ФИЗИЧЕСКОЕ ВРЕМЯ И РАССТОЯНИЕ В ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ БЕРВАЛЬДА-МООРА

Р. Г. Зарипов

Институт механики и машиностроения КазНЦ РАН, Казань, Россия
zaripov@mail.knc.ru

Приводится разбиение интервала между событиями в глобальном четырехмерном пространстве-времени Бервальда-Моора, из которого вытекает интервал физического времени, нелинейно зависящий от координатного времени и координат событий. Дается определение расстояния в виде полунормы в векторной форме для собственного трехмерного пространства как множества одновременных событий при сигнальном методе синхронизации разноместных часов. Рассматривается алгебра квадрачисел в скалярно-векторной форме и приводятся элементы векторной алгебры в геометрии собственного трехмерного пространства. Новые векторные операции связаны с перманентами третьего порядка. Определяется трехмерная физическая скорость и ее полунорма в собственном пространстве.

1. Введение

Известно, что координация событий во времени в трехмерном пространстве Евклида устанавливается сигнальным методом, впервые введенным А. Пуанкаре в своей знаменитой работе [1] при определении отношения одновременности разноместных событий в инерциальной системе отсчета. В итоге базисом современной физической теории (в случае специальной теории относительности) является локальное изотропное четырехмерное псевдоевклидово пространство-время Минковского [2] в галилеевых координатах $\mathbf{x} = (x, y, z)$, являющееся подпространством в геометрии с метрической функцией

$$F = ds = \left[\left(c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2\right)^2\right]^{1/4} = \left[(cdt - |d\mathbf{x}|)^2 (cdt + |d\mathbf{x}|)^2\right]^{1/4}, \qquad (1.1)$$

которая при $dT_0 = F/c = 0$ для собственного времени T_0 имеет две характеристики для сигнала кратности два.

В настоящее время приобретают все большую значимость исследования в области финслеровой геометрии. Это объясняется и новизной возникающих здесь теоретических проблем и важностью приложений для ряда новых экспериментальных данных. Одним из перспективных подходов является модель известного локального полностью анизотропного четырехмерного финслерова пространства-времени с метрической функцией Бервальда-Моора

$$\begin{gathered} F = ds = \left[c^4dt^4 + dx^4 + dy^4 + dz^4 - \right. \\ \left. -2\left(c^2dt^2dx^2 + c^2dt^2dy^2 + c^2dt^2dz^2 + dx^2dy^2 + dy^2dz^2 + dz^2dx^2\right) + 8cdtdxdydz\right]^{1/4} = \\ = \left[(cdt + dx + dy + dz)(cdt - dx + dy - dz)(cdt + dx - dy - dz)(cdt - dx - dy + dz)\right]^{1/4}, \end{gathered} \qquad (1.2)$$

имеющих четыре различные характеристики для сигнала.

В работе [3] рассматривается пространство-время с (1.2) и дается новое определение отношения одновременности разноместных событий при сигнальном методе в инерциальной системе отсчета. Сигнал распространяется в собственном трехмерном пространстве с четырьмя выделенными направлениями. Однако вопрос о геометрии собственного трехмерного пространства, не являющейся геометрией Евклида, как в случае с (1.1), остается открытым. Известен интересный вариант определения расстояния в таком трехмерном пространстве [4], основанный на методе равноудаленности разноместных событий от начала координат, что приводит к зависимости расстояния от произвольного временного параметра. Это затрудняет физическую интерпретацию такого метода. Представляется необходимым восполнить это пробел и применить традиционный подход определения собственного трехмерного пространства, как множества одновременных (причинно-несвязных) событий, что и является целью настоящей работы. В отличие от четырехмерной псевдоевклидовой геометрии Минковского, здесь определяется множество одновременных событий по интервалу физического времени, не совпадающему с интервалом координатного времени, а включающему в себя нелинейно координатное время и пространственные координаты. Из соответствующего разбиения интервала между событиями, приводится функция в виде полунормы, равная расстоянию в собственном трехмерном пространстве. Элементы векторной алгебры в собственном трехмерном пространстве даются на основе алгебры квадрачисел, представляемых в скалярно-векторной форме, и теории перманентов. Определяется трехмерная физическая скорость, нелинейно зависящая от координатной скорости в собственном пространстве, и ее полунорма.

2. Определения интервала физического времени и расстояния в собственном трехмерном пространстве

В релятивистской теории (в случае специальной теории относительности) собственным трехмерным пространством является множество одновременных (причинно-несвязанных) событий по координатному времени. Так, для глобального псевдоевклидового пространства-времени при равенстве интервала физического времени $T_{12}(t_2 - t_1) = (t_2 - t_1) = 0$ для метрической функции (1.1) в форме разбиения

$$s_{12} = \left\{ \left[c^2 T_{12}^2 (t_2 - t_1) - \rho^2 (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \right]^2 \right\}^{1/4} \tag{2.1}$$

имеем собственное трехмерное пространство с расстоянием, равным длине вектора $(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)$

$$\rho(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \rho(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) = |\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1| = \left[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 \right]^{1/2} \geq 0 \tag{2.2}$$

для геометрии пространства Евклида с известной векторной алгеброй. Данное собственное трехмерное пространство определяется для причинно-несвязанных событий в пространственноподобных интервалах с $s_{12}^2 < 0$.

Рассмотрим релятивистскую теорию для глобального четырехмерного пространства-времени Бервальда-Моора с интервалом между событиями

$$\begin{gathered} s_{12} = \left\{ \prod_{m}^{4} \left[c(t_2 - t_1) + \boldsymbol{\varepsilon}^m (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \right] \right\}^{1/4} = \\ = \left\{ c^4 (t_2 - t_1)^4 - 2c^2 (t_2 - t_1)^2 \left[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 \right] + \right. \\ +8c(t_1 - t_1)(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)(z_2 - z_1) + (x_2 - x_1)^4 + (y_2 - y_1)^4 + (z_2 - z_1)^4 \\ \left. -2(x_2 - x_1)^2 (y_2 - y_1)^2 - 2(y_2 - y_1)^2 (z_2 - z_1)^2 - 2(z_2 - z_1)^2 (x_2 - x_1)^2 \right\}^{1/4} \end{gathered} \tag{2.3}$$

и известными значениями компонентов векторов $\boldsymbol{\varepsilon}^1 = (1,\,1,\,1)$, $\boldsymbol{\varepsilon}^2 = (-1,\,1,-1)$, $\boldsymbol{\varepsilon}^3 = (1,\,-1,\,-1)$, $\boldsymbol{\varepsilon}^4 = (-1,-1,\,1)$ выделенных направлений в трехмерном пространстве, которые удовлетворяют равенствам [3]

$$\begin{gathered}\sum_m^4 \varepsilon_\alpha^m = 0, \quad \tfrac{1}{4}\sum_m^4 \varepsilon_\alpha^m \varepsilon_\beta^m = \delta_{\alpha\beta}, \quad \tfrac{1}{4}\sum_m^4 \varepsilon_\alpha^m \varepsilon_\beta^m \varepsilon_\gamma^m = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}, \\ 1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m)^2 = 4, \quad 1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \boldsymbol{\varepsilon}^r) = 0 \quad (m \neq r)\,.\end{gathered} \tag{2.4}$$

Здесь $\delta_{\alpha\beta}$ – символ Кронекера и $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ есть трехмерный абсолютно симметричный символ со свойством $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} = 1$ при $\alpha \neq \beta \neq \gamma$, а остальные значения являются нулевыми, m – номер вектора и α, β имеют значения 1, 2, 3.

Неравенство $s_{12}^4 > 0$ определяет область причинно-связанных событий в пространстве-времени с элементом собственного времени $(T_0)_{12} = s_{12}/c$, являющимся средней геометрической величиной от положительных интервалов времен, $s_{12}^4 < 0$ – область причинно-несвязанных событий со значением расстояния для собственного трехмерного пространства и равенство $s_{12}^4 = 0$ дает четыре характеристики (или гиперповерхности) для сигнала, движущегося с максимальной скоростью при установлении отношения одновременности разноместных событий [3].

Определим интервал физического времени. Для чего представим интервал (2.3) в форме следующего разбиения

$$s_{12} = \left[c^4 T_{12}^4 \left(t_2 - t_1, \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\right) - \rho^4 \left(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\right)\right]^{1/4}. \tag{2.5}$$

Из (2.5) следует, что при $s_{12}^4 < 0$ собственное 3-мерное пространство с расстоянием

$$\begin{gathered}\rho\left(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\right) = \rho\left(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\right) = \left\{-\prod_m^4 \left[\boldsymbol{\varepsilon}^m \left(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\right)\right]\right\}^{1/4} = \\ = \left\{-\tfrac{1}{4!}\varepsilon_{mnkl}\left[\boldsymbol{\varepsilon}^m\left(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\right)\right]\left[\boldsymbol{\varepsilon}^n\left(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\right)\right]\left[\boldsymbol{\varepsilon}^k\left(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\right)\right]\left[\boldsymbol{\varepsilon}^l\left(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\right)\right]\right\}^{1/4} = \\ = \left\{-\left(x_2 - x_1\right)^4 - \left(y_2 - y_1\right)^4 - \left(z_2 - z_1\right)^4 + \right. \\ \left. +2\left[\left(x_2 - x_1\right)^2\left(y_2 - y_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2\left(z_2 - z_1\right)^2 + \left(z_2 - z_1\right)^2\left(x_2 - x_1\right)^2\right]\right\}^{1/4} = \\ = \left\{-\left[\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2 + \left(z_2 - z_1\right)^2\right]^2 + \right. \\ \left. +4\left[\left(x_2 - x_1\right)^2\left(y_2 - y_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2\left(z_2 - z_1\right)^2 + \left(z_2 - z_1\right)^2\left(x_2 - x_1\right)^2\right]\right\}^{1/4} \geq 0\end{gathered} \tag{2.6}$$

для соответствующей геометрии определяется для одновременных (причинно-несвязанных) событий с равенством

$$\begin{gathered}cT_{12}\left(t_2 - t_1, \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\right) = \left\{c^4\left(t_2 - t_1\right)^4 + \right. \\ +c^2\left(t_2 - t_1\right)^2 \tfrac{1}{2!}\varepsilon_{mn}\left[\boldsymbol{\varepsilon}^m\left(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\right)\right]\left[\boldsymbol{\varepsilon}^n\left(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\right)\right] + \\ \left. +c\left(t_2 - t_1\right)\tfrac{1}{3!}\varepsilon_{mnk}\left[\boldsymbol{\varepsilon}^m\left(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\right)\right]\left[\boldsymbol{\varepsilon}^n\left(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\right)\right]\left[\boldsymbol{\varepsilon}^k\left(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\right)\right]\right\}^{1/4} = \\ = \left\{c^4\left(t_2 - t_1\right)^4 - 2c^2\left(t_2 - t_1\right)^2\left[\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2 + \left(z_2 - z_1\right)^2\right] + \right. \\ \left. +8c\left(t_2 - t_1\right)\left(x_2 - x_1\right)\left(y_2 - y_1\right)\left(z_2 - z_1\right)\right\}^{1/4} = 0\end{gathered} \tag{2.7}$$

по следующему интервалу физического времени

$$\begin{gathered}T_{12}\left(t_2 - t_1, \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\right) = \\ = \left\{(t_2 - t_1)^4 - 2(t_2 - t_1)^2\left[\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2 + \left(z_2 - z_1\right)^2\right]/c^2 + \right. \\ \left. + 8(t_2 - t_1)\left(x_2 - x_1\right)\left(y_2 - y_1\right)\left(z_2 - z_1\right)/c^3\right\}^{1/4},\end{gathered} \tag{2.8}$$

где введены четырехмерные абсолютно симметричные символы со свойствами $\varepsilon_{mn} = \varepsilon_{mnk} = \varepsilon_{mnkl} = 1$, если $m \neq n \neq k \neq l$, а остальные значения нулевые.

Используя первоначальные обозначения для векторов трехмерного пространства $\boldsymbol{\varepsilon}^m \to (-\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^n)$ $(n = 1, 2, 3)$ из работы [3] с разложением по трем независимым векторам выделенных направлений $\boldsymbol{\varepsilon} = \sum\limits_n^3 \boldsymbol{\varepsilon}^n$ запишем расстояние с независимыми выделенными направлениями

$$\begin{gathered}\rho(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \rho(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) = \left\{[\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)]\,[\boldsymbol{\varepsilon}^1(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)]\,[\boldsymbol{\varepsilon}^2(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)]\,[\boldsymbol{\varepsilon}^3(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)]\right\}^{1/4} = \\ = \Big\{[\boldsymbol{\varepsilon}^1(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)]^2\,[\boldsymbol{\varepsilon}^2(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)]\,[\boldsymbol{\varepsilon}^3(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)] + [\boldsymbol{\varepsilon}^1(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)]\,[\boldsymbol{\varepsilon}^2(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)]^2\,[\boldsymbol{\varepsilon}^3(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)] + \\ + [\boldsymbol{\varepsilon}^1(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)]\,[\boldsymbol{\varepsilon}^2(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)]\,[\boldsymbol{\varepsilon}^3(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)]^2\Big\}^{1/4} \geq 0.\end{gathered} \tag{2.9}$$

Определение. Расстояние в собственном трехмерном пространстве, определяемом множеством одновременных событий по физическому времени, есть среднее геометрическое от положительных путей, пройденных сигналом вдоль четырех выделенных направлений при синхронизации разноместных часов, и является полунормой.

Из (2.9) также следует, что расстояние является симметричной формой относительно перестановок трех скалярных произведений $\boldsymbol{\varepsilon}^1(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)$, $\boldsymbol{\varepsilon}^2(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)$ и $\boldsymbol{\varepsilon}^3(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)$, которые являются путями. Причем функция (2.9) является положительной и определяется в виде полунормы в отличие от нормы для пространства Евклида.

Важный вывод следует из определения интервала физического времени (2.7). Равенство $T_{12}(t_2 - t_1, \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) = 0$ имеет место не только для одновременных событий по координатному времени с $t_1 = t_2$ на гиперповерхности $t = 0$, но и при равенстве

$$\begin{gathered}(t_2 - t_1)^3 - 2(t_2 - t_1)\left[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2\right]/\,c^2 + \\ +8(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)(z_2 - z_1)/\,c^3 = 0\end{gathered} \tag{2.10}$$

с неодновременными событиями, которые лежат на гиперповерхности в пространстве-времени Бервальда-Моора, представляемой следующим уравнением

$$t^3 - 2t\mathbf{x}^2/\,c^2 + 8xyz/\,c^3 = 0. \tag{2.11}$$

3. Представление квадрачисел в скалярно-векторной форме

Векторная алгебра в глобальном трехмерном собственном пространстве естественным образом вытекает из алгебры гиперкомплексных чисел.

Напомним, что для кватернионов, которые образуют тело в алгебре, из закона композиции в известной скалярно-векторной форме

$$\mathbf{A} \circ \mathbf{B} = (a_0, \mathbf{a}) \circ (b_0, \mathbf{b}) = (a_0 b_0 - (\mathbf{ab}),\ b_0\mathbf{a} + a_0\mathbf{b} + [\mathbf{ab}]) \tag{3.1}$$

и линейных операций имеем операции сложения векторов $(\mathbf{a} + \mathbf{b})$, умножения вектора $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ на число $\lambda\mathbf{a}$, скалярное произведение $(\mathbf{ab}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = \delta_{\alpha\beta} a_\alpha b_\beta$, векторное произведение $[\mathbf{ab}]$ с компонентами $[\mathbf{ab}]_\alpha = e_{\alpha\beta\gamma} a_\beta b_\gamma$, где $e_{\alpha\beta\gamma}$ – трехмерный абсолютно антисимметричный символ Леви-Чивита. Композиция трех кватернионов $\mathbf{A} \circ \mathbf{B} \circ \mathbf{C}$ добавляет к этим операциям смешанное произведение $([\mathbf{ab}]\,\mathbf{c})$ и двойное векторное произведение $[[\mathbf{ab}]\,\mathbf{c}]$. Тело кватернионов имеет известное матричное представление

$$(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ a_1 & a_0 & -a_3 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_0 & -a_1 \\ a_3 & -a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{P} & -\mathbf{Q} \\ \mathbf{Q} & \mathbf{P} \end{pmatrix}, \quad (\mathbf{P}) = \begin{pmatrix} a_0 & -a_1 \\ a_1 & a_0 \end{pmatrix}, \quad (\mathbf{Q}) = \begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ a_3 & -a_2 \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

с суммой и произведением матриц.

Используем определение обратного кватерниона $\mathbf{A}\circ\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{E}$ с $\mathbf{E}=(1,0)$ и закон композиции $\mathbf{A}\circ\bar{\mathbf{A}}$ с нулевой векторной частью, где $\bar{\mathbf{A}}=(\bar{a}_0,\bar{\mathbf{a}})$. Тогда получим равенства

$$\mathbf{A}\circ\bar{\mathbf{A}}=a_0\bar{a}_0-(\mathbf{a}\bar{\mathbf{a}}),\quad \bar{a}_0\mathbf{a}+a_0\bar{\mathbf{a}}+[\mathbf{a}\bar{\mathbf{a}}]=0, \tag{3.3}$$

второе из которых удовлетворяется однозначно при $\bar{a}_0=a_0$ и $\bar{\mathbf{a}}=-\mathbf{a}$. В итоге получим сопряженный кватернион $\bar{\mathbf{A}}=(a_0,-\mathbf{a})$, модуль числа $|\mathbf{A}|=\sqrt{\mathbf{A}\circ\bar{\mathbf{A}}}=\sqrt{a_0^2+\mathbf{a}^2}$ и обратный кватернион $\mathbf{A}^{-1}=\bar{\mathbf{A}}/\,|\mathbf{A}|^2$.

Рассмотрим квадрачисла [5], которые образуют поле в алгебре, и коммутативный закон композиции в скалярно-векторной форме [6, 7]

$$(\mathbf{A}\circ\mathbf{B})=(a_0,\mathbf{a})\circ(b_0,\mathbf{b})=\big[a_0b_0+(\mathbf{ab}),b_0\mathbf{a}+a_0\mathbf{b}+\{\mathbf{ab}\}\big]. \tag{3.4}$$

Наряду с известными операциями сложения векторов $(\mathbf{a}+\mathbf{b})$, умножения вектора на число $\lambda\mathbf{a}$, скалярного произведения $(\mathbf{ab})=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=\delta_{\alpha\beta}a_\alpha b_\beta$ возникает новое векторное произведение $\{\mathbf{ab}\}=\frac{1}{4}\sum\limits_m^4\boldsymbol{\varepsilon}^m(\boldsymbol{\varepsilon}^m\mathbf{a})(\boldsymbol{\varepsilon}^m\mathbf{b})$ с компонентами $\{\mathbf{ab}\}_\alpha=\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}a_\beta b_\gamma$. Поле квадрачисел имеет матричное представление [6]

$$(\mathbf{A})=\begin{pmatrix}a_0&a_1&a_2&a_3\\a_1&a_0&a_3&a_2\\a_2&a_3&a_0&a_1\\a_3&a_2&a_1&a_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{P}&\mathbf{Q}\\\mathbf{Q}&\mathbf{P}\end{pmatrix},\quad(\mathbf{P})=\begin{pmatrix}a_0&a_1\\a_1&a_0\end{pmatrix},\quad(\mathbf{Q})=\begin{pmatrix}a_2&a_3\\a_3&a_2\end{pmatrix} \tag{3.5}$$

с суммой и коммутативным произведением симметричных матриц.

Композиции трех и четырех квадрачисел

$$\begin{gathered}(\mathbf{A}\circ\mathbf{B}\circ\mathbf{C})=(a_0,\mathbf{a})\circ(b_0,\mathbf{b})\circ(c_0,\mathbf{c})=\big[a_0b_0c_0+a_0(\mathbf{bc})+b_0(\mathbf{ca})+c_0(\mathbf{ab})+(\{\mathbf{ab}\}\mathbf{c}),\\ \mathbf{a}b_0c_0+\mathbf{b}c_0a_0+\mathbf{c}a_0b_0+a_0\{\mathbf{bc}\}+b_0\{\mathbf{ca}\}+c_0\{\mathbf{ab}\}+\{\{\mathbf{ab}\}\mathbf{c}\}+(\mathbf{ab})\mathbf{c}\big],\end{gathered} \tag{3.6}$$

$$\begin{gathered}(\mathbf{A}\circ\mathbf{B}\circ\mathbf{C}\circ\mathbf{D})=(a_0,\mathbf{a})\circ(b_0,\mathbf{b})\circ(c_0,\mathbf{c})\circ(d_0,\mathbf{d})=\\ =\Big[a_0b_0c_0d_0+a_0b_0(\mathbf{cd})+b_0c_0(\mathbf{da})+d_0a_0(\mathbf{bc})+b_0d_0(\mathbf{ac})+a_0c_0(\mathbf{bd})+c_0d_0(\mathbf{ab})+\\ +(\{\mathbf{ab}\}\mathbf{c})d_0+(\{\mathbf{bc}\}\mathbf{d})a_0+(\{\mathbf{cd}\}\mathbf{a})b_0+(\{\mathbf{da}\}\mathbf{b})c_0+\big(\{\{\mathbf{ab}\}\mathbf{c}\}\mathbf{d}\big)+(\mathbf{ab})(\mathbf{cd}),\\ \mathbf{a}b_0c_0d_0+\mathbf{b}c_0d_0a_0+\mathbf{c}d_0a_0b_0+\mathbf{d}a_0b_0c_0+\{\mathbf{ab}\}c_0d_0+\{\mathbf{bc}\}d_0a_0+\\ +\{\mathbf{cd}\}a_0b_0+\{\mathbf{da}\}b_0c_0+\{\mathbf{bd}\}a_0c_0+\{\mathbf{ac}\}b_0d_0+a_0\big((\mathbf{bc})\mathbf{d}+\{\{\mathbf{bc}\}\mathbf{d}\}\big)+\\ +b_0\big((\mathbf{ca})\mathbf{d}+\{\{\mathbf{ca}\}\mathbf{d}\}\big)+c_0\big((\mathbf{ab})\mathbf{d}+\{\{\mathbf{ab}\}\mathbf{d}\}\big)+\\ +d_0\big((\mathbf{ab})\mathbf{c}+\{\{\mathbf{ab}\}\mathbf{c}\}\big)+\big\{\{\{\mathbf{ab}\}\mathbf{c}\}\mathbf{d}\big\}+(\mathbf{ab})\{\mathbf{cd}\}+(\{\mathbf{ab}\}\mathbf{c})\mathbf{d}\Big]\end{gathered} \tag{3.7}$$

дают новые смешанное произведение $(\{\mathbf{ab}\}\mathbf{c})$, двойное векторное произведение $\{\{\mathbf{ab}\}\mathbf{c}\}$ и другие операции. Некоторые свойства этих операций для векторов собственного трехмерного пространства представляются соотношениями

$$\begin{gathered}\{\mathbf{ab}\}=\{\mathbf{ba}\},\quad\{\mathbf{ab}\}+\{\mathbf{ac}\}=\{\mathbf{a}(\mathbf{b}+\mathbf{c})\},\\ (\{\mathbf{ab}\}\mathbf{c})=(\{\mathbf{ac}\}\mathbf{b})=(\{\mathbf{ba}\}\mathbf{c})=(\{\mathbf{bc}\}\mathbf{a})=(\{\mathbf{ca}\}\mathbf{b})=(\{\mathbf{cb}\}\mathbf{a})=\varepsilon_{kij}a_kb_ic_j,\\ \{\mathbf{a}\{\mathbf{bc}\}\}-\{\mathbf{c}\{\mathbf{ba}\}\}=\mathbf{c}(\mathbf{ba})-\mathbf{a}(\mathbf{bc}),\\ \mathbf{a^2b^2}+(\{\mathbf{aa}\}\{\mathbf{bb}\})=(\mathbf{ab})^{\mathbf{2}}+\{\mathbf{ab}\}^{\mathbf{2}},\\ \{\mathbf{aa}\}_i=2a_ka_j,\quad\{\mathbf{a}\{\mathbf{aa}\}\}_i=2a_i\left(a_k^2+a_j^2\right),\quad(\mathbf{a}\{\mathbf{aa}\})=6a_ia_ja_k,\quad(i\neq j\neq k),\\ \{\mathbf{a}\{\mathbf{a}\{\mathbf{aa}\}\}\}=\{\mathbf{aa}\}(\mathbf{aa})-\tfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\mathbf{a}(\mathbf{a}\{\mathbf{aa}\}).\end{gathered} \tag{3.8}$$

При $a_0 = b_0 = c_0 = d_0$ и $a_0 = b_0 = c_0 = d_0 = 0$ из (3.7) вытекают, соответственно, следующие квадрачисла

$$
\begin{gathered}
(\mathbf{A} \circ \mathbf{B} \circ \mathbf{C} \circ \mathbf{D}) = \Big[a_0^4 + a_0^2\big((\mathbf{ab}) + (\mathbf{ac}) + (\mathbf{ad}) + (\mathbf{bc}) + (\mathbf{cd}) + (\mathbf{da})\big) + \\
+ a_0\big((\{\mathbf{ab}\}\,\mathbf{c}) + (\{\mathbf{bc}\}\,\mathbf{d}) + (\{\mathbf{cd}\}\,\mathbf{a}) + (\{\mathbf{da}\}\,\mathbf{b})\big) + (\{\mathbf{ab}\}\,\{\mathbf{cd}\}) + (\mathbf{ab})\,(\mathbf{cd})\,, \\
a_0^3\big((\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d}) + a_0^2(\{\mathbf{ab}\} + \{\mathbf{ac}\} + \{\mathbf{ad}\} + \{\mathbf{bc}\} + \{\mathbf{cd}\} + \{\mathbf{db}\})\big) + \\
+ a_0\big((\mathbf{ab})\,\mathbf{d} + \{\{\mathbf{ab}\}\,\mathbf{d}\} + (\mathbf{bc})\,\mathbf{d} + \{\{\mathbf{bc}\}\,\mathbf{d}\} + (\mathbf{ca})\,\mathbf{d} + \{\{\mathbf{ca}\}\,\mathbf{d}\} + (\mathbf{ab})\,\mathbf{c} + \{\{\mathbf{ab}\}\,\mathbf{c}\}\big) + \\
+ \{\{\{\mathbf{ab}\}\,\mathbf{c}\}\,\mathbf{d}\} + (\mathbf{ab})\,\{\mathbf{cd}\} + (\{\mathbf{ab}\}\,\mathbf{c})\,\mathbf{d}\Big],
\end{gathered}
\tag{3.9}
$$

$$
(\mathbf{A} \circ \mathbf{B} \circ \mathbf{C} \circ \mathbf{D}) = [(\{\mathbf{ab}\}\,\{\mathbf{cd}\}) + (\mathbf{ab})\,(\mathbf{cd})]\,, [\{\{\{\mathbf{ab}\}\,\mathbf{c}\}\,\mathbf{d}\} + (\mathbf{ab})\,\{\mathbf{cd}\} + (\{\mathbf{ab}\}\,\mathbf{c})\,\mathbf{d}]\,. \tag{3.10}
$$

Рассмотрим некоторые результаты, вытекающие из приведенных соотношений и дополняющие формулы из работы [6]. Обозначим векторы $\mathbf{b} = \mathbf{a}_1$, $\mathbf{c} = \mathbf{a}_2$, $\mathbf{d} = \mathbf{a}_3$ и соответствующие квадрачисла $\mathbf{B} = \mathbf{A}_1 = (a_0, \mathbf{a}_1)$, $\mathbf{C} = \mathbf{A}_2 = (a_0, \mathbf{a}_2)$, $\mathbf{D} = \mathbf{A}_3 = (a_0, \mathbf{a}_3)$.

Лемма 1. Имеются четыре вектора

$$
\begin{aligned}
\mathbf{a} &= (a_1, a_2, a_3)\,, \\
\mathbf{a}_1 &= (-a_1, a_2, -a_3)\,, \\
\mathbf{a}_2 &= (a_1, -a_2, -a_3)\,, \\
\mathbf{a}_3 &= (-a_1, -a_2, a_3)\,,
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

компоненты которых отличаются знаком ± 1, для которых композиция квадрачисел (3.9) в виде однородной симметричной формы четвертого порядка равняется действительному числу.

Для доказательства приравняем векторную часть в (3.9) нулю и при произвольных значениях a_0 получим четыре векторных уравнения

$$
\begin{gathered}
\mathbf{a} + \mathbf{a_1} + \mathbf{a_2} + \mathbf{a_3} = \mathbf{0}, \\
\{\mathbf{aa_1}\} + \{\mathbf{aa_2}\} + \{\mathbf{aa_3}\} + \{\mathbf{a_1a_2}\} + \{\mathbf{a_2a_3}\} + \{\mathbf{a_3a_1}\} = \mathbf{0}, \\
(\mathbf{aa_1})\,\mathbf{a_3} + \{\{\mathbf{aa_1}\}\,\mathbf{a_3}\} + (\mathbf{a_1a_2})\,\mathbf{a_3} + \{\{\mathbf{a_1a_2}\}\,\mathbf{a_3}\} + \\
+ (\mathbf{a_2a})\,\mathbf{a_3} + \{\{\mathbf{a_2a}\}\,\mathbf{a_3}\} + (\mathbf{aa_1})\,\mathbf{a_2} + \{\{\mathbf{aa_1}\}\,\mathbf{a_2}\} = \mathbf{0}, \\
\{\{\{\mathbf{aa_1}\}\,\mathbf{a_2}\}\,\mathbf{a_3}\} + (\mathbf{aa_1})\,\{\mathbf{a_2a_3}\} + (\{\mathbf{aa_1}\}\,\mathbf{a_2})\,\mathbf{a_3} = \mathbf{0},
\end{gathered}
\tag{3.12}
$$

однозначным решением которых являются векторы (3.11). В итоге из (3.9) вытекает равенство с одним вектором $\mathbf{a}$

$$
\mathbf{A} \circ \mathbf{A_1} \circ \mathbf{A_2} \circ \mathbf{A_3} = a_0^4 - 2a_0^2\mathbf{a}^2 + 4a_0(\mathbf{a}\,\{\mathbf{aa}\})\,/\,\mathbf{3} + (\mathbf{aa})\,(\mathbf{aa}) - (\{\mathbf{aa}\}\,\{\mathbf{aa}\})\,, \tag{3.13}
$$

где для векторов (3.11) имеют место также следующие соотношения

$$
\begin{gathered}
(\mathbf{aa_1})\,(\mathbf{a_2a_3}) + (\{\mathbf{aa_1}\}\,\{\mathbf{a_2a_3}\}) = (\mathbf{aa})\,(\mathbf{aa}) - (\{\mathbf{aa}\}\,\{\mathbf{aa}\})\,, \\
\mathbf{a^2} = \mathbf{a_1^2} = \mathbf{a_2^2} = \mathbf{a_3^2} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2, \quad |\mathbf{a}| = \sqrt{(\mathbf{aa})} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}, \\
\tfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\,[(\mathbf{aa_1}) + (\mathbf{aa_2}) + (\mathbf{aa_3}) + (\mathbf{a_1a_2}) + (\mathbf{a_2a_3}) + (\mathbf{a_3a_1})] = -\mathbf{a^2} = -\left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2\right), \\
\{\mathbf{aa}\}^{\mathbf{2}} = \{\mathbf{a_1a_1}\}^{\mathbf{2}} = \{\mathbf{a_2a_2}\}^{\mathbf{2}} = \{\mathbf{a_3a_3}\}^{\mathbf{2}} = 4\left(a_1^2a_2^2 + a_2^2a_3^2 + a_3^2a_1^2\right), \\
(\mathbf{a}\,\{\mathbf{aa}\}) = (\mathbf{a_1}\,\{\mathbf{a_1a_1}\}) = (\mathbf{a_2}\,\{\mathbf{a_2a_2}\}) = (\mathbf{a_3}\,\{\mathbf{a_3a_3}\}) = 6a_1a_2a_3, \\
(\{\mathbf{a_1a_2}\}\,\mathbf{a_3}) = (\{\mathbf{a_2a_3}\}\,\mathbf{a_1}) = (\{\mathbf{a_3a_1}\}\,\mathbf{a_2}) = \\
= (\{\mathbf{a_2a_1}\}\,\mathbf{a_3}) = (\{\mathbf{a_3a_2}\}\,\mathbf{a_1}) = (\{\mathbf{a_1a_3}\}\,\mathbf{a_2}) = 2a_1a_2a_3
\end{gathered}
\tag{3.14}
$$

с обозначением $\{\mathbf{aa}\}^{\mathbf{2}} = (\{\mathbf{aa}\}\,\{\mathbf{aa}\})$, а векторные произведения имеют компоненты

$$\begin{gathered}\{\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\} = (0,0,2a_1a_2)\,, \qquad \{\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3\} = (0,2a_3a_1,0)\,, \qquad \{\mathbf{a}_3\mathbf{a}_1\} = (2a_2a_3,0,0)\,, \\ \{\mathbf{aa}_1\} = (0,-2a_3a_1,0)\,, \qquad \{\mathbf{aa}_2\} = (-2a_2a_3,0,0)\,, \qquad \{\mathbf{aa}_3\} = (0,0,-2a_1a_2)\,.\end{gathered} \tag{3.15}$$

Лемма 2. Уравнение в виде композиции квадрачисел $\mathbf{X}$

$$\mathbf{X}\circ\mathbf{X} = 4\mathbf{X} \tag{3.16}$$

имеет решением четыре квадрачисла $\mathbf{A}, \mathbf{A_1}, \mathbf{A_2}, \mathbf{A_3}$ при $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 1$.

Для доказательства из (3.16), согласно (3.4), получим равенства

$$1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m)^2 = 4, \qquad 2\boldsymbol{\varepsilon}^m = \{\boldsymbol{\varepsilon}^m\boldsymbol{\varepsilon}^m\}\,, \tag{3.17}$$

из которых вытекает набор известных векторов $\boldsymbol{\varepsilon}^1$, $\boldsymbol{\varepsilon}^2$, $\boldsymbol{\varepsilon}^3$, $\boldsymbol{\varepsilon}^4$ с $a_0 = 1$ и, соответственно, имеем набор квадрачисел $\mathbf{A}_m = (1, \boldsymbol{\varepsilon}^m)$, которые отождествляются с $(\mathbf{A}, \mathbf{A_1}, \mathbf{A_2}, \mathbf{A_3})$. Из (3.17) вытекает соотношение $(\boldsymbol{\varepsilon}^m\,\{\boldsymbol{\varepsilon}^m\boldsymbol{\varepsilon}^m\}) = 6$.

Лемма 3. Произвольные однородные симметричные формы разных порядков для набора чисел $\mathbf{A}_m$ есть действительные числа.

Например, рассмотрим однородные формы в скалярно-векторной форме с $\varepsilon_m = 1$

$$\begin{gathered}S_1 = \varepsilon_m\mathbf{A_m} = \mathbf{A} + \mathbf{A_1} + \mathbf{A_2} + \mathbf{A_3} = 4a_0, \\ S_2 = \tfrac{1}{2!}\varepsilon_{mn}\mathbf{A_m}\circ\mathbf{A_n} = \mathbf{A}\circ\mathbf{A_1} + \mathbf{A}\circ\mathbf{A_2} + \mathbf{A}\circ\mathbf{A_3} + \mathbf{A_1}\circ\mathbf{A_2} + \mathbf{A_1}\circ\mathbf{A_3} + \mathbf{A_2}\circ\mathbf{A_3} = 6a_0^2 - 2\mathbf{a}^2, \\ S_3 = \tfrac{1}{3!}\varepsilon_{mnk}\mathbf{A_m}\circ\mathbf{A_n}\circ\mathbf{A_k} = \mathbf{A_1}\circ\mathbf{A_2}\circ\mathbf{A_3} + \mathbf{A}\circ\mathbf{A_2}\circ\mathbf{A_3} + \mathbf{A}\circ\mathbf{A_1}\circ\mathbf{A_3} + \mathbf{A}\circ\mathbf{A_1}\circ\mathbf{A_2} = \\ = 4a_0\left(a_0^2 - \mathbf{a}^2\right) + \tfrac{4}{3}\left(\mathbf{a}\,\{\mathbf{aa}\}\right), \\ S_4 = \tfrac{1}{4!}\varepsilon_{mnkl}\mathbf{A_m}\circ\mathbf{A_n}\circ\mathbf{A_k}\circ\mathbf{A_l} = \mathbf{A}\circ\mathbf{A_1}\circ\mathbf{A_2}\circ\mathbf{A_3} = \\ = a_0^4 - 2a_0^2\mathbf{a}^2 + \tfrac{4}{3}a_0(\mathbf{a}\,\{\mathbf{aa}\}) + \mathbf{a^2a^2} - (\{\mathbf{aa}\}\,\{\mathbf{aa}\})\end{gathered} \tag{3.18}$$

вытекающие из **Определения** характеристического уравнения для квадрачисла [6, 7]

$$\begin{gathered}|\mathbf{A}-\lambda|^4 = (\mathbf{A}-\lambda)\circ(\mathbf{A}_1-\lambda)\circ(\mathbf{A}_2-\lambda)\circ(\mathbf{A}_3-\lambda) = \\ = (-\lambda)^4 + S_1\,(-\lambda)^3 + S_2\,(-\lambda)^2 + S_3\,(-\lambda) + S_4 = 0.\end{gathered} \tag{3.19}$$

Эти формы связаны с формами в виде суммы различных степеней набора чисел

$$\begin{gathered}p_1 = \sum_m^4 \mathbf{A_m} = \mathbf{A} + \mathbf{A_1} + \mathbf{A_2} + \mathbf{A_3} = 4a_0, \\ p_2 = \sum_m^4 \mathbf{A_m^2} = \mathbf{A^2} + \mathbf{A_1^2} + \mathbf{A_2^2} + \mathbf{A_3^2} = 4\left(a_0^2 + \mathbf{a}^2\right), \\ p_3 = \sum_m^4 \mathbf{A_m^3} = \mathbf{A^3} + \mathbf{A_1^3} + \mathbf{A_2^3} + \mathbf{A_3^3} = 4\left[a_0^3 + 3a_0\mathbf{a}^2 + (\mathbf{a}\,\{\mathbf{aa}\})\right], \\ p_4 = \sum_m^4 \mathbf{A_m^4} = \mathbf{A^4} + \mathbf{A_1^4} + \mathbf{A_2^4} + \mathbf{A_3^4} = 4\left[a_0^4 + 4a_0^2\mathbf{a}^2 + 4a_0(\mathbf{a}\,\{\mathbf{aa}\}) + \mathbf{a^2a^2} + (\{\mathbf{aa}\}\,\{\mathbf{aa}\})\right]\end{gathered} \tag{3.20}$$

аналогом известных формул Ньютона из теории симметричных многочленов для действительных чисел

$$\begin{gathered}p_1 - S_1 = 0, \\ p_2 - p_1S_1 + 2S_2 = 0, \\ p_3 - p_2S_1 + p_1S_2 - 3S_3 = 0, \\ p_4 - p_3S_1 + p_2S_2 - p_1S_3 + 4S_4 = 0.\end{gathered} \tag{3.21}$$

Лемма 4. Однородная антисимметричная форма

$$\begin{gathered} W = \prod_{1\le n<m\le 4} (\mathbf{A}_m - \mathbf{A}_n) = \\ = (\mathbf{A_1} - \mathbf{A}) \circ (\mathbf{A_2} - \mathbf{A}) \circ (\mathbf{A_2} - \mathbf{A_1}) \circ (\mathbf{A_3} - \mathbf{A}) \circ (\mathbf{A_3} - \mathbf{A_1}) \circ (\mathbf{A_3} - \mathbf{A_2}) = \\ = 4^3 \left(a_1^2 - a_2^2\right)\left(a_2^2 - a_3^2\right)\left(a_3^2 - a_1^2\right) \end{gathered} \tag{3.22}$$

представляет собой действительное число и выражается только через компоненты вектора $\mathbf{a}$.

Выражение $W^2 = Disc\,(S_1, S_2, S_3, S_4)$ есть аналог дискриминанта многочлена для квадрачисла $\mathbf{X}$

$$\mathbf{X}^4 - S_1\mathbf{X}^3 + S_2\mathbf{X}^2 - S_3\mathbf{X} + S_4 = (\mathbf{X} - \mathbf{A}) \circ (\mathbf{X} - \mathbf{A_1}) \circ (\mathbf{X} - \mathbf{A_2}) \circ (\mathbf{X} - \mathbf{A_3}) \tag{3.23}$$

и равен нулю в том и только в том случае, если многочлен имеет кратный корень. Согласно **Определению** характеристического уравнения для квадрачисла (3.19), многочлен (3.23) есть характеристический многочлен и тождественно равен нулю

$$\mathbf{X}^4 - S_1\mathbf{X}^3 + S_2\mathbf{X}^2 - S_3\mathbf{X} + S_4 = 0 \tag{3.24}$$

для набора известных квадрачисел, что следует из (3.23).

Наконец, из определения обратного квадрачисла $\mathbf{A} \circ \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}$ с $\mathbf{E} = (1, 0)$ и закона композиции $\mathbf{A} \circ \bar{\mathbf{A}}$ с нулевой векторной частью, где $\bar{\mathbf{A}} = (\bar{a}_0, \bar{\mathbf{a}})$ имеем равенства

$$\mathbf{A} \circ \bar{\mathbf{A}} = a_0\bar{a}_0 + (\mathbf{a}\bar{\mathbf{a}})\,, \quad \bar{a}_0\mathbf{a} + a_0\bar{\mathbf{a}} + \{\mathbf{a}\bar{\mathbf{a}}\} = 0. \tag{3.25}$$

С учетом соотношений (3.8) решением второго равенства являются следующие значения для $\bar{a}_0$ и вектора $\bar{\mathbf{a}}$

$$\begin{gathered} \bar{a}_0 = a_0\left(a_0^2 - \mathbf{a}^2\right) + \tfrac{1}{3}\left(\mathbf{a}\left\{\mathbf{aa}\right\}\right), \\ \bar{\mathbf{a}} = -\mathbf{a}\left(a_0^2 - \mathbf{a}^2\right) + a_0\left\{\mathbf{aa}\right\} - \left\{\mathbf{a}\left\{\mathbf{aa}\right\}\right\}. \end{gathered} \tag{3.26}$$

Таким образом, находим сопряженное квадрачисло

$$\bar{\mathbf{A}} = (\bar{a}_0, \bar{\mathbf{a}}) = \left(a_0\left(a_0^2 - \mathbf{a}^2\right) + \frac{1}{3}\left(\mathbf{a}\left\{\mathbf{aa}\right\}\right), -\mathbf{a}\left(a_0^2 - \mathbf{a}^2\right) + a_0\left\{\mathbf{aa}\right\} - \left\{\mathbf{a}\left\{\mathbf{aa}\right\}\right\}\right), \tag{3.27}$$

модуль квадрачисла

$$\begin{gathered} |A| = \sqrt[4]{\mathbf{A} \circ \bar{\mathbf{A}}} = \sqrt[4]{a_0\bar{a}_0 + \mathbf{a}\bar{\mathbf{a}}} = \\ = \left\{a_0\left[a_0\left(a_0^2 - \mathbf{a}^2\right) + \tfrac{1}{3}\left(\mathbf{a}\left\{\mathbf{aa}\right\}\right)\right] + \mathbf{a}\left[-\mathbf{a}\left(a_0^2 - \mathbf{a}^2\right) + a_0\left\{\mathbf{aa}\right\} - \left\{\mathbf{a}\left\{\mathbf{aa}\right\}\right\}\right]\right\}^{1/4} = \\ = \left[a_0^4 - 2a_0^2\mathbf{a}^2 + \tfrac{4}{3}a_0(\mathbf{a}\left\{\mathbf{aa}\right\}) + (\mathbf{aa})\,(\mathbf{aa}) - (\left\{\mathbf{aa}\right\}\left\{\mathbf{aa}\right\})\right]^{1/4} \end{gathered} \tag{3.28}$$

и обратное квадрачисло

$$\mathbf{A}^{-1} = (a_0, \mathbf{a})^{-1} = \frac{\bar{\mathbf{A}}}{|\mathbf{A}|^4} = \frac{1}{|\mathbf{A}|^4}\left[a_0\left(a_0^2 - \mathbf{a}^2\right) + \frac{1}{3}\left(\mathbf{a}\left\{\mathbf{aa}\right\}\right), -\mathbf{a}\left(a_0^2 - \mathbf{a}^2\right) + a_0\{\mathbf{aa}\} - \left\{\mathbf{a}\left\{\mathbf{aa}\right\}\right\}\right]. \tag{3.29}$$

В отличие от алгебры кватернионов в данной алгебре имеют место неравенства $\bar{a}_0 \ne a_0$ и $\bar{\mathbf{a}} \ne -\mathbf{a}$ и при определении модуля извлекается корень четвертой степени, чтобы было соответствие для размерных величин $a_0 = c\,(t_2 - t_1)$ и $\mathbf{a} = (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)$ в случае релятивистской теории. В итоге, согласно (3.13), сопряженное квадрачисло имеет известное значение $\bar{\mathbf{A}} = (\mathbf{A_1} \circ \mathbf{A_2} \circ \mathbf{A_3})$, а модуль равняется $|\mathbf{A}| = (\mathbf{A} \circ \mathbf{A_1} \circ \mathbf{A_2} \circ \mathbf{A_3})^{1/4}$.

В матричном представлении имеет место равенство $(\mathbf{A})\left(\bar{\mathbf{A}}\right) = (\mathbf{E})\det(\mathbf{A})$ с единичной матрицей $(\mathbf{E})$, из которого вытекают значения сопряженных компонент квадрачисла в форме [6]

$$\bar{a}_0 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_0 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_0 \end{vmatrix}, \quad \bar{a}_1 = -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_2 \\ a_2 & a_0 & a_1 \\ a_3 & a_1 & a_0 \end{vmatrix}, \quad \bar{a}_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_1 \\ a_3 & a_2 & a_0 \end{vmatrix}, \quad \bar{a}_3 = -\begin{vmatrix} a_1 & a_0 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \end{vmatrix}. \tag{3.30}$$

Отметим, что многие теоремы, леммы и определения теории симметричных многочленов для действительных чисел имеют соответствующие аналоги в теории квадрачисел, что представляет собой отдельный предмет для дальнейшего рассмотрения.

4. Геометрия собственного трехмерного пространства

Рассмотрим собственное трехмерное векторное пространство, в котором любой вектор a имеет разложение

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3. \tag{4.1}$$

Для векторов базиса данного трехмерного пространства $\mathbf{e}_1 = (1,0,0)$, $\mathbf{e}_2 = (0,1,0)$, $\mathbf{e}_3 = (0,0,1)$ справедливы равенства

$$\begin{gathered} (\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1^2 = 1, \qquad (\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_2^2 = 1, \qquad (\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_3^2 = 1, \\ (\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2) = (\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1) = 0, \quad (\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3) = (\mathbf{e}_3\mathbf{e}_2) = 0, \quad (\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1) = (\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3) = 0 \end{gathered} \tag{4.2}$$

со скалярными произведениями $(\mathbf{e}_\alpha\mathbf{e}_\beta) = \delta_{\alpha\beta}$ и, соответственно, формула скалярного произведения векторов $(\mathbf{ab}) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = \delta_{\alpha\beta}a_\alpha b_\beta$.

Новое векторное произведение имеет обозначение для вектора $\mathbf{c} = \{\mathbf{ab}\}$. Векторы базиса удовлетворяют также векторным соотношениям

$$\begin{gathered} \{\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1\} = 0, \quad \{\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2\} = 0, \quad \{\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3\} = 0, \\ \{\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\} = \{\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1\} = \mathbf{e}_3, \quad \{\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3\} = \{\mathbf{e}_3\mathbf{e}_2\} = \mathbf{e}_1, \quad \{\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1\} = \{\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3\} = \mathbf{e}_2. \end{gathered} \tag{4.3}$$

В итоге получим формулу

$$\begin{gathered} \mathbf{c} = \{\mathbf{ab}\} = per\,(C) = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}_+ = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}_+ \mathbf{e}_1 + \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}_+ \mathbf{e}_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}_+ \mathbf{e}_3 = \\ = (a_2b_3 + a_3b_2)\,\mathbf{e}_1 + (a_3b_1 + a_1b_3)\,\mathbf{e}_2 + (a_1b_2 + a_2b_1)\,\mathbf{e}_3 = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}a_\alpha b_\beta \mathbf{e}_\gamma \end{gathered} \tag{4.4}$$

с выражением произведения векторов через их компоненты и соответствующее определение $c_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}a_\beta b_\gamma$. Здесь приводится символическая запись с использованием известного понятия перманента третьего порядка $\mathrm{per}(C)$ для матрицы (C) [8]. Компонентами вектора c являются перманенты второго порядка при разложении $\mathrm{per}(C)$ по первой строке. Перманент определяется как аналог детерминанта, у которого все знаки в выражениях миноров положительные и поэтому он известен также под названием "плюс-определитель". В рассматриваемом базисе скалярное произведение $(\mathbf{ab})$ и векторное произведение $\{\mathbf{ab}\}$ коммутативны, дистрибутивны относительно сложения векторов, сочетательны относительно умножения на число и равны нулю, если только $\mathbf{a} = 0$ или $\mathbf{b} = 0$.

Три независимых вектора выделенных направлений в собственном трехмерном пространстве связаны с векторами базиса разложениями

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}^1 &= -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3, \\ \boldsymbol{\varepsilon}^2 &= \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3, \\ \boldsymbol{\varepsilon}^3 &= -\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3. \end{aligned} \tag{4.5}$$

К соотношениям (2.4) и (4.3) добавим следующие равенства

$$\begin{gathered} \left\{\boldsymbol{\varepsilon}^k\boldsymbol{\varepsilon}^n\right\} = 2\mathbf{e}_r, \quad \left\{\boldsymbol{\varepsilon}^k\boldsymbol{\varepsilon}^k\right\} = 2\boldsymbol{\varepsilon}^k, \quad (k \neq n \neq r) \\ \{\mathbf{e}_k\mathbf{e}_n\} = \mathbf{e}_r, \quad \{\mathbf{e}_k\mathbf{e}_k\} = 0, \\ \boldsymbol{\varepsilon}^1 + \boldsymbol{\varepsilon}^2 = -2\mathbf{e}_3, \quad \boldsymbol{\varepsilon}^2 + \boldsymbol{\varepsilon}^3 = -2\mathbf{e}_2, \quad \boldsymbol{\varepsilon}^3 + \boldsymbol{\varepsilon}^1 = -2\mathbf{e}_1, \\ \mathbf{a} = \{\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{a}\} + (\boldsymbol{\varepsilon}^2\mathbf{a})\,\mathbf{e}_1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^1\mathbf{a})\,\mathbf{e}_2 + (\boldsymbol{\varepsilon}^3\mathbf{a})\,\mathbf{e}_3. \end{gathered} \tag{4.6}$$

Согласно (2.6) и (2.8) и первого соотношения в (3.14) запишем расстояние от центра координат до конца вектора $\mathbf{a}$ и при $a_0 = ct$ соответствующее физическое время со значением перманента третьего порядка для нового смешанного произведения

$$\begin{gathered} \rho\,(\mathbf{a}) = \left[(\{\mathbf{aa}\}\,\{\mathbf{aa}\}) - (\mathbf{aa})\,(\mathbf{aa})\right]^{1/4} = \left[-\,(\mathbf{aa_1})\,(\mathbf{a_2a_3}) - (\{\mathbf{aa_1}\}\,\{\mathbf{a_2a_3}\})\right]^{1/4} = \\ = \left[-\left(-a_1^2 - a_2^2 + a_3^2\right)^2 + 4a_1^2a_2^2\right]^{1/4} = \\ = \left[(-a_1 - a_2 - a_3)\,(-a_1 + a_2 - a_3)\,(a_1 - a_2 - a_3)\,(-a_1 - a_2 + a_3)\right]^{1/4} = \\ = \left[-a_1^4 - a_2^4 - a_3^4 + 2\left(a_1^2a_2^2 + a_2^2a_3^2 + a_3^2a_1^2\right)\right]^{1/4}, \\ T\,(t, \mathbf{a}) = \left[t^4 - 2t^2\mathbf{a}^2/c^2 + \tfrac{4}{3}t\,(\mathbf{a}\,\{\mathbf{aa}\})\,/\,c^3\right]^{1/4} = \\ = \left[t^4 - 2t^2(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)\,/\,c^2 + 8ta_1a_2a_3/\,c^3\right]^{1/4}, \\ (\mathbf{a}\,\{\mathbf{aa}\}) = per\,(A) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}_+ = 3!a_1a_2a_3 = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}a_\alpha a_\beta a_\gamma. \end{gathered} \tag{4.7}$$

Взаимосвязь модуля или длины вектора $|\mathbf{a}|$ и расстояния $\rho\,(\mathbf{a})$ дается равенством

$$|\mathbf{a}|^2 = \sqrt{\{\mathbf{aa}\}^2 - \rho^4\,(\mathbf{a})}. \tag{4.8}$$

Напомним, что расстояние $\rho\,(\mathbf{a})$, как полунорма, определяется между одновременными событиями по физическому времени $T\,(t, \mathbf{a})$ в центре координат и концом вектора $\mathbf{a}$ в анизотропном пространстве-времени Бервальда-Моора.

При $\mathbf{a} = \boldsymbol{\varepsilon}^m ct$ с учетом (4.6) получим равные величины $\rho^4\,(\boldsymbol{\varepsilon}^m ct) = c^4T^4\,(t, \boldsymbol{\varepsilon}^m ct) = 3c^4t^4$.

Если $a_0 = 0$, то из (3.27)–(3.29) получим сопряженный, обратный векторы и расстояние

$$\begin{gathered} \bar{\mathbf{a}} = -\,\{\mathbf{a}\,\{\mathbf{aa}\}\} + \mathbf{a}\,(\mathbf{aa})\,, \\ \mathbf{a}^{-1} = -\frac{\bar{\mathbf{a}}}{[\rho\,(\mathbf{a})]^4} = \frac{\{\mathbf{a}\,\{\mathbf{aa}\}\} - \mathbf{a}\,(\mathbf{aa})}{\{\mathbf{aa}\}\,\{\mathbf{aa}\} - (\mathbf{aa})\,(\mathbf{aa})}, \\ \rho\,(\mathbf{a}) = \left[-\,(\mathbf{a}\bar{\mathbf{a}})\right]^{1/4} \end{gathered} \tag{4.9}$$

для собственного трехмерного пространства.

Заметим, что в собственном евклидовом пространстве в системе кватернионов с (3.1) сопряженный вектор, в отличие от (4.9), равен противоположному ($\bar{\mathbf{a}} = -\mathbf{a}$), обратный вектор имеет значение $\mathbf{a}^{-1} = -\bar{\mathbf{a}}/\left|\mathbf{a}\right|^2 = \mathbf{a}/\left|\mathbf{a}\right|^2$ и расстояние есть длина вектора $\rho\left(\mathbf{a}\right) = \left[-\left(\mathbf{a}\bar{\mathbf{a}}\right)\right]^{1/2} = \left[\left(\mathbf{a}\mathbf{a}\right)\right]^{1/2}$.

Дифференциальная геометрия локального пространства-времени Бервальда-Моора с (1.2) основывается на дифференциальной форме

$$\begin{gathered}(ds)^4 = g_{ijkl}dx^i dx^j dx^k dx^l = g_{0000}\left(dx_0\right)^4 + g_{00\alpha\beta}\left(dx_0\right)^2 dx^\alpha dx^\beta + \\ + g_{0\alpha\beta\gamma}dx_0 dx^\alpha dx^\beta dx^\gamma + g_{\alpha\beta\gamma r}dx^\alpha dx^\beta dx^\gamma dx^r = c^4\left(dT\right)^4 - \left(d\rho\right)^4\end{gathered} \tag{4.10}$$

при следующем разбиении

$$\begin{gathered}c^4\left(dT\right)^4 = g_{0000}\left(dx_0\right)^4 + g_{00\alpha\beta}\left(dx_0\right)^2 dx^\alpha dx^\beta + g_{0\alpha\beta\gamma}dx_0 dx^\alpha dx^\beta dx^\gamma, \\ \left(d\rho\right)^4 = \gamma_{\alpha\beta\gamma r}dx^\alpha dx^\beta dx^\gamma dx^r\end{gathered} \tag{4.11}$$

с $g_{0000} = 1,\ g_{00\alpha\beta} = -\delta_{\alpha\beta},\ g_{0\alpha\beta\gamma} = 4\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}/3,\ \gamma_{\alpha\beta\gamma r} = -g_{\alpha\beta\gamma r} = \frac{1}{2!}\left[\varepsilon_{m\alpha(\beta}\varepsilon^m_{\ \gamma)r} - \delta_{\alpha(\beta}\delta_{\gamma)r}\right]$.

Тогда компоненты сопряженного вектора $d\bar{x}_\alpha$ и расстояние с пространственными индексами имеют вид

$$d\bar{x}_\alpha = -\gamma_{\alpha\beta\gamma r}dx^\beta dx^\gamma dx^r, \quad d\rho = \left(-d\bar{x}_\alpha dx^\alpha\right)^{1/4}. \tag{4.12}$$

Здесь тензор $\gamma_{\alpha\beta\gamma r}$ определяет геометрию собственного трехмерного пространства. Опускание и поднимание индексов осуществляется символами Кронекера $\delta_{\alpha\beta}$ и δ_α^β. Длина касательного вектора равняется

$$dl = \left(\delta_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta\right)^{1/2}. \tag{4.13}$$

Выражение (4.7), как скалярная часть модуля квадрачисла в степени четыре с $a_0 = 0$ представляется с учетом первого соотношения в (3.18) также в следующей симметричной форме для набора квадрачисел

$$\begin{gathered}\rho^4\left(\mathbf{a}\right) = \left(\mathbf{A_1} + \mathbf{A_2} + \mathbf{A_3}\right)\circ\left(\mathbf{A_1}\circ\mathbf{A_2}\circ\mathbf{A_3}\right) = \\ = \mathbf{A}_1^2\circ\mathbf{A}_2\circ\mathbf{A}_3 + \mathbf{A}_1\circ\mathbf{A}_2^2\circ\mathbf{A}_3 + \mathbf{A}_1\circ\mathbf{A}_2\circ\mathbf{A}_3^2.\end{gathered} \tag{4.14}$$

В общем случае, согласно (3.10), имеет место функция "расстояния", вычисляемая для четырех квадрачисел

$$\rho(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d}) = \left[-\left(\{\mathbf{ab}\}\{\mathbf{cd}\}\right) - \left(\mathbf{ab}\right)\left(\mathbf{cd}\right)\right]^{1/4}. \tag{4.15}$$

При $\rho\left(\mathbf{a},\mathbf{a_1},\mathbf{a_2},\mathbf{a_3}\right)$ с $\mathbf{a}+\mathbf{a_1}+\mathbf{a_2}+\mathbf{a_3} = 0$ из (4.10) вытекает формула (4.7).

5. Физическая скорость

Используя приведенные результаты, запишем трехмерное расстояние и элемент физического времени в векторных формах

$$\begin{gathered}\rho\left(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2\right) = \rho\left(\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_1\right) = \left[\left\{\left(\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_1\right)\left(\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_1\right)\right\}^2 - \left(\left(\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_1\right)\left(\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_1\right)\right)^2\right]^{1/4}, \\ T_{12}\left(t_2-t_1,\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_1\right) = \left[\left(t_2-t_1\right)^4 - 2(t_2-t_1)^2\left(\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_1\right)^2/c^2 + \right. \\ \left. +4\left(t_2-t_1\right)\left(\left(\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_1\right)\left\{\left(\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_1\right)\left(\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_1\right)\right\}\right)/3c^3\right]^{1/4}.\end{gathered} \tag{5.1}$$

Введем вектор физической скорости в собственном трехмерном пространстве

$$\mathbf{u}_F = \frac{(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)}{T_{12}\left(t_2 - t_1, \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\right)} = M\left(\mathbf{u}\right)\mathbf{u} \tag{5.2}$$

по физическому времени, зависящей нелинейно от координатной скорости $\mathbf{u} = \left(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\right) / \left(t_2 - t_1\right)$ с коэффициентом

$$M\left(\mathbf{u}\right) = \frac{t_2 - t_1}{T_{12}\left(t_2 - t_1, \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\right)} = \frac{1}{\left[1 - 2\mathbf{u}^2/c^2 + 4(\mathbf{u}\left\{\mathbf{uu}\right\})/3c^3\right]^{1/4}} \tag{5.3}$$

и его модуль (или длину)

$$\left|\mathbf{u}_F\right| = M\left(\mathbf{u}\right)\left|\mathbf{u}\right| = \frac{\left|\mathbf{u}\right|}{\left[1 - 2\mathbf{u}^2/c^2 + 4(\mathbf{u}\left\{\mathbf{uu}\right\})/3c^3\right]^{1/4}}. \tag{5.4}$$

Тогда из (5.1) вытекают выражения для расстояния

$$\begin{gathered}\rho\left(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\right) = \left(t_2 - t_1\right)\left[\left(\left\{\mathbf{uu}\right\}\left\{\mathbf{uu}\right\}\right) - \left(\mathbf{uu}\right)\left(\mathbf{uu}\right)\right]^{1/4} = \\ = T_{12}\left(t_2 - t_1, \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\right)\left[\left(\left\{\mathbf{u}_F\mathbf{u}_F\right\}\left\{\mathbf{u}_F\mathbf{u}_F\right\}\right) - \left(\mathbf{u}_F\mathbf{u}_F\right)\left(\mathbf{u}_F\mathbf{u}_F\right)\right]^{1/4}\end{gathered} \tag{5.5}$$

и полунорма физической скорости

$$\begin{gathered}u = \frac{\rho\left(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\right)}{T_{12}\left(t_2 - t_1, \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\right)} = \left[\left(\left\{\mathbf{u}_F\mathbf{u}_F\right\}\left\{\mathbf{u}_F\mathbf{u}_F\right\}\right) - \left(\mathbf{u}_F\mathbf{u}_F\right)\left(\mathbf{u}_F\mathbf{u}_F\right)\right]^{1/4} = \\ = \left[\frac{\left(\left\{\mathbf{uu}\right\}\left\{\mathbf{uu}\right\}\right) - \left(\mathbf{uu}\right)\left(\mathbf{uu}\right)}{1 - 2\mathbf{u}^2/c^2 + 4(\mathbf{u}\left\{\mathbf{uu}\right\})/3c^3}\right]^{1/4}.\end{gathered} \tag{5.6}$$

При $\mathbf{u} = \boldsymbol{\varepsilon}^m c$ получим из (5.6) формулу для постоянной скорости сигнала

$$c = \frac{\rho\left(\boldsymbol{\varepsilon}^m c\left(t_2 - t_1\right)\right)}{T_{12}\left(t_2 - t_1, \boldsymbol{\varepsilon}^m c\left(t_2 - t_1\right)\right)} \tag{5.7}$$

по любому выделенному направлению в собственном трехмерном пространстве, что и следовало ожидать.

Для модуля и полунормы физической скорости справедливо равенство

$$\left|\mathbf{u}_F\right|^2 = \sqrt{\left(\left\{\mathbf{u}_F\mathbf{u}_F\right\}\left\{\mathbf{u}_F\mathbf{u}_F\right\}\right) - u^4}. \tag{5.8}$$

Далее, согласно (2.5), получим следующие соотношения

$$\begin{gathered}s_{12} = \left(t_2 - t_1\right)N\left(\mathbf{u}\right), \quad s_{12} = T_{12}\left(t_2 - t_1, \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\right)\sqrt[4]{1 - u^4/c^4}, \\ N\left(\mathbf{u}\right) = \left\{\prod_m^4\left[1 + \left(\boldsymbol{\varepsilon}^m\mathbf{u}\right)/c\right]\right\}^{1/4} = \\ = \left[1 - 2\mathbf{u}^2/c^2 + 4(\mathbf{u}\left\{\mathbf{uu}\right\})/3c^3 + \left(\mathbf{uu}\right)\left(\mathbf{uu}\right)/c^4 - \left(\left\{\mathbf{uu}\right\}\left\{\mathbf{uu}\right\}\right)/c^4\right]^{1/4}, \\ \sqrt[4]{1 - u^4/c^4} = M\left(\mathbf{u}\right)N\left(\mathbf{u}\right).\end{gathered} \tag{5.9}$$

Выразим координатную скорость посредством равенства $u = K^{-1}\left(\mathbf{u}_F\right)\mathbf{u}_F$ с коэффициентом $K\left(\mathbf{u}_F\right)$, удовлетворяющим, согласно (5.3), уравнению

$$1 = K^4\left(\mathbf{u}_F\right) - 2K^2\left(\mathbf{u}_F\right)/A^2 + 4K\left(\mathbf{u}_F\right)\left(\mathbf{u}_F\left\{\mathbf{u}_F\mathbf{u}_F\right\}\right)/3c^3. \tag{5.10}$$

Тогда получим тождество

$$\frac{\mathbf{u}_F}{\sqrt[4]{1-u^4/c^4}}=\frac{\mathbf{u}}{N\left(\mathbf{u}\right)}, \tag{5.11}$$

которое позволяет получить, согласно закону композиции координатных скоростей в векторной форме [6]

$$\mathbf{u}'=\mathbf{v}'\circ\mathbf{u}=\frac{\mathbf{v}'+\mathbf{u}+\frac{1}{4}\sum\limits_{m}^{4}\boldsymbol{\varepsilon}^m\left(\boldsymbol{\varepsilon}^m\mathbf{v}'\right)\left(\boldsymbol{\varepsilon}^m\mathbf{u}\right)/c}{1+\left(\mathbf{v}'\mathbf{u}\right)/c^2}=\frac{\mathbf{v}'+\mathbf{u}+\left\{\mathbf{v}'\mathbf{u}\right\}/c}{1+\left(\mathbf{v}'\mathbf{u}\right)/c^2} \tag{5.12}$$

и равенства

$$N\left(\mathbf{u}'\right)=\frac{N\left(\mathbf{v}'\right)N\left(\mathbf{u}\right)}{1+\left(\mathbf{v}'\mathbf{u}\right)}, \tag{5.13}$$

преобразования физической скорости и ее полунормы

$$\begin{gathered}\frac{\mathbf{u}_F}{\sqrt[4]{1-\left(u'\right)^4/c^4}}=\frac{\mathbf{v}'_F}{\sqrt[4]{1-\left(v'\right)^4/c^4}}+\frac{\mathbf{u}_F}{\sqrt[4]{1-u^4/c^4}},\\ \frac{K\left(\mathbf{u}'_F\right)}{\sqrt[4]{1-\left(u'\right)^4/c^4}}=\frac{K\left(\mathbf{v}'_F\right)K\left(\mathbf{u}_F\right)+\left(\mathbf{v}'_F\mathbf{u}\right)}{\sqrt[4]{1-\left(v'\right)^4/c^4}\sqrt[4]{1-u^4/c^4}}\end{gathered} \tag{5.14}$$

при переходе к инерциальной системе отсчета (K'). Система отсчета (K') движется относительно исходной системы отсчета (K) с физической скоростью $\mathbf{v}'_F$ не равной противоположной $(-\mathbf{v}_F)$.

Наконец отметим, что область причинно-несвязанных событий с $s_{12}^4<0$ и $\rho\left(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2\right)>0$ в пространстве-времени Бервальда-Моора, которая дает одновременные события по физическому времени, определяется неравенством

$$\left\{\left(\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_1\right)\left(\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_1\right)\right\}^2>\left(\left(\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_1\right)\left(\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_1\right)\right)^2. \tag{5.15}$$

Область причинно-связанных событий с $s_{12}^4>0$ соответствует неравенству $T_{12}^4\left(t_2-t_1,\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_1\right)>\rho^4(\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_1)/c^4$. Характеристики сигнала для $s_{12}^4=0$ находятся из равенства $T_{12}^4\left(t_2-t_1,\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_1\right)=\rho^4(\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_1)/c^4$, которое удовлетворяется, согласно (5.7), для четырех векторов выделенных направлений в собственном трехмерном пространстве.

Уравнения гиперповерхностей в области $s_{12}^4<0$ при определении собственного трехмерного пространства запишутся так

$$t=0,\quad t^3-2t\mathbf{x}^2/c^2+4(\mathbf{x}\left\{\mathbf{x}\mathbf{x}\right\})/3c^3=0. \tag{5.16}$$

5. Обсуждение

Вопрос о необходимости определения расстояния в собственном трехмерном пространстве является спорным, поскольку четырехмерная финслерова геометрия Бервальда-Моора описывается методами проективной геометрии, в которой отсутствует понятие расстояния, а есть лишь некоторые аналоги. Однако при физической интерпретации метрической функции Бервальда-Моора (1.2), получаемой при сигнальном методе взаимосвязи разноместных событий [3], появляется некоторая возможность распространения традиционного определения собственного трехмерного пространства, как множества одновременных событий. Для чего в работе представлено разбиение интервала, из которого вытекает элемент физического времени и функция, равная расстоянию в собственном трехмерном пространстве. В разбиении физическое время является нелинейной функцией от координатного времени и пространственных координат, а расстояние есть полунорма. Вводится вектор физической скорости, ее полунорма, нелинейно зависящие от вектора координатной скорости и приводятся преобразования физических скоростей при переходе между инерциальными системами отсчетов. Геометрия собственного трехмерного пространства отличается от геометрии Евклида и в настоящей работе указаны лишь некоторые элементы соответствующей векторной алгебры, в которой новые векторные операции связаны с перманентами третьего порядка.

Сделаем ряд замечаний по определению собственного трехмерного пространства в финслеровых геометриях.

Метрическая функция рассматриваемого пространства-времени Бервальда-Моора, записанная в форме

$$F=\left[\left(a_0^2-\mathbf{a}^2\right)^2+\frac{4}{3}a_0\left(\mathbf{a}\left\{\mathbf{aa}\right\}\right)-\left(\left\{\mathbf{aa}\right\}\left\{\mathbf{aa}\right\}\right)\right]^{1/4}, \tag{6.1}$$

включает в себя интервал пространства-времени Минковского и дополнительные величины с новыми векторными произведениями. Эти величины в выражении собственного времени $T_0=F/c$ являются величинами, порядок которых выше, чем $\mathbf{v}^2/c^2$, что, соответственно можно было бы рассматривать метрическую функцию пространства-времени Минковского в специальной теории относительности как некоторое приближение в геометрии Бервальда-Моора. Однако такое приближение не имеет место, поскольку известные преобразования пространственных координат и времени в векторной форме для полностью анизотропного пространства-времени Бервальда-Моора не переходят в преобразования Лоренца в векторной форме, что и следовало ожидать. Все сказанное относится также и к результатам теории для частично анизотропного пространства-времени [10]. Таким образом, существуют различные альтернативные релятивистские теории, имеющие только нерелятивистский предел к галилеевой геометрии. Вопрос о реализации указанных геометрий, по-видимому, остается пока открытым.

Используя результаты работы [6], представим метрическую функцию в эквивалентных формах

$$\begin{gathered}F=|\mathbf{A}|=\left[\det\left(\mathbf{A}\right)\right]^{1/4}=\left[\det\left(\mathbf{D}\right)\right]^{1/4}=\left[\tfrac{1}{4!}per\left(L_4\right)\right]^{1/4}=\left(\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4\right)^{1/4}=\\=\left(\mathbf{H}_{1i}\mathbf{H}_{2j}\mathbf{H}_{3r}\mathbf{H}_{4t}a_ia_ja_ra_t\right)^{1/4}=\tfrac{1}{4!}\varepsilon_{mnkl}\lambda_m\lambda_n\lambda_k\lambda_l=\left(\tfrac{1}{4!}\varepsilon_{mnkl}\mathbf{H}_{mi}\mathbf{H}_{nj}\mathbf{H}_{kr}\mathbf{H}_{lt}a_ia_ja_ra_t\right)^{1/4}=\\=\left[a_0^4-2a_0^2a^2+\tfrac{4}{3}a_0(\mathbf{a}\left\{\mathbf{aa}\right\})+\left(\mathbf{aa}\right)\left(\mathbf{aa}\right)-\left(\left\{\mathbf{aa}\right\}\left\{\mathbf{aa}\right\}\right)\right]^{1/4},\end{gathered} \tag{6.2}$$

где a_r отождествляется с (a_0,a_1,a_2,a_3), введены матрицы и перманент

$$(L_4)=\begin{pmatrix}\lambda_1&\lambda_2&\lambda_3&\lambda_4\\\lambda_1&\lambda_2&\lambda_3&\lambda_4\\\lambda_1&\lambda_2&\lambda_3&\lambda_4\\\lambda_1&\lambda_2&\lambda_3&\lambda_4\end{pmatrix},\quad(\mathbf{D})=\begin{pmatrix}\lambda_1&0&0&0\\0&\lambda_2&0&0\\0&0&\lambda_3&0\\0&0&0&\lambda_4\end{pmatrix},\quad per\left(L_4\right)=4!S_4=\begin{vmatrix}\lambda_1&\lambda_2&\lambda_3&\lambda_4\\\lambda_1&\lambda_2&\lambda_3&\lambda_4\\\lambda_1&\lambda_2&\lambda_3&\lambda_4\\\lambda_1&\lambda_2&\lambda_3&\lambda_4\end{vmatrix}_+. \tag{6.3}$$

Поскольку матрица $(\mathbf{A})$ имеет четыре различных характеристических числа, то она подобна диагональной матрице $(\mathbf{D})=diag\left(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4\right)$ и имеет вид

$(\mathbf{A}) = (\mathbf{U})(\mathbf{D})(\mathbf{U})^{-1}$ с невырожденной матрицей $(\mathbf{U})$ и ее обратной $(\mathbf{U})^{-1}$. Матрица (L_4) и характеристические числа квадрачисла (либо матрицы (3.5))

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= a_0 + a_1 + a_2 + a_3,\\ \lambda_2 &= a_0 - a_1 + a_2 - a_3,\\ \lambda_3 &= a_0 + a_1 - a_2 - a_3,\\ \lambda_4 &= a_0 - a_1 - a_2 + a_3,\end{aligned} \tag{6.4}$$

записанные в виде $\lambda_m = \mathbf{H}_{mi}a_i$, с матрицей Адамара

$$\mathbf{H}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{H}_2 & \mathbf{H}_2\\ \mathbf{H}_2 & -\mathbf{H}_2\end{pmatrix}, \quad \mathbf{H}_2 = \begin{pmatrix}\mathbf{H}_1 & \mathbf{H}_1\\ \mathbf{H}_1 & -\mathbf{H}_1\end{pmatrix}, \quad \mathbf{H}_1 = 1 \tag{6.5}$$

являются основой перманента четвертого порядка $\mathrm{per}(L_4)$. Отметим, что в работе [9] рассматривались перманенты четвертого порядка для скалярного полипроизведения векторов в изотропном базисе.

Для финслерова пространства-времени с метрической функцией

$$\begin{aligned}F &= (\mathbf{A_1}\circ\mathbf{A_2}\circ\mathbf{A_3} + \mathbf{A}\circ\mathbf{A_2}\circ\mathbf{A_3} + \mathbf{A}\circ\mathbf{A_1}\circ\mathbf{A_3} + \mathbf{A}\circ\mathbf{A_1}\circ\mathbf{A_2})^{1/3} = \left[\tfrac{1}{3!}per\,(L_3)\right]^{1/3}\\ &= \left[\tfrac{1}{3!}\varepsilon_{mnk}\lambda_m\lambda_n\lambda_k\right]^{1/3} = \left[\tfrac{1}{3!}\varepsilon_{mnk}\mathbf{H}_{mi}\mathbf{H}_{nj}\mathbf{H}_{kp}a_ia_ja_p\right]^{1/3} = \left[4a_0\left(a_0^2 - \mathbf{a}^2\right) + \tfrac{4}{3}\left(\mathbf{a}\left\{\mathbf{aa}\right\}\right)\right]^{1/3},\end{aligned} \tag{6.6}$$

выраженной через сумму всех перманентов третьего порядка в матрице (L)

$$\begin{aligned} per\,(L_3) = 3!S_3 = \begin{vmatrix}\lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4\\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4\\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4\end{vmatrix}_+ =\\ = \begin{vmatrix}\lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3\\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3\\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3\end{vmatrix}_+ + \begin{vmatrix}\lambda_1 & \lambda_3 & \lambda_4\\ \lambda_1 & \lambda_3 & \lambda_4\\ \lambda_1 & \lambda_3 & \lambda_4\end{vmatrix}_+ + \begin{vmatrix}\lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_4\\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_4\\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_4\end{vmatrix}_+ + \begin{vmatrix}\lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4\\ \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4\\ \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4\end{vmatrix}_+ ,\end{aligned} \tag{6.7}$$

расстояние в собственном трехмерном пространстве для множества одновременных событий при интервале физического времени

$$T_{12}\left(t_2 - t_1, \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\right) = \left\{4\left(t_2 - t_1\right)\left[\left(t_2 - t_1\right)^2 - \left(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\right)^2\right]\right\}^{1/3} = 0, \tag{6.8}$$

равным нулю, определяется функцией

$$\rho\left(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\right) = \left[8\left(x_2 - x_1\right)\left(y_2 - y_1\right)\left(z_2 - z_1\right)\right]^{1/3} = \left[4\left(\left(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\right)\left\{\left(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\right)\left(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\right)\right\}\right)/3\right]^{1/3}, \tag{6.9}$$

в следующем разбиении интервала

$$s_{12} = \left[c^3T_{12}^3\left(t_2 - t_1, \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\right) + \rho^3\left(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\right)\right]^{1/3}. \tag{6.10}$$

Аксиома симметрии в этом случае не выполняется, а имеет место равенство $\rho\left(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\right) = -\rho\left(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1\right)$. Это затрудняет применение метрической функции (6.6) в релятивистских теориях. Величина $\rho^3\left(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\right)$ определяется, согласно (4.8), перманентом третьего порядка с равными строками в матрице из компонента вектора $(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)$.

Наиболее подходящим для релятивистской теории является финслерово пространство-время с метрической функцией

$$F = (\mathbf{A} \circ \mathbf{A_1} + \mathbf{A} \circ \mathbf{A_2} + \mathbf{A} \circ \mathbf{A_3} + \mathbf{A_1} \circ \mathbf{A_2} + \mathbf{A_1} \circ \mathbf{A_3} + \mathbf{A_2} \circ \mathbf{A_3})^{1/2} = \\ = \left[\tfrac{1}{2!} per\,(L_2)\right]^{1/2} = \left[\tfrac{1}{2!}\varepsilon_{mn}\lambda_m\lambda_n\right]^{1/2} = \left[\tfrac{1}{2!}\varepsilon_{mn}\mathbf{H}_{mi}\mathbf{H}_{nj}a_i a_j\right]^{1/2} = \left(6a_0^2 - 2\mathbf{a}^2\right)^{1/2}, \tag{6.11}$$

выраженной через сумму всех перманентов второго порядка в матрице (L)

$$per\,(L_2) = 2!S_2 = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 \end{vmatrix}_+ = \\ = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{vmatrix}_+ + \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_3 \\ \lambda_1 & \lambda_3 \end{vmatrix}_+ + \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_4 \\ \lambda_1 & \lambda_4 \end{vmatrix}_+ + \begin{vmatrix} \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_2 & \lambda_3 \end{vmatrix}_+ + \begin{vmatrix} \lambda_2 & \lambda_4 \\ \lambda_2 & \lambda_4 \end{vmatrix}_+ + \begin{vmatrix} \lambda_3 & \lambda_4 \\ \lambda_3 & \lambda_4 \end{vmatrix}_+ \tag{6.12}$$

и которая, по сути, есть пространство время Минковского с $T_{12} = \sqrt{6}\,(t_2 - t_1)$ и $\rho\,(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \left|\sqrt{2}\,(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)\right|$ в интервале (2.1).

Заметим, что метрическая функция финслерова пространства-времени

$$F = \mathbf{A} + \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_3 = per\,(L_1) = \varepsilon_m\lambda_m = 4a_0 \tag{6.13}$$

определяется в виде суммы перманентов первого порядка

$$per\,(L_1) = S_1 = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 \end{vmatrix}_+ = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4. \tag{6.14}$$

Интересным вариантом является финслерово пространство-время с метрической функцией

$$F = \left[\frac{1}{4}\left(\mathbf{A}^4 + \mathbf{A}_1^4 + \mathbf{A}_2^4 + \mathbf{A}_3^4\right)\right]^{1/4} = \left[a_0^4 + 4a_0^2\mathbf{a}^2 + 4a_0\left(\mathbf{a}\left\{\mathbf{aa}\right\}\right) + \mathbf{a}^2\mathbf{a}^2 + \left(\left\{\mathbf{aa}\right\}\left\{\mathbf{aa}\right\}\right)\right]^{1/4} \tag{6.15}$$

и разбиением интервала в форме

$$s_{12} = \left[c^4 T_{12}^4\,(t_2 - t_1, \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) + \rho^4\,(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)\right]^{1/4}. \tag{6.16}$$

Здесь имеют место выражения

$$T_{12}\,(t_2 - t_1, \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) = \left[(t_2 - t_1)^4 + 4(t_2 - t_1)^2\,(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)^2 / c^2 + \right. \\ \left. +4\,(t_2 - t_1)\left((\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)\left\{(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)\,(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)\right\}\right) / c^3\right]^{1/4}, \\ \rho\,(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \rho\,(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) = \left[\left\{(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)\,(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)\right\}^2 + \left((\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)\,(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)\right)^2\right]^{1/4}. \tag{6.17}$$

Финслерово пространство-время с метрической функцией

$$F = \left[\frac{1}{4}\left(\mathbf{A}^2 + \mathbf{A}_1^2 + \mathbf{A}_2^2 + \mathbf{A}_3^2\right)\right]^{1/2} = \left(a_0^2 + \mathbf{a}^2\right)^{1/2} \tag{6.18}$$

есть четырехмерное евклидово пространство-время с $T_{12}\,(t_2 - t_1) = (t_2 - t_1)$ и $\rho\,(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = |\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|$ для интервала

$$s_{12} = \left[c^2 T_{12}^2\,(t_2 - t_1) + \rho^2\,(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)\right]^{1/2}. \tag{6.19}$$

По-видимому, требуются еще дальнейшие усилия в прояснении задач по разбиению интервалов финслеровых пространств-времен на элемент физического времени и расстояние в собственном трехмерном пространстве, а также в широком использовании теории перманентов в релятивистских теориях.

Литература

[1] Poincare H. La mesure du temps. Rev. Metaphys. Morale, 1898. V. 6. P. 1–13.

[2] Minkowski H. I. "Raum und Zeit", 80. Versammlung Deutscher Naturforscher (Koln, 1908). Published in Physikalische Zeitschrift 10, 104–111 (1909) and Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 18, 75–88 (1909).

[3] Зарипов Р. Г. Отношение одновременности в финслеровом пространстве-времени. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. 2006. № 1 (5). Т. 3. С. 28–47.

[4] Гарасько Г. И., Павлов Д. Г. Понятие расстояния и модуля скорости в линейных финслеровых пространствах. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. 2005. Т. 1 (3). С. 1–15.

[5] Pavlov D. G. Hypercomplex Numbers, Associated Metric Spaces, and Extension of Relativistic Hyperboloid. arXiv: gr-gc/0206004. 2002. V. 1. P. 1–16.

[6] Зарипов Р. Г. К релятивистской теории в гиперкомплексных системах. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. 2007. № 1 (7). Т. 4. С. 63–81.

[7] Зарипов Р. Г. О релятивистских уравнениях в пространстве-времени Бервальда-Моора. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. 2007. №1 (7). Т. 4. С. 82–92.

[8] Минк Х. Перманенты. Москва: Мир, 1982. 213 с.

[9] Гарасько Г. И., Павлов Д. Г. Геометрия невырожденных поличисел. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. 2007. № 1 (7). Т. 4. С. 3–25.

[10] Bogoslovsky G. Yu. A Special Relativistic Theory of the Locally Anisotropic Space-Time, I: The Metric and Group of Motion of the Anisotropic Space of Events. Nuovo Cimento, 1977. V. 40B. P. 99–115.