1) выполняется в силу аналитического продолжения для $\sigma > 0$. Снова используя некоммутативный аналог леммы Жордана, мы преобразуем интеграл в (1) к

(2) $\zeta(z) = -\sin(\pi z)\pi^{-1}\int_0^\infty\{\psi(1+x) - ln(x)\}x^{-z}dx$ для любого $0 < \sigma < 1$.

Функция $\{\psi(1+\eta) - Ln(\eta)\}\eta^{-z}$ действительна на $(0,\infty) = \{x \in \mathbf{R} : 0 < x\}$, где ветвь Ln такова, что $Ln|_{\mathbf{R}} = ln : (0,\infty) \to \mathbf{R}$. В силу теорем о единственности и обращении некоммутативной версии преобразования Меллина $(1,b)$-квазирегулярное продолжение $\zeta(z)$ совпадает с некоммутативной версией преобразования Меллина (2), когда $z \in \mathcal{A}_b$ с $0 < Re(z) < 1$. Тогда $\hat{R}_{z,y}g(y) = g(z)$ для любого $y \in \mathbf{C}$ и $z \in \mathcal{A}_b$ с $0 < Re(y) = Re(z) < 1$, так что $\hat{R}_{z,y}y = z$, где $g(z) := \int_0^\infty \{\psi(1+x) - ln(x)\}x^{-z}dx$, $y_0 = 0$. В силу теоремы 1 существует $(\partial \int_0^\infty \{\psi(1+x) - ln(x)\}x^{-z}dx/\partial z).h = (\int_0^\infty \{\psi(1+x) - ln(x)\}ln(x)x^{-z}dx).h$ для всякого $h \in \mathbf{R} \oplus M\mathbf{R}$ и каждого $0 < \sigma < 1$, где $z = \sigma + Mv$. Таким образом, $g(z)$ удовлетворяет $(Q1, Q6)$ и $g'(z)$ удовлетворяет $(Q7)$, когда $g'(z) \neq 0$, следовательно, $g(z)$ является $(1,b)$-квазирегулярной функцией.

В силу формулы 13(6) имеется соотношение симметрии: $g(z) = -(\sin(\pi z))^{-1}\pi\zeta(z) = -(\sin(\pi(1-z))^{-1}\pi\chi(z)\zeta(1-z)$, так как $\sin(\pi - \phi) = \sin(\phi)$ для любого $\phi \in \mathcal{A}_b$, где $\chi(z) := 2^z\pi^{z-1}\sin(\pi z/2)\Gamma(1-z)$, $\chi(z)\chi(1-z) = 1$. Но $|2^z| = 2^\sigma$, $|\pi^{z-1}| = \pi^{\sigma-1}$, $\sin(\pi z/2) = 0$ тогда и только тогда, когда $z = 2k$ с $k \in \mathbf{Z}$, $\sin(\pi z/2)$ не имеет полюсов, $\Gamma(1-z)$ не имеет нулей, $\Gamma(1-z)$ имеет полюс в z тогда и только тогда, когда $z = 1, 2, 3, ...$, следовательно, $\chi(z)$ не имеет никакого нуля или полюса в области $V := \{z \in \mathcal{A}_b : 0 < Re(z) < 1\}$. В тоже время множитель $(\sin(\pi z))^{-1}\pi|_V$ не имеет ни полюсов, ни нулей в V.

15. Пример. Рассмотрим новый тип продолжения в сферических $\mathcal{A}_b$-координатах. Пусть

(1) $\psi(x) := \sum_{n=1}^\infty \exp(-n^2\pi x)$,

где $x > 0$, тогда

(2) $\zeta(y) = \pi^{y/2}[\Gamma(y/2)]^{-1}\int_0^\infty x^{y/2-1}\psi(x)dx$

для $\sigma = Re(y) > 1$, $y \in \mathbf{C}$. Известно, что

(3) $2\psi(x) + 1 = [2\psi(1/x) + 1]/(x)^{1/2}$ для всякого $x > 0$. Поэтому, из $(2,3)$ следует, что

(4) $\pi^{-y/2}\Gamma(y/2)\zeta(y) = \int_0^1 x^{y/2-1}\psi(x)dx + \int_1^\infty x^{y/2-1}\psi(x)dx$
$= \int_0^1 x^{y/2-1}[\psi(1/x)(x)^{-1/2} + (x)^{-1/2}/2 - 1/2]dx + \int_1^\infty x^{y/2-1}\psi(x)dx$
$= 1/(y-1) - 1/y + \int_0^1 x^{y/2-3/2}\psi(1/x)dx + \int_1^\infty x^{y/2-1}\psi(x)dx$
$= 1/[y(y-1)] + \int_1^\infty (x^{-y/2-1/2} + x^{y/2-1})\psi(x)dx$.

Последний интеграл сходится для любых значений $y \in \mathbf{C}$, поэтому формула (4) выполняется для всех значений y за счет аналитического продолжения (смотри формулы 2.6.1–4 в §2.6 [31]). Запишем член $1/[y(y-1)]$ в виде:

(5) $w(q) := 1/(y-1) - 1/y = -[\int_0^\infty [\exp(-ty) + \exp(-t(1-y))]dt$
$= -[\int_0^\infty \exp(-t/2)[\exp(-tq) + \exp(tq)]dt = -[\int_{-\infty}^\infty \exp(-|t|/2)\exp(-tq)dt$,

который сходится в полосе $-1/2 < Re(q) < 1/2$, где $q = y - 1/2$. Тогда член $\int_1^\infty (x^{-y/2-1/2} + x^{y/2-1})\psi(x)dx$ полагая $q = y - 1/2$ и также $x = e^t$, мы запишем в виде:

(6) $\int_1^\infty (x^{-y/2-1/2} + x^{y/2-1})\psi(x)dx$
$= \int_1^\infty (x^{-3/4-q/2} + x^{-3/4+q/2})\psi(x)dx = \int_0^\infty \exp(-3t/4)[\exp(-tq/2) + \exp(tq/2)]\psi(e^t)e^tdt$
$= \int_0^\infty \exp(t/4)\psi(e^t)\exp(-tq/2)dt + \int_{-\infty}^0 \exp(-t/4)\psi(e^{-t})\exp(-tq/2)dt$
$= \int_{-\infty}^\infty \exp(|t|/4)\psi(\exp(|t|))\exp(-tq/2)dt$.

Поэтому, формулы $(4-6)$ дают:

(7) $\pi^{-q/2-1/4}\Gamma(q/2+1/4)\zeta(q+1/2) =$
$\int_{-\infty}^\infty [-\exp(-|t|/2) + 2\exp(|t|/2)\psi(\exp(2|t|))]\exp(-tq)dt$

выполняющуюся на $\mathbf{C}$ за счет аналитического продолжения. Тогда

(8) $\xi(y) = y(y-1)[\pi^{-y/2}\Gamma(y/2)\zeta(y)]/2 = [w(y-1/2)]^{-1}[\pi^{-y/2}\Gamma(y/2)\zeta(y)]/2$

является целой функцией на $\mathbf{C}$.

Возьмем семейство $\hat{R}_{E(z),E(x)}$ удовлетворяющее условиям $2.1(Q2-Q5)$ и $2.2.3(1)$.

В силу теорем 9 и 10 $w(y)$ имеет $(1, b)$-квазирегулярное продолжение $w^s(p)$ в сферических $\mathcal{A}_b$-координатах, где $2 \le b \le 3$, $w^s(p) := -[\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-|t|/2) \exp(-E(tp))dt$. В соответствии с предложением 17 функция $1/w^s(p)$ является $(1, b)$-квазирегулярной в сферических $\mathcal{A}_b$-координатах в области $-1/2 < Re(p) < 1/2$. В силу следствия 9.2 произведение $(1, b)$-квазирегулярных функций с одним и тем же семейством $\hat{R}_{z,x}$ является $(1, b)$-квазирегулярным. Тогда из определения 2.2.1 следует, что произведение $f_1^s f_2^s$ из $(1, b)$-квазирегулярных функций f_1^s и f_2^s в сферических $\mathcal{A}_b$-координатах с одним и тем же семейством $\hat{R}_{E(z),E(x)}$ является $(1, b)$-квазирегулярным в сферических $\mathcal{A}_b$-координатах, так как $f_1 = f_1^s \circ E^{-1}$ и $f_2 = f_2^s \circ E^{-1}$ являются $(1, b)$-квазирегулярными.

С другой стороны, правая часть уравнения (8) дает $(1, b)$-квазимероморфное в сферических $\mathcal{A}_b$-координатах продолжение

$\int_{-\infty}^{\infty}[-\exp(-|t|/2) + 2\exp(|t|/2)\psi(\exp(2|t|))] \exp(-E(tp))dt =: g^s(p)$ согласно теоремам 9, 10. Положим $\Omega(q) := \xi(q + 1/2)$. Тогда $\Omega(q)$ имеет $(1, b)$-квазицелое в сферических $\mathcal{A}_b$-координатах продолжение $\Omega^s(p) = [w^s(p)]^{-1} g^s(p)$. Функция $f(t) := -\exp(-|t|/2) + 2\exp(|t|/2)\psi(\exp(2|t|))$ является действительно-значной и четной на $\mathbf{R}$. В силу теорем 10 и 11 $\Omega^s(p)$ имеет свойства симметрии $11(1', 2)$. Это также можно видеть из уравнений $(7, 8)$. Свойство симметрии $11(1')$ для f^s влечет $11(1)$ для $f = f^s \circ E^{-1}$, так как если $z = E(p)$, тогда сопряженное число равно $\tilde{z} = E(p_0 - p_1 i_1 + p_2 i_2 + ... + p_{2^b-1} i_{2^b-1})$ согласно формулам $2.2.1(1, 2)$.

Известно, что $\zeta(z)$ не имеет никаких полюсов в $\mathbf{C}$ кроме $z = 1$, то есть, $\zeta(z)$ содержит только комплексные нули в области $0 < Re(y) < 1$ in $\mathbf{C}$. Хорошо известно, что все комплексные нули функции $\zeta(z)$ принадлежат комплексной полосе $0 < \sigma < 1$ и они образуют дискретное множество в $\mathbf{C}$ без конечных предельных точек [31]. Таким образом, функция $f = f^s \circ E^{-1}$ с $f^s(p) = \Omega^s(p)$ удовлетворяет условиям теоремы 2.17, так как $\xi(z)$ не имеет никаких действительных нулей и все ее комплексные нули принадлежат полосе $0 \le Re(z) \le 1$ (смотри страницу 30 [31]). С другой стороны, $\zeta(z)$ и $\xi(z)$ имеют общими все комплексные нули и $E(y)|_{\mathbf{C}} = y$ для любого $y \in \mathbf{C}$. Таким образом, в силу теоремы 2.17 доказано следующее.

16. Теорема. *Все комплексные нули ζ функции лежат на прямой $Re(z) = 1/2$.*

17. Замечание. Это не так удивительно, так как по теореме 2.13 [31] всякая мероморфная функция $f(s) = G(s)/P(s)$, где G – это целая функция конечного порядка и P – это полином на $\mathbf{C}$, и f удовлетворяет свойствам симметрии 13.1(6) и имеет разложение в ряд $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ абсолютно сходящийся для $\sigma > 1$, тогда $f(s)$ равна $c\zeta(s)$, где $c = const$, $a_n \in \mathbf{C}$ – это константа для любого $n \in \mathbf{N}$. С другой стороны, класс (r, b)-квазиконформных функций более узок и специфичен по сравнению с классом $\mathcal{A}_b$ голоморфных функций, где $1 \le r < b \le 3$ (смотри также замечания 2.13 и 2.17.1). Более того, класс $(1, b)$-квазицелых функций более узок, чем класс $(1, b)$-квазирегулярных функций, который, в свою очередь, удовлетворяет теореме 10. Отметим, что если $z = z_0 + z_1 i_1 + z_2 i_2 + z_3 i_3 = E_2(p)$, тогда $E_2(-p) = -z_0 - z_1 i_1 + z_2 i_2 - z_3 i_3$ в соответствии с формулой 2.2.1(1) и 2.16.1(3), где $z_0, z_1, z_2, z_3 \in \mathbf{R}$, $z, p \in \mathbf{H}$. Следовательно, E_2 и E_6 не являются ни четными, ни нечетными функциями. Более узкий класс удовлетворяет условиям симметрии $11(1', 2)$, которые должны выполняться для использования теорема 2.17. Например, функция Дирихле не удовлетворяет условиям теоремы 2.17 (смотри §10.25 [31]).

Рассмотрим тождество $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(p_0 + \mathbf{i}p_1 t)dt = g(p) \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp((1 - p_0)t - \mathbf{i}p_1 t)dt$ для ненулевой функции-оригинала $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ и мероморфной функции g в $\mathbf{C}$, так что g голоморфна и без нулей в полосе $G := \{p \in \mathbf{C} : s_0 < p_0 < s_1, s_0 < 1 - p_0 < s_1\}$, где g может иметь лишь изолированные полюсы в $\mathbf{C}$, $p_0, p_1 \in \mathbf{R}$, $p = p_0 + \mathbf{i}p_1$,

$0 < s_0(f) < s_1(f) < 1$, $|f(t)| < C_1 \exp(-s_1 t)$ для любого $t < 0$, $|f(t)| < C_2 \exp(s_0 t)$ для любого $t \geq 0$, $s_0 = s_0(f)$, $s_1 = s_1(f)$. Тогда $g(p)g(1-p) = 1$ и $\bar{g}(p) = g(\bar{p})$ в G кроме полюсов и $g(1/2) = 1$, и $\bar{F}(p) = F(\bar{p})$ в G, где $F(p) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(pt)dt$. В частности, $g'(1/2 + \mathbf{i}p_1) = g'(1/2 - \mathbf{i}p_1)$ для любого $p_1 \mathbf{R}$ кроме полюсов функции g. Поскольку двустороннее преобразование Лапласа функции $f(t)$ голоморфно в полосе $\{p \in \mathbf{C} : s_0 < p_0 < s_1\}$, тогда дифференцируя это тождество по p в G дает:

$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)t \exp(pt)dt = g'(p)(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp((1-p)t)dt - g(p) \int_{-\infty}^{\infty} f(t)t \exp((1-p)t)dt$ (смотри также теорему 1 выше). Поэтому, класс таких функций $F(p)$ узок.

18. Теорема. *Пусть $g, g', ..., g^{(n)}$ – это функции-оригиналы, так что $g(\tau)\tau^{p-1}|_0^\infty = 0$,..., $g^{(n-1)}\tau^{p-n}|_0^\infty = 0$, пусть также g – это действительнозначная для $r \geq 4$ функция, g принимает значения в $\mathbf{K}$ для $\mathbf{K} = \mathbf{H}$ или $\mathbf{K} = \mathbf{O}$; тогда*

(1) $\mathcal{M}(g^{(n)}(\tau), u; p; 0) = (-1)^n \mathcal{M}(g(\tau), u; p-n; 0)(p-1)...(p-n)$
в области $s_0 < Re(p) < s_1$ in $\mathcal{A}_r$, когда $s_0 < s_1$, где $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 1$,
$s_0 := \max(s_0(g), s_0(g'), ..., s_0(g^{(n)}))$, $s_1 := \min(s_1(g), s_1(g'), ..., s_1(g^{(n)}))$, $u(p,t,0) = pt$.

If $g(\tau)$, $g'(\tau)\tau$,..., $g^{(n)}(\tau)\tau^n$ – это оригиналы такие, что $g(\tau)\tau^p|_0^\infty = 0$, $g'(\tau)\tau^{p+1}|_0^\infty = 0$,..., $g^{(n)}(\tau)\tau^{p+n}|_0^\infty = 0$, тогда

(2) $\mathcal{M}(g^{(n)}(\tau)\tau^n, u; p; \zeta) = (-1)^n \mathcal{M}(g(\tau), u; p; \zeta)p(p+1)...(p+n-1)$ *в области* $s_0 < Re(p) < s_1$ *в* $\mathcal{A}_r$, *когда* $s_0 < s_1$, *где* $s_0 := \max(s_0(g), s_0(g')-1, ..., s_0(g^{(n)})-n)$, $s_1 := \min(s_1(g), s_1(g')-1, ..., s_1(g^{(n)})-n)$, $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 1$, $u(p,t,\zeta) = pt + \zeta$.

Доказательство. Для $s_0 < s_1$ и $n = 1$ в силу теоремы 3.11 [25] интегрирование по частям дает:

$\int_0^\infty g'(\tau)\tau^{p-1}d\tau = g(\tau)\tau^{p-1}|_0^\infty - (\int_0^\infty g(\tau)\tau^{p-2}d\tau)(p-1) = -\mathcal{M}(g(\tau), u, p-1; \zeta)(p-1)$, так как или g действительнозначная для $r \geq 4$, или g принимает значения в $\mathbf{K}$ для $\mathbf{K} = \mathbf{H}$ или $\mathbf{K} = \mathbf{O}$, но $\mathbf{O}$ – это альтернативная алгебра. Поэтому, $\mathcal{M}(g'(\tau), u; p; 0) = -\mathcal{M}(g(\tau), u; p-1; 0)(p-1)$. Тогда мы применим эту формулу интегрирования по частям по индукции и получим формулу (1).

Если $|g(\tau)| < C_1\tau^{s_0}$ для любого $0 < \tau \leq 1$, тогда $|g(\tau)\tau^k| < C_1\tau^{s_0+k} \leq C_1\tau^{s_0} \leq C_1\tau^{s_0-k}$ для любого $k \geq 0$ и $0 < \tau \leq 1$, следовательно, $s_0(g(\tau)\tau^k) \leq s_0(g) - k$. Если $|g(\tau)| < C_2\tau^{-s_1}$ для любого $\tau \geq 1$, тогда $|g(\tau)\tau^k| < C_2\tau^{-s_1+k}$ для любого $k \geq 0$ и $\tau \geq 1$, следовательно, $s_1(g(\tau)\tau^k) \geq s_1(g) - k$.

19. Теорема. *(1). Пусть $g(\tau)$ и $g'(\tau)$ – это функции-оригиналы для $\mathcal{A}_r$ с $2 \leq r < \infty$ такие, что существует*

(a) $\lim_{\tau \to \tau_0} g(\tau)\tau^{p-1}$ *для значений* $\tau_0 = 0$ *и* $\tau_0 = \infty$, *тогда*

(b) $\mathcal{M}(g'(\tau), u; p; \zeta) = -(p_0 - 1)\mathcal{M}(g(\tau), u; p-1; \zeta) - p_1\mathcal{M}(g(\tau), u; p-1; \zeta + i_1\pi/2) - ... - p_{2^r-1}\mathcal{M}(g(\tau), u; p-1; \zeta + i_{2^r-1}\pi/2)$
в области $s_0 < Re(p) < s_1$ *в* $\mathcal{A}_r$, *когда* $s_0 < s_1$, *где* $s_0 := \max(s_0(g), s_0(g'))$, $s_1 := \max(s_1(g), s_1(g'))$, $u(p,t,\zeta) = E(pt+\zeta) = p_0t + \zeta_0 + M(p,t,\zeta)$.

(2). *Если $g(\tau)$ и $g'(\tau)\tau$ – это оригиналы такие, что существует*

(c) $\lim_{\tau \to \tau_0} g(\tau)\tau^p = 0$ *для любого из значений* $\tau_0 = 0$ *и* $\tau_0 = \infty$, *тогда*

(d) $\mathcal{M}(g'(\tau)\tau, u; p; \zeta) = -p_0\mathcal{M}(g(\tau), u; p; \zeta) - p_1\mathcal{M}(g(\tau), u; p; \zeta + i_1\pi/2) - ... - p_{2^r-1}\mathcal{M}(g(\tau), u; p; \zeta + i_{2^r-1}\pi/2)$
в области $s_0 < Re(p) < s_1$ *in* $\mathcal{A}_r$, *где* $s_0 := \max(s_0(g), s_0(g')-1)$,
$s_1 := \min(s_1(g), s_1(g')-1)$, $u(p,t;\zeta) = E(pt+\zeta) = p_0t + \zeta_0 + M(p,t;\zeta)$.

Доказательство. Интегрирование по частям дает:

$\int_0^\infty g'(\tau)\exp(-u(-p, \ln\tau; -\zeta))\tau^{-1}d\tau = g(\tau)e^{-u}\tau^{-1}|_0^\infty - \int_0^\infty g(\tau)(\partial e^{-u}\tau^{-1}/\partial\tau)d\tau$,
где $\exp(-u(-p, \ln\tau; -\zeta))\tau^{-1} = \exp(p_0\ln\tau + \zeta_0)(\cos(p_1\ln\tau + \zeta_1) - i_1\sin(p_1\ln\tau + \zeta_1)$

$\cos(p_2 \ln \tau + \zeta_2) + i_2 \sin(p_1 \ln \tau + \zeta_1) \sin(p_2 \ln \tau + \zeta_2) \cos(p_3 \ln \tau + \zeta_3) - ... + i_{2^r-2} \sin(p_1 \ln \tau + \zeta_1) ... \cos(p_{2^r-1} \ln \tau + \zeta_{2^r-1}) - i_{2^r-1} \sin(p_1 \ln \tau + \zeta_1) ... \sin(p_{2^r-1} \ln \tau + \zeta_{2^r-1}))\tau^{-1}$,
$\exp(p_0 \ln \tau + \zeta_0)/\tau = \tau^{p_0-1} \exp(\zeta_0)$, где $\exp(\zeta_0) = const$, а $\tau > 0$. Поэтому,

$$\partial[\exp(-u(-p, \ln \tau; -\zeta)\tau^{-1}]/\partial\tau = \partial[\exp(\zeta_0)\tau^{p_0-1} \exp(-M(-p, \ln \tau; -\zeta)]/\partial\tau$$
$$= (p_0 - 1) \exp(\zeta_0)\tau^{p_0-2} \exp(-M) + p_1 \exp(-u(-p, \ln \tau; -\zeta - i_1\pi/2)/\tau^2 + ...$$
$$+p_{2^r-1} \exp(-u(-p, \ln \tau; -\zeta - i_{2^r-1}\pi/2))/\tau^2$$

благодаря формуле 2.31(2) [25], так как $d \ln \tau/d\tau = 1/\tau$, где
$\exp(\zeta_0)\tau^{p_0-2} \exp(-M) = \tau^{-1} \exp(-u(-p + 1, \ln \tau; -\zeta))$. Отсюда следует формула (b), так как фазовый множитель $\exp(\phi(\tau))$ с $Re(\phi(\tau)) = 0$ для любого $\tau > 0$ не влияет на предел (a).

Рассмотрим теперь $g'(\tau)\tau$, тогда из формулы интегрирования по частям мы получим:

$$\int_0^\infty g'(\tau)\tau \exp(-u(-p, \ln \tau; -\zeta))\tau^{-1}d\tau = g(\tau) \exp(-u(-p, \ln \tau; -\zeta))|_0^\infty$$
$$-p_0 \int_0^\infty g(\tau) \exp(-u(-p, \ln \tau; -\zeta)\tau^{-1}d\tau - p_1 \int_0^\infty g(\tau) \exp(-u(-p, \ln \tau; -\zeta - i_1\pi/2))\tau^{-1}d\tau -$$
$$... - p_{2^r-1} \int_0^\infty g(\tau) \exp(-u(-p, \ln \tau; -\zeta - i_{2^r-1}\pi/2))\tau^{-1}d\tau,$$

откуда вытекает формула (d), так как множитель $\exp(\phi(\tau))$ с $Re(\phi(\tau)) = 0$ имеет $|\exp(\phi(\tau))| = 1$ для любого $\tau > 0$ и не влияет на предел (b).

Литература

[1] J. C. Baez. "The octonions". Bull. Amer. Mathem. Soc. **39: 2** (2002), 145–205.

[2] F. A. Berezin. "Introduction to superanalysis" (D. Reidel Publish. Comp., Kluwer group: Dordrecht, 1987).

[3] Н. Бурбаки. "Алгебра. Алгебраические структуры. Линейная и полилинейная алгебра" (Москва: Физматгиз, 1962).

[4] F. Brackx, R. Delanghe, F. Sommen. "Clifford analysis" (London: Pitman, 1982).

[5] A. Connes. "Noncommutative geometry"(Academic Press: San Diego, 1994).

[6] B. DeWitt. "Supermanifolds" 2d ed. (Cambridge Univ. Press: Cambridge, 1992).

[7] G. Emch. "Mèchanique quantique quaternionienne et Relativitè restreinte". Helv. Phys. Acta **36**, 739–788 (1963).

[8] R. Engelking. "General topology" (Heldermann: Berlin, 1989).

[9] F. Gürsey, C.-H. Tze. "On the role of division, Jordan and related algebras in particle physics" (World Scientific Publ. Co.: Singapore, 1996).

[10] Г. Грауэрт, И. Либ, В. Фишер. "Дифференциальное и интегральное исчисление" (Мир: Москва, 1971).

[11] У. Р. Гамильтон. "Избранные статьи. Оптика. Динамика. Кватернионы" (Наука: Москва, 1994).

[12] I. L. Kantor, A. S. Solodovnikov. "Hypercomplex numbers" (Berlin: Springer, 1989).

[13] Л. И. Камынин. "Курс математического анализа" (Изд. МГУ: Москва, 1995).

[14] A. Khrennikov. "Superanalysis", (Series "Mathem. and its Applic."; V. **470**; Kluwer: Dordrecht, 1999).

[15] М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. "Методы теории функций комплексного переменного" (Москва: Наука, 1987).

[16] H. B. Lawson, M.-L. Michelson. "Spin geometry" (Princeton: Princ. Univ. Press, 1989).

[17] S. V. Lüdkovsky, F. van Oystaeyen. "Differentiable functions of quaternion variables". Bull. Sci. Math. (Paris). Ser. 2. **127** (2003), 755–796.

[18] С. В. Людковский. "Дифференцируемые функции чисел Кэли-Диксона". Гиперкомплексные числа в геометрии и физике **1 (3)** (2005), 93–140 (предыдущий вариант: Los Alam. Nat. Lab. *math.NT/0406048*; *math.CV/0406306*; *math.CV/0405471*).

[19] S. V. Ludkovsky. "Functions of several Cayley-Dickson variables and manifolds over them". J. Mathem. Sci. **141: 3** (2007), 1299–1330 (previous variant: Los Alamos Nat. Lab. *math.CV/0302011*).

[20] С. В. Людковский. "Неограниченные операторы в банаховых пространствах над телом кватернионов". Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. **4: 1 (7)**, (2007) 154–167 (предыдущий вариант: Los Alam. Nat. Lab. *math.OA/0603025*).

[21] С. В. Людковский. "Алгебры векторных полей над телом кватернионов". Докл. Акад. Наук. **403: 3** (2005), 309–312.

[22] С. В. Людковский. "Группы псевдоконформных диффеоморфизмов кватернионных переменных". Докл. Акад. Наук. **408: 5** (2006), 587–590.

[23] С. В. Людковский. "Нормальные семейства функций и группы псевдоконформных диффеоморфизмов кватернионных и октонионных переменных". Соврем. Матем. Фундам. Направл. **18** (2006), 101–164 (предыдущий вариант: Los Alam. Nat. Lab. *math.DG/0603006*).

[24] S. V. Ludkovsky. "Stochastic processes on geometric loop groups and diffeomorphism groups of connected manifolds, associated unitary representations". J. Math. Sci. **141: 3** (2007), 1331–1384 (предыдущий вариант: Los Alam. Nat. Lab. *math.AG/0407439,* July 2004).

[25] С. В. Людковский. "Преобразование Лапласа над алгебрами Кэли-Диксона". Гиперкомплексные числа в геометрии и физике **3: 1 (5)** (2007), 67–99 (предыдущий вариант: Los Alam. Nat. Lab. *math.CV/0612755*).

[26] F. van Oystaeyen. "Algebraic geometry for associative algebras" (Series "Lect. Notes in Pure and Appl. Mathem."; V. **232**; Marcel Dekker: New York, 2000).

[27] Ю. П. Размыслов. "Тождества алгебр и их представлений" (Наука: Москва, 1989).

[28] H. Rothe. "Systeme Geometrischer Analyse" in: "Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften. Band 3. Geometrie", 1277–1423 (Leipzig: Teubner, 1914–1931).

[29] Б. В. Шабат. "Введение в комплексный анализ" (Москва: Наука, 1985).

[30] E. H. Spanier. "Algebraic topology" (Acad. Press: New York, 1966).

[31] E. C. Titchmarsh. "The theory of the Riemann zeta-function" (Oxford: Clarendon Press, 1988).

[32] В. А. Зорич. "Математический анализ" (Наука: Москва, 1984).