N-АРНЫЕ ГРУППЫ

А. М. Гальмак

МГУП, Могилёв,Беларусь
mti@mogilev.by

Исследователи, занимающиеся изучением геометрии пространства-времени, нередко сталкиваются с необходимостью конструировать и изучать n-арные, в частности, тернарные операции (см., например, [1]). При этом обращается внимание на важность изучения n-арных операций, похожих на групповые операции, то есть n-арных операций, являющихся n-арными аналогами бинарных операций в группах. Именно такие n-арные операции являются предметом изучения теории n-арных групп, для первоначального знакомства с которой и предназначена настоящая статья.

1. Введение

Начало развитию теории n-арных групп положила опубликованная в 1928 году в журнале "Mathematische Zeitschrift" статья В. Дёрнте "Untersuchungen über einen verallgemeinerten Gruppenbegrieff" [2], в которой впервые было введено понятие n-группы, называемой также n-арной или полиадической группой. Уже из названия статьи видно, что истоки теории n-арных групп лежат в теории групп. Непосредственное отношение к возникновению новой теории имела также Эмми Нётер, по инициативе которой Дёрнте и занялся реализацией лежащей почти на поверхности идеи, которую, по-видимому, впервые озвучил Е. Каснер [3], о замене в определении группы ассоциативной и однозначно обратимой слева и справа бинарной операции на ассоциативную и однозначно обратимую на каждом месте n-арную операцию. До Дёрнте такие тернарные, то есть 3-арные операции, удовлетворяющие некоторым дополнительным условиям, изучал Х. Прюфер, опубликовавший в 1924 году в том же "Mathematische Zeitschrift" статью [4], в которой он применял введенные им тернарные операции для исследования бесконечных абелевых групп. Впоследствии алгебры с такими операциями стали называть грудами Прюфера. Дёрнте установил, что груды Прюфера являются частным случаем n-арных групп, а именно, полуабелевыми тернарными группами, все элементы которых являются идемпотентами.

Первым, кто обратил серьезное внимание на статью В. Дёрнте, был Э. Пост, сумевший разглядеть в небольшой статье зачатки многообещающей теории. В 1940 году Э. Пост опубликовал в "Trans. Amer. Math. Soc." объемную статью "Polyadic groups" [5], которая по важности полученных результатов и предложенных идей является одним из краеугольных камней теории n-арных групп и во многом предопределила тематику современных исследований по n-арным группам. К основополагающим работам по n-арным группам относится также статья С. А. Чунихина [6]. После Поста наиболее активно изучением n-арных групп занимались В. А. Артамонов, С. А. Русаков, К. Глазек и их ученики.

К настоящему времени теория n-арных групп, несмотря на свой довольно почтенный возраст, остается для широкой математической общественности малоизвестной областью современной алгебры, значительно уступающей в своем развитии теории групп. Одной из причин сложившегося положения является широко распространенное заблуждение об отсутствии принципиальных различий между теорией групп и теорией n-арных групп при $n \geq 3$. На самом деле это не так. В теории n-арных групп наряду со свойствами, общими для групп и n-арных групп, систематически изучаются и свойства n-арных групп, отсутствующие у групп. Изучение таких специфических свойств, среди которых встречаются и довольно экзотические, является одной из главных задач теории n-арных групп, причем не менее важной, чем получение n-арных аналогов известных групповых результатов.

Информация по n-арным группам имеется в книгах [7–11], а также в обзорах [12, 13]. Собственно n-арным группам посвящены книги [14–20].

2. Определения n-арной группы

Классические определения

К числу классических определений n-арной группы относятся определение В. Дёрнте из [2] и два определения Э. Поста из [5]. Эти определения являются обобщениями определения группы как полугруппы, в которой разрешимы уравнения $xa = b$ и $ay = b$.

2.1. Определение [2, В. Дёрнте]. Универсальная алгебра $< A, [\,] >$ с одной n-арной $(n \geq 2)$ операцией $[\,]$: $A^n \to A$ называется *n-арной группой*, если выполняются следующие условия:

1) n-арная операция $[\,]$ на множестве A *ассоциативна*, то есть

$$[[a_1 \ldots a_n]a_{n+1} \ldots a_{2n-1}] = [a_1 \ldots a_i[a_{i+1} \ldots a_{i+n}]a_{i+n+1} \ldots a_{2n-1}]$$

для всех $i = 1, 2, \ldots, n-1$ и всех $a_1, a_2, \ldots, a_{2n-1} \in A$;

2) каждое из уравнений

$$[a_1 \ldots a_{i-1}x_ia_{i+1} \ldots a_n] = b, \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

однозначно разрешимо в A относительно x_i для всех $a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n, b \in A$.

Полагая в определении 2.1 $n = 2$, получаем определение обычной группы.

Если алгебра $< A, [\,] >$ удовлетворяет условию 1) определения 2.1, то она называется *n-арной полугруппой*. Алгебра $< A, [\,] >$, удовлетворяющая условию 2) того же определения, называется *n-арной квазигруппой*.

Пост заметил, что требование однозначной разрешимости уравнений в определении Дёрнте можно ослабить, потребовав только их разрешимость, а число уравнений уменьшить с n до двух, а при $n \geq 3$ даже до одного.

2.2. Определение [5, Э. Пост]. n-арная полугруппа $< A, [\,] >$ называется n-арной группой, если в A разрешимы уравнения

$$[xa_2 \ldots a_n] = b, \quad [a_1 \ldots a_{n-1}y] = b$$

для всех $a_1, \ldots, a_n, b \in A$.

2.3. Определение [5, Э. Пост]. n-арная полугруппа $< A, [\,] >$ называется n-арной группой $(n \geq 3)$, если в A разрешимо уравнение

$$[a_1 \ldots a_{i-1}xa_{i+1} \ldots a_n] = b$$

для всех $a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n, b \in A$ и некоторого $i \in \{2, \ldots, n-1\}$.

Для всякого $m = k(n-1)+1$, где $k \geq 1$, полагают

$$[a_1 \ldots a_m] = [a_1 \ldots a_{k(n-1)+1}] = [[\ldots[[a_1 \ldots a_n]a_{n+1} \ldots a_{2n-1}] \ldots]a_{(k-1)(n-1)+2} \ldots a_{k(n-1)+1}].$$

Тогда, если $m = k(n-1)+1$, $r = t(n-1)+1$, $1 \le t \le k$, то в m-арной полугруппе $< A, [\,] >$ выполняется равенство

$$[a_1 \dots a_m] = [a_1 \dots a_j [a_{j+1} \dots a_{j+r}] a_{j+r+1} \dots a_m]$$

для всех $a_1, \dots, a_m \in A$, где $j = 0, 1, \dots, m-r$.

Определения, связанные с разрешимостью уравнений

Автором установлено [21], что n-арную группу можно определить как n-арную полугруппу, в которой для любых ее элементов a, b и некоторых $i, j \in \{1, \dots, n-1\}$ разрешимы уравнения

$$[x \underbrace{b \dots b}_{n-1-i} \underbrace{a \dots a}_{i}] = b, \quad [\underbrace{a \dots a}_{j} \underbrace{b \dots b}_{n-1-j} y] = b,$$

или же как n-арную полугруппу, в которой для любых ее элементов a, b и некоторых $i \in \{2, \dots, n-1\}, k \in \{1, \dots, i-1\}, m \in \{1, \dots, n-1\}$ разрешимо уравнение

$$[\underbrace{a \dots a}_{k-1} \underbrace{b \dots b}_{i-k-1} x \underbrace{b \dots b}_{n-i-m} \underbrace{a \dots a}_{m}] = b.$$

Полагая в приведенных определениях $i = j = n-1$ в первом случае и $k = i-1$, $m = n-i$ во втором случае, получим результат А. Н. Скибы и В. И. Тютина [22], согласно которому n-арную группу можно определить как n-арную полугруппу, в которой для любых ее элементов a и b, разрешимы уравнения

$$[x \underbrace{a \dots a}_{n-1}] = b, \quad [\underbrace{a \dots a}_{n-1} y] = b,$$

или же как n-арную полугруппу, в которой для любых ее элементов a, b и фиксированного $i \in \{2, \dots, n-1\}$ разрешимо уравнение

$$[\underbrace{a \dots a}_{i-1} x \underbrace{a \dots a}_{n-i}] = b.$$

До 1991 года во всех определениях n-арной группы, связанных с разрешимостью уравнений, присутствовали только уравнения с одним неизвестным. Уравнения с числом неизвестных большим единицы не рассматривались до тех пор, пока не было установлено, что класс всех n-арных групп совпадает с классом всех n-арных полугрупп, в которых для любых элементов a и b разрешимы уравнения

$$[x_1 \dots x_{n-1} a] = b, \quad [a y_1 \dots y_{n-1}] = b$$

с $n-1$ неизвестными [23], а также с классом всех n-арных полугрупп, в которых для любых элементов a и b разрешимо уравнение

$$[a x_1 \dots x_{n-2} a] = b$$

с $n-2$ неизвестными [24].

Позже было установлено, что в определении n-арной группы могут присутствовать уравнения с любым числом неизвестных. Это вытекает из следующих двух теорем.

2.4. Теорема [25]. *Для n-арной полугруппы $< A, [\,] >$ справедливы следующие утверждения:*

1) *если в A для некоторого $i \in \{1, \dots, n-1\}$ и любых $a_{i+1}, \dots, a_n, b \in A$ разрешимо уравнение*

$$[x_1 \dots x_i a_{i+1} \dots a_n] = b, \tag{1}$$

то в A разрешимо каждое из уравнений

$$[x_1 a_2 \dots a_n] = b, \quad [x_1 x_2 a_3 \dots a_n] = b, \quad \dots, \quad [x_1 \dots x_{n-1} a_n] = b \tag{2}$$

для всех $a_2, \dots, a_n, b \in A$;

2) *если в A для некоторого $j \in \{1, \dots, n-1\}$ и любых $a_1, \dots, a_{n-j}, b \in A$ разрешимо уравнение*

$$[a_1 \dots a_{n-j} y_1 \dots y_j] = b, \tag{3}$$

то в A разрешимо каждое из уравнений

$$[a_1 \dots a_{n-1} y_1] = b, \quad [a_1 \dots a_{n-2} y_1 y_2] = b, \quad \dots, \quad [a_1 y_1 \dots y_{n-1}] = b \tag{4}$$

для всех $a_1, \dots, a_{n-1}, b \in A$.

Условия теоремы 2.4 можно ослабить, сохранив ее утверждения.

2.5. Теорема [25]. *Для n-арной полугруппы $< A, [\,] >$ справедливы следующие утверждения:*

1) если в A для некоторого $i \in \{1, \dots, n-1\}$ и любых $a, b \in A$ разрешимо уравнение

$$[x_1 \dots x_i \underbrace{a \dots a}_{n-i}] = b, \tag{5}$$

то в A разрешимо каждое из уравнений (2) для любых $a_2, \dots, a_n, b \in A$;

2) если в A для некоторого $j \in \{1, \dots, n-1\}$ и любых $a, b \in A$ разрешимо уравнение

$$[\underbrace{a \dots a}_{n-j} y_1 \dots y_j] = b, \tag{6}$$

то в A разрешимо каждое из уравнений (4) для любых $a_1, \dots, a_{n-1}, b \in A$.

Из теорем 2.4 и 2.5 вытекает, что n-арную группу можно определить как n-арную полугруппу, в которой разрешимы уравнения (1) и (3) или же как n-арную полугруппу, в которой разрешимы уравнения (5) и (6).

Определения, не связанные с разрешимостью уравнений

Помимо определений n-арной группы, в которых постулируется разрешимость тех или иных уравнений, существуют также определения n-арной группы, являющиеся n-арным обобщением определения группы как полугруппы, основные операции которой связаны тождеством

$$y^{-1}(yx) = x = (xy)y^{-1},$$

где y^{-1} – результат применения n-арной операции. К числу таких определений относятся определения Н. Целокоского [26], В. Дудека, К. Глазека и Б. Гляйхгевихта [27], С. А. Русакова [28]. В качестве примера одного из таких определений можно указать определение из [27], согласно которому n-арную группу можно определить как универсальную алгебру $< A, [\,], ^{-} >$ с ассоциативной n-арной $[\,]$ и унарной $^{-}$ операциями, в которой выполняется тождество

$$[\overline{y}\,\underbrace{y \dots y}_{n-2}\,x] = x = [x\,\underbrace{y \dots y}_{n-2}\,\overline{y}].$$

Представляет интерес определение Г. Монка и Ф. Сиосона [29], согласно которому n-арную группу можно определить как n-арную полугруппу $< A, [\,] >$, в которой для любых $a_1, \ldots, a_{n-2} \in A$ существует единственный элемент $(a_1, \ldots, a_{n-2})^{-1} \in A$ такой, что для любого $b \in A$ верно

$$[(a_1, \ldots, a_{n-2})^{-1} a_1 \ldots a_{n-2} b] = b, \quad [b(a_1, \ldots, a_{n-2})^{-1} a_1 \ldots a_{n-2}] = b,$$

$$[a_1 \ldots a_{n-2}(a_1, \ldots, a_{n-2})^{-1} b] = b, \quad [ba_1 \ldots a_{n-2}(a_1, \ldots, a_{n-2})^{-1}] = b.$$

Фактически в определении Монка и Сиосона на множестве A определена $(n-2)$-арная операция. Поэтому естественным выглядит определение Н. Целакоского [26], доказавшего, что класс всех n-арных групп совпадает с классом всех таких n-арных полугрупп $< A, [\,] >$, для которых на A существует $(n-2)$-арная операция $^{-1}$, удовлетворяющая условию

$$[(a_1, \ldots, a_{n-2})^{-1} a_1 \ldots a_{n-2} b] = b, \quad [ba_1 \ldots a_{n-2}(a_1, \ldots, a_{n-2})^{-1}] = b.$$

для любых $a_1, \ldots, a_{n-2}, b \in A$.

Еще дальше пошел Я. Ушан [16], определив на множестве A с одной n-арной операцией $[\,]$ еще две операции: $(n-2)$-арную операцию $\mathbf{e}$, удовлетворяющую условию

$$[\mathbf{e}(a_1, \ldots, a_{n-2}) a_1 \ldots a_{n-2} b] = b = [ba_1 \ldots a_{n-2} \mathbf{e}(a_1, \ldots, a_{n-2})]$$

для любого $b \in A$; $(n-1)$-арную операцию $^{-1}$, удовлетворяющую условию

$$[(a_1, \ldots, a_{n-2}, a)^{-1} a_1 \ldots a_{n-2} a] = \mathbf{e}(a_1, \ldots, a_{n-2}),$$

$$[aa_1 \ldots a_{n-2}(a_1, \ldots, a_{n-2}, a)^{-1}] = \mathbf{e}(a_1, \ldots, a_{n-2}).$$

Операции $\mathbf{e}$ и $^{-1}$ позволили Я. Ушану получить ряд определений n-арной группы в терминах операций $\mathbf{e}$ и $^{-1}$.

Интересующимся аксиоматикой n-арных групп, можно посоветовать обратиться к препринту [30], в котором приведено более шестидесяти определений n-арной группы.

Заметим, что помимо n-арной ассоциативности, фигурирующей в определениях n-арной группы и n-арной полугруппы, возможны и другие виды ассоциативных n-арных операций. Значительный вклад в изучение обобщенной ассоциативности внес Л. М. Глускин [31]. Из современных авторов, изучающих обобщенную ассоциативность, можно выделить Ф. Н. Сохацкого [32, 33].

3. Примеры n-арных групп

3.1. Пример. Определим на группе A n-арную операцию

$$[a_1 a_2 \ldots a_n] = a_1 a_2 \ldots a_n a,$$

где a – элемент из центра $Z(A)$ группы A. Так как

$$[[a_1 \ldots a_n] a_{n+1} \ldots a_{2n-1}] = (a_1 \ldots a_n a) a_{n+1} \ldots a_{2n-1} a =$$

$$= a_1 \ldots a_i (a_{i+1} \ldots a_{i+n} a) a_{i+n+1} \ldots a_{2n-1} a = [a_1 \ldots a_i [a_{i+1} \ldots a_{i+n}] a_{i+n+1} \ldots a_{2n-1}]$$

для всех $i = 1, 2, \ldots, n-1$ и всех $a_1, a_2, \ldots, a_{2n-1} \in A$, то $< A, [\,] >$ – n-арная полугруппа.

Разрешимость в A уравнений

$$[xa_2 \ldots a_n] = b, \quad [a_1 \ldots a_{n-1} y] = b$$

вытекает из разрешимости в A уравнений

$$xa_2 \ldots a_n a = b \quad \text{и} \quad a_1 \ldots a_{n-1} y a = b.$$

Следовательно, $< A, [\ ] >$ – n-арная группа.

3.2. Пример. Положив в примере 3.1 $a = 1$, получим n-арную группу $< A, [\ ] >$ с n-арной операцией

$$[a_1 a_2 \ldots a_n] = a_1 a_2 \ldots a_n,$$

которая называется *производной* n-арной группой от группы A.

В предыдущих примерах мы строили n-арную групповую операцию при помощи групповой операции на множестве, которое относительно групповой операции было группой. Следующие примеры показывают, что n-арную групповую операцию можно построить при помощи групповой операции на множестве, которое относительно групповой операции не является группой.

3.3. Пример. Пусть $1 + (n-1)Z$ – класс вычетов по модулю $n - 1$, где $n \geq 3$. Так как для любых

$$a_1 = 1 + (n-1)z_1,\ a_2 = 1 + (n-1)z_2,\ \ldots,\ a_n = 1 + (n-1)z_n \in 1 + (n-1)Z$$

верно

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 1 + (n-1)z_1 + 1 + (n-1)z_2 + \ldots + 1 + (n-1)z_n =$$

$$= 1 + n - 1 + (n-1)z_1 + (n-1)z_2 + \ldots + (n-1)z_n =$$

$$= 1 + (n-1)(1 + z_1 + z_2 + \ldots + z_n) \in 1 + (n-1)Z,$$

то класс вычетов $1 + (n-1)Z$ замкнут относительно n-арной операции

$$[a_1 a_2 \ldots a_n] = a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$

Ассоциативность n-арной операции $[\ ]$ является следствием ассоциативности операции в группе Z. Легко убедиться, что

$$x = y = 1 + (n-1)(z_n - z_1 - \ldots - z_{n-1} - 1) \in 1 + (n-1)Z$$

является решением уравнений

$$[xa_1 \ldots a_{n-1}] = a_n \quad \text{и} \quad [a_1 \ldots a_{n-1} y] = a_n.$$

Таким образом, $< 1 + (n-1)Z, [\ ] >$ – n-арная группа.

3.4. Пример. Определим на множестве T_n всех нечетных подстановок степени n тернарную операцию $[\alpha\beta\gamma] = \alpha * \beta * \gamma$, где $*$ – умножение подстановок. Так как произведение трех нечетных подстановок является нечетной подстановкой, то множество T_n замкнуто относительно тернарной операции $[\ ]$. Ассоциативность тернарной операции $[\ ]$ следует из ассоциативности бинарной операции $*$ в S_n. Ясно, что в T_n однозначно разрешимы уравнения

$$[x\alpha_2\alpha_3] = \alpha, \quad [\alpha_1 y \alpha_3] = \alpha, \quad [\alpha_1 \alpha_2 z] = \alpha.$$

Следовательно, $< T_n, [\,] >$ – тернарная группа.

Пример 3.4 обобщается следующим предложением.

3.5. Предложение. *Пусть B – подмножество группы A, удовлетворяющее следующим условиям:*

1) если $b_1, b_2, \ldots, b_n \in B$, то $b_1 b_2 \ldots b_n \in B$;

2) если $b \in B$, то $b^{-1} \in B$.

Тогда $< B, [\,] >$ – n-арная группа с n-арной операцией

$$[b_1 b_2 \ldots b_n] = b_1 b_2 \ldots b_n.$$

Доказательство. Если $b_1, b_2, \ldots, b_n \in B$, то

$$[b_1 b_2 \ldots b_n] = b_1 b_2 \ldots b_n \in B.$$

Ассоциативность n-арной операции $[\,]$ является следствием ассоциативности операции в группе A.

Для произвольных $b_1, \ldots, b_{n-1}, b \in B$ положим

$$c = b b_{n-1}^{-1} \ldots b_1^{-1}, \quad d = b_{n-1}^{-1} \ldots b_1^{-1} b.$$

Согласно 2) $b_1^{-1}, \ldots, b_{n-1}^{-1} \in B$, а согласно 1) $c, d \in B$. Так как

$$[c b_1 \ldots b_{n-1}] = c b_1 \ldots b_{n-1} = b b_{n-1}^{-1} \ldots b_1^{-1} b_1 \ldots b_{n-1} = b,$$

$$[b_1 \ldots b_{n-1} d] = b_1 \ldots b_{n-1} d = b_1 \ldots b_{n-1} b_{n-1}^{-1} \ldots b_1^{-1} b = b,$$

то в B разрешимы уравнения

$$[x b_1 \ldots b_{n-1}] = b \quad \text{и} \quad [b_1 \ldots b_{n-1} y] = b.$$

Следовательно, $< B, [\,] >$ – n-арная группа. Предложение доказано.

3.6. Следствие. *Если B – подмножество группы A, удовлетворяющее условиям 1) и 2) предложения 3.5, и n – четное, то n-арная группа $< B, [\,] >$ – производная от группы.*

Так как $b = b^{-1}$ для всякой инволюции b группы A, то справедливо

3.7. Следствие. *Если B – множество инволюций группы A, удовлетворяющее условию 1) предложения 3.5, то $< B, [\,] >$ – n-арная группа с n-арной операцией из того же предложения.*

3.8. Пример. Пусть b – элемент группы A, удовлетворяющий условию $b^{n-1} = 1$, $[\,]$ – n-арная операция, производная от операции в группе. Так как $[\underbrace{b \ldots b}_{n}] = b^{n-1} b = b$, то $< \{b\}, [\,] >$ – n-арная группа.

3.9. Пример. Если b – инволюция группы A, то есть $b^2 = 1$, то $< \{b\}, [\,] >$ – тернарная группа с тернарной операцией, производной от операции в группе.

Большое число примеров тернарных групп доставляют группы движений.

3.10. Пример. Любое движение плоскости является либо параллельным переносом $T_{\overline{a}}$ на некоторый вектор $\overline{a}$, либо поворотом R_o^{α} вокруг некоторой точки O на угол α, либо скользящим отражением $S_l^a = T_{\overline{a}} S_l = S_l T_{\overline{a}}$ относительно некоторого вектора $\overline{a}$ и некоторой прямой l, где S_l – отражение относительно прямой l. Ясно, что $S_l^a = S_l$ при $\overline{a} = 0$. Параллельные переносы и повороты называют движениями первого рода, а скользящие отражения – движениями второго рода. Известно также, что: произведение двух движений первого рода является движением первого рода; произведение движений первого и второго рода – движением второго рода; произведение двух движений второго рода – движением первого рода. Обозначим через $E_2(2)$ – множество всех движений второго рода плоскости и определим на $E_2(2)$ тернарную операцию $[s_1s_2s_3] = s_1s_2s_3$. Используя приведенные свойства произведений движений и рассуждая так же, как в примере 3.4, можно показать, что $< E_2(2), [\ ] >$ – тернарная группа.

Аналогично устанавливается, что множество $E_2(3)$ всех движений второго рода пространства также является тернарной группой.

3.11. Пример. Всякий поворот прямой в некоторой плоскости на угол 180^o вокруг любой точки этой прямой является инволюцией в группе всех самосовмещений прямой в выбранной плоскости. Кроме того, произведение трех таких поворотов снова является поворотом на 180^o. Поэтому, согласно следствию 3.7, множество всех поворотов прямой на 180^o в фиксированной плоскости является тернарной группой с тернарной операцией, производной от операции в группе.

3.12. Пример. Известно, что для любых трех прямых a, b, c, лежащих в одной плоскости и проходящих через точку O, существует прямая d, лежащая в той же плоскости и проходящая через точку O, и такая, что $S_aS_bS_c = S_d$. А так как, кроме того, всякое отражение вида S_a является инволюцией в группе всех движений плоскости, то, согласно следствию 3.7, множество всех отражений вида S_a относительно прямых, лежащих в выбранной плоскости и проходящих через общую точку, является тернарной группой с тернарной операцией, производной от операции в группе.

В следующем примере все прямые также лежат в одной плоскости.

3.13. Пример. Известно, что если прямые a, b, c перпендикулярны прямой l, то существует прямая d, перпендикулярная l, и такая, что $S_aS_bS_c = S_d$. Таким образом, снова, согласно следствию 3.7, заключаем, что множество всех отражений вида S_a относительно прямых, перпендикулярных одной прямой, является тернарной группой с тернарной операцией, производной от операции в группе.

3.14. Пример. Пусть D_n – диэдральная группа, то есть полная группа преобразований симметрии правильного n-угольника. Поворот c n-угольника в его плоскости на угол $2\pi/n$ вокруг центра n-угольника порождает циклическую подгруппу

$$C_n =< c >= \{e, c, c^2, \ldots, c^{n-1}\}$$

поворотов. Диэдральная группа содержит еще n отражений. Если b – отражение, то

$$B_n = \{b, bc, \ldots, bc^{n-1}\} = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$$

есть множество всех отражений.

Определим на B_n тернарную операцию $[\varphi\psi\theta] = \varphi\psi\theta$. Так как произведение двух отражений является поворотом, то $\varphi\psi$ – поворот. А так как произведение поворота на отражение является отражением, то $[\varphi\psi\theta] = \varphi\psi\theta$ – отражение. Следовательно, множество B_n замкнуто относительно тернарной операции $[\ ]$.

Ассоциативность тернарной операции $[\ ]$ вытекает из ассоциативности бинарной операции в диэдральной группе.

Рассмотрим в B_n уравнение $[x\psi\theta] = \tau$, которое равносильно уравнению $x\psi\theta = \tau$. Последнее уравнение имеет в D_n решение $x = \varphi$. Если φ – поворот, то $\varphi\psi\theta = \tau$ – поворот, что противоречит выбору $\tau \in B_n$. Аналогично доказывается разрешимость в B_n уравнений

$$[\varphi y\theta] = \tau, \quad [\varphi\psi z] = \tau.$$

Таким образом, $< B_n, [\,] >$ – тернарная группа.

В n-арных группах сплошь и рядом возникают ситуации, невозможные в группах. Например, группа, из-за наличия в каждой ее подгруппе единичного элемента, не может быть объединением своих непересекающихся подгрупп. Иная картина наблюдается в теории n-арных групп. Здесь n-арная группа может быть объединением своих непересекающихся n-арных подгрупп.

3.15. Пример. Тернарная группа, производная от унимодулярной группы всех матриц порядка n с определителем, равным ± 1, и элементами из некоторого поля, является объединением своих непересекающихся тернарных подгрупп: тернарной группы, производной от специальной линейной группы степени n над тем же полем и тернарной подгруппы всех матриц с определителем, равным -1.

Аналогично, тернарная группа $< S_n, [\,] >$, производная от симметрической группы S_n, является объединением тернарной группы $< A_n, [\,] >$, производной от знакопеременной группы A_n, и тернарной группы $< T_n, [\,] >$ из примера 3.4. Ясно, что множества A_n и T_n не имеют общих элементов.

Не имеют общих элементов также тернарная группа $< C_n, [\,] >$, производная от циклической группы C_n поворотов правильного n-угольника и тернарная группа отражений $< B_n, [\,] >$ из примера 3.14. Объединение тернарных групп $< C_n, [\,] >$ и $< B_n, [\,] >$ совпадает с тернарной группой $< D_n, [\,] >$, производной от диэдральной группы D_n.

Для построения дальнейших примеров нам понадобится следующее утверждение.

3.16. Предложение [17]. *Если $a^{n-1} = 1$ для некоторого элемента a тела T, где $n \geq 2$, то $< T, [\,] >$ – n-арная группа с n-арной операцией*

$$[x_1 x_2 \ldots x_n] = x_1 + a x_2 + \ldots + a^{n-2} x_{n-1} + x_n.$$

3.17. Пример [2]. Пусть $T = C$ – поле всех комплексных чисел,

$$\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n-1} + i\sin\frac{2\pi}{n-1} \in C.$$

Так как $\varepsilon^{n-1} = 1$, то, по предыдущему предложению $< C, [\,] >$ – n-арная группа с n-арной операцией

$$[z_1 z_2 \ldots z_n] = z_1 + \varepsilon z_2 + \ldots + \varepsilon^{n-2} z_{n-1} + z_n.$$

3.18. Пример. Пусть снова $T = C$. Так как $i^4 = 1$, то, согласно предложению 3.16, $< C, [\,] >$ – 5-арная группа с 5-арной операцией

$$[z_1 z_2 z_3 z_4 z_5] = z_1 + i z_2 - z_3 - i z_4 + z_5.$$

3.19. Пример. Пусть H – тело кватернионов. Так как

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1; \quad i^3 = -i, \quad j^3 = -j, \quad k^3 = -k; \quad i^4 = j^4 = k^4 = 1,$$

то, согласно предложению 3.16, $< H, [\,]_i >$, $< H, [\,]_j >$ и $< H, [\,]_k >$ – 5-арные группы с 5-арными операциями

$$[x_1 x_2 x_3 x_4 x_5]_i = x_1 + i x_2 - x_3 - i x_4 + x_5,$$
$$[x_1 x_2 x_3 x_4 x_5]_j = x_1 + j x_2 - x_3 - j x_4 + x_5,$$
$$[x_1 x_2 x_3 x_4 x_5]_k = x_1 + k x_2 - x_3 - k x_4 + x_5.$$

4. n-арные аналоги единицы и обратного элемента

Следующие три определения обобщают на n-арный случай определение единицы группы A, как элемента $e \in A$ такого, что $ea = ae = a$ для любого $a \in A$.

4.1. Определение [5]. Элемент $e \in A$ n-арной группы $< A, [\ ] >$ называется *единицей* этой n-арной группы, если для любого $a \in A$ и любого $i = 1, 2, \ldots, n$ верно

$$[\underbrace{e \ldots e}_{i-1} a \underbrace{e \ldots e}_{n-i}] = a.$$

4.2. Определение [5]. Элемент $\varepsilon \in A$ n-арной группы $< A, [\ ] >$ называется её *идемпотентом*, если $[\underbrace{\varepsilon \ldots \varepsilon}_{n}] = \varepsilon$.

Легко проверяется, что элемент ε является идемпотентом тогда и только тогда, когда выполняется условие $[\underbrace{\varepsilon \ldots \varepsilon}_{n-1} a] = [a \underbrace{\varepsilon \ldots \varepsilon}_{n-1}] = a$ для некоторого $a \in A$. Ясно, что единица n-арной группы является и ее идемпотентом.

4.3. Определение [5]. Последовательность $e_1 \ldots e_{k(n-1)}$, где $k \geq 1$, элементов n-арной группы $< A, [\ ] >$ называется *нейтральной*, если $[e_1 \ldots e_{k(n-1)} a] = [a e_1 \ldots e_{k(n-1)}] = a$ для любого $a \in A$.

Ясно, что если ε – идемпотент, в частности, единица n-арной группы, то последовательности

$$\underbrace{\varepsilon \ldots \varepsilon}_{n-1}, \ \underbrace{\varepsilon \ldots \varepsilon}_{2(n-1)}, \ \ldots, \underbrace{\varepsilon \ldots \varepsilon}_{k(n-1)}, \ldots$$

являются нейтральными.

4.4. Пример. Пусть $< A, [\ ] >$ – n-арная группа, производная от бинарной группы A (пример 3.2). Если e – единица группы, то для любого $a \in A$ и любого $i = 1, 2, \ldots, n$ верно

$$[\underbrace{e \ldots e}_{i-1} a \underbrace{e \ldots e}_{n-i}] = e^{i-1} a e^{n-i} = a,$$

то есть e – единица n-арной группы $< A, [\ ] >$.

В. Дернте установил [2], что верно и обратное утверждение: n-арная группа, обладающая единицей, является производной от группы.

В n-арной группе при $n > 2$, в отличие от групп, может быть несколько единиц. Более того, существуют n-арные группы, в которых все элементы являются единицами. Из следующего примера вытекает, что существуют n-арные группы ($n > 2$) любого конечного порядка, в которых вообще нет единиц.

4.5. Пример. Покажем, что в тернарной группе $< B_n, [\ ] >$ из примера 3.14 все элементы являются идемпотентами, среди которых нет единиц.

Так как произведение любого отражения на себя является тождественным преобразованием, то $[\varphi\varphi\varphi] = \varphi\varphi\varphi = \varphi$ для любого $\varphi \in B_n$, то есть все элементы в $< B_n, [\ ] >$ являются идемпотентами.

Для того, чтобы установить, что в $< B_n, [\ ] >$ нет единицы, покажем, что для любого $\varphi \in B_n$ ($n > 2$) существует $\psi \in B_n$ такой, что $[\varphi\psi\varphi] \neq \psi$. Если $\varphi = b$, то, положив $\psi = bc$ и используя равенство $bc^i = c^{n-i}b$, получим

$$[\varphi\psi\varphi] = \varphi\psi\varphi = bbcb = cb = bc^{n-1} \neq bc = \psi$$

Если же $\varphi = bc^i$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$, то, положив $\psi = bc^{i+1}$, получим

$$[\varphi\psi\varphi] = \varphi\psi\varphi = bc^i bc^{i+1} bc^i = bc^i c^{n-i-1} bbc^i = bc^{n-1} c^i = bc^{i-1} \neq bc^{i+1} = \psi.$$

Следовательно, в $< B_n, [\ ] >$ нет единиц.

Существуют n-арные группы, в которых нет не только единиц, но и идемпотентов.

4.6. Пример. Пусть $R = \{1, a, a^2, a^3, b, ba, ba^2, ba^3\}$ – группа кватернионов. На множестве R определим 5-арную операцию $[\ ]$ через бинарную операцию группы R следующим образом:

$$[x_1 x_2 \ldots x_5] = x_1 x_2 \ldots x_5 a^2.$$

Так как $Z(R) = \{1, a^2\}$ – центр группы R, то $< R, [\ ] >$ – 5-арная группа (см. пример 3.1).

Используя выполняющиеся в группе кватернионов тождества $a^4 = 1, a^2 = b^2, ab = ba^3$, можно показать, что 5-арная группа $< R, [\ ] >$ не обладает идемпотентами. Отметим, что 5-арная группа $< R, [\ ] >$ была построена С. А. Русаковым [14]. Он первым установил существование гамильтоновых n-арных групп без единицы, где $n = 4k + 1$.

Пример 4.6 можно обобщить.

4.7. Пример. Пусть A – группа экспоненты $n-1$, $a \in Z(A)$, $a \neq 1$. В примере 3.1 установлено, что $< A, [\ ] >$ – n-арная группа с n-арной операцией

$$[a_1 a_2 \ldots a_n] = a_1 a_2 \ldots a_n a.$$

Если x – произвольный элемент из A, то

$$[\underbrace{x \ldots x}_{n}] = \underbrace{x \ldots x}_{n} a = x^{n-1} x a = xa \neq x,$$

так как $a \neq 1$. Таким образом, $[\underbrace{x \ldots x}_{n}] \neq x$ для любого $x \in A$ и, следовательно, $< A, [\ ] >$ не содержит идемпотентов. Отметим, что в предыдущем примере $\mathrm{Exp}\, R = 4 = 5 - 1$.

4.8. Предложение. *Для элемента e n-арной группы $< A, [\ ] >$ следующие утверждения эквивалентны:*

1) e – единица в $< A, [\ ] >$;

2) $[a \underbrace{e \ldots e}_{n-1}] = [ea \underbrace{e \ldots e}_{n-2}] = a$ для любого $a \in A$;

3) $[\underbrace{e \ldots e}_{n-1} a] = [\underbrace{e \ldots e}_{n-2} ae] = a$ для любого $a \in A$.

4.9. Предложение. *Если $< A, [\ ] >$ – n-арная группа, $e_1, \ldots, e_{k(n-1)} \in A$, $k \geq 1$, то следующие утверждения эквивалентны:*

1) последовательность $e_1 \ldots e_{k(n-1)}$ – нейтральная;

2) существует элемент $a \in A$ такой, что $[e_1 \ldots e_{k(n-1)} a] = a$;

3) существует элемент $a \in A$ такой, что $[a e_1 \ldots e_{k(n-1)}] = a$.

В любой n-арной группе существуют нейтральные последовательности, но определяются они неоднозначно.

Иногда, для сокращения записей, последовательности элементов будем обозначать малыми греческими буквами: $a_1 \ldots a_i = \alpha$.

4.10. Предложение. *Справедливы следующие утверждения:*

1) если $\alpha\beta$ – нейтральная последовательность n-арной группы, то $\beta\alpha$ – также нейтральная последовательность этой же n-арной группы;

2) если α и β – нейтральные последовательности n-арной группы, то $\alpha\beta$ и $\beta\alpha$ – также нейтральные последовательности этой же n-арной группы.

Понятия нейтральной последовательности и единицы n-арной группы являются частными случаями следующего определения.

4.11. Определение [20]. Последовательность $e_1 \ldots e_{m-1}$ элементов n-арной группы $< A, [\ ] >$ называется *m-нейтральной* ($n = k(m-1)+1, k \geq 1$), если

$$[\underbrace{e_1 \ldots e_{m-1} \ldots e_1 \ldots e_{m-1}}_{i-1} x \underbrace{e_1 \ldots e_{m-1} \ldots e_1 \ldots e_{m-1}}_{k-i+1}] = x$$

для любого $x \in A$ и любого $i = 1, \ldots, k+1$.

Если в этом определении положить $m = n$, то $k = 1$, $i = 1$ или 2,

$$[e_1 \ldots e_{n-1} x] = x, \quad [x e_1 \ldots e_{n-1}] = x.$$

Следовательно, n-нейтральные последовательности элементов n-арной группы – это в точности ее нейтральные последовательности.

Если в определении 4.11 положить $m = 2$, то $k = n-1, i = 1, \ldots, k+1 = n$,

$$[\underbrace{e_1 \ldots e_1}_{i-1} x \underbrace{e_1 \ldots e_1}_{n-i}] = x.$$

Следовательно, единицы n-арной группы – это в точности ее 2-нейтральные последовательности.

Одним определением можно объединить также понятия идемпотента и единицы n-арной группы.

4.12. Определение [20]. Элемент ε n-арной группы $< A, [\ ] >$, где $n = k(m-1)+1$, $k \geq 1$, называется *m-идемпотентом*, если

$$[\underbrace{\underbrace{\varepsilon \ldots \varepsilon}_{m-1} \ldots \underbrace{\varepsilon \ldots \varepsilon}_{m-1}}_{i-1} x \underbrace{\underbrace{\varepsilon \ldots \varepsilon}_{m-1} \ldots \underbrace{\varepsilon \ldots \varepsilon}_{m-1}}_{k-i+1}] = x$$

для любого $x \in A$ и любого $i = 1, \ldots, k+1$.

Легко проверяется, что n-идемпотенты n-арной группы – это в точности ее идемпотенты, а 2-идемпотенты – это в точности ее единицы. Ясно также, что элемент ε n-арной группы является её m-идемпотентом тогда и только тогда, когда последовательность $\underbrace{\varepsilon \ldots \varepsilon}_{m-1}$ является m-нейтральной.

Следующее определение обобщает на n-арный случай понятие обратного элемента группы.

4.13. Определение [5]. Последовательность β элементов n-арной группы $< A, [\ ] >$ называется *обратной* к последовательности α элементов из A, если последовательности $\alpha\beta$ и $\beta\alpha$ являются нейтральными.

Ясно, что если β – обратная к α, то α – обратная к β. Для любой последовательности α элементов n-арной группы существует обратная последовательность β. Причем, обратная последовательность, длина которой больше единицы, определяется неоднозначно.

Следствием утверждения 1) предложения 4.10 является

4.14. Предложение. *Если α и β – последовательности элементов n-арной группы, то следующие утверждения равносильны:*

1) β – обратная к α;

2) $\alpha\beta$ – нейтральная;

3) $\beta\alpha$ – нейтральная.

4.15. Предложение. *Пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ – последовательности, составленные из элементов n-арной группы $< A, [\ ] >$, и пусть $\beta_1, \dots, \beta_r$ – последовательности, обратные соответственно данным. Тогда $\beta_r \dots \beta_1$ – обратная последовательность для последовательности $\alpha_1 \dots \alpha_r$.*

Еще одним n-арным аналогом обратного элемента является косой элемент.

4.16. Определение [2]. Элемент b n-арной группы $< A, [\ ] >$ называется *косым* элементом для элемента $a \in A$, если $[\underbrace{a \dots a}_{i-1} b \underbrace{a \dots a}_{n-i}] = a$ для любого $i = 1, 2, \dots, n$.

Если b – косой элемент для a, то употребляют обозначение $b = \overline{a}$. Согласно определению, $[\underbrace{a \dots a}_{i-1} \overline{a} \underbrace{a \dots a}_{n-i}] = a$ для любого $i = 1, 2, \dots, n$. Легко проверяется, что элемент $\overline{a}$ совпадает с решением уравнения $[\underbrace{a \dots a}_{i-1} x \underbrace{a \dots a}_{n-i}] = a$ для фиксированного $i = 1, 2, \dots, n$ и определяется однозначно. Из определения 4.16 и предложения 4.9 вытекает, что последовательность $\underbrace{a \dots a}_{i-1} \overline{a} \underbrace{a \dots a}_{n-i-1}$ является нейтральной для любого $i = 1, 2, \dots, n-1$. Понятно, что всякий идемпотент n-арной группы совпадает со своим косым.

4.17. Пример. Укажем косые элементы для каждого элемента 5-арной группы из примера 4.6: $\overline{1} = a^2$, $\overline{a} = a^3$, $\overline{a^2} = 1$, $\overline{a^3} = a$, $\overline{b} = ba^2$, $\overline{ba} = ba^3$, $\overline{ba^2} = b$, $\overline{ba^3} = ba$.

4.18. Предложение [20]. *Если $< A, [\ ] >$ – n-арная группа $(n \geq 3)$, то справедливы следующие утверждения:*

1) для любых $a_1, \dots, a_n \in A$ верно

$$\overline{[a_1, \dots, a_n]} = [\underbrace{\overline{a_n} \underbrace{a_n \dots a_n}_{n-3} \dots \overline{a_1} \underbrace{a_1 \dots a_1}_{n-3} \dots \overline{a_n} \underbrace{a_n \dots a_n}_{n-3} \dots \overline{a_1} \underbrace{a_1 \dots a_1}_{n-3}}_{n-2}].$$

В частности, если $n = 3$, то $[\overline{abc}] = [\overline{c}\overline{b}\overline{a}]$.

2) для любого $a \in A$ верно $\overline{\overline{a}} = [\underbrace{a \quad \dots \quad a}_{(n-3)(n-1)+1}]$. В частности, если $n = 3$, то $\overline{\overline{a}} = a$.

5. n-арная подгруппа единиц

Так как в n-арной группе, в отличие от группы, может быть несколько единиц, то возникает задача изучения множества $E(A)$ всех единиц произвольной n-арной группы $< A, [\ ] >$.

5.1. Теорема [34, 35]. *Если $E(A) \neq \varnothing$, то $< E(A), [\ ] >$ – характеристическая n-арная подгруппа n-арной группы $< A, [\ ] >$, лежащая в её центре.*

Ясно, что если $e \in E(A)$, то $< \{e\}, [\ ] >$ – n-арная подгруппа в $< E(A), [\ ] >$. В n-арной подгруппе единиц могут существовать n-арные подгруппы, отличные от одноэлементных и от самой $< E(A), [\ ] >$. Например, как установлено в [34, 35], если e_1 и e_2 – единицы тернарной группы $< A, [\ ] >$, то $< \{e_1, e_2\}, [\ ] >$ – тернарная подгруппа тернарной группы $< E(A), [\ ] >$. Отсюда вытекает, что если конечная тернарная группа содержит более одной единицы, то её n-арная подгруппа единиц, её центр и она сама имеют четные порядки. В [34, 35] также установлено, что если a, b, c – три различные единицы тернарной группы $< A, [\,] >$, то $< \{a, b, c, [abc], [\,]\} >$ – тернарная подгруппа четвертого порядка в $< E(A), [\,] >$.

5.2. Теорема [34, 35]. *Пусть $< A, [\,] >$ – n-арная группа, производная от группы A, $Z(A)$ – центр группы A, e – единица группы A. Тогда $E(A) = \{z \in Z(A) \,|\, z^{n-1} = e\}$.*

5.3. Следствие. *Если $< A, [\,] >$ – n-арная группа, производная от абелевой группы A, e – единица группы A, то $E(A) = \{a \in A \,|\, a^{n-1} = e\}$.*

5.4. Пример. Пусть C^* – мультипликативная группа комплексных чисел. Так как она абелева, то, согласно следствию 5.3, n-арная подгруппа единиц n-арной группы $< C^*, [\,] >$, производной от группы C^*, имеет вид

$$E(C^*) = \{z \in C^* | z^{n-1} = 1\} = \{\cos \frac{2k\pi}{n-1} + i \sin \frac{2k\pi}{n-1} \,|\, k = 0, 1, \ldots, n-2\},$$

то есть имеет ровно $n - 1$ единиц.

5.5. Пример. Пусть $< C_{p^\infty}, [\,] >$ – (p^k+1)-арная группа $(k = 1, 2, \ldots)$, производная от квазициклической группы C_{p^∞}. Так как C_{p^∞} – абелева и содержит единственную циклическую подгруппу Z_{p^k} порядка p^k, то

$$E(C_{p^\infty}) = \{a \in C_{p^\infty} \,|\, a^{p^k} = 1\} = Z_{p^k},$$

то есть в $< C_{p^\infty}, [\,] >$ ровно p^k единиц.

5.6. Пример. Пусть $< Z_k, [\,] >$ – $(m+1)$-арная группа, производная от циклической группы Z_k порядка k, где m делит k. Так как Z_k – абелева и содержит единственную циклическую подгруппу Z_m порядка m, то

$$E(Z_k) = \{a \in Z_k \,|\, a^m = 1\} = Z_m,$$

то есть в $< Z_k, [\,] >$ ровно m единиц.

5.7. Следствие. *В n-арной группе $< Z_{n-1}, [\,] >$, производной от циклической группы Z_{n-1} порядка $n - 1$, все элементы являются единицами.*

5.8. Пример. Так как A_3 – циклическая группа третьего порядка, то, согласно следствию 5.7, в 4-арной группе $< A_3, [\,] >$, производной от группы A_3, все три элемента являются единицами.

5.9. Следствие. *Пусть центр $Z(A)$ группы A имеет период $n - 1$, $< A, [\,] >$ – n-арная группа, производная от группы A. Тогда $Z(A) = E(A)$.*

5.10. Пример. Пусть $< R, [\,] >$ – тернарная группа, производная от группы кватернионов, $R = \{1, a, a^2, a^3, b, ba, ba^2, ba^3\}$. Так как $Z(R) = \{1, a^2\}$ – циклическая группа второго порядка, то, согласно следствию 5.9, тернарная группа $< R, [\,] >$ имеет ровно две единицы 1 и a^2.

5.11. Пример. Так как при четных n, центр $Z(D_n)$ диэдральной группы D_n включает помимо единицы e ещё и поворот на угол π, то, согласно следствию 5.9, тернарная группа $< D_n, [\,] >$ при четном n имеет ровно две единицы.

5.12. Следствие. *n-арная группа $< A, [\,] >$, производная от группы A с тривиальным центром $Z(A) = \{e\}$, обладает единственной единицей e.*

5.13. Пример. Так как $Z(S_n) = \{e\}$ при $n \geq 3$, то, согласно следствию 5.12, производная m-арная группа $< S_n, [\,] >$ при $n \geq 3, m \geq 3$ обладает единственной единицей.

5.14. Пример. Так как $Z(A_n) = \{e\}$ при $n \geq 4$, то, согласно следствию 5.12, производная m-арная группа $< A_n, [\,] >$ при $n \geq 4, m \geq 3$ обладает единственной единицей.

5.15. Пример. Так как $Z(D_n) = \{e\}$ при нечетном n, то, согласно следствию 5.12, производная m-арная группа $< D_n, [\,] >$ при нечетном n и $m \geq 3$ обладает единственной единицей.

Примерами n-арных групп с пустой n-арной подгруппой единиц являются тернарная группа $< B_n, [\,] >$ из примера 4.5 и, как несложно установить, тернарная группа $< T_n, [\,] >$ всех нечётных подстановок степени n из примера 3.4.

5.16. Теорема [34]. *Если n-арная подгруппа единиц $< E(A), [\,] >$ n-арной группы $< A, [\,] >$ является конечной, m – делитель порядка $|E(A)|$, то $< E(A), [\,] >$ является объединением непересекающихся инвариантных в $< A, [\,] >$ n-арных подгрупп порядка m.*

Следующая теорема обеспечивает единственность разложения тернарной группы единиц.

5.17. Теорема [34]. *Если n-арная подгруппа единиц $< E(A), [\,] >$ n-арной группы $< A, [\,] >$ является конечной порядка km, где $(k, m) = 1$, то в $< E(A), [\,] >$ существует ровно m n-арных подгрупп $< P_1, [\,] >, \ldots, < P_m, [\,] >$ порядка k. Причем*

$$E(A) = \bigcup_{i=1}^{m} P_i, \; P_i \bigcap P_j = \varnothing (i \neq j). \tag{7}$$

5.18. Следствие [34]. *Если n-арная подгруппа единиц $< E(A), [\,] >$ n-арной группы $< A, [\,] >$ является конечной порядка $p^k m$, где $(p, m) = 1$, то в $< E(A), [\,] >$ существует ровно m p-силовских n-арных подгрупп $< P_1, [\,] >, \ldots, < P_m, [\,] >$. Причем верно (7).*

6. Идемпотенты в n-арной группе

Для всякой n-арной группы $< A, [\,] >$ обозначим через $I(A)$ множество всех её идемпотентов. Ясно, что $E(A) \subseteq I(A)$. Если же $< A, [\,] >$ – абелева, то $E(A) = I(A)$, и, согласно теореме 5.1, $< I(A), [\,] >$ – n-арная подгруппа абелевой n-арной группы $< A, [\,] >$.

6.1. Пример. Так как полиадические группы $< C^*, [\,] >$, $< C_{p^\infty}, [\,] >$ и $< Z_k, [\,] >$ из примеров 5.4, 5.5 и 5.6 абелевы, то

$$I(C^*) = \{\cos \frac{2k\pi}{n-1} + i \sin \frac{2k\pi}{n-1} \,|\, k = 0, 1, \ldots, n-2\}, \; I(C_{p^\infty}) = Z_{p^k}, \; I(Z_k) = Z_m.$$

Приведем примеры, показывающие, что множество всех идемпотентов n-арной группы в общем случае не образует в ней n-арную подгруппу.

6.2. Пример. Пусть $< S_3, [\,] >$ – тернарная группа, производная от симметрической группы S_3. Легко проверяется, что $I(S_3) = \{e, \alpha, \beta, \gamma\}$, где e – тождественная подстановка; α, β и γ – нечётные подстановки. Так как $|S_3| = 6, |I(S_3)| = 4$, и 4 не делит 6, то множество $I(S_3)$ не образует в $< S_3, [\,] >$ тернарную подгруппу.

Пример 6.2 обобщается следующим образом.

6.3. Пример. Пусть $< D_n, [\,] >$ – тернарная группа, производная от диэдральной группы D_n. Все отражения правильного n-угольника образуют в $< D_n, [\,] >$ тернарную подгруппу $< B_n, [\,] >$, все элементы которой, как установлено выше, являются идемпотентами. Следовательно, $B_n \subseteq I(D_n)$.

Предположим, что поворот $\varphi \in C_n$ является идемпотентом в $< D_n, [\ ] >$, то есть $[\varphi\varphi\varphi] = \varphi$, откуда $\varphi\varphi\varphi = \varphi$; $\varphi^2 = e$, где e – тождественный поворот. Так как C_n – циклическая группа порядка n, то при нечётном n только единица удовлетворяет последнему равенству, а при чётном n в C_n имеется ещё один поворот $\varphi \neq e$ такой, что $\varphi^2 = e$. Таким образом,

$$I(D_{2k+1}) = \{e\} \bigcup B_{2k+1}, \quad I(D_{2k}) = \{e, \varphi\} \bigcup B_{2k}, \quad \text{где} \quad \varphi^2 = e.$$

Так как $|D_n| = 2n$, $|I(D_n)| = n + 1$ при нечётном n, и $|I(D_n)| = n + 2$ при чётном n, то множество всех идемпотентов тернарной группы $< D_n, [\ ] >$ при $n > 2$ не образует в ней тернарную подгруппу.

Легко проверяется [36, 37], что n-арная подгруппа единиц $< E(A), [\ ] >$ n-арной группы $< A, [\ ] >$, ее центр $< Z(A), [\ ] >$ и множество $I(A)$ связаны равенством $E(A) = I(A) \bigcap Z(A)$.

Прежде чем сформулировать следующую теорему, напомним, что квадратная матрица называется подстановочной над полем F, если в каждой строке и каждом столбце этой матрицы ровно один элемент совпадает с единицей поля F, а все остальные элементы равны нулю этого же поля.

6.4. Теорема [36]. *Справедливы следующие утверждения:*

1) если $< GL_n(F), [\ ] >$ – $(n! + 1)$-арная группа, производная от полной линейной группы $GL_n(F)$, то множество всех подстановочных матриц над F образует в $< GL_n(F), [\ ] >$ $(n! + 1)$-арную подгруппу, лежащую в $I(GL_n(F))$;

2) если $< SL_n(F), [\ ] >$ – $(n!/2 + 1)$-арная группа, производная от специальной линейной группы $SL_n(F)$, то множество всех подстановочных матриц над F с определителем равным единице образует в $< SL_n(F), [\ ] >$ $(n!/2 + 1)$-арную подгруппу, лежащую в $I(SL_n(F))$.

6.5. Предложение [36]. *Если $< A, [\ ] >$ – n-арная группа, производная от группы A, e – единица группы A, то $I(A) = \{b \in A | b^{n-1} = e\}$.*

6.6. Пример. Пусть $< \Gamma, [\ ] >$ – тернарная группа, производная от группы Γ всех движений плоскости. Согласно следствию 6.5, $I(\Gamma) = \{\gamma \in \Gamma | \gamma^2 = e\}$. Поэтому все элементы множества $I(\Gamma)$ исчерпываются всеми отражениями, всеми поворотами на угол π и всеми произведениями отражения на сдвиг, перпендикулярный оси отражения.

6.7. Пример. Пусть $< GL_n(q), [\ ] >$ – q-арная группа, где $q > 2$, производная от полной линейной группы $GL_n(q)$ над конечным полем $F(q)$, содержащим q элементов. Так как $|Z(GL_n(q))| = q - 1$, то по теореме 5.2

$$E(GL_n(q)) = Z(GL_n(q)) = \{\alpha E_n \,|\, \alpha \in F(q), \alpha \neq 0\},$$

то есть $E(GL_n(q))$ состоит из всех скалярных матриц, содержащихся в $GL_n(q)$.

Покажем, что в $< GL_n(q), [\ ] >$ имеются идемпотенты, не являющиеся единицами. Для этого обозначим через $\mathbf{D}$ множество всех диагональных матриц с ненулевыми элементами из $F(q)$ на главной диагонали, то есть

$$\mathbf{D} = \{diag(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \,|\, \alpha_i \in F(q), \alpha_i \neq 0\}.$$

Так как

$$(diag(\alpha_1, \ldots, \alpha_n))^{q-1} = diag(\alpha_1^{q-1}, \ldots, \alpha_n^{q-1}) = diag(1, \ldots, 1) = E_n,$$

то по предложению 6.5, $\mathbf{D} \subseteq I(GL_n(q))$.

Ясно, что $E(GL_n(q)) \subseteq \mathbf{D}$, а при $q > 1$ $E(GL_n(q)) \subset \mathbf{D}$.

Отметим, что в $< GL_n(q), [\,] >$ могут быть идемпотенты, не являющиеся диагональными матрицами. Например, в 4-арной группе $< GL_3(4), [\,] >$ элементы

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

являются идемпотентами.

6.8. Пример. Пусть $< SL_n(q), [\,] >$ – m-арная группа, где $m = 1 + (n, q-1)$, производная от специальной линейной группы $SL_n(q)$ над $F(q)$. Так как $|Z(SL_n(q))| = (n, q-1) = m-1$, то по теореме 5.2

$$E(SL_n(q)) = Z(SL_n(q)) = \{\alpha E_n \,|\, \alpha \in F(q),\, \alpha^n = 1\}.$$

В частности, если q – нечётное, то

$$E(SL_2(q)) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Так как определители матриц из примера 6.7 равны единице поля, то обе они являются идемпотентами в $< SL_3(4), [\,] >$, но не являются в ней единицами. Поэтому в общем случае множества $E(SL_n(q))$ и $I(SL_n(q))$ не совпадают.

Отметим также, что если $q-1 < n$, то идемпотентами в $< SL_n(q), [\,] >$, отличными от единиц, являются также диагональные матрицы, у которых на главной диагонали $q-1$ элементов равны $\alpha \in F(q)$, где $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 1$, а остальные элементы на главной диагонали равны единице поля.

Из предложения 6.5 вытекает, что если $< A, [\,] >$ – n-арная группа, производная от группы A с тождеством $x^{n-1} = e$, в частности, от конечной группы порядка $n-1$, то $I(A) = A$.

n-арная группа $< A, [\,] >$, для которой $I(A) = A$, называется *идемпотентной.* Другими словами, идемпотентная n-арная группа – это n-арная группа, в которой все элементы являются идемпотентами.

Идемпотентные n-арные группы могут служить примером того, как далеко иногда могут отстоять друг от друга бинарный прототип и его n-арный аналог. Если при $n = 2$ идемпотентные n-арные группы – это одноэлементные группы, не требующие специального изучения, то при $n > 2$ идемпотентные n-арные группы составляют нетривиальное многообразие, которое в многообразии всех n-арных групп выделяется тождеством

$$[\underbrace{x \ldots x}_{n}] = x.$$

Свойства n-арных групп из этого многообразия подробно изучались в [36 – 38].

В идемпотентной n-арной группе $< A, [\,] >$ n-арная подгруппа единиц и центр совпадают: $E(A) = Z(A)$.

Среди идемпотентных n-арных групп с непустой n-арной подгруппой единиц представляют интерес те из них, для которых $|E(A)| = 1$, то есть содержащие только одну единицу.

6.9. Предложение [36]. *n-арная группа $< A, [\,] >$, производная от группы A с тождеством $a^{n-1} = e$ и тривиальным центром, является идемпотентной с единственной единицей.*

6.10. Пример. Так как $Z(S_n) = \{e\}$ при $n \geq 3$, то, согласно предложению 6.9, производная $(n! + 1)$-арная группа $< S_n, [\,] >$ при $n \geq 3$ является идемпотентной с единственной единицей.

6.11. Пример. Так как $Z(A_n) = \{e\}$ при $n \geq 4$, то, согласно предложению 6.9, производная $(n!/2 + 1)$-арная группа $< A_n, [\,] >$ при $n \geq 4$ является идемпотентной с единственной единицей.

6.12. Пример. Так как $Z(D_n) = \{e\}$ при нечётном n, то, согласно предложению 6.9, производная $(2n+1)$-арная группа $< D_n, [\,] >$ при нечётном n является идемпотентной с единственной единицей.

6.13. Пример. Так как $Z(PGL_n(F(q))) = \{e\}$, то, согласно предложению 6.9, производная $(m + 1)$-арная группа $< PGL_n(F(q)), [\,] >$, где

$$m = |PGL_n(F(q))| = \frac{1}{q-1}\prod_{i=0}^{n-1}(q^n - q^i),$$

является идемпотентной с единственной единицей.

6.14. Пример. Так как $Z(PSL_n(F(q))) = \{e\}$, то, согласно предложению 6.9, производная $(m + 1)$-арная группа $< PSL_n(F(q)), [\,] >$, где

$$m = |PSL_n(F(q))| = \frac{1}{(q-1)(n, q-1)}\prod_{i=0}^{n-1}(q^n - q^i),$$

является идемпотентной с единственной единицей.

Приведём пример бесконечной идемпотентной полиадической группы с единственной единицей.

6.15. Пример. Пусть $B(m, n)$ – бесконечная группа с m порождающими и тождеством $x^n = e$ $(m \geq 1, n \geq 665, n$ – нечётное), построенная С. И. Адяном [39]. По теореме 3.4 [39] центр группы $B(m, n)$ при указанных m и n тривиален. Поэтому согласно предложению 6.9, $(n + 1)$-арная группа $< B(m, n), [\,] >$, производная от группы $B(m, n)$, при нечётном $n \geq 665$, $m \geq 1$ является бесконечной идемпотентной с единственной единицей.

В некоторых случаях n-арную группу можно превратить в идемпотентную n-арную группу.

6.16. Теорема [36, 37]. *Если $< A, [\,] >$ – конечная n-арная группа, допускающая автоморфизм порядка $n-1$, оставляющий неподвижным единственный элемент, то на A можно определить n-арную операцию $\lfloor\,\rfloor$ так, что $< A, \lfloor\,\rfloor >$ – идемпотентная n-арная группа.*

Литература

[1] **Павлов Д. Г.** Симметрия и геометрические инварианты // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. 2006. Vol. 3, № 2. С. 21–32.

[2] **Dörnte W.** Untersuchungen über einen verallgemeinerten Gruppenbegrieff // Math. Z. 1928. Bd. 29. S. 1–19.

[3] **Kasner E.** An extension of the group concept // Bull. Amer. Mat. Soc. 1904. № 10. P. 290–291.

[4] **Prüfer H.** Theorie der abelshen Gruppen. I. Grundeigenschaften // Math. Z. 1924. Bd. 20. S. 165–187.

[5] **Post E. L.**, Polyadic groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1940. Vol. 48, № 2. P. 208–350.

[6] **Чунихин С.А.** К теории неассоциативных n-групп // Доклады АН СССР. 1945. Т. 48, № 1. С. 7–10.

[7] **Сушкевич А. К.** Теория обобщенных групп. Харьков; Киев, 1937. 170 с.

[8] **Курош А. Г.** Общая алгебра: Лекции 1969/70 учебного года. М.: Наука, 1974. 160 с.

[9] **Bruck R. H.** A survey of binary systems. Berlin-Heldelberg-New York: Springer-Verlad, 1966. 185 p.

[10] **Бурбаки Н.** Алгебра. Алгебраические структуры, линейная и полилинейная алгебра. М.: Физматгиз, 1962. 516 с.

[11] **Белоусов В. Д.** n-арные квазигруппы. Кишинев: Штиинца, 1972. 228 с.

[12] **Артамонов В. А.** Универсальные алгебры //Итоги науки и техники. Сер. Алгебра. Топология. Геометрия. 1976. С. 191–248.

[13] **Glazek K.** Bibliographi of n-groups (poliadic groups) and same group like n-ary sistems// Proc. of the sympos. n-ary structures. Skopje, 1982. P. 259–289.

[14] **Русаков С. А.** Алгебраические n-арные системы. Мн.: Навука і тэхніка, 1992. 245 с.

[15] **Русаков С. А.** Некоторые приложения теории n-арных групп. Мн.: Беларуская навука, 1998. 167 с.

[16] **Ušan J.** n-Groups in the light of the neutral operations // Mathematika Moravica. 2003. Special Vol. 162 p.

[17] **Гальмак А. М.** Теоремы Поста и Глускина Хоссу. Гомель, 1997. 85 с.

[18] **Гальмак А. М., Воробьёв Г.Н.** Тернарные группы отражений. Мн.: "Беларуская навука", 1998. 128 с.

[19] **Гальмак А. М.** Конгруэнции полиадических групп. Мн.: "Беларуская навука", 1999. 182 с.

[20] **Гальмак А. М.** n-арные группы. Ч.1. Гомель, 2003. 196 с.

[21] **Гальмак А. М.** Новые определения n-арной группы // Конф. математиков Беларуси. Тез. докл. Гродно, 1992. С. 17.

[22] **Тютин В. И.** К аксиоматике n-арных групп // Докл. АН БССР. 1985. Т. 29, № 8. С. 691–693.

[23] **Гальмак А. М.** Об определении n-арной группы // Междунар. конф. по алгебре. Тез. докл. Новосибирск, 1991. С. 30.

[24] **Гальмак А. М.** О некоторых новых определениях n-арной группы // Третья междунар. конф. по алгебре. Тез. докл. Красноярск, 1993. С. 33.

[25] **Гальмак А. М.** О разрешимости уравнений в n-арной полугруппе // Вестник Полоцкого государственного университета, 2006, № 3. С.36–41.

[26] **Celakoski N.** On some axiom systems for n-groups // Мат. Бил. Сојуз. друшт. мат. СРМ. 1997. Кн. 1. P. 5–14.

[27] **Dudek W., Glazek K., Gleichgewicht B.** A note on the axioms of n-groups // Colloq. Math. Soc. J. Bolyai. 1977. Vol. 29. P. 195–202.

[28] **Русаков С. А.** К определению n-арной группы // Докл. АН БССР. 1979. Т. 23, № 11. С. 965–967.

[29] **Monk J. D., Sioson F. M.** On the general theory of m-groups // Fund. Math: 1971. № 72. P. 233–244.

[30] **Гальмак А. М.** Определения n-арной группы // Препринт ГГУ им. Ф. Скорины. 1994. № 16. 43 с.

[31] **Глускин Л. М.** Позиционные оперативы // Мат. сборник. 1965. Т. 68(110), № 3. С. 444–472.

[32] **Сохацкий Ф. Н.** Об ассоциативности многоместных операций // Дискретная математика. 1992. № 4. С. 66–84.

[33] **Сохацкий Ф. Н.** Commutation of operations and its relationship with Menger and Mann superpositions // Discussions Math., General Algebra and Appl. 2004. 24. C. 153–176.

[34] **Гальмак А. М.** N-арная подгруппа единиц // Препринт ГГУ им. Ф.Скорины. 1998. № 77. 23 с.

[35] **Гальмак А. М.** N-арная подгруппа единиц // Весцi НАН РБ. 2003. № 2. С. 25–30.

[36] **Гальмак А. М.** Идемпотенты в n-арных группах // Препринт ГГУ им. Ф.Скорины. 1998. № 81. 28 с.

[37] **Гальмак А. М.** Идемпотентные n-арные группы // Весцi НАН РБ. 2000. № 2. С. 42–45.

[38] **Гальмак А. М.** Силовское строение идемпотентной n-арной группы // Украинский математический журнал. 2001. Т. 53, № 11. С 1488–1494.

[39] **Адян С. И.** Проблема Бернсайда и тождества в группах. М.: Наука, 1975. 335 с.