

# ПРОСТРАНСТВА, КОНФОРМНО СВЯЗАННЫЕ С ТРЕХМЕРНЫМ ПРОСТРАНСТВОМ БЕРВАЛЬДА-МООРА

С. В. Лебедев

НИИ прикладной математики и механики МГТУ им. Н. Э. Баумана  
*serleb@rambler.ru*

Г. И. Гарасько в начале 2007 г. был предложен новый подход в теории поля. Этот подход является геометрическим и использует концепцию экстремальности объема финслерова пространства, так что финслерова геометрия "сама себе" задает уравнение поля; кроме того, он использует формализм финслеровых пространств, разработанный П. К. Рашевским в 40-х годах 20 в. В данной работе этот геометрический подход в теории поля применен к трехмерному пространству с метрикой Бервальда-Моора. Представляется уравнение для "мировой функции", через которую выражается скалярное поле конформного фактора; находятся частные специальные решения этого уравнения в двух задачах: в задаче с экспоненциально расширяющейся во времени индикатрисой и в задаче со стационарным полем конформного фактора. Для второй задачи сформулирована квантово-механическая задача на собственные значения.

## 1 Введение

Трехмерная алгебра  $H_3$  принадлежит к гиперболическим коммутативно-ассоциативным алгебрам  $H_n$ , которые, в свою очередь, составляют основную часть класса невырожденных поличисел [1]. С этими гиперболическими алгебрами ассоциированы финслеровы пространства, обладающие метрикой Бервальда-Моора; существуют философские и математические основания считать данные пространства составным элементом финслеровых расширений теории относительности [2]. Как уже отмечалось в [3], алгебра  $H_3$  имеет одно явное преимущество: в ассоциированном с этой алгеброй 3-мерном метрическом пространстве в полной мере возможно применение компьютерной визуализации и анимации поверхностей, линий и фигур, что придает наглядность геометрическим построениям. С другой стороны, применяемый для исследования трехмерного финслерова пространства математический аппарат несколько проще, чем тот, который разработан в [4–6] для размерности  $n = 4$ . Поэтому возникает необходимость, следуя подходу, изложенному в [6], рассмотреть пространство, конформно сопряженное к трехмерному пространству с метрикой Бервальда-Моора.

Алгебра  $H_3$  изоморфна алгебре трехмерных квадратных диагональных матриц; элемент этой алгебры в специальном базисе  $\psi_1, \psi_2, \psi_3$ , ( $\psi_i^2 = \psi_i$ ,  $\psi_i \cdot \psi_j = 0$ ,  $i \neq j$ ), который принято называть изотропным, имеет вид:  $A = A^1\psi_1 + A^2\psi_2 + A^3\psi_3$ . В изотропном базисе все соотношения алгебры наиболее просты, чем и обусловлена его применимость при выкладках. В "физическом" базисе [3]  $1 = \psi_1 + \psi_2 + \psi_3$ ,  $j = 2(s_1\psi_1 + s_2\psi_2 + s_3\psi_3)$ ,  $k = 2(c_1\psi_1 + c_2\psi_2 + c_3\psi_3)$ , где  $c_1 = \cos \varphi$ ,  $c_2 = \cos(\varphi + 2\pi/3)$ ,  $c_3 = \cos(\varphi + 4\pi/3)$ ,  $s_1 = \sin \varphi$ ,  $s_2 = \sin(\varphi + 2\pi/3)$ ,  $s_3 = \sin(\varphi + 4\pi/3)$  и где  $\varphi$  произвольно, норма числа данной алгебры (как детерминант матрицы, компоненты которой определяются тензором алгебры [7]) приобретает следующее выражение:

$$|A|^3 = (x^0)^3 - 3x^0(x^2 + y^2) + 2(\cos 3\varphi y^3 - \sin 3\varphi x^3) + 6xy(\sin 3\varphi y - \cos 3\varphi x). \quad (1)$$

Тогда с точностью до малых второго порядка включительно метрика приобретает псевдоевклидов вид:

$$ds = \sqrt[3]{d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3} \cong dx^0 - \frac{(dx)^2 + (dy)^2}{dx^0}, \quad (2)$$

где  $dx^0 = c dt$ . Таким образом, выполнен принцип соответствия физических теорий, что и позволяет при обобщении релятивистского подхода рассматривать 3-мерное пространство с метрикой Бервальда-Моора.

Финслерово пространство  $\xi^1, \xi^2, \xi^3$ , конформно связанное с пространством Бервальда-Моора, в изотропном базисе имеет метрическую функцию вида:

$$L(d\xi; \xi) = \kappa(\xi^1, \xi^2, \xi^3) \sqrt[3]{d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3}, \quad (3)$$

где  $\kappa(\xi) > 0$  – поле конформного фактора, которое определяется единственным образом. Длина отрезка кривой  $\xi^i = \xi^i(\tau)$ ,  $\tau \in [\tau_1, \tau_2]$  – параметр вдоль кривой, определяется с помощью интеграла вдоль этой кривой:

$$l_{1,2} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \kappa(\xi) \sqrt[3]{\dot{\xi}^1 \dot{\xi}^2 \dot{\xi}^3} d\tau, \quad (4)$$

где  $\dot{\xi}^i \equiv d\xi^i/d\tau$ . Тогда компоненты обобщенного импульса можно определить в соответствии с их определением по формулам:

$$p_i = \frac{1}{3} \kappa(\xi) \frac{\sqrt[3]{d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3}}{d\xi^i}. \quad (5)$$

Эти компоненты не являются независимыми, поскольку они связаны так называемым тангенциальным уравнением индикатрисы:

$$\Phi(p; \xi) = 0, \quad (6)$$

где функция  $\Phi(p; \xi)$  – функция Финслера – определена неоднозначно. Для конформно связанного с  $H_3$  пространства тангенциальное уравнение индикатрисы имеет вид:

$$p_1 p_2 p_3 - \frac{\kappa^3(\xi)}{3^3} = 0. \quad (7)$$

При известной зависимости конформного фактора от координат  $\kappa(\xi)$  метрическая функция  $L(d\xi; \xi)$  и функция Финслера  $\Phi(p; \xi)$  определены, а для нахождения действия как функции координат  $S(\xi)$  необходимо использовать уравнение Гамильтона-Якоби:

$$\Phi\left(\frac{\partial S}{\partial \xi}; \xi\right) = 0. \quad (8)$$

Тогда возможны три различных формы уравнений для нахождения экстремалей ("геодезических"): во-первых, они записываются как уравнения Лагранжа-Эйлера

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial L(\dot{\xi}; \xi)}{\partial \dot{\xi}^i} - \frac{\partial L(\dot{\xi}; \xi)}{\partial \xi^i} = 0; \quad (9)$$

во-вторых, в каноническом виде

$$\dot{\xi}^i = \frac{\partial \Phi}{\partial p_i} \cdot \lambda'(p; \xi), \quad p_i = -\frac{\partial \Phi}{\partial \xi^i} \cdot \lambda'(p; \xi), \quad (10)$$

где  $\lambda'(p; \xi) > 0$  – произвольная функция; в-третьих, возможна еще одна форма этих уравнений

$$\dot{\xi}^i = \left. \frac{\partial \Phi}{\partial p_i} \right|_{p_i = \frac{\partial S}{\partial \xi^i}} \cdot \lambda(\xi), \quad (11)$$

где  $\lambda(\xi) > 0$  – некоторая функция.

Согласно подходу П. К. Рашевского [8], формулы (8)–(11) справедливы для любого финслерова пространства. Для пространства  $\xi^1, \xi^2, \xi^3$ , конформно связанного с 3-мерным пространством Бервальда-Моора, уравнение Гамильтона-Якоби (8) нелинейно и имеет вид:

$$\frac{\partial S}{\partial \xi^1} \frac{\partial S}{\partial \xi^2} \frac{\partial S}{\partial \xi^3} = \frac{\kappa^3(\xi)}{3^3}, \quad (12)$$

в то время как уравнения (11) для нахождения экстремалей таковы:

$$\dot{\xi}^i = \frac{\frac{\partial S}{\partial \xi^1} \frac{\partial S}{\partial \xi^2} \frac{\partial S}{\partial \xi^3}}{\frac{\partial S}{\partial \xi^i}} \cdot \lambda(\xi). \quad (13)$$

Поскольку экстремали ("геодезические") являются мировыми линиями некоторых объектов (или частиц), то в рассматриваемом пространстве  $\xi^1, \xi^2, \xi^3$  для этих материальных частиц определен как лагранжев формализм (9), так и аналог гамильтонова формализма (10) (с заменой функции Гамильтона на функцию Финслера и методом Гамильтона-Якоби (8), (11)).

В соответствие с гипотезой *самодостаточности геометрии* [4] все входящие в метрическую функцию поля должны удовлетворять принципу экстремальности произвольного объема, – и поэтому поле конформного фактора  $\kappa(\xi)$  должно быть вполне определенным.

Это скалярное поле конформного фактора будем выражать через скалярное поле  $S_W(\xi)$  с помощью соотношения:

$$\frac{\partial S_W}{\partial \xi^1} \frac{\partial S_W}{\partial \xi^2} \frac{\partial S_W}{\partial \xi^3} = \frac{\kappa^3(\xi)}{3^3}. \quad (14)$$

Тогда лагранжиан, необходимый для получения уравнения поля, допускает следующую запись [4]:

$$\mathcal{L} = const \cdot \kappa^3(\xi) \equiv const \cdot 3^3 \cdot \frac{\partial S_W}{\partial \xi^1} \frac{\partial S_W}{\partial \xi^2} \frac{\partial S_W}{\partial \xi^3}, \quad (15)$$

и уравнение скалярного поля  $S_W$  приобретает вид:

$$\frac{\partial}{\partial \xi^1} \left[ \frac{\partial S_W}{\partial \xi^2} \frac{\partial S_W}{\partial \xi^3} \right] + \frac{\partial}{\partial \xi^2} \left[ \frac{\partial S_W}{\partial \xi^1} \frac{\partial S_W}{\partial \xi^3} \right] + \frac{\partial}{\partial \xi^3} \left[ \frac{\partial S_W}{\partial \xi^1} \frac{\partial S_W}{\partial \xi^2} \right] = 0. \quad (16)$$

Функцию  $S_W(\xi)$ , являющуюся решением этого уравнения, можно (условно) называть "мировой функцией". Поле конформного фактора  $\kappa(\xi)$  может быть найдено по известной "мировой функции" с помощью соотношения (14):

$$\kappa(\xi) = 3 \sqrt[3]{\frac{\partial S_W}{\partial \xi^1} \frac{\partial S_W}{\partial \xi^2} \frac{\partial S_W}{\partial \xi^3}}. \quad (17)$$

Таким образом, "мировая функция"  $S_W(\xi)$  – это решение полевого уравнения (16), и это решение определяет зависимость конформного фактора  $\kappa(\xi)$  от координат с помощью (17), в то время как функция действия  $S(\xi)$  – это решение уравнения Гамильтона-Якоби (12), причем при его решении функция конформного фактора  $\kappa(\xi)$  считается известной по (17).

По известной "мировой функции"  $S_W(\xi)$  в пространстве  $\xi^1, \xi^2, \xi^3$  определяется нормальная конгруэнция экстремалей ("геодезических"), уравнение которых таково:

$$\xi^i = \frac{\frac{\partial S_W}{\partial \xi^1} \frac{\partial S_W}{\partial \xi^2} \frac{\partial S_W}{\partial \xi^3}}{\frac{\partial S_W}{\partial \xi^i}} \cdot \lambda(\xi), \quad (18)$$

где  $\lambda(\xi) > 0$  – произвольна,  $\dot{\xi}^i \equiv d\xi^i/d\tau$ ,  $\tau$  – параметр вдоль кривой. Условно считаем, что именно по этим экстремалам движутся частицы самого скалярного поля  $S_W(\xi)$  (или поля конформного фактора  $\kappa(\xi)$ ) – частицы "эфира" или "вакуума". Т. о., в соответствии с (17), (18) поле конформного фактора  $\kappa(\xi)$  и конгруэнция геодезических определяются одной и той же "мировой функцией" и поэтому самосогласованы.

При использовании формализма П. К. Рапевского и квантово-механической идеи о соответствии физических величин и эрмитовых операторов, в любом финслеровом пространстве определима не только классическая механика материальных частиц, но и основные квантово-механические представления [6].

Так как величины  $\xi^i$  и  $p_i$  канонически сопряжены, при введении скобок Пуассона в финслеровом пространстве заменим функцию Гамильтона на функцию Финслера. Дальнейшая замена скобок Пуассона коммутаторами даст представление координат и импульсов в пространстве функций состояния  $\Psi(\xi)$  как эрмитовых операторов. При этом учитывается возможная зависимость элемента объема от точки пространства.

Поскольку элемент объема в пространстве  $\xi^1, \xi^2, \xi^3$  имеет вид:

$$dV = \kappa^3 d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3, \quad (19)$$

то в конформно сопряженном с  $H_3$  пространстве в координатном представлении операторы компонент импульса таковы:

$$p_i \rightarrow \hat{p}_i = i\hbar \frac{1}{\kappa^{3/2}} \frac{\partial}{\partial \xi^i} \kappa^{3/2} \quad \Rightarrow \quad [\hat{p}_i, \xi^j] = i\hbar \delta_j^i. \quad (20)$$

После перехода от классической механики к квантовой механике тангенциальное уравнение индикатрисы по сути есть или аналог уравнения Шредингера (для нерелятивистских частиц) или аналог уравнения Клейна-Гордона (для релятивистских частиц); общий вид этого уравнения через функцию Финслера таков [6]:

$$\Phi(\hat{p}; \xi) \Psi(\xi) = 0, \quad (21)$$

где  $\Psi(\xi)$  – функция состояния физической системы. Это уравнение есть линейное уравнение в частных производных, а в конформно связанном с  $H_3$  пространстве уравнение (21) имеет вид:

$$\frac{\partial^3}{\partial \xi^1 \partial \xi^2 \partial \xi^3} \kappa^{3/2} \Psi = \frac{i \kappa^{9/2}}{3^3 \hbar^3} \Psi. \quad (22)$$

## 2 Определение специального класса решений уравнения поля для пространства, конформно связанного с $H_3$

Уравнение (16) является нелинейным дифференциальным уравнением в частных производных второго порядка. Поскольку неизвестны методы нахождения общих решений уравнений такого типа, ищем специальные, физически значимые классы решений. Известно, что наиболее простые классы решений задач ОТО – решения, зависящие

от временной и только от одной пространственной (радиальной) переменной. Поэтому требуем, чтобы "мировая функция" зависела только от этих двух независимых переменных: одной временной и одной пространственной, псевдорадиальной. В качестве псевдорадиальной координаты принимаем расстояние между параллельными мировыми линиями, определяемое хроногеометрическим способом – посылкой светового сигнала на другую бесконечно близкую линию и приемом обратного сигнала. Кроме того, конкретизируем вид такой зависимости "мировой функции" от пространственной и временной координат аналогично тому, как это сделано в [4] и [5] для пространства, конформно связанного с пространством Минковского. Тогда имеем 2 варианта записи "мировой функции":

$$1) \quad S_W = \exp(-\gamma x^0) \psi(r), \quad (23)$$

где  $\gamma$  – постоянная;

$$2) \quad S_W = p_0 x^0 - \psi(r), \quad (24)$$

где  $p_0$  – постоянная, а  $\psi(r)$  – неизвестная функция одной действительной переменной.

По виду требования, налагаемого на вид "мировой функции", первая задача характеризуется как задача с расширяющейся по времени индикатрисой, а вторая – как задача со стационарным конформным фактором (см. два следующих раздела).

Учитывается, что световые лучи распространяются по изотропным плоскостям, так что по ходу лучей выполняется соотношение  $ds = 0$ . Поэтому удобно ввести в геометрическое рассмотрение куб, который построен так, что точки посылки сигнала и приема обратного сигнала являются его вершинами, а мировая линия соединяет эти точки и является главной диагональю куба (см. рис. 1). Прием сигнала на другой мировой линии и отправка обратного сигнала происходят на одном из 6 ребер куба.

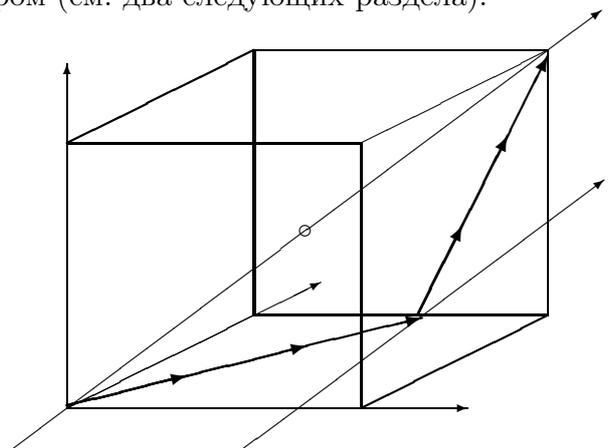


Рис. 1

Каждому из ребер припишем индекс  $l$ , равный индексу параллельной этому ребру оси изотропного базиса. Упомянутые выше 6 ребер куба образуют замкнутую пространственную ломаную линию, являющуюся индикатрисой некоторого финслерова пространства, расстояния в котором определяются хроногеометрическим образом. Для различения разных точек индикатрисы введем координату  $\lambda$ , которую назовем псевдоокружной. Эта координата на каждом из 6 ребер меняется линейным образом (по мере удаления от одной вершины и приближения к другой) от 0 до 1, так что  $\lambda \in [0, 1)$ . Для упрощения исследования не будем рассматривать 6 точек излома индикатрисы (6 "боковых" вершин куба), в которых индикатриса не является гладкой и где координата  $\lambda$  принимает нулевое значение.

Тогда расстояние между двумя близкими и покоящимися относительно друг друга наблюдателями (параллельными прямыми мировыми линиями) в 2-мерном пространстве наблюдателей  $x, y$  ("истинном" пространстве) имеет вид:

$$dr = \sqrt{3}(c_l dx - s_l dy), \quad (25)$$

где  $l$  – индекс упомянутого выше ребра куба, которого касается испущенный луч.

В каждом из 6 ребер индикатрисы связь между "пространственными" координатами  $x, y$  и координатами  $r, \lambda$  имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cdot \frac{2}{3}(s_j + s_l \cdot \lambda), \\ y &= r \cdot \frac{2}{3}(c_j + c_l \cdot \lambda), \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

где  $j \neq l$ , а луч в направлении "вперед" движется в изотропной плоскости  $(\xi_j, \xi_l)$ .

Вычисляя модуль якобиана соответствующего преобразования координат, получим следующее выражение:

$$\left| \frac{D(x, y)}{D(r, \lambda)} \right| = \frac{2\sqrt{3}}{9} \cdot r. \quad (27)$$

Тогда выражение для произведения дифференциалов координат принимает вид:

$$dx^0 dx dy = \left| \frac{D(x, y)}{D(r, \lambda)} \right| dx^0 dr d\lambda = \frac{2\sqrt{3}}{9} \cdot r dx^0 dr d\lambda. \quad (28)$$

Лагранжиан (15) в координатах  $x^0, x, y$  запишется следующим образом (постоянный множитель опускаем):

$$\begin{aligned} \mathfrak{L} &= \left( \frac{\partial S_W}{\partial x^0} \right)^3 - \frac{3}{4} \left( \frac{\partial S_W}{\partial x^0} \right) \left[ \left( \frac{\partial S_W}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial S_W}{\partial y} \right)^2 \right] + \left( \frac{\partial S_W}{\partial x} \right)^3 s_1 s_2 s_3 + \\ &+ \left( \frac{\partial S_W}{\partial y} \right)^3 c_1 c_2 c_3 - \frac{3}{4} \left( \frac{\partial S_W}{\partial x} \right)^2 \left( \frac{\partial S_W}{\partial y} \right) \cos 3\varphi + \frac{3}{4} \left( \frac{\partial S_W}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial S_W}{\partial y} \right)^2 \sin 3\varphi. \end{aligned} \quad (29)$$

Учет (25) и того, что в соответствии с (23) и (24)  $S_w = S_w(x_0, r)$ , дает следующее выражение для лагранжиана:

$$\begin{aligned} \mathfrak{L} &= \left( \frac{\partial S_W}{\partial x^0} \right)^3 - \frac{9}{4} \left( \frac{\partial S_W}{\partial x^0} \right) \left( \frac{\partial S_W}{\partial r} \right)^2 + 3\sqrt{3} \left( \frac{\partial S_W}{\partial r} \right)^3 (s_l^3 s_1 s_2 s_3 + c_l^3 c_1 c_2 c_3) + \\ &+ \frac{9\sqrt{3}}{4} \left( \frac{\partial S_W}{\partial r} \right)^3 (-c_l^2 s_l \cos 3\varphi + s_l^2 c_l \sin 3\varphi). \end{aligned} \quad (30)$$

Тогда с учетом (28) элемент объема есть:

$$dV = \mathfrak{L} \frac{2\sqrt{3}}{9} \cdot r dx^0 dr d\lambda. \quad (31)$$

После интегрирования по переменной  $\lambda$  в пределах ребра и суммирования по всем 6 ребрам полученный элемент объема в двумерном пространстве  $x^0, r$  имеет вид:

$$dV_r = const \left[ \left( \frac{\partial S_W}{\partial x^0} \right)^3 - \frac{9}{4} \left( \frac{\partial S_W}{\partial x^0} \right) \left( \frac{\partial S_W}{\partial r} \right)^2 \right] \cdot r \cdot dx^0 dr$$

Тогда уравнение поля для "мировой функции"  $S_W = S_W(x^0, r)$  таково:

$$\frac{\partial}{\partial x^0} \left\{ \left[ 4 \left( \frac{\partial S_W}{\partial x^0} \right)^2 - 3 \left( \frac{\partial S_W}{\partial r} \right)^2 \right] r \right\} - 6 \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{\partial S_W}{\partial x^0} \frac{\partial S_W}{\partial r} \cdot r \right\} = 0. \quad (32)$$

Если мы знаем решение этого уравнения, поле конформного фактора находится из соотношения (15) таким образом:

$$\kappa(x^0, r) = \sqrt[3]{\left(\frac{\partial S_W}{\partial x^0}\right)^3 - \frac{9}{4}\left(\frac{\partial S_W}{\partial x^0}\right)\left(\frac{\partial S_W}{\partial r}\right)^2}. \quad (33)$$

Когда мы вводим соответствующие координатам  $x^0, r$  обобщенные импульсы  $p_0, p_r$ , тангенциальное уравнение индикатрисы (6) согласно формуле (33) приобретает следующий вид:

$$p_0^3 - \frac{9}{4}p_0p_r^2 - \kappa^3(x^0, r) = 0. \quad (34)$$

### 3 Модельное решение с индикатрисой, расширяющейся во времени

Запишем уравнение (32) в предположении, что функция  $S_W$  имеет вид:

$$S_W(x^0, r) = S_0 e^{-\gamma x^0} \psi(r), \quad (35)$$

где  $\gamma$  и  $S_0$  – постоянные. Подставляя функцию  $S(x^0, r)$  (35) в уравнение (32), получим:

$$r \left[ 4\gamma^2 \psi^2 - 3 \left( \frac{d\psi}{dr} \right)^2 \right] + 6 \frac{d}{dr} \left[ r\psi \frac{d\psi}{dr} \right] = 0. \quad (36)$$

После ввода безразмерной переменной  $\xi \equiv \gamma r$  уравнение приобретает следующий вид:

$$\xi \left[ 4\psi^2 - 3 \left( \frac{d\psi}{d\xi} \right)^2 \right] + 6 \frac{d}{d\xi} \left[ \xi\psi \frac{d\psi}{d\xi} \right] = 0. \quad (37)$$

В силу однородности уравнения по искомой функции сделаем замену вида:

$$\psi(\xi) = \psi_0 \exp \left( \int_0^\xi \varphi(\xi) d\xi \right). \quad (38)$$

Для искомой функции  $\varphi(\xi)$  получается уравнение Риккати:

$$\xi \frac{d\varphi}{d\xi} + \varphi + \frac{3}{2}\xi\varphi^2 + \frac{2}{3}\xi = 0. \quad (39)$$

Если  $\xi \ll 1$ , то после разложения в ряд в окрестности нуля находится приближенное решение вида:

$$\varphi(\xi) \simeq -\frac{\xi}{3} - \frac{\xi^3}{24} + \mathcal{O}(\xi^5). \quad (40)$$

Конформный фактор вычисляется по следующей формуле:

$$\kappa = \gamma \sqrt[4]{1 - \frac{9}{4}\varphi^2(\xi) \cdot S_W}. \quad (41)$$

Закон движения материальных объектов, формирующих рассматриваемое поле, имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx^0}{d\tau} &= 3 \left[ \left( \frac{\partial S_W}{\partial x^0} \right)^2 - \frac{3}{4} \left( \frac{\partial S_W}{\partial r} \right)^2 \right] \lambda(x^0, r_d), \\ \frac{dr_d}{d\tau} &= -\frac{9}{2} \left( \frac{\partial S_W}{\partial x^0} \right) \left( \frac{\partial S_W}{\partial r} \right) \lambda(x^0, r_d), \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

или после подстановки  $S_W$

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx^0}{d\tau} &= 3\gamma^2 \left[ 1 - \frac{3}{4}\varphi^2(\xi) \right] S_W^2 \lambda(x^0, r), \\ \frac{dr}{d\tau} &= -\frac{9}{2}\gamma^2 \varphi(\xi) S_W^2 \lambda(x^0, r), \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

но тогда, разделив одно на другое, получаем выражение для скорости разбегания частиц следующего вида:

$$\frac{dr}{dx^0} = -\frac{3}{2} \frac{\varphi(\xi)}{1 - 3/4 \cdot \varphi^2(\xi)}. \quad (44)$$

Эта формула при  $\xi \ll 1$  упрощается и принимает вид:

$$\frac{dr}{dt} = H_0 \left[ 1 + \frac{5}{24} \left( \frac{H_0}{c} \right)^2 r^2 \right] \cdot r, \quad H_0 \equiv \gamma c. \quad (45)$$

Таким образом, в отличие от [5, 6] коэффициент Хаббла увеличивается с увеличением расстояния между частицами. Заметим также, что, поскольку радиальная переменная  $r$  неевклидова ( $r \neq \sqrt{x^2 + y^2}$ ), то формула (45) отражает анизотропию пространства.

#### 4 Модельное решение со стационарным полем конформного фактора

Стационарное поле конформного фактора  $\kappa(x)$  получим при задании "мировой функции" как решения уравнения (32) в виде:

$$S_W = p_0 x^0 - \psi(r), \quad (46)$$

где  $p_0 > 0$  – постоянная. Тогда для неизвестной функции  $\psi$  получим уравнение вида:

$$\frac{d}{dr} \left( r \frac{d\psi}{dr} \right) = 0. \quad (47)$$

Интегрируя, получаем следующее соотношение:

$$\frac{d\psi}{dr} = \frac{C}{r}, \quad (48)$$

где  $C$  – постоянная интегрирования. Тогда конформный фактор есть:

$$\kappa(r) = p_0 \sqrt[3]{1 - \frac{9C^2}{4p_0^2 r^2}}. \quad (49)$$

Положительность подкоренного выражения предполагает выполнение следующего условия:

$$\frac{9C^2}{4p_0^2 r^2} < 1 \quad \Rightarrow \quad r > r^* \equiv \frac{3|C|}{2p_0}. \quad (50)$$

Следовательно, внутри некоторой области при достаточно малых  $r$  скалярные поля  $\kappa(r)$  и  $S_W(x^0, r)$  отсутствуют.

Движение материальных объектов (частиц) рассматриваемого поля определяется уравнениями вида :

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx^0}{d\tau} &= 3p_0^2 \left[ 1 - \frac{3}{4} \left( \frac{C}{p_0 r} \right)^2 \right] \cdot \lambda(x^0, r), \\ \frac{dr}{d\tau} &= \frac{9}{2} p_0^2 \left( \frac{C}{p_0 r} \right) \cdot \lambda(x^0, r), \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

что дает следующее выражение для скорости "сбегания" или "разбегания" материальных объектов:

$$\frac{dr}{dx^0} = \frac{3}{2} \frac{\left( \frac{C}{p_0 r} \right)}{1 - \frac{3}{4} \left( \frac{C}{p_0 r} \right)^2}. \quad (52)$$

Если  $C < 0$ , то из (52) следует, что поле  $\kappa(r)$  соответствует полю притяжения; при  $r = r^*$  скорость достигает значения  $dr/dx^0 = 3/2c$ . Потребовав, чтобы правая часть соотношения (52) по модулю была строго больше единицы, получим:

$$\frac{C}{p_0 r} > \sqrt{\frac{7}{3}} - 1 \quad \Rightarrow \quad r < r_0 \equiv \frac{|C|}{p_0 \left( \sqrt{\frac{7}{3}} - 1 \right)} \approx 1.90 \frac{|C|}{p_0}, \quad (53)$$

откуда также следует, что  $r_0 > r^*$ . Из соотношения (53) следует факт существования аналога *черной дыры* при  $r < r_0$ .

В соответствии с (51) материальные частицы в поле притяжения  $\kappa(r)$  движутся по радиальным лучам; как следует из (52), при  $r \rightarrow \infty$  их скорость стремится к нулю. При приближении к началу координат эта скорость увеличивается, в то время как конформный фактор уменьшается; и при  $r = r_0$  (где  $k_{max}/k \simeq 1.4$ ) скорость "сбегания" достигает скорости света.

## 5 Постановка задачи на собственные значения (для стационарного поля $k(\xi)$ )

Воспользуемся первой формулой (20) для записи координат импульса в операторной форме в координатном представлении:

$$\hat{p}_0 = i\hbar \frac{1}{r\kappa^{3/2}} \frac{\partial}{\partial x^0} r\kappa^{3/2}, \quad \hat{p}_r = i\hbar \frac{1}{r\kappa^{3/2}} \frac{\partial}{\partial r} r\kappa^{3/2}, \quad (54)$$

что позволяет записать уравнение (22) при условии, что момент количества движения  $l = 0$ , в виде:

$$\hbar^3 \left[ \frac{\partial^3}{(\partial x^0)^3} - \frac{9}{4} \frac{\partial}{(\partial x^0)} \frac{\partial^2}{(\partial r)^2} \right] r\kappa^{3/2} \Psi(x^0, r) = r\kappa^{9/2} i \Psi(x^0, r), \quad (55)$$

где  $\Psi(x^0, r)$  – функция состояния физической системы (волновая функция). Приняв, что поле  $\kappa(r)$  задается выражением (49), волновую функцию будем искать в виде:

$$\Psi = \frac{1}{r\kappa^{3/2}} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \frac{E}{c} x^0\right) y(r). \quad (56)$$

После подстановки (56) в (55) получим уравнение вида:

$$\frac{9}{4} \left( \frac{E}{\hbar c} \right) \frac{d^2 y}{dr^2} + \left[ \left( \frac{E}{\hbar c} \right)^3 - \frac{p_0^3}{\hbar^3} + \frac{p_0^3}{\hbar^3} \left( \frac{r^*}{r} \right)^2 \right] y = 0. \quad (57)$$

Введением следующих безразмерных величин

$$\varrho \equiv \frac{r}{r^*}, \quad \varepsilon \equiv \mu_0 \frac{\left(\frac{E}{p_0 c}\right)^3 - 1}{\frac{4}{9} \left(\frac{E}{p_0 c}\right)}, \quad \mu \equiv \frac{4}{9} \mu_0 \left(\frac{p_0 c}{E}\right), \quad \mu_0 \equiv \left(\frac{p_0}{\hbar}\right)^2 \quad (58)$$

уравнение приводится к безразмерному виду:

$$\frac{d^2 y}{d\varrho^2} + \left\{ \varepsilon + \mu \frac{1}{\varrho^2} \right\} y = 0. \quad (59)$$

Уравнение (59) по форме совпадает с одномерным уравнением Шредингера для нерелятивистской частицы, находящейся в поле притяжения с потенциалом, который равен

$$U = -\frac{\mu}{\varrho^2}. \quad (60)$$

Отсутствие поля при  $\varrho < 1$  интерпретируем как наличие бесконечно глубокой потенциальной ямы, что дает следующее граничное условие:

$$y(1) = 0. \quad (61)$$

Известно, что существует конечное число локализованных (связанных) состояний квантовой частицы с дискретным спектром отрицательных значений параметра  $\varepsilon$ . Пусть из решения задачи на собственные значения (59), (61) этот спектр уже известен, введем для него следующие обозначения:

$$\varepsilon = -\sigma_0^2, -\sigma_1^2, \dots, -\sigma_{k-1}^2, \quad \sigma_i \in \{\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_{k-1}\}. \quad (62)$$

Тогда значения энергии в соответствии со вторым выражением (58) находятся по формуле:

$$\frac{E}{cp_0} = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \left(\frac{3\sigma_i^2}{4\mu_0}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + \left(\frac{3\sigma_i^2}{4\mu_0}\right)^3}}. \quad (63)$$

## 6 Заключение

В данной работе получены два модельных решения уравнения поля для пространства, конформно связанного с трехмерным пространством Бервальда-Моора (пространством поличисел  $H_3$ ). Первое решение – с расширяющейся во времени индикатрисой – дает эффект ускорения разбегания материальных объектов. Второе решение – со стационарным полем конформного фактора – приводит к потенциальному полю притяжения с потенциалом, убывающим как  $1/r^2$ , где  $r$  – аналог радиуса цилиндрической системы координат трехмерного евклидова пространства в пространстве Бервальда-Моора. Кроме того, в этом решении конформный фактор монотонно уменьшается от конечного значения (на бесконечности) до минимального значения на границе "черной дыры" (минимальное значение конформного фактора на  $\sim 40\%$  меньше его максимального значения). Для такого стационарного поля сформулирована квантово-механическая задача на собственные значения.

### Литература

- [1] Г. И. Гарасько, Д. Г. Павлов: *Геометрия невырожденных поличисел*, Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 3 (7), Vol. 3, 2007.
- [2] Д. Г. Павлов: *Философские и математические основания финслеровых расширений теории относительности*, Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 2 (4), 2005, 12–18.
- [3] С. В. Лебедев: *Свойства пространств, ассоциированных с коммутативно-ассоциативными алгебрами  $H_3$  и  $H_4$* , Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 1 (1), 2004, 68–74.
- [4] Г. И. Гарасько: *Теория поля и финслеровы пространства*, Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 2 (6), Vol. 3, 2007.
- [5] Г. И. Гарасько: *Частное стационарное решение уравнения поля для пространства, конформно связанного с пространством Минковского*. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 3 (7), Vol. 3, 2007.
- [6] Г. И. Гарасько: *Пространства, конформно связанные с пространством Бервальда-Моора*, Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 3 (7), Vol. 3, 2007.
- [7] А. И. Кострикин: *Введение в алгебру*, М.: Наука, 1977, 496 с.
- [8] П. К. Рашевский: *Геометрическая теория уравнений с частными производными*, М.-Л.: ОГИЗ, 1947. Гл. 10.