АЛГЕБРА Y-ЧИСЕЛ: ВОЗМОЖНОСТИ В ОБЛАСТИ ПОСТРОЕНИЯ ФУНКЦИЙ И МНОЖЕСТВ[1)]

С. В. Ёлкин[1,2], С. Ю. Игашов[2]

1 – Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН
2 – Московский инженерно-физический институт (государственный университет)

В данной работе представлено исследование неассоциативной алгебры y-чисел. Рассмотрены вопросы делимости, извлечения корней построения функций и множеств.

1. Введение

Исторически достаточно долго считалось, что полезными для приложений и богатыми по содержания являются только математические объекты обладающие свойствами коммутативности и ассоциативности. Однако, после открытии Гамильтоном гиперкомплексных чисел взгляд математиков на некоммутативные объекты в корне изменился. Стали активно изучаться различные гиперкомплексные системы. При этом объекты обладающие неассоциативностью по-прежнему оставались в тени. Традиционно считается, что эти объекты сложны для изучения и обладают скудным набором полезных свойств, которые могли бы определить их применение к реальным физическим объектам и процессам. Тем не менее постепенно накопились результаты исследований о различных неассоциативных алгебрах и гиперкомплексных системах: октавах Кэли, алгебрах Йордана и др.

В 1993 г. были открыты неассоциативные и некоммутативные объекты обладающие рядом интересных свойств. Поскольку каждый следующий объект можно было строить из предыдущего добавлением одного из двух базовых элементов, то эти объекты были названы числами – y-числами. Несмотря на то, что эти числа являются неассоциативными и некоммутативными, для них был получен набор степенных формул и выражений, в том числе для дробных и отрицательных степеней, исследована делимость [1].

В данной работе представлено дальнейшее исследование алгебры y-чисел, рассмотрены некоторые простые функции, задаваемые в виде степенного ряда.

Алгебра y-чисел нашла в настоящий момент свои первые приложения, в частности для разработки семантического языка SL [2,3]. Надеемся, дальнейшее изучение свойств y-чисел позволит построить интегральное и дифференциальное исчисление, а сами числа найдут своё место в физических приложениях.

2. Алгебра y-чисел

Рассмотрим сначала два элемента y и $\breve{y}$ для которых определена бинарная операция – умножение "$*$" которое будем называть *инверсным.* При этом будем всегда предполагать выполненными следующие две аксиомы:

$$y * y = \breve{y} \tag{1}$$
$$\breve{y} * \breve{y} = y. \tag{2}$$

1) Работа поддержана РФФИ, грант № 06-01-00538

Таким образом, мы определили операцию инверсного умножения при умножении элементов y и $\breve{y}$ на себя. Что касается произведений $y * \breve{y}$ и $\breve{y} * y$, то мы будем считать их новыми элементами построенных на "образующих" элементах y и $\breve{y}$. Мы будем считать эти два новых элемента различными, тем самым рассматривая общий случай некоммутативной бинарной операции инверсного умножения. В результате мы имеем четыре элемента y, $\breve{y}$, $y*\breve{y}$ и $\breve{y}*y$. Дальнейшее конструирование новых элементов потребует образования конструкций включающих в себя две и более операции инверсного умножения. Для корректного определения этих элементов потребуется исследовать ассоциативность инверсного умножения. Для этого рассмотрим следующий пример – произведение трех элементов y:

$$(y * y) * y = \breve{y} * y \tag{3}$$

$$y * (y * y) = y * \breve{y} \tag{4}$$

Поскольку мы условились считать элементы $y*\breve{y}$ и $\breve{y}*y$ разными, то этот простейший пример показывает неассоциативность операции инверсного умножения. Отсутствие ассоциативности требует определенных правил, определяющих порядок выполнения операций инверсного умножения в произведениях включающих в себя более двух образующих элементов. Сформулируем эти правила. Прежде всего определим инверсное умножение элементов $Y_2 \equiv y * \breve{y}$ и $\bar{Y}_2 \equiv \breve{y} * y$ на образующие элементы y и $\breve{y}$. Для этого необходимо рассмотреть следующие произведения

$$y * Y_2, \quad y * \bar{Y}_2, \quad \breve{y} * Y_2, \quad \breve{y} * \bar{Y}_2, \quad Y_2 * y, \quad \bar{Y}_2 * y, \quad Y_2 * \breve{y}, \quad \bar{Y}_2 * \breve{y}. \tag{5}$$

Запишем первое из произведений (5) в явном виде:

$$y * y * \breve{y}. \tag{6}$$

В выражении (6) и во всех других будем считать, что порядок выполнения умножений – последовательный слева направо, при этом встречающиеся рядом два элемента C должны заменяться на $\breve{y}$. Соответственно встречающиеся рядом в произведении два элемента $\breve{y}$ заменяются на y. Это означает, например, что в (6) сначала мы перемножаем элементы $y * y$, получая при этом $\breve{y}$, а затем уже переходим к умножению $\breve{y} * \breve{y}$. В результате находим $y * y * \breve{y} = y$. Подобным образом определяются и инверсные произведения вида

$$\bar{Y}_2 * y = \breve{y} * y * y. \tag{7}$$

Проходя слева направо в (7) мы заменяем пару $y*y$ на $\breve{y}$, а затем в полученном выражении $\breve{y} * \breve{y}$ выполняем последнее умножение, получая y. Заметим, что кроме y и $\breve{y}$ среди элементов (5) возникают элементы "третьего" порядка $Y_3 \equiv y*\breve{y}*y$ и $\bar{Y}_3 \equiv \breve{y}*y*\breve{y}$. При перемножении элементов "третьего" порядка и образующих элементов правила перемножения требуют одного важного уточнения: после инверсного перемножения первой встреченной пары одинаковых образующих элементов мы должны вернуться к началу получающегося выражения и снова идти слева направо до первой пары одинаковых образующих элементов, затем перемножаем их, снова возвращаемся к началу получающегося выражения и так далее. В результате мы получаем выражение представляющее собой цепочку чередующихся y и $\breve{y}$. Таким образом, мы определили произведения Y_n и $\bar{Y}_n$ для любого порядка n. В результате получено множество элементов вида $Y_1 \equiv y$, $\bar{Y}_1 \equiv \breve{y}$, $Y_2 \equiv y * \breve{y}$, $\bar{Y}_2 \equiv \breve{y} * y$, $Y_3 \equiv y * \breve{y} * y$, $\bar{Y}_3 \equiv \breve{y} * y * \breve{y}$, ... Все эти элементы представляющие собой цепочки чередующихся образующих элементов y и $\breve{y}$ мы будем называть исходными элементами. Отметим, что указанное выше замечание, позволяет однозначно определить произведения элементов любого порядка между собой. В результате такие инверсные умножения приводят к элементам того или иного порядка.

Приведем несколько поясняющих примеров умножения исходных элементов:

$$Y_3 * \bar{Y}_2 = y * \breve{y} * y * \breve{y} * y = Y_5 \tag{8a}$$

$$Y_3 * Y_2 = y * \breve{y} * y * y * \breve{y} = y * \breve{y} * \breve{y} * \breve{y} = y * y * \breve{y} = \breve{y} * \breve{y} = y \equiv Y_1 \tag{8b}$$

$$Y_2 * Y_3 = y * \breve{y} * y * \breve{y} * y \equiv Y_5 \tag{8c}$$

$$Y_3 * \bar{Y}_2 = y * \breve{y} * y * \breve{y} * y \equiv Y_5 \tag{8d}$$

$$\bar{Y}_3 * \bar{Y}_2 = \breve{y} * y * \breve{y} * \breve{y} * y = \breve{y} * y * y * y = \breve{y} * \breve{y} * y = y * y = \breve{y} \equiv \bar{Y}_1 \tag{8e}$$

Таким образом, сформулировав правила инверсного умножения, мы одновременно определили множество на котором задана эта операция. В дальнейшем элементы этого множества вместе с введенной операцией инверсного умножения будем называть алгеброй y-чисел, а его элементы y-числами. Операция умножения позволяет определить операцию возведения в целую степень. Для операции возведения в степень n будем в дальнейшем использовать обозначение $[Y]_*^n$. Здесь в обозначении символ $*$ означает возведение в степень по инверсному умножению. Рассмотрим соответствующие результаты для возведения в целочисленные степени образующих элементов – y-чисел y и $\breve{y}$: $[y]_*^n \equiv y * y * ... * y$. Положим по определению для $n = 1$

$$[y]_*^1 = y. \tag{9}$$

Для степеней $n = 2, 3$ и 4 получаем:

$$[y]_*^2 = y * y = \breve{y} \tag{10}$$

$$[y]_*^3 = \breve{y} * y = \bar{Y}_2 \tag{11}$$

$$[y]_*^4 = y * y * y * y = \breve{y} * y * y = \breve{y} * \breve{y} = y \tag{12}$$

Нетрудно заметить, что и более высокие степени сводятся к тем же результатам:

$$[y]_*^{3n+1} = y = Y_1 \tag{13}$$

$$[y]_*^{3n+2} = \breve{y} = \bar{Y}_1 \tag{14}$$

$$[y]_*^{3n+3} = \breve{y} * y = \bar{Y}_2 \tag{15}$$

Такое чередование результатов возведения в положительные целые степени позволяет взять за определение операции возведения в степень соотношения (13)–(15) и распространить их на отрицательные n. Тогда, в частности из (15) при $n = -1$ получаем:

$$[y]_*^0 = \breve{y} * y = \bar{Y}_2 \tag{16}$$

При возведении в нулевую степень ненулевого вещественного числа мы получаем единицу. В алгебре y-чисел этому соответствует число $[y]_*^0 = \breve{y} * y$. Оно действительно являет собой левую единицу, но, например, для числа y: $[y]_*^0 * y = \breve{y} * y * y = y$. Очевидно, для $\breve{y}$ число $[y]_*^0$ уже не будет левой единицей: $[y]_*^0 * \breve{y} = \breve{y} * y * \breve{y} = \bar{Y}_3$.

Аналогичные результаты справедливы и для возведения в степень образующего элемента $\breve{y}$:

$$[\breve{y}]_*^{3n+1} = \breve{y} = \bar{Y}_1 \tag{17}$$

$$[\breve{y}]_*^{3n+2} = y = Y_1 \tag{18}$$

$$[\breve{y}]_*^{3n+3} = y * \breve{y} = Y_2 \tag{19}$$

3. Расширение множества y-чисел

Расширим множество y-чисел. Во-первых, определим умножение y-чисел на вещественное или комплексное число α. Будем обозначать новый элемент αY. Подчиним эту операцию аксиомам коммутативности и ассоциативности, то есть будем полагать:

$$\alpha Y = Y\alpha, \tag{20}$$

$$(\alpha\beta)\, Y = \alpha\,(\beta Y)\,, \tag{21}$$

где под Y подразумевается какое-либо из исходных y-чисел. Элементы такого вида будем относить к множеству обобщенных y-чисел. Кроме того, после определения операции умножения y-числа на вещественное или комплексное число естественно пополнить получающееся множество нулевым элементом Θ, к которому по определению приводит умножение любого y-числа на ноль:

$$0Y = \Theta, 0\alpha Y = \Theta. \tag{22}$$

$$\alpha\Theta = \Theta \tag{23}$$

Во-вторых, определим на множестве исходных y-чисел, умноженных на вещественное или комплексное число бинарную операцию, которую будем именовать сложением y-чисел. Будем считать, что для этой операции выполнены аксиомы коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности. Определенная таким образом операция сложения является совершенно аналогичной соответствующей операции сложения для вещественных или комплексных чисел:

$$Y^{(1)} + Y^{(2)} = Y^{(2)} + Y^{(1)}, \tag{24}$$

$$Y^{(1)} + \left(Y^{(2)} + Y^{(3)}\right) = \left(Y^{(1)} + Y^{(2)}\right) + Y^{(3)}, \tag{25}$$

$$(\alpha + \beta)\, Y = \alpha Y + \beta Y, \tag{26}$$

$$\alpha\left(Y^{(1)} + Y^{(2)}\right) = \alpha Y^{(1)} + \alpha Y^{(2)}, \tag{27}$$

$$\Theta + Y = Y, \tag{28}$$

где под обозначениями $Y, Y^{(1)}, Y^{(2)}, Y^{(3)}$ подразумеваются исходные y-числа, либо исходные y-числа помноженные на вещественное или комплексное число. Получаемые в результате операции сложения элементы будем называть обобщенными y-числами. Они являются расширением множества исходных y-чисел. В силу аксиом, наложенных на операцию сложения ее можно определить и для обобщенных y-чисел. В результате в множестве обобщенных y-чисел справедливы аксиомы (22)–(28).

4. Некоторые функции от y-чисел

Выше было найдено, что старшие степени образующих y-чисел сводятся всего лишь к трем y-числам (см. (9)–(19)). Это позволяет достаточно просто определить на образующих y-числах функции, представимые в виде степенного ряда. При этом не требуется введение понятия сходимости в множестве обобщенных y-чисел. Определим, например, по инверсному умножению экспоненциальную функцию $e_*^{\alpha y}$. Здесь, как и ранее при определении целых степеней y-чисел (см. (9)-(19)) чтобы подчеркнуть, что умножение понимается как инверсное, снизу приписываем значок $*$. Принимая в качестве определения экспоненциальной функции ее ряд Тейлора получим:

$$e_*^{\alpha y} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n\,[y]_*^n}{n!} = [y]_*^0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n\,[y]_*^n}{n!}. \tag{29}$$

Представим сумму в (29) следующим образом:

$$[y]_*^0+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^{3n+1}\,[y]_*^{3n+1}}{(3n+1)\,!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^{3n+2}\,[y]_*^{3n+2}}{(3n+2)\,!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^{3n+3}\,[y]_*^{3n+3}}{(3n+3)\,!}. \tag{30}$$

Далее воспользуемся выражениями (13)-(16) для степеней y-чисел. В результате получим:

$$e_*^{\alpha y}=y\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^{3n+1}}{(3n+1)\,!}+\breve{y}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^{3n+2}}{(3n+2)\,!}+\breve{y}*y\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^{3n}}{(3n)\,!}. \tag{31}$$

Выражение для последней суммы в (31) хорошо известно [1]:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^{3n}}{(3n)\,!}=\frac{1}{3}\left[e^{\alpha}+2e^{-\alpha/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha\right)\right]. \tag{32}$$

Отсюда интегрированием по α в пределах от 0 до α легко получить выражения для остающихся сумм в (31):

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^{3n+1}}{(3n+1)\,!}=\frac{1}{3}\left[e^{\alpha}-2e^{-\alpha/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\right], \tag{33}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^{3n+2}}{(3n+2)\,!}=\frac{1}{3}\left[e^{\alpha}-2e^{-\alpha/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha-\frac{\pi}{3}\right)\right]. \tag{34}$$

Таким образом в результате получаем:

$$e_*^{\alpha y}=a\,(\alpha)\,y+b\,(\alpha)\,\breve{y}+c\,(\alpha)\,\breve{y}*y \tag{35}$$

где

$$a\,(\alpha)=\frac{1}{3}\left[e^{\alpha}-2e^{-\alpha/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\right] \tag{36}$$

$$b\,(\alpha)=\frac{1}{3}\left[e^{\alpha}-2e^{-\alpha/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha-\frac{\pi}{3}\right)\right] \tag{37}$$

$$c\,(\alpha)=\frac{1}{3}\left[e^{\alpha}+2e^{-\alpha/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha\right)\right] \tag{38}$$

Аналогично определяется $e_*^{\alpha\breve{y}}$:

$$e_*^{\alpha\breve{y}}=a\,(\alpha)\,\breve{y}+b\,(\alpha)\,y+c\,(\alpha)\,y*\breve{y} \tag{39}$$

где $a\,(\alpha)$, $b\,(\alpha)$, $c\,(\alpha)$ определены (36)–(37).

Рассмотрим теперь другой пример:

$$\ln{(1+z)}=z-\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{3}z^3-...=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\,z^n}{n} \tag{40}$$

Подставим формально вместо z y-число αy. В результате получим:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\,\alpha^n\,[y]_*^n}{n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{3n+1}\,\alpha^{3n}\,[y]_*^{3n}}{3n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{(3n+1)+1}\,\alpha^{3n+1}\,[y]_*^{3n+1}}{3n+1}+$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{(3n+2)+1}\,\alpha^{3n+2}\,[y]_*^{3n+2}}{3n+2} \tag{41}$$

Далее, воспользовавшись формулами (13)–(15) для степеней y-чисел, найдем:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \, \alpha^n \, [y]_*^n}{n} = a\,(\alpha)\, y + b\,(\alpha)\, \breve{y} + c\,(\alpha)\, \breve{y} * y, \tag{42}$$

где

$$a\,(\alpha) = -\frac{1}{6} \ln\left(\alpha^2 - \alpha + 1\right) + \frac{1}{3} \ln\left(1 + \alpha\right) - \frac{1}{\sqrt{3}} arctg \frac{\sqrt{3}\alpha}{\alpha - 2} \tag{43}$$

$$b\,(\alpha) = -\frac{1}{6} \ln\left(1 + \alpha^3\right) + \frac{1}{3} \ln\left(1 + \alpha\right) + \frac{1}{\sqrt{3}} arctg \frac{\sqrt{3}\alpha}{\alpha - 2} \tag{44}$$

$$c\,(\alpha) = \frac{1}{3} \ln\left(1 + \alpha^3\right) \tag{45}$$

при $-1 < \alpha \leq 1$.

Рассмотрим теперь полиномиальные функции от y-чисел. Среди таких функций наиболее простой и в то же время важной для многих приложений является бином Ньютона. Поэтому рассмотрим функцию

$$(1 + z)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} z^k. \tag{46}$$

Подставляя в правую часть (46) вместо z y-число, получим

$$\sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} [y]_*^k = \sum_{k=0}^{[n/3]} \begin{pmatrix} n \\ 3k \end{pmatrix} [y]_*^{3k} + \sum_{k=0}^{3k+1 \leq n} \begin{pmatrix} n \\ 3k+1 \end{pmatrix} [y]_*^{3k+1} + \sum_{k=0}^{3k+2 \leq n} \begin{pmatrix} n \\ 3k+2 \end{pmatrix} [y]_*^{3k+2}. \tag{47}$$

Подставляя сюда явные выражения (13)–(15) для степеней y-чисел, получим:

$$\sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} [y]_*^k = ay + b\breve{y} + c\breve{y} * y, \tag{48}$$

где значения a, b, c, выражаются через значения соответствующих сумм:

$$A = \sum_{k=0}^{[n/3]} \begin{pmatrix} n \\ 3k \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \left(2^n + 2\cos\left(\frac{\pi n}{3}\right)\right) \tag{49}$$

$$a = \sum_{k=0}^{3k+1 \leq n} \begin{pmatrix} n \\ 3k+1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \left(2^n + 2\cos\left(\frac{\pi\,(n-2)}{3}\right)\right) \tag{50}$$

$$b = \sum_{k=0}^{3k+2 \leq n} \begin{pmatrix} n \\ 3k+2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \left(2^n + 2\cos\left(\frac{\pi\,(n+2)}{3}\right)\right) \tag{51}$$

Завершая этот раздел обратим внимание на следующее обстоятельство. В выражениях (40) и (46) мы подставляли y-число не в левую часть выражения, а в ряд (сумму), который мы принимали в качестве определения функции. При этом в соответствии с формулами (13)–(15) для степеней y-чисел ряды y-чисел сводились просто к числовым рядам и нам не требовалось вводить понятия сходимости во множестве обобщенных y-чисел. Совершенно иная ситуация возникает в том случае, если мы попытаемся рассматривать функции (29), (40) не от y-числа αy, а, например, от y-числа $\breve{y} * y$. В этом случае старшие степени не сводятся к младшим, и чтобы придать смысл рядам можно ввести понятие нормы и рассматривать сходимость по норме. Естественно при этом сходящийся по одной норме ряд может не быть сходящимся по другой норме.

5. Соотношение эквивалентности и разбиение на классы эквивалентных элементов в множестве исходных y-чисел

Введем на множестве исходных y-чисел соотношение эквивалентности следующим образом: назовем эквивалентными элементы, начинающиеся с одинаковых образующих y-чисел (то есть либо с y, либо с $\breve{y}$) и заканчивающиеся одинаковыми y-числами. Очевидно, что соотношение эквивалентности введено корректно, то есть при таком определении оказываются выполненными аксиомы рефлексивности, симметричности и транзитивности. Таким образом, оказываются эквивалентными, например, y-числа y, $y{*}\breve{y}{*}y$, $y{*}\breve{y}{*}y{*}\breve{y}{*}y$, и т. д. В результате все множество исходных y-чисел разбивается на четыре класса эквивалентности. Будем использовать для этих классов следующее обозначение: $U\left(y,y\right)$, $U\left(\breve{y},\breve{y}\right)$, $U\left(y,\breve{y}\right)$, $U\left(\breve{y},y\right)$. В этих обозначениях в круглых скобках на первом месте стоит образующее y-число, с которого начинаются исходные y-числа данного подмножества, а на втором месте y-число, которым они заканчиваются:

$$U\left(y,y\right)=\left\{y\,,\ y*\breve{y}*y\,,\ y*\breve{y}*y*\breve{y}*y\,,\ \ldots\right\},\tag{52}$$

$$U\left(\breve{y},\breve{y}\right)=\left\{\breve{y}\,,\ \breve{y}*y*\breve{y}\,,\ \breve{y}*y*\breve{y}*y*\breve{y}\,,\ \ldots\right\},\tag{53}$$

$$U\left(y,\breve{y}\right)=\left\{y*\breve{y}\,,\ y*\breve{y}*y*\breve{y}\,,\ y*\breve{y}*y*\breve{y}*y*\breve{y}\,,\ \ldots\right\},\tag{54}$$

$$U\left(\breve{y},y\right)=\left\{\breve{y}*y\,,\ \breve{y}*y*\breve{y}*y\,,\ \breve{y}*y*\breve{y}*y*\breve{y}*y\,,\ \ldots\right\},\tag{55}$$

С использованием множеств $U\left(y,y\right)$, $U\left(\breve{y},\breve{y}\right)$, $U\left(y,\breve{y}\right)$, $U\left(\breve{y},y\right)$ будет удобно определить некоторую алгебру. Определим понятие умножения двух множеств: под произведением $A*B$ двух множеств A и B будем подразумевать множество составленное из всевозможных произведений вида $a{*}b$, где $a\in A$, $b\in B$. Нетрудно получить следующую таблицу умножения:

$$U\left(y,\breve{y}\right)*\left\{\breve{y}\right\}=\left\{\breve{y}\right\}.\tag{56}$$

Здесь и далее $\{\breve{y}\}$, либо $\{y\}$ означает множество состоящее из одного элемента – $\breve{y}$ либо y, соответственно.

$$U\left(\breve{y},y\right)*\left\{y\right\}=\left\{y\right\},\tag{57}$$

$$U\left(y,y\right)*\left\{y\right\}=\left\{\breve{y}\right\},\tag{58}$$

$$U\left(\breve{y},\breve{y}\right)*\left\{\breve{y}\right\}=\left\{y\right\},\tag{59}$$

$$\left\{y\right\}*U\left(y,\breve{y}\right)=\left\{y\right\},\tag{60}$$

$$\left\{\breve{y}\right\}*U\left(\breve{y},y\right)=\left\{\breve{y}\right\},\tag{61}$$

$$\left\{y\right\}*U\left(y,y\right)=\left\{\breve{y}\right\},\tag{62}$$

$$\left\{\breve{y}\right\}*U\left(\breve{y},\breve{y}\right)=\left\{y\right\}.\tag{63}$$

$$U\left(y,\breve{y}\right)*\left\{y\right\}=U\left(y,y\right)\backslash y.\tag{64}$$

В этой формуле и в последующих формулах этого раздела $U\backslash y$ означает множество U без элемента y.

$$U\left(\breve{y},y\right)*\left\{\breve{y}\right\}=U\left(\breve{y},\breve{y}\right)\backslash\breve{y},\tag{65}$$

$$U\left(y,y\right)*\left\{\breve{y}\right\}=U\left(y,\breve{y}\right),\tag{66}$$

$$U\left(\breve{y},\breve{y}\right)*\left\{y\right\}=U\left(\breve{y},y\right),\tag{67}$$

$$\left\{\breve{y}\right\}*U\left(y,\breve{y}\right)=U\left(\breve{y},\breve{y}\right)\backslash\breve{y},\tag{68}$$

$$\left\{y\right\}*U\left(\breve{y},y\right)=U\left(y,y\right)\backslash y,\tag{69}$$

$$\left\{\breve{y}\right\}*U\left(y,y\right)=U\left(\breve{y},y\right),\tag{70}$$

$$\left\{y\right\}*U\left(\breve{y},\breve{y}\right)=U\left(y,\breve{y}\right).\tag{71}$$

Эта таблица умножения позволяет решать простейшие уравнения в y-числах. Кроме того с помощью соотношений (56)–(71) можно перейти к алгебре множеств, причем образующими элементами такой алгебры будут множества $U(y,y)$, $U(\breve{y},\breve{y})$, $U(y,\breve{y})$, $U(\breve{y},y)$. Приведем таблицу умножения (которая будет содержать 16 соотношений, в соответствии с тем, что для каждого U есть четыре сомножителя включая его самого) для образующих множеств указанной алгебры:

$$U(y,y) * U(y,y) = \{\breve{y}\}, \tag{72}$$
$$U(y,y) * U(\breve{y},\breve{y}) = U(y,\breve{y}), \tag{73}$$
$$U(y,y) * U(y,\breve{y}) = \{y\}, \tag{74}$$
$$U(y,y) * U(\breve{y},y) = U(y,y)\setminus y, \tag{75}$$
$$U(\breve{y},\breve{y}) * U(\breve{y},\breve{y}) = \{y\}, \tag{76}$$
$$U(\breve{y},\breve{y}) * U(y,y) = U(\breve{y},y), \tag{77}$$
$$U(\breve{y},\breve{y}) * U(y,\breve{y}) = U(\breve{y},\breve{y})\setminus\breve{y}, \tag{78}$$
$$U(\breve{y},\breve{y}) * U(\breve{y},y) = \{\breve{y}\}, \tag{79}$$
$$U(\breve{y},y) * U(y,y) = U(y,y), \tag{80}$$
$$U(\breve{y},y) * U(\breve{y},\breve{y}) = U(\breve{y},\breve{y})\setminus\breve{y}, \tag{81}$$
$$U(\breve{y},y) * U(y,\breve{y}) = U(y,\breve{y}), \tag{82}$$
$$U(\breve{y},y) * U(\breve{y},y) = U(\breve{y},y)\setminus\breve{y} * y, \tag{83}$$
$$U(y,\breve{y}) * U(y,y) = U(y,y)\setminus y, \tag{84}$$
$$U(y,\breve{y}) * U(\breve{y},\breve{y}) = U(\breve{y},\breve{y}), \tag{85}$$
$$U(y,\breve{y}) * U(y,\breve{y}) = U(y,\breve{y})\setminus y * \breve{y}, \tag{86}$$
$$U(y,\breve{y}) * U(\breve{y},y) = U(\breve{y},y). \tag{87}$$

Следует заметить, что полученная алгебра оказывается, как и алгебра y-чисел, неассоциативной. В этом нетрудно убедиться рассмотрев следующий пример:

$$(U(y,y) * U(y,y)) * U(y,y) = \breve{y} * U(y,y) = U(\breve{y},y), \tag{88}$$
$$U(y,y) * (U(y,y) * U(y,y)) = U(y,y) * \breve{y} = U(y,\breve{y}). \tag{89}$$

6. Возведение исходных y-чисел в степень. Таблица умножения исходных y-чисел

Выше были подробно рассмотрены вопросы инверсного умножения y-чисел, а также возведения в целую степень образующих y-чисел и, соответственно, определение некоторых функций от образующих y-чисел. Ниже мы рассмотрим возведение в степень исходных y-чисел, а также составим таблицу умножения исходных y-чисел, которая позволит значительно упростить процедуру их инверсного умножения.

Прежде всего строго определим понятие степени исходного y-числа относительно операции инверсного умножения:

$$[Y_m]_*^n \equiv (...((Y_m * Y_m) * Y_m) * ....Y_m). \tag{90}$$

Расставленные в (90) скобки определяют последовательность выполнения операций умножения. Такое определение степени эквивалентно следующему рекуррентному соотношению

$$[Y_m]_*^{n+1} = [Y_m]_*^n * Y_m. \tag{91}$$

Это соотношение удобно для нахождения общих формул возведения в степень, поскольку позволяет пользоваться математической индукцией. Для дальнейшего нам понадобятся следующие соотношения, которые легко проверяются непосредственно:

$$Y_1 * Y_{2m} = Y_1, \tag{92}$$
$$\bar{Y}_1 * \bar{Y}_{2m} = \bar{Y}_1, \tag{93}$$
$$Y_{2m} * \bar{Y}_1 = \bar{Y}_1, \tag{94}$$
$$\bar{Y}_{2m} * Y_1 = Y_1, \tag{95}$$

где $m = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$.

Аналогично для исходных y-чисел нечетных порядков:

$$Y_1 * Y_{2m+1} = \bar{Y}_1, \tag{96}$$
$$\bar{Y}_1 * \bar{Y}_{2m+1} = Y_1, \tag{97}$$
$$Y_{2m+1} * Y_1 = \bar{Y}_1, \tag{98}$$
$$\bar{Y}_{2m+1} * \bar{Y}_1 = Y_1, \tag{99}$$

Соотношения (92)–(99) оказываются удобны для получения общих формул возведения в степень исходных y-чисел $Y_n, \bar{Y}_n$ нечетных порядков $n = 2m+1$. С использованием (91) и математической индукции нетрудно получить следующие соотношения:

$$[Y_{2m+1}]_*^{3n-1} = \bar{Y}_1, \tag{100}$$
$$[Y_{2m+1}]_*^{3n} = \bar{Y}_{2(m+1)}, \tag{101}$$
$$[Y_{2m+1}]_*^{3n+1} = Y_{2m+1}, \tag{102}$$
$$\left[\bar{Y}_{2m+1}\right]_*^{3n-1} = Y_1, \tag{103}$$
$$\left[\bar{Y}_{2m+1}\right]_*^{3n} = Y_{2(m+1)}, \tag{104}$$
$$\left[\bar{Y}_{2m+1}\right]_*^{3n+1} = \bar{Y}_{2m+1}, \tag{105}$$

где $n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$. Что касается возведения в степень исходных y-чисел четного порядка, то, очевидно, такая операция сводится просто к умножению порядка исходного y-числа на показатель степени:

$$[Y_{2m}]_*^n = Y_{2mn}, \tag{106}$$
$$\left[\bar{Y}_{2m}\right]_*^n = \bar{Y}_{2mn}, \tag{107}$$

где $n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$.

Соотношения (92)–(99) позволяют записать следующую таблицу умножения:

	Y_{2n}	Y_{2n+1}	$\bar{Y}_{2n}$	$\bar{Y}_{2n+1}$
Y_{2m}	$Y_{2(m+n)}$	$Y_{2(m+n)+1}$	$\bar{Y}_{2n}$	$\bar{Y}_{2n+1}$
Y_{2m+1}	Y_1	$\bar{Y}_1$	$Y_{2(m+n)+1}$	$Y_{2(m+n+1)}$
$\bar{Y}_{2m}$	Y_{2n}	Y_{2n+1}	$\bar{Y}_{2(m+n)}$	$\bar{Y}_{2(m+n)+1}$
$\bar{Y}_{2m+1}$	$\bar{Y}_{2(m+n)+1}$	$\bar{Y}_{2(m+n+1)}$	$\bar{Y}_1$	Y_1

В этой таблице на пересечении строк и столбцов стоит число, являющееся результатом умножения исходного y-числа из первого столбца и верхней строки, т.е. если, например, мы хотим найти результат умножения y-числа $\bar{Y}_{2m}$ (1-й столбец, 4-я строка) и Y_{2n+1} (верхняя строка, 3-й столбец), то результат мы находим на пересечении 4-й строки и 3-го столбца: $\bar{Y}_{2m} * Y_{2n+1} = Y_{2n+1}$.

7. Извлечение корней из исходных y-чисел

Извлечение корней определим как операцию обратную возведению в степень. Из формул (100)-(107) следует, что при возведению в одну и ту же степень разных исходных y-чисел в некоторых случаях получаем один и тот же результат. Таким образом, операция извлечения корней неоднозначна. Поэтому, под операцией извлечения корня степени m из исходного y-числа Y_n будем понимать отображение, ставящее в соответствие исходному y-числу множество $\{Y_k\}$ всех исходных y-чисел, таких, которые при возведении в степень m дают число Y_n:

$$[Y_k]_*^m = Y_n. \tag{108}$$

Из формул (100)-(107) следует, что не для всех исходных y-чисел возможна операция извлечения корня, например, не существует исходного y-числа, которое бы при возведении в степень $3n$ давало Y_1. Таким образом, иногда рассматриваемое множество может быть пустым:

$$[Y_1]_*^{\frac{1}{3n}} = \emptyset. \tag{109}$$

Рассмотрим теперь более подробно формулы извлечения корней. Прежде всего, рассмотрим наиболее простой случай. Возведение в степень $3n+1$ исходных y-чисел нечетного порядка Y_{2m+1} и $\bar{Y}_{2m+1}$ дает то же самое число (102), (105). Таким образом, определим

$$[Y_{2m+1}]_*^{\frac{1}{3n+1}} = \{Y_{2m+1}\}, \tag{110}$$

$$\left[\bar{Y}_{2m+1}\right]_*^{\frac{1}{3n+1}} = \left\{\bar{Y}_{2m+1}\right\}. \tag{111}$$

Аналогично определим $[Y_1]_*^{\frac{1}{3n-1}}$ и $\left[\bar{Y}_1\right]_*^{\frac{1}{3n-1}}$:

$$[Y_1]_*^{\frac{1}{3n-1}} = \left\{\bar{Y}_{2m+1}\right\}_{m=0}^{\infty}, \tag{112}$$

$$\left[\bar{Y}_1\right]_*^{\frac{1}{3n-1}} = \{Y_{2m+1}\}_{m=0}^{\infty}. \tag{113}$$

Извлечение корней из четных чисел несколько сложнее. Дело в том, что возведение в степень $3n$ исходного y-числа $\bar{Y}_{6mn-1}$ и возведение в ту же степень числа Y_{2m} дает один и тот же результат Y_{6mn}. Таким образом, операция, обратная возведению в степень в формулах (104) и (106), а так же в формулах (101) и (107) не всегда однозначна. Из формул (104), (106) следует, что она будет однозначна, и будет описываться формулами

$$\left[Y_{2(m+1)}\right]_*^{\frac{1}{3n}} = \left\{\bar{Y}_{2m+1}\right\}, \tag{114}$$

$$[Y_{2Mn}]_*^{\frac{1}{n}} = \{Y_{2M}\}, \tag{115}$$

за исключением случая $m+1 = 3Mn$:

$$[Y_{6Mn}]_*^{\frac{1}{3n}} = \left\{\bar{Y}_{6Mn-1},\, Y_{2M}\right\}. \tag{116}$$

Соответствующие формулы для дуальных чисел имеют вид:

$$\left[\bar{Y}_{2(m+1)}\right]_*^{\frac{1}{3n}} = \{Y_{2m+1}\}, \tag{117}$$

$$\left[\bar{Y}_{2Mn}\right]_*^{\frac{1}{n}} = \left\{\bar{Y}_{2M}\right\}, \tag{118}$$

за исключением случая $m+1=3Mn$:

$$\left[\bar{Y}_{6Mn}\right]_*^{\frac{1}{3n}} = \left\{Y_{6Mn-1},\, \bar{Y}_{2M}\right\}. \tag{119}$$

Формулы (110)–(119) решают проблему извлечения корней из исходных y-чисел. Извлечение корней других степеней приводят к пустому множеству (см. (109)).

Теперь, определив понятие корня из y-числа можно обобщить понятие степени исходного y-числа, распространив его на вещественные значения показателей, т. е. определить величину $[Y_m]_*^{\frac{k}{n}}$. Эту величину можно определить либо как $\left[[Y_m]_*^{\frac{1}{n}}\right]_*^k$, либо как $\left[[Y_m]_*^k\right]_*^{\frac{1}{n}}$. Заметим, что эти два способа не одинаковы, что связано со свойствами некоммутативности и неассоциативности умножения y-чисел.

8. Операция деления исходных y-чисел

Рассмотренное в разделе 5 умножение исходных y-чисел допускает обратную операцию – деление. При этом в силу некоммутативности умножения потребуется отдельно определить понятие левого и правого частного от деления. Более того рассматриваемая операция деления, будучи определена как операция обратная умножению, оказывается неоднозначной. С такой трудностью мы уже сталкивались в разделе 6 при определении операции извлечения корней из y-чисел. В рассматриваемом случае мы поступим аналогично, рассматривая операцию деления как отображение ставящее в соответствие двум y-числам (делимому и делителю) некоторое множество y-чисел, которое в дальнейшем будем называть частным от деления.

Рассмотрим решение простейшего уравнения

$$\Lambda * Y_m = Y_n. \tag{120}$$

В этом уравнении Y_m и Y_n заданы, требуется найти все исходные y-числа Λ, удовлетворяющие этому уравнению. Множество всех исходных y-чисел Λ, удовлетворяющих уравнению (120), будем называть правым частным от деления Y_n на Y_m и обозначать Y_n/Y_m. Аналогично определим левое частное $Y_m\backslash Y_n$ как множество всех решений уравнения

$$Y_m * \Lambda = Y_n. \tag{121}$$

Таблица умножения исходных y-чисел, приведенная в разделе 5 охватывает все возможные случаи умножения исходных чисел любых порядков и потому позволяет решить задачу нахождения частного любых исходных y-чисел. Рассмотрим сначала нахождение правых частных. При этом удобно отдельно рассмотреть случаи четных и нечетных m и n в уравнении (120). Результаты приведем в виде следующей таблицы:

	делитель			
	Y_{2N}	Y_{2N+1}	$\bar{Y}_{2N}$	$\bar{Y}_{2N+1}$
Y_{2M}	$Y_{2(M-N)}$ $(M>N)$ $\left\{\bar{Y}_{2m}\right\}_{m=1}^{\infty}$ $(M=N)$	$\varnothing$	$\varnothing$	$Y_{2(M-N)-1}$ $(M>N)$
Y_{2M+1}	$\left\{Y_{2m+1}\right\}_{m=1}^{\infty}$ $(M=0)$	$Y_{2(M-N)}$ $(M>N)$ $\left\{\bar{Y}_{2m}\right\}_{m=1}^{\infty}$ $(M=N)$	$Y_{2(M-N)+1}$ $(M\geq N)$	$\left\{\bar{Y}_{2m+1}\right\}_{m=0}^{\infty}$ $(M=0)$
$\bar{Y}_{2M}$	$\varnothing$	$\bar{Y}_{2(M-N)-1}$ $(M>N)$	$\bar{Y}_{2(M-N)}$ $(M>N)$ $\left\{Y_{2m}\right\}_{m=1}^{\infty}$ $(M=N)$	$\varnothing$
$\bar{Y}_{2M+1}$	$\bar{Y}_{2(M-N)+1}$ $(M\geq N)$	$\left\{Y_{2m+1}\right\}_{m=0}^{\infty}$ $(M=0)$	$\left\{\bar{Y}_{2m+1}\right\}_{m=1}^{\infty}$ $(M=0)$	$\bar{Y}_{2(M-N)}$ $(M>N)$ $\left\{Y_{2m}\right\}_{m=1}^{\infty}$ $(M=N)$

На пересечении строк и столбцов этой таблицы расположены правые частные от деления y-числа, находящегося в самом левом столбце (нумерующего строку) на y-число находящееся в верхней строке (нумерующее столбец). Рядом с соответствующим частным приведено условие когда оно существует (условие разрешимости уравнения (120)). Приведем пример: найдем частное от деления Y_{2M+1} (1-й столбец, 3-я строка) на $\bar{Y}_{2N}$ (верхняя строка, 4-й столбец). На пересечении 3-й строки и 4-го столбца получаем результат

$$Y_{2M+1}/\bar{Y}_{2N} = Y_{2(M-N)+1}, (M \geq N)\,. \tag{122}$$

В случаях, когда частное не существует (уравнение (120) неразрешимо) в таблице стоит знак пустого множества. Аналогичная таблица получается для левых частных $Y_M \backslash Y_N$:

	делитель			
	Y_{2N}	Y_{2N+1}	$\bar{Y}_{2N}$	$\bar{Y}_{2N+1}$
Y_{2M}	$Y_{2(N-M)}$ $(N{>}M)$	$Y_{2(N-M)+1}$ $(N{\geq}M)$	$\bar{Y}_{2N}$	$\bar{Y}_{2N+1}$
Y_{2M+1}	$\bar{Y}_{2(N-M)-1}$ $(N{>}M)$	$\bar{Y}_{2(N-M)}$ $(N{>}M)$ $\{Y_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ $(N{=}0)$	$\varnothing$	$\{Y_{2n+1}\}_{n=0}^{\infty}$ $(N{=}0)$
$\bar{Y}_{2M}$	Y_{2N}	Y_{2N+1}	$\bar{Y}_{2(N-M)}$ $(N{>}M)$	$\bar{Y}_{2(N-M)+1}$ $(N{\geq}M)$
$\bar{Y}_{2M+1}$	$\varnothing$	$\{\bar{Y}_{2n+1}\}_{n=0}^{\infty}$ $(N{=}0)$	$Y_{2(N-M)-1}$ $(N{>}M)$	$Y_{2(N-M)}$ $(N{>}M)$ $\{\bar{Y}_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ $(N{=}0)$

В этой таблице на пересечении строк и столбцов приведены левые частные. Например, найдем левое частное от деления Y_{2N+1} на $\bar{Y}_{2M}$, то есть $\bar{Y}_{2M}\backslash Y_{2N+1}$. На пересечении 4-й строки и 3-го столбца получаем результат

$$\bar{Y}_{2M}\backslash Y_{2N+1} = Y_{2N+1}. \tag{123}$$

Заключение

В работе подробно рассмотрены основные алгебраические операции, вопросы делимости, возведения в степень, в том числе извлечения корней в множестве y-чисел. Наличие свойства неассоциативности умножения y-чисел, создаёт некоторую специфику, однако допускает непротиворечивым образом определить делимость y-чисел и извлечения корней. Установлено, что операция деления не всегда является однозначной и в ряде случаев невозможна. Свойство сведения старших степеней y-чисел к младшим позволило достаточно просто определить на множестве y-чисел функции представимые в виде степенных рядов. В частности были рассмотрены экспоненциальная, логарифмическая и биномиальная функции, показано, что эти функции представимы линейной комбинацией трёх самых простых y-чисел. Теория y-чисел ещё далека от завершения, а сами y-числа содержат много неожиданных свойств, не имеющих прямых аналогов в известных на сегодняшний день алгебраических системах.

Список литературы

1. Ёлкин С. В., Алгебраический подход к концепции информонного поля // Куликов В. В., Гаврилов Д. А., Ёлкин С. В., Универсальный искусственный язык – "hOOM-Диал". М. : Гэлэкси Нэйшн, 1994. С. 73–94.

2. Ёлкин С. В. Ёлкин С. С. Информационное исчисление // Вестник ВИНИТИ НТИ. 2002. сер 2, N11. С. 17–24.

3. Ёлкин С. В. Открытый семантический язык SL // Вестник ВИНИТИ НТИ. 2003. сер 2, N4. С. 5–15