СЛАБЫЕ ПОЛЯ

Г. И. Гарасько

ГУП ВЭИ, Россия, Москва
gri9z@mail.ru

Показано, что в приближении малых полей новый геометрический подход в теории поля в первом приближении может приводить к линейным уравнениям поля для нескольких независимых полей. При усилении полей и при переходе ко второму приближению полевые уравнения становятся, вообще говоря, нелинейными, а поля перестают быть независимыми, что приводит к отсутствию закона суперпозиции для каждого отдельного поля и к взаимодействию между разными полями. Объединение в единой теории гравитационного и электромагнитного полей проведено именно в рамках такого геометрического подхода в теории поля в псевдоримановом пространстве и искривленном пространстве Бервальда-Моора.

1 Введение

В работе [1] был предложен новый (геометрический) подход в теории поля, который применим к любому финслеровому пространству [2], для которого в каждой точке основного пространства $x^1, x^2, ..., x^n$ может быть определен объем индикатрисы $(V_{ind}(x^1, x^2, ..., x^n))_{ev}$ в предположении, что касательное пространство является евклидовым. Тогда действие I для полей, входящих в метрическую функцию финслерова пространства, определяется с точностью до постоянного множителя как объем по некоторой n-мерной области V:

$$I = const \cdot \int\limits_V^{(n)} \frac{dx^1 dx^2 ... dx^n}{(V_{ind}(x^1, x^2, ..., x^n))_{ev}} \,. \tag{1}$$

Таким образом, полевой лагранжиан определяется следующим образом:

$$\mathcal{L} = const \cdot \frac{1}{(V_{ind}(x^1, x^2, ..., x^n))_{ev}} \,. \tag{2}$$

В работах [3], [4] рассматривались пространства, конформно связаные с пространством Минковского и пространством Бервальда-Моора соответственно. Такие пространства обладают одним скалярным полем, для которого записывалось уравнение поля и находились частные решения в предположении пространственной сферической и "ромбододекаэдрной" симметрии соответственно.

Настоящая работа является продолжением упомянутой серии работ по изучению и развитию геометрической теории поля.

2 Псевдоримановое пространство с сигнатурой $(+, -, -, -)$

Рассмотрим псевдориманово пространство с сигнатурой $(+, -, -, -)$, явно выделив в метрическом тензоре $g_{ij}(x)$ этого пространства метрический тензор $\overset{o}{g}_{ij}$ пространства Минковского,

$$g_{ij}(x) = \overset{o}{g}_{ij} + h_{ij}(x) \,. \tag{3}$$

Будем предполагать, что поле $h_{ij}(x)$ слабое, то есть

$$|h_{ij}(x)| \ll 1\,. \tag{4}$$

Согласно [1] лагранжиан псевдориманового пространства с сигнатурой $(+,-,-,-)$ равен

$$\mathfrak{L} = \sqrt{-det(g_{ij})}\,. \tag{5}$$

Вычислим величину $[-det(g_{ij})]$ до членов $|h_{ij}(x)|^2$ включительно:

$$-det(g_{ij}) \simeq 1 + \mathfrak{L}_1 + \mathfrak{L}_2\,, \tag{6}$$

где

$$\mathfrak{L}_1 = \overset{o}{g}{}^{ij}\; h_{ij} \equiv h_{00} - h_{11} - h_{22} - h_{33}\,, \tag{7}$$

$$\mathfrak{L}_2 = -h_{00}(h_{11}+h_{22}+h_{33}) + h_{11}h_{22} + h_{11}h_{33} + h_{22}h_{33} - h_{12}^2 - h_{13}^2 - h_{23}^2 + h_{03}^2 + h_{02}^2 + h_{01}^2\,. \tag{8}$$

Последнюю формулу можно переписать в более удобной форме:

$$\mathfrak{L}_2 = -\begin{vmatrix} h_{00} & h_{01} \\ h_{01} & h_{11} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} h_{00} & h_{02} \\ h_{02} & h_{22} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} h_{00} & h_{03} \\ h_{03} & h_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{12} & h_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} h_{11} & h_{13} \\ h_{13} & h_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} h_{22} & h_{23} \\ h_{23} & h_{33} \end{vmatrix}. \tag{9}$$

Тогда

$$\mathfrak{L} \simeq 1 + \frac{1}{2}\,\mathfrak{L}_1 + \frac{1}{2}\,\left[\mathfrak{L}_2 - \frac{1}{4}\,\mathfrak{L}_1^2\right], \tag{10}$$

Чтобы получить уравнения для слабого поля в первом приближении надо использовать лагранжиан $\mathfrak{L}_1$, а во втором приближении – лагранжиан $\left(\mathfrak{L}_1 + \mathfrak{L}_2 - \frac{1}{4}\,\mathfrak{L}_1^2\right)$.

3 Скалярное поле

Для единственного скалярного поля $\varphi(x)$ наиболее простое представление тензора $h_{ij}(x)$ имеет вид

$$h_{ij}(x) \equiv h_{ij}^{(\varphi)}(x) = \pm \frac{\partial\varphi}{\partial x^i}\frac{\partial\varphi}{\partial x^j}\,, \tag{11}$$

поэтому

$$\mathfrak{L}_\varphi = \sqrt{-det(g_{ij})} = \sqrt{1 \pm \mathfrak{L}_1} \simeq 1 \pm \frac{1}{2}\,\mathfrak{L}_1 - \frac{1}{8}\,\mathfrak{L}_1^2\,, \tag{12}$$

где

$$\mathfrak{L}_1 = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^0}\right)^2 - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^1}\right)^2 - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^2}\right)^2 - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^3}\right)^2\,. \tag{13}$$

В первом приближении используя лагранжиан $\mathfrak{L}_1$, получим следующее полевое уравнение:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^0\partial x^0} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^1\partial x^1} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2\partial x^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^3\partial x^3} = 0\,, \tag{14}$$

которое является волновым уравнением. Стационарное поле, зависящее только от радиуса

$$r = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}\,, \tag{15}$$

будет соответственно удовлетворять уравнению

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\varphi}{dr}\right) = 0\,, \tag{16}$$

интегрируя которое, получим

$$\frac{d\varphi}{dr} = -\,C_1 \frac{1}{r^2} \qquad \Rightarrow \qquad \varphi(r) = C_0 + C_1\,\frac{1}{r}\,. \tag{17}$$

Во втором приближении надо использовать лагранжиан $\left(\mathfrak{L}_1 - \frac{1}{4}\,\mathfrak{L}_1^2\right)$, при этом получаем уравнение поля во втором приближении:

$$\overset{o}{g}{}^{ij}\,\frac{\partial}{\partial x^i}\left[\left(\pm 1 - \frac{1}{2}\,\mathfrak{L}_1\right)\frac{\partial \varphi}{\partial x^j}\right] = 0\,. \tag{18}$$

Это уравнение уже является нелинейным.

Точное уравнение поля для тензора $h_{ij}(x)$ (11):

$$\overset{o}{g}{}^{ij}\,\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\dfrac{\partial \varphi}{\partial x^j}}{\sqrt{1 \pm \mathfrak{L}_1}}\right) = 0\,. \tag{19}$$

Тогда стационарное поле, зависящее только от радиуса, должно соответственно удовлетворять уравнению

$$\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{\dfrac{d\varphi}{dr}}{\sqrt{1 \mp \left(\dfrac{d\varphi}{dr}\right)^2}}\right) = 0\,, \tag{20}$$

интегрируя которое, получим

$$\frac{d\varphi}{dr} = -\frac{C_1}{\sqrt{r^4 \pm C_1^2}} \qquad \Rightarrow \qquad \varphi(r) = C_0 + \int\limits_r^\infty \frac{C_1}{\sqrt{r^4 \pm C_1^2}}\,dr\,. \tag{21}$$

Поля с верхним знаком и нижним знаком качественно различаются: верхний знак ("+" в формуле (11)) дает поле конечное без особенностей во всем пространстве, нижний знак ("−" в (11)) дает поле, определенное везде, кроме сферической области

$$0 \le r \le \sqrt{|C_1|}\,, \tag{22}$$

в которой поле отсутствует, причем при

$$r > \sqrt{|C_1|}\,, \quad r \to \sqrt{|C_1|} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d\varphi}{dr} \to -\,C_1\,\cdot\infty\,. \tag{23}$$

В то же время на бесконечности $(r \to \infty)$ оба решения $\varphi_\pm(r)$ ведут себя как решение (17) волнового уравнения.

Зная лагранжиан, можно записать тензор энергии импульса T^i_j для полученных решений и попытаться вычислить энергию системы, деленную на скорость света c:

$$P_0 = const \int^{(3)} T^0_0 dV\,. \tag{24}$$

Для полученных стационарных сферически симметричных решений имеем

$$T^0_0 = -\,\frac{r^2}{\sqrt{r^4 \pm C_1^2}}\,, \tag{25}$$

поэтому и для верхнего, и для нижнего знака $P_0 \to \infty$.

Метрический тензор (3), (11) – простейший способ "включения" гравитационного поля в пространстве Минковского – исходном плоском пространстве, не содержащем полей. Аддитивно добавляя еще несколько таких слагаемых (11) в метрический тензор, мы сможем описывать все более сложные гравитационные поля с тензором $h_{ij} = h^{(grav)}_{ij}$.

4 Ковариантное векторное поле

Для того, чтобы из ковариантного поля $A_i(x)$ построить симметрический дважды ковариантный тензор $h_{ij}(x)$, не прибегая к использованию объектов связности, вспомним, что альтернированная частная производная от тензора есть тензор,

$$F_{ij} = \frac{\partial A_j}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^j}\,, \tag{26}$$

но антисимметрический. Построим на основе тензора F_{ij} симметрический тензор. Для этого вначале запишем скаляр

$$\mathcal{L}_A = \overset{o}{g}{}^{ij} \overset{o}{g}{}^{km}\; F_{ik}F_{jm} = 2\, \overset{o}{g}{}^{ij} \overset{o}{g}{}^{km} \left(\frac{\partial A_k}{\partial x^i}\frac{\partial A_m}{\partial x^j} - \frac{\partial A_k}{\partial x^i}\frac{\partial A_j}{\partial x^m} \right), \tag{27}$$

откуда следуют выражения для двух симметрических тензоров

$$h^{(1)}_{ij} = \overset{o}{g}{}^{km} \left(2\frac{\partial A_k}{\partial x^i}\frac{\partial A_m}{\partial x^j} - \frac{\partial A_k}{\partial x^i}\frac{\partial A_j}{\partial x^m} - \frac{\partial A_k}{\partial x^j}\frac{\partial A_i}{\partial x^m} \right), \tag{28}$$

$$h^{(2)}_{ij} = \overset{o}{g}{}^{km} \left(2\frac{\partial A_i}{\partial x^k}\frac{\partial A_j}{\partial x^m} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}\frac{\partial A_m}{\partial x^j} - \frac{\partial A_j}{\partial x^k}\frac{\partial A_m}{\partial x^i} \right). \tag{29}$$

Заметим, что не только F_{ij} и $\mathcal{L}_A$, но и тензоры $h^{(1)}_{ij}$, $h^{(2)}_{ij}$ являются градиентно инвариантными, то есть не изменяются при преобразовании

$$A_i \to A_i + \frac{\partial f(x)}{\partial x^i}\,, \tag{30}$$

где $f(x)$ – произвольная скалярная функция.

Пусть

$$h_{ij} \equiv h^{(A_k)}_{ij} = \chi(x)\, h^{(1)}_{ij} + [1 - \chi(x)]\; h^{(2)}_{ij}\,, \tag{31}$$

где $\chi(x)$ – некоторая скалярная функция. Тогда в первом приближении получим

$$\mathcal{L}_1 = 2\, \overset{o}{g}{}^{ij} \overset{o}{g}{}^{km} \left(\frac{\partial A_k}{\partial x^i}\frac{\partial A_m}{\partial x^j} - \frac{\partial A_k}{\partial x^i}\frac{\partial A_j}{\partial x^m} \right) \equiv \mathcal{L}_A\,, \tag{32}$$

то есть в первом приближении для поля $A_i(x)$ следует выполнение уравнений Максвелла:

$$\overset{o}{g}{}^{ij}\; \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} A_k - \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\overset{o}{g}{}^{ij}\; \frac{\partial A_j}{\partial x^i} \right) = 0\,. \tag{33}$$

Если принять лоренцевскую калибровку

$$\overset{o}{g}{}^{ij}\; \frac{\partial A_j}{\partial x^i} = 0\,, \tag{34}$$

то уравнения (33) принимают вид

$$\Box A_k = 0\,. \tag{35}$$

Вполне возможно, (31) не самая общая запись тензора h_{ij}, который в первом приближении дает уравнения поля, совпадающие с уравнениями Максвелла.

Для того, чтобы получить уравнения Максвелла не для свободного поля, а с источниками $j_i(x)$, надо аддитивно добавить к $h^{(A_k)}_{ij}$ (31) еще тензор

$$h^{(j_k)}_{ij} = \left(\frac{16\pi}{c} \right) \cdot \frac{1}{2} \big(A_i j_j + A_j j_i \big), \tag{36}$$

то есть метрический тензор (3) с тензором

$$h_{ij} = h_{ij}^{(Max)} \equiv h_{ij}^{(A_k)} + h_{ij}^{(j_k)} \tag{37}$$

описывает слабое электромагнитное поле с источниками поля $j_k(x)$. При этом следует отдавать себе отчет в том, что мы выходим из геометрического подхода в теории поля, так как приходится считать поле $j_k(x)$, заранее заданным, а не полученным из уравнений поля.

Таким образом, метрический тензор (3) с тензором

$$h_{ij} = \mu h_{ij}^{(A_k)} + \gamma h_{ij}^{(grav)}\,, \tag{38}$$

где μ, γ – фундаментальные постоянные, в рамках единой псевдоримановой геометрии описывает одновременно свободное электромагнитное и свободное гравитационное поле. Для того, чтобы такая теория включала в себя еще и источники электромагнитного поля $j_k(x)$, необходимо, чтобы метрический тензор, кроме $j_k(x)$, содержал и частные производные этого поля или чтобы поле $j_k(x)$ выражалось через другие поля, например, как показано ниже.

Если гравитационное поле "включено" простейшим образом, как это показано в предыдущем разделе, источники электромагнитного поля можно связать со скалярным полем следующим образом:

$$j_i(x) = q\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}\,. \tag{39}$$

В этом случае в первом приближении в случае лоренцевской калибровки имеем

$$\Box A_k = \frac{4\pi}{c} j_k\,, \tag{40}$$

$$\Box\varphi = 0\,. \tag{41}$$

А так как плотность тока имеет вид (39), то из уравнения (41) следует уравнение непрерывности

$$\overset{o}{g}{}^{ij}\ \frac{\partial j_i}{\partial x^j} = 0\,. \tag{42}$$

5 Несколько слабых полей

Переход от слабых к более сильным полям может приводить к переходу от линейных уравнений поля для независимых полей к нелинейным уравнениям поля для взаимосвязанных взаимодействующих полей. Покажем это на примере двух слабых скалярных полей $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, "включающих" гравитационное поле в пространстве Минковского.

Пусть

$$h_{ij} = \varepsilon_\varphi \frac{\partial\varphi}{\partial x^i}\frac{\partial\varphi}{\partial x^j} + \varepsilon_\psi \frac{\partial\psi}{\partial x^i}\frac{\partial\psi}{\partial x^j}, \tag{43}$$

где ε_φ, ε_ψ – независимые знаковые коэффициенты. Тогда точный лагранжиан может быть записан следующим образом:

$$\mathcal{L}_{\varphi,\psi} = \sqrt{1 + \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2}\,, \tag{44}$$

где

$$\mathcal{L}_1 = \overset{o}{g}{}^{ij} \left(\varepsilon_\varphi \frac{\partial\varphi}{\partial x^i}\frac{\partial\varphi}{\partial x^j} + \varepsilon_\psi \frac{\partial\psi}{\partial x^i}\frac{\partial\psi}{\partial x^j}\right), \tag{45}$$

$$\left.\begin{aligned}\mathcal{L}_2 = \varepsilon_\varphi\,\varepsilon_\psi \Biggl[&-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^0}\frac{\partial\psi}{\partial x^1}-\frac{\partial\varphi}{\partial x^1}\frac{\partial\psi}{\partial x^0}\right)^2-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^0}\frac{\partial\psi}{\partial x^2}-\frac{\partial\varphi}{\partial x^2}\frac{\partial\psi}{\partial x^0}\right)^2-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^0}\frac{\partial\psi}{\partial x^3}-\frac{\partial\varphi}{\partial x^3}\frac{\partial\psi}{\partial x^0}\right)^2 \\ &+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^1}\frac{\partial\psi}{\partial x^2}-\frac{\partial\varphi}{\partial x^2}\frac{\partial\psi}{\partial x^1}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^1}\frac{\partial\psi}{\partial x^3}-\frac{\partial\varphi}{\partial x^3}\frac{\partial\psi}{\partial x^1}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^2}\frac{\partial\psi}{\partial x^3}-\frac{\partial\varphi}{\partial x^3}\frac{\partial\psi}{\partial x^2}\right)^2\Biggr] .\end{aligned}\right\} \tag{46}$$

Формула (46) проще всего получается из формулы (9), если использовать следующую упрощающую формулу:

$$\begin{vmatrix} h_{ii_-} & h_{i_-j_-} \\ h_{i_-j_-} & h_{jj_-} \end{vmatrix} = \pm \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x^i} & \dfrac{\partial\psi}{\partial x^{i-}} \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial x^{j-}} & \dfrac{\partial\psi}{\partial x^j} \end{vmatrix}^2 = \pm\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}\frac{\partial\psi}{\partial x^j}-\frac{\partial\varphi}{\partial x^j}\frac{\partial\psi}{\partial x^i}\right)^2 . \tag{47}$$

В первом приближении в качестве лагранжиана следует использовать $\mathcal{L}_1$, тогда уравнения поля суть система двух независимых волновых уравнений:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^0\partial x^0}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^1\partial x^1}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2\partial x^2}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^3\partial x^3}=0\,, \\ \frac{\partial^2\psi}{\partial x^0\partial x^0}-\frac{\partial^2\psi}{\partial x^1\partial x^1}-\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2\partial x^2}-\frac{\partial^2\psi}{\partial x^3\partial x^3}=0\,.\end{aligned}\right\} \tag{48}$$

При этом поля $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ независимы и для них выполняется закон суперпозиции.

Используя точный лагранжиан для двух скалярных полей (44), получим систему двух нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\left.\begin{aligned}\overset{o}{g}{}^{ij}\,\frac{\partial}{\partial x^i}\left[\frac{\dfrac{\partial\varphi}{\partial x^j}\left(1\pm\overset{o}{g}{}^{rs}\,\dfrac{\partial\psi}{\partial x^r}\dfrac{\partial\psi}{\partial x^s}\right)\mp\dfrac{\partial\psi}{\partial x^j}\,\overset{o}{g}{}^{rs}\,\dfrac{\partial\varphi}{\partial x^r}\dfrac{\partial\psi}{\partial x^s}}{\sqrt{1+\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}}\right]=0\,, \\ \overset{o}{g}{}^{ij}\,\frac{\partial}{\partial x^i}\left[\frac{\dfrac{\partial\psi}{\partial x^j}\left(1+\overset{o}{g}{}^{rs}\,\dfrac{\partial\varphi}{\partial x^r}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x^s}\right)-\dfrac{\partial\varphi}{\partial x^j}\,\overset{o}{g}{}^{rs}\,\dfrac{\partial\varphi}{\partial x^r}\dfrac{\partial\psi}{\partial x^s}}{\sqrt{1+\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}}\right]=0\,.\end{aligned}\right\} \tag{49}$$

При этом поля $\varphi(x)$, $\psi(x)$ зависят друг от друга и принцип суперпозиции для них не выполняется. Переход от уравнений (48) к уравнениям (49) можно рассматривать как переход от слабых полей к более сильным полям.

6 Невырожденные поличисла P_n

Рассмотрим некоторую систему невырожденных поличисел P_n [5], то есть n-мерных ассциативно-коммутативных невырожденных гиперкомплексных чисел. Соответствующее координатное пространство $x^1, x^2, ..., x^n$ является финслеровым метрическим плоским пространством с элементом длины вида

$$ds = \sqrt[n]{\overset{o}{g}_{i_1 i_2 \ldots i_n}\, dx^{i_1} dx^{i_2} \ldots dx^{i_n}}\,, \tag{50}$$

$\overset{o}{g}_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ – метрический тензор, не зависящий от точки пространства. Такого рода финслеровы пространства встречаются в математической литературе (см., например,

[6] – [9]), но то, что все невырожденные поличисловые пространства относятся именно к такому типу финслеровых пространств было установлено, начиная с работ [10], [11] и в последующих работах тех же авторов, особо следует выделить работу [5].

Компоненты обобщенного импульса в геометрии (50) вычисляются по формулам:

$$p_i = \frac{\overset{o}{g}_{ij_2...j_n}\, dx^{j_2}...dx^{j_n}}{\left(\overset{o}{g}_{i_1i_2...i_n}\, dx^{i_1}dx^{i_2}...dx^{i_n}\right)^{\frac{n-1}{n}}}\,. \tag{51}$$

Тангенциальное уравнение индикатрисы в пространстве невырожденных поличисел P_n всегда можно записать [5] в виде

$$\overset{o}{g}{}^{i_1i_2...i_n}\, p_{i_1}p_{i_2}...p_{i_n} - \mu^n = 0\,, \tag{52}$$

где $\mu > 0$ – некоторая постоянная, причем всегда найдется такой специальный базис (и, вообще говоря, не один) и такое $\mu > 0$, что

$$\left(\overset{o}{g}{}^{i_1i_2...i_n}\right) = \left(\overset{o}{g}{}_{i_1i_2...i_n}\right)\,. \tag{53}$$

Перейдем к новой финслеровой геометрии на основе пространства невырожденных поличисел P_n, которая (новая геометрия) уже не является плоской, но отличие новой геометрии от исходной бесконечно мало, причем элемент длины в такой геометрии пусть имеет вид

$$ds = \sqrt[n]{\left[\overset{o}{g}_{i_1i_2...i_n} + \varepsilon h_{i_1i_2...i_n}(x)\right] dx^{i_1}dx^{i_2}...dx^{i_n}}\,, \tag{54}$$

где ε – бесконечно малая величина. Если в исходном плоском пространстве элемент объема определялся формулой

$$dV = dx^{i_1}dx^{i_2}...dx^{i_n}\,, \tag{55}$$

то в новом пространстве с точностью до ε в первой степени имеем

$$dV_h \simeq \left[1 + \varepsilon\cdot C_0\, \overset{o}{g}{}^{i_1i_2...i_n}\, h_{i_1i_2...i_n}(x)\right] dx^{i_1}dx^{i_2}...dx^{i_n}\,, \tag{56}$$

то есть согласно [1] лагранжиан слабого поля в пространстве с элементом длины (54) в первом приближении суть

$$\mathcal{L}_1 = \overset{o}{g}{}^{i_1i_2...i_n}\, h_{i_1i_2...i_n}(x)\,. \tag{57}$$

Эта формула является обобщением формулы (7).

7 Гиперкомплексное пространство H_4

В физическом ("ортонормированном" [5]) базисе, в котором каждая точка этого пространства характеризуется четырьмя действительными координатами x^0, x^1, x^2, x^3, четвертая степень элемента длины ds_{H_4} определяется формулой

$$
\begin{aligned}
(ds_{H_4})^4 &\equiv \overset{o}{g}_{ijkl}\, dx^0dx^1dx^2dx^3 = \\
&= (dx^0+dx^1+dx^2+dx^3)(dx^0+dx^1-dx^2-dx^3)\times \\
&\times(dx^0-dx^1+dx^2-dx^3)(dx^0-dx^1-dx^2+dx^3) = \\
&= (dx^0)^4+(dx^1)^4+(dx^2)^4+(dx^3)^4+8dx^0dx^1dx^2dx^3- \\
&-2(dx^0)^2(dx^1)^2-2(dx^0)^2(dx^2)^2-2(dx^0)^2(dx^3)^2- \\
&-2(dx^1)^2(dx^2)^2-2(dx^1)^2(dx^3)^2-2(dx^2)^2(dx^3)^2\,.
\end{aligned}
\tag{58}
$$

Сравним четвертую степень элемента длины ds_{H_4} в пространстве поличисел H_4 с четвертой степенью элемента длины ds_{Min} в пространстве Минковского:

$$
\begin{aligned}
(ds_{Min})^4 &= (dx^0)^4+(dx^1)^4+(dx^2)^4+(dx^3)^4- \\
&-2(dx^0)^2(dx^1)^2-2(dx^0)^2(dx^2)^2-2(dx^0)^2(dx^3)^2- \\
&+2(dx^1)^2(dx^2)^2+2(dx^1)^2(dx^3)^2+2(dx^2)^2(dx^3)^2\,.
\end{aligned}
\tag{59}
$$

Таким образом,

$$
\begin{aligned}
(ds_{H_4})^4 &= (ds_{Min})^4+8dx^0dx^1dx^2dx^3- \\
&-4(dx^1)^2(dx^2)^2-4(dx^1)^2(dx^3)^2-4(dx^2)^2(dx^3)^2\,,
\end{aligned}
\tag{60}
$$

а в ковариантной записи имеем

$$
(ds_{H_4})^4 = \left(\overset{o}{g}_{ij}\overset{o}{g}_{kl}+\frac{1}{3}\,\overset{o}{g}{}'_{ijkl}-\overset{o}{G}_{ijkl}\right)dx^idx^jdx^kdx^l\,, \tag{61}
$$

где

$$
\overset{o}{g}{}'_{ijkl}=\begin{cases} 1\,, & \text{если индексы } i,j,k,l \text{ все разные}, \\ 0\,, & \text{во всех остальных случаях;} \end{cases} \tag{62}
$$

$$
\overset{o}{G}_{ijkl}=\begin{cases} 1\,, & \text{если } \; i,j,k,l\neq 0 \text{ и } i=j\neq k=l, \\ & \qquad\qquad\text{или } i=k\neq j=l, \\ & \qquad\qquad\text{или } i=l\neq j=k; \\ 0\,, & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases} \tag{63}
$$

Тангенциальное уравнение индикатрисы в пространстве H_4 в физическом базисе можно записать следующим образом [5]:

$$
(p_0+p_1+p_2+p_3)(p_0+p_1-p_2-p_3)(p_0-p_1+p_2-p_3)(p_0-p_1-p_2+p_3)-1=0\,, \tag{64}
$$

где p_i – обобщенные импульсы,

$$
p_i=\frac{\partial\, ds_{H_4}}{\partial(dx^i)}\,. \tag{65}
$$

Сравнивая формулу (64) с формулой (58), имеем

$$\overset{o}{g}{}^{ijkl}\ p_i p_j p_k p_l - 1 = 0\,. \tag{66}$$

Здесь

$$\overset{o}{g}{}^{ijkl} = \overset{o}{g}{}^{ij}\overset{o}{g}{}^{kl} + \frac{1}{3}\overset{o}{g'}{}^{ijkl} - \overset{o}{G}{}^{ijkl}\,, \tag{67}$$

причем

$$\left(\overset{o}{g}{}^{ijkl}\right) = \left(\overset{o}{g}_{ijkl}\right), \quad \left(\overset{o}{g'}{}^{ijkl}\right) = \left(\overset{o}{g'}_{ijkl}\right), \quad \left(\overset{o}{G}{}^{ijkl}\right) = \left(\overset{o}{G}_{ijkl}\right). \tag{68}$$

Для того, чтобы задать лагранжиан для слабых полей в первом приближении, надо задать тензор h_{ijkl} в формуле (57). В упрощенном варианте его можно разделить на две аддитивные составляющие: гравитационную часть и электромагнитную часть. Гравитационная часть может быть построена аналогично тому, как это делалось в разделах 3 и 5, с учетом того, что возможно использование еще и двухиндексных числовых тензоров, так как теперь тензоры $\overset{o}{g}{}^{ijkl}$ и h_{ijkl} имеют четыре индекса, а вот на том, как построить электромагнитную часть следует остановиться подробнее.

Так как хотелось бы, сохранив градиентную инвариантность лагранжиана, получить и в пространстве H_4 для свободного поля уравнения Максвелла, запишем электромагнитную часть тензора h_{ijkl} для свободного поля следующим образом:

$$h^{A_k}_{ijkl} = \chi(x)\, h^{(1)}_{ijkl} + [1-\chi(x)]\ h^{(2)}_{ijkl}\,, \tag{69}$$

где тензоры $h^{(1)}_{ijkl}$, $h^{(2)}_{ijkl}$ – это тензоры, стоящие в круглых скобках в правых частях формул (28), (29). Тогда

$$\mathfrak{L}_A = \overset{o}{g}{}^{ijkl}\ h^{A_k}_{ijkl} \equiv 2\,\overset{o}{g}{}^{ij}\overset{o}{g}{}^{km}\left(\frac{\partial A_k}{\partial x^i}\frac{\partial A_m}{\partial x^j} - \frac{\partial A_k}{\partial x^i}\frac{\partial A_j}{\partial x^m}\right). \tag{70}$$

Чтобы получить уравнения Максвелла не для свободного поля, а с источниками $j_i(x)$, надо аддитивно добавить к $h^{(A_k)}_{ijkl}$ (69) еще тензор

$$h^{(j_k)}_{ijkl} = \left(\frac{16\pi}{c}\right)\cdot\frac{1}{6}\left(2A_i j_j\ \overset{o}{g}_{kl} - A_i\ \overset{o}{g}_{jk}\ j_l - j_i\ \overset{o}{g}_{jk}\ A_l\right), \tag{71}$$

симметризованный по всем индексам, то есть тензор

$$h_{ijkl} = h^{Max}_{ijkl} \equiv h^{(A_k)}_{ijkl} + h^{(j_k)}_{(ijkl)}$$

описывает слабое электромагнитное поле с источниками $j_i(x)$, где, например,

$$j_i = \sum_b q_{(a)}\frac{\partial\psi_{(b)}}{\partial x^i}\,, \tag{72}$$

а $\psi_{(b)}$ – скалярные составляющие гравитационного поля.

Чтобы получить единую теорию электромагнитного и гравитационного полей, следует взять линейную комбинацию тензора $h^{(Max)}_{ijkl}$, отвечающего в первом приближении за электромагнитное поле, и тензора $h^{(grav)}_{ijkl}$, отвечающего в первом приближении за гравитационное поле:

$$h_{ijkl} = \mu h^{(Max)}_{ijkl} + \gamma h^{(grav)}_{ijkl}\,, \tag{73}$$

где μ, γ – постоянные. Тензор $h^{(grav)}_{ijkl}$ можно построить, например, так

$$h^{grav}_{ijkl} = \sum_{a=1}^{N} \varepsilon_{(a)} \frac{\partial \varphi_{(a)}}{\partial x^i} \frac{\partial \varphi_{(a)}}{\partial x^j} \frac{\partial \varphi_{(a)}}{\partial x^k} \frac{\partial \varphi_{(a)}}{\partial x^l} + \sum_{b=1}^{M} \epsilon_{(b)} \frac{\partial \psi_{(b)}}{\partial x^{(i}} \frac{\partial \psi_{(b)}}{\partial x^j} \overset{o}{g}_{kl)}\,, \tag{74}$$

где $\varepsilon_{(a)}$, $\epsilon_{(b)}$ – знаковые множители, а $\varphi_{(a)}$, $\psi_{(b)}$ – скалярные поля. Общее количество скалярных полей равно $(N + M)$.

8 Заключение

В данной работе показано, что геометрический подход [1] в теории поля, который обычно дает нелинейные неразделяющиеся уравнения поля, для слабых полей в первом приближении может дать систему независимых линейных уравнений. При усилении полей принцип суперпозиции (линейности) полей нарушается, уравнения поля становятся нелинейными и поля начинают взаимодействовать между собой. Можно считать, что эти изменения уравнений поля при переходе от слабых к более сильным полям происходят за счет двух механизмов: во-первых, качественное изменение уравнений поля для свободных полей в первом приближении; во-вторых, появление дополнительных источников поля, то есть порождение данного поля другими полями.

В рамках геометрического подхода в теории поля [1] произведено объединение электромагнитного и гравитационного полей как в четырехмерном псевдоримановом пространстве с метрическим тензором $g_{ij}(x)$, так и в четырехмерном кривом пространстве Бервальда-Моора с метрическим тензором $g_{ijkl}(x)$.

Литература

[1] Г. И. Гарасько, Теория поля и финслеровы пространства. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 2 (6), Т. 3 (2006), стр. 6 – 20.

[2] П. К. Рашевский, Геометрическая теория уравнений с частными производными, М.-Л.: ОГИЗ, 1947.

[3] Г. И. Гарасько, Частное стационарное решение уравнения поля для пространства, конформно связанного с пространством Минковского. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 1 (7), Т. 4 (2007).

[4] Г. И. Гарасько, Пространство, конформно связанное с пространством Бервальда-Моора. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 1 (7), Т. 4 (2007).

[5] Д. Г. Павлов, Г. И. Гарасько: Геометрия невырожденных поличисел. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 1 (7), Т. 4 (2007).

[6] M. Matsumoto, S. Numata: On Finsler spaces with 1-form metric. Tensor, N. S., Vol. 32 (1978), 161.

[7] M. Matsumoto, S. Numata: On Finsler spaces with 1-form metric II. Berwald-Moor's metric., Tensor, N. S., Vol. 32 (1978), 275.

[8] M. Matsumoto, S. Numata: On Finsler spaces with a cubic metric, Tensor, N. S., Vol. 33 (1979), 153.

[9] H. Shimada: On Finsler spaces with the metric L of m-th root metric, Tensor, N. S., Vol. 33 (1979), 365 – 372.

[10] Д. Г. Павлов: Обобщенные аксиомы скалярного произведения, Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **1 (1)** (2004), 5 – 19.

[11] Г. И. Гарасько: Обобщенно-аналитические функции поличисловой переменной, Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **1 (1)** (2004), 75 – 88.