НЕОГРАНИЧЕННЫЕ ОПЕРАТОРЫ НА БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ НАД ТЕЛОМ КВАТЕРНИОНОВ[1)]

С. В. Людковский

Кафедра прикладной математики МИРЕА

1 Введение

Тело кватернионов является алгеброй над $\mathbf{R}$, но не является алгеброй над $\mathbf{C}$, так как любое вложение $\mathbf{C}$ в $\mathbf{H}$ не является центральным. Поэтому исследование алгебр операторов над $\mathbf{H}$ нельзя свести к алгебрам операторов над $\mathbf{C}$. С другой стороны, развитая ниже теория алгебр операторов над $\mathbf{H}$ имеет много специфических особенностей по сравнению с общей теорией алгебр операторов над $\mathbf{R}$ благодаря градуированной структуре $\mathbf{H}$. Результаты данной работы можно также использовать для развития некоммутативной геометрии, суперанализа, квантовой механики над $\mathbf{H}$ и теории представлений не локально компактных групп типа групп диффеоморфизмов и петель кватернионных многообразий (см. [1,3,6,7,10]). Большая часть предыдущих работ по суперанализу была посвящена суперкоммутативным супералгебрам типа алгебры Грассмана, тогда как для некоммутативных супералгебр он оставался почти неразработанным. Тело кватернионов служит важнейшим примером супералгебры, которая не суперкоммутативна. В данной работе использованы результаты предыдущих работ автора по этой теме, в частности некоммутативный интеграл над $\mathbf{H}$ [8, 9] служащий аналогом интеграла типа Коши известного для $\mathbf{C}$. Примерами кватернионных неограниченных операторов служат дифференциальные операторы в том числе в частных производных. Они возникают естественным образом, например, уравнение Клейна-Гордона-Фока можно записать в виде $(\partial^2/\partial z^2 + \partial^2/\partial \tilde{z}^2)f = 0$ на пространстве кватернионно локально $(z, \tilde{z})$-аналитических функций f, где z – кватернионная переменная, $\tilde{z}$ – сопряженная переменная, $z\tilde{z} = |z|^2$. Оператор Дирака для спиновых систем над $\mathbf{H^2}$ можно записать в виде $\left(\begin{smallmatrix} 0 & \partial/\partial z \\ -\partial/\partial \tilde{z} & 0 \end{smallmatrix}\right)$, что используется в теории спиновых многообразий [5], но любое спиновое многообразие можно вложить в кватернионное [9]. В данной статье приводятся основные особенности кватернионного случая, так как в одной статье невозможно дать такую же обширную теорию над $\mathbf{H}$, как хорошо разработанную теорию операторов над $\mathbf{C}$ [2, 4].

2 Теория неограниченных операторов

2.1. Определения и замечания. Пусть X – банахово пространство (БП) над телом кватернионов $\mathbf{H}$, то есть, X – аддитивная группа, а умножения векторов $v \in X$ на скаляры $a, b \in \mathbf{H}$ слева и справа удовлетворяют аксиомам ассоциативности и дистрибутивности, существует норма $\|v\|_X =: \|v\|$ на X относительно которой, X полно, где $\|av\| = |a|_{\mathbf{H}}\|v\|$, $\|vb\| = |b|_{\mathbf{H}}\|v\|$, $\|v + w\| \le \|v\| + \|w\|$ для любых $v, w \in X$, $a, b \in \mathbf{H}$. Тогда X имеет также структуру $X_{\mathbf{R}}$ БП над $\mathbf{R}$, так как $\mathbf{H}$ является алгеброй над $\mathbf{R}$ размерности 4.

Оператор T на плотном векторном подпространстве $\mathcal{D}(T)$ в X со значениями в БП Y над $\mathbf{H}$ называется ($\mathbf{H}$-)праволинейным (ПЛО), если $(Tva)b = T(vab)$, $T(va + wb) = (Tv)a + (Tw)b$ для любых $a, b \in \mathbf{H}$ и любых $v, w \in \mathcal{D}(T)$ и дополнительно

[1)] Работа выполнена при частичной финансовой поддержке ДААД (DAAD, Germany).

T **R**-линеен на $\mathcal{D}(T)_{\mathbf{R}}$. Для ПЛО также пишем Tv вместо $T(v)$. Если T **R**-линеен и $b(Tav) = T(bav)$, $T(av + bw) = a(Tv) + b(Tw)$ для любых $a, b \in \mathbf{H}$, то T называется (**H**-)леволинейным (ЛЛО). Для ЛЛО также пишем vT вместо $T(v)$. Оператор T называется (**H**-)линейным, если он ЛЛО и ПЛО одновременно. Оператор $T : \mathcal{D}(T) \to \mathcal{R}(T)$ назовем (**H**-)квазилинейным (КЛО), если он аддитивен $T(v + w) = T(v) + T(w)$ и **R**-однороден $T(av) = aT(v)$ для любых $a \in \mathbf{R}$, v и $w \in X$, где $\mathcal{R}(T) \subset Y$ обозначает область значений оператора. Например, производные кватернионно голоморфных функций **H**-квазилинейны (см. [8]).

Пусть $L_q(X, Y)$ ($L_r(X, Y)$; $L_l(X, Y)$) обозначают БП всех ограниченных КЛО T из X в Y (ПЛО или ЛЛО соответственно), $\|T\| := \sup_{v\neq 0} \|Tv\|/\|v\|$; $L_q(X) := L_q(X, X)$, $L_r(X) := L_r(X, X)$ и $L_l(X) := L_l(X, X)$. Резольвентное множество $\rho(T)$ КЛО T определяется как $\rho(T) := \{z \in \mathbf{H} :$ существует $R(z; T) \in L_q(X)\}$, где $R(z; T) := R_z(T) := (zI - T)^{-1}$, I – единичный оператор на X, $Iv = v$ для любых $v \in X$, аналогично для ПЛО и ЛЛО. Спектр определяется как $\sigma(T) := \mathbf{H} \setminus \rho(T)$.

2.2. Лемма. *Для любых z_1 и $z_2 \in \rho(T)$:*
(i) $R(z_2; T) - R(z_1; T) = R(z_1; T)(z_1 - z_2)R(z_2; T)$.

2.3. Лемма. *Если T – замкнутый КЛО, то $\rho(T)$ открыто в* **H** *и $R(z; T)$ кватернионно голоморфно на $\rho(T)$.*

Доказательство. Пусть $z_0 \in \rho(T)$, тогда оператор $R(z_0; T)$ замкнут и по теореме о замкнутом графике ограничен, так как он определен всюду. Если $z \in \mathbf{H}$ и $|z_0 - z| < \|(z_0I - T)^{-1}\|^{-1}$, то $(zI - T) = (z_0I - T)(I - R(z_0; T)(z_0 - z))$, причем
(i) $R(z; T) = \{\sum_{n=0}^{\infty}[R(z_0; T)(z_0 - z)]^n\}R(z_0; T) \in L_s(X)$, так как этот ряд $[R(z_0; T)(z_0 - z)]^n R(z_0; T)$ сходится относительно топологии нормы в $L_s(X)$. В силу (i) $R(z; T)$ кватернионно локально z-аналитична, следовательно, голоморфна на $\rho(T)$ согласно теореме 2.16 [8].

2.4. Замечания и определения. Для БП X над **H** его топологически правосопряженное пространство X_r^* определяется как состоящее из всех функционалов $f : X \to \mathbf{H}$ таких, что f является **R**-линейными и **H**-праволинейными. Аналогично положим $X_q^* := L_q(X, \mathbf{H})$ и $X_l^* := L_l(X, \mathbf{H})$, где X_q^* – топологически квазисопряженное пространство, X_l^* – топологически левосопряженное пространство. Тогда X_s^* – БП над **H** с нормой $\|f\| := \sup_{x\neq 0} |fx|/\|x\|$. Если X и Y – БП над **H** и $T : X \to Y$ принадлежит $L_s(X, Y)$, то T^* определяется уравнением: $(T^*y^*)(x) := y^* \circ T(x)$ для любых $y^* \in Y_s^*$, $x \in X$. Тогда $T^* \in L_l(Y_r^*, X_r^*)$ для любых $T \in L_r(X, Y)$. Если $T \in L_l(X, Y)$, то $T^* \in L_r(Y_l^*, X_l^*)$, так как $y^* \circ T(x) = xT^*y^*$ в симметричных обозначениях, где $x \in X$. Если $T \in L_q(X, Y)$, то $T^* \in L_q(Y_q^*, X_q^*)$.

Пусть $\hat{X}$ и $\hat{Y}$ – образы относительно естественного вложения X и Y в X^{**} и Y^{**} соответственно. Для любого $T \in L_s(X, Y)$ определим $\hat{T} \in L_s(\hat{X}, \hat{Y})$ уравнением $\hat{T}(\hat{x}) = \hat{y}$, где $y = T(x)$. Каждая функция S определенная на области $X^{**} \supset dom(S) \supset \hat{X}$ и такая, что $S(\hat{x}) = T(\hat{x})$ для любых $\hat{x} \in \hat{X}$ называется расширением T.

Леммы $II.3.12; VI.2.2 - 4, 6, 7$ и следствие $II.3.13$ из [2] аналогичны в случае **H** вместо **C**, беря в доказательстве леммы $II.3.12$ $\|z\| = \|y + \alpha x\| = |\alpha|\|\alpha^{-1}y + x\| \geq |\alpha|d$. Положим по индукции $\mathcal{D}(T^n) := \{x : x \in \mathcal{D}(T^{n-1}), T^{n-1}(x) \in \mathcal{D}(T)\}$, $\mathcal{D}(T^\infty) := \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{D}(T^n)$, где $T^0 := I$, $T^n(x) := T(T^{n-1}(x))$.

2.5. Лемма. *Пусть $T \in L_s(X)$, тогда $\sigma(T^*) = (\sigma(T))\tilde{}$ и $(R(\lambda, T))^* = R(\lambda^*, T^*)$, где $\lambda^*I := (\lambda I)^*$, $s \in \{q, r, l\}$.*

Доказательство. Если $S \in L_s(X, Y)$ и существует $S^{-1} \in L_s(Y, X)$, то $S^* \in L_u(Y_s^*, X_s^*)$ имеет обратный $(S^*)^{-1} \in L_u(X_s^*, Y_s^*)$ и $(S^{-1})^* = (S^*)^{-1}$, где

$(s,u) \in \{(q,q);(r,l);(l,r)\}$. Тогда $(\lambda I - T)^* y^* = y^* \circ (\lambda I - T) = y^* \circ (\lambda I) - y^* \circ T$, следовательно, $(\lambda^* I - T^*)[(\lambda I - T)^*]^{-1} = I$ и $(R(\lambda, T))^* = R(\lambda^*, T^*)$.

2.6. Определение и замечание. Обозначим через $\mathcal{H}(T)$ семейство всех кватернионно голоморфных функций (КГФ) f на окрестностях V_f для $\sigma(T)$, где $T \in L_s(X)$, $s \in \{q,r,l\}$, а для КЛО T $\mathcal{H}_\infty(T)$ - множество КГФ на окрестности U_f для $\sigma(T)$ и ∞ в одноточечной компактификации $\hat{\mathbf{H}}$ тела кватернионов. Выберем отмеченную точку $z_0 \in \sigma(T)$. Для любого $M = wJ + xK + yL \in \mathbf{H_i}$ с $|M| = 1$, где $w,x,y \in \mathbf{R}$, существует замкнутый спрямляемый путь η состоящий из конечного объединения дуг $\eta(s) = z_0 + r_p \exp(2\pi s M)$ с $s \in [a_p, b_p] \subset [0,1] \subset \mathbf{R}$ и сегментов прямых линий $\{z \in \mathbf{H} : z = z_0 + (r_p t + r_{p+1}(1-t)) \exp(2\pi b_p M), t \in [0,1]\}$ соединяющих их, причем $\eta \subset U \setminus \sigma(T)$, где $a_p < b_p$ и $0 < r_p < \infty$ для любых $p = 1, ..., m$, $m \in \mathbf{N}$, $b_p = a_{p+1}$ для любых $p = 1, ..., m-1$, $a_1 = 0$, $b_m = 1$. Тогда существует спрямляемый замкнутый путь ψ гомотопный η и окрестность U удовлетворяющие условиям теоремы 3.9 [8] и такие, что $\psi \subset U \setminus \sigma(T)$. Для $T \in L_q(X)$ можно определить

(i) $\quad f(T) := (2\pi)^{-1} (\int_\psi f(\zeta) R(\zeta; T) d\zeta) M^{-1}$,

где сходимость предполагается в слабой операторной топологии. Этот интеграл зависит от f, T и не зависит от U, ψ, η, γ, M. Для неограниченного КЛО T пусть $A := -R(a;T)$ и $\Psi : \hat{\mathbf{H}} \to \hat{\mathbf{H}}$, $\Psi(z) := (z-a)^{-1}$, $\Psi(\infty) = 0$, $\Psi(a) = \infty$, где $a \in \rho(T)$. Для $f \in \mathcal{H}_\infty(T)$ определим $f(T) := \phi(A)$, где $\phi \in \mathcal{H}_\infty(A)$ дается уравнением $\phi(z) := f(\Psi^{-1}(z))$.

2.7. Замечание. Рассмотрим БП X над $\mathbf{H}$ как БП $X_\mathbf{C}$ над $\mathbf{C}$, тогда

(i) $X_\mathbf{C} = X_1 \oplus X_2 j$,

где X_1 и X_2 – БП над $\mathbf{C}$, так что X_1 изоморфно с X_2. Комплексное сопряжение в $\mathbf{C}$ индуцирует комплексное сопряжение векторов в X_m, где $m = 1$ или $m = 2$. Каждый вектор $x \in X$ можно записать в матричной форме

(ii) $x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ -\bar{x}_2 & \bar{x}_1 \end{pmatrix}$,

где $x_1 \in X_1$ и $x_2 \in X_2$. Тогда каждый КЛО T можно записать в виде

(iii) $T = \begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ -\bar{T}_2 & \bar{T}_1 \end{pmatrix}$,

где $T_1 : X_1 \supset \mathcal{D}(T_1) \to Y_1$, $T_2 : X_1 \supset \mathcal{D}(T_2) \to Y_2$, $T(x) = Tx$ для $s \in \{q,r\}$, $T(x) = xT$ для $s = l$.

(iv) $\bar{T}_m x := \overline{T_m \bar{x}}$, где $m = 1$ или $m = 2$.

В частности для коммутатора $[\zeta I, T]$ при $\zeta = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & \bar{b} \end{pmatrix} \in \mathbf{H}$, где $b \in \mathbf{C}$, выполняется формула

(v) $[\zeta I, T] = 2(-1)^{1/2} Im(b) \begin{pmatrix} 0 & T_2 \\ -\bar{T}_2 & 0 \end{pmatrix}$, где $Im(b)$ – мнимая часть b, $2(-1)^{1/2} Im(b) = (b - \bar{b})$.

2.8. Теорема. *Если $f \in \mathcal{H}_\infty(T)$, то $f(T)$ не зависит от $a \in \rho(T)$ и*

(i) $\quad f(T) = f(\infty) I + (2\pi)^{-1} (\int_\psi f(\lambda) R(\lambda; T) d\lambda) M^{-1}$.

Доказательство. Если $a \in \rho(T)$, то $0 \ne b = (\lambda - a)^{-1}$ при $\lambda \ne a$ и $(T - aI)(T - \lambda I)^{-1} = (bI - A)^{-1} b$, поэтому $I + b^{-1}(T - \lambda I)^{-1} = b(bI - A)^{-1} b - bI$ и $b \in \rho(A)$. Если $0 \ne b \in \rho(A)$, то $A(bI - A)^{-1} = (T - \lambda I)^{-1} b^{-1}$ и $\lambda \in \rho(T)$. Точка $b = 0 \in \sigma(A)$, так как $A^{-1} = T - aI$ неограничен. Пусть $a \notin V$, тогда $U = \psi^{-1}(V) \supset \sigma(A)$ и U открыто в $\hat{\mathbf{H}}$, а $\phi(z) := f(\psi^{-1}(z)) \in \mathcal{H}_\infty(U)$. В силу следствия 3.26 [8] получим (i).

2.9. Теорема. *Пусть $a, b, c, e \in \mathbf{H}$, $f, g \in \mathcal{H}_\infty(T)$. Тогда*

(i) $afc + bge \in \mathcal{H}_\infty(T)$ и $afc(T) + bge(T) = (afc + bge)(T)$;

(ii) $fg \in \mathcal{H}_\infty(T)$ и $f(T)g(T) = (fg)(T)$;

(iii) если f раскладывается в сходящийся ряд $f(z) = \sum_k (b_k, z^k)$ в окрестности $\sigma(T)$, то $f(T) = \sum_k (b_k, T^k)$ на $\mathcal{D}(T^\infty)$, где $b_k = (b_{k,1}, ..., b_{k,m(k)})$, $(b_k, z^k) := b_{k,1} z^{k_1} ... b_{k,m(k)} z^{k_{m(k)}}$, $b_{k,j} \in \mathbf{H}$;

(iv) $f \in \mathcal{H}_\infty(T^*)$ и $f^*(T^*) = (f(T))^*$, где $f^*(z) := (f(z^*))^*$.

Доказательство. (**i**). Возьмем $V_f \cap V_g =: V$ и для него построим U, η и ψ как в §2.6. Тогда первое утверждение следует из 2.6.(i).

(**ii**). В силу теоремы 3.28 [8] функция $\tilde{g}(\tilde{z}) =: \phi(z)$ принадлежит $\mathcal{H}_\infty(T)$ и $\tilde{\phi}(\tilde{z}) = g(z)$, где $\tilde{z} = vI - wJ - xK - yL$, $z = vI + wJ + xK + yL$, $v, w, x, y \in \mathbf{R}$, $z \in V_g \subset \mathbf{H}$. Используя $\phi(A)$, рассмотрим случай ограниченного T. В силу 2.6.(i): $(\tilde{y}^*\phi(\tilde{T})\tilde{h}) = (2\pi)^{-1}y^*M\int_\psi d\tilde{\zeta}R(\tilde{\zeta}, T)g(\tilde{\zeta})h$, где $\tilde{y}^*\tilde{T}\tilde{h} := (y^*Th)\tilde{}$ и $\tilde{y}^*\tilde{h} := (y^*h)\tilde{}$ для любых $y^* \in X^*$ и $h \in X$. Поэтому $(\tilde{y}^*\phi(\tilde{T})\tilde{h})\tilde{} = (2\pi)^{-1}y^*M\int_{\tilde{\psi}} d\zeta R(\zeta, T)g(\zeta)h$, следовательно, $(\phi(\tilde{T}))\tilde{} = (2\pi)^{-1}M\int_{\tilde{\psi}} d\zeta R(\zeta, T)g(\zeta) = g(T)$, так как левые и правые интегралы совпадают в пространстве кватернионно голоморфных функций. Функция fg кватернионно голоморфна на V (см. §§2.1 и 2.12 [8]). Существуют ψ_f и ψ_g как в §2.6 и содержащиеся в $U \setminus \sigma(T)$, где $\bar{U} \subset V$. В силу теоремы Фубини существует

$$(v) \quad f(T)g(T) = (2\pi)^{-2}\int_{\psi_f}\int_{\psi_g} f(\zeta_1)R(\zeta_1; T)(d\zeta_1)(d\zeta_2)R(\zeta_2, T)g(\zeta_2),$$

где $\zeta_1 \in \psi_f$ и $\zeta_2 \in \psi_g$. Выполняются тождества $R(\zeta; T)d\zeta = d_\zeta Ln(\zeta I - T)$ и $(d\zeta)R(\zeta; T) = d_\zeta Ln(\zeta I - T)$ для выбранной ветви Ln (см. §§3.7, 3.8 [8]), следовательно, $R(\zeta_1; T)(d\zeta_1)(d\zeta_2)R(\zeta_2; T) = d_{\zeta_1}d_{\zeta_2}Ln(\zeta_1 I - T)Ln(\zeta_2 I - T) = (d\zeta_1)R(\zeta_1; T)R(\zeta_2; T)d\zeta_2$. В силу леммы 2.2:

$$(vi) \quad R(a; T)R(b; T) = [R(a; T) - R(b; T)](b - a)^{-1}$$
$$+R(a; T)[R(b; T), (b - a)I](b - a)^{-1},$$
$$(vii) \quad [R(b; T), (b - a)I] = R(b; T)[T, (b - a)I]R(b; T),$$

так как $[(bI - T), (b - a)I] = -[T, (b - a)I]$, где $a, b \in \rho(T)$. Пусть в частности ψ_f и ψ_g содержатся в плоскости $\mathbf{R}\oplus i\mathbf{R}$ в $\mathbf{H}$, где i, j, k – генераторы $\mathbf{H}$, так что $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = k$, $jk = i$, $ki = j$. В силу 2.7.(v) и 2.8.(vii):

$$(viii) \quad \int_{\psi_f}\int_{\psi_g} f(\zeta_1)R(\zeta_1; T)[R(\zeta_2; T), (\zeta_2 - \zeta_1)I](\zeta_2 - \zeta_1)^{-1}d\zeta_1 d\zeta_2 g(\zeta_2) = 0,$$

так как ветвь Ln может быть выбрана одной и той же вдоль оси j в $\mathbf{H}$, а в силу принципа аргумента 3.30 [8] она соответствует вычету $c(\zeta_1 - z)^{-1}(\zeta_2 - z)^{-1}b(\zeta_2 - \zeta_1)(\zeta_2 - z)^{-1}(\zeta_2 - \zeta_1)^{-1}$. Тогда из $(v, vi, viii)$ следует:

$$(ix) \quad f(T)g(T) = (2\pi)^{-2}\int_{\psi_f}\int_{\psi_g} f(\zeta_1)[R(\zeta_1; T) - R(\zeta_2, T)](\zeta_2 - \zeta_1)^{-1}d\zeta_1 d\zeta_2 g(\zeta_2).$$

Выберем ψ_g так, что $|\psi_g(s) - z_0| > |\psi_f(s) - z_0|$ для любого $s \in [0, 1]$. Из аддитивности интеграла вдоль пути и теоремы Фубини:

$$(x) \quad f(T)g(T) = (2\pi)^{-2}\int_{\psi_f} f(\zeta_1)R(\zeta_1; T)d\zeta_1(\int_{\psi_g}(\zeta_2 - \zeta_1)^{-1}d\zeta_2 g(\zeta_2))$$
$$-(2\pi)^{-2}\int_{\psi_g}(\int_{\psi_f} f(\zeta_1)d\zeta_1 R(\zeta_2, T)(\zeta_2 - \zeta_1)^{-1})d\zeta_2 g(\zeta_2).$$

В силу теорем 3.9, 3.24 [8] второй интеграл справа (x) равен нулю, так как $\int_{\psi_f} f(\zeta_1)d\zeta_1 R(\zeta_2; T)(\zeta_2 - \zeta_1)^{-1} = 0$, а первый интеграл дает

$$f(T)g(T) = (2\pi)^{-1}(\int_{\psi_f} f(\zeta_1)R(\zeta_1; T)d\zeta_1 g(\zeta_1))M^{-1}$$

$$= (2\pi)^{-1}(\int_{\psi_f} f(\zeta)g(\zeta)dLn(\zeta I - T))M^{-1},$$

где $\zeta \in \psi_f$.

(**iii**) следует из применения (**i**, **ii**) по индукции и сходимости ряда в сильной операторной топологии.

(**iv**). В силу леммы 2.5 $\sigma(T^*) = (\sigma(T))\tilde{}$, тогда $f \in \mathcal{H}_\infty(T^*)$. Поскольку $(f(T))^* y^* = y^* \circ f(T)$ для любых $y^* \in X^*$, то в силу леммы 2.5 $R(\zeta^*; T^*) = (R(\zeta; T))^*$, следовательно, $(f(T))^* y^* = (2\pi)^{-1}(M^{-1})^* \int_\psi (d\zeta^*) R(\zeta^*; T^*)(f(\zeta))^* y^*$, где $(f(\zeta))^* y^* := y^* \circ f(\zeta)$. Если $f(\zeta)$ представлено рядом сходящимся в шаре: $f(\zeta) = \sum_n (a_n, \zeta^n)$, то $f(\zeta^*) = \sum_n a_{n,1}\zeta^{*n_1}...a_{n,m(n)}\zeta^{*n_{m(n)}}$, следовательно, $[f(\zeta^*)]^* = \sum_n \zeta^{n_{m(n)}} a^*_{n,m(n)}...\zeta^{n_1} a^*_{n,1}$ и $(f(T))^* = (2\pi)^{-1}(M^{-1})^* \int_\psi (d\zeta^*) R(\zeta^*; T^*) f^*(\zeta^*) = f^*(T^*)$.

2.10. Теорема. *Пусть T ограничен, $f \in \mathcal{H}(T)$, тогда $f(\sigma(T)) = \sigma(f(T))$.*

2.11. Теорема. *Пусть $f \in \mathcal{H}_\infty(T)$, $f(U)$ открыто для некоторого открытого $U \subset dom(f) \subset \hat{\mathbf{H}}$, $g \in \mathcal{H}_\infty(T)$ и $f(U) \supset \sigma(T)$, $dom(g) \supset f(U)$, тогда $F := g \circ f \in \mathcal{H}(T)$ и $F(T) = g(f(T)$.*

Доказательство вытекает из §2.9 аналогично случаю поля $\mathbf{C}$ с помощью теорем 2.16, 3.10, следствия 2.13 [8], так как $F \in \mathcal{H}_\infty(T)$.

2.12. Определение и замечание. Пусть $\mathcal{A}$ – БП и алгебра над $\mathbf{H}$ с единицей e имеющей свойства: $|e| = 1$ и $|xy| \le |x||y|$ для любых x и $y \in \mathcal{A}$, то $\mathcal{A}$ называется банаховой алгеброй (БА) или C-алгеброй (над $\mathbf{H}$). БА $\mathcal{A}$ назовем квазикоммутативной (КК), если существует коммутативная алгебра $\mathcal{A}_{0,0}$ над $\mathbf{R}$, так что $\mathcal{A}$ изоморфна алгебре $\{T : T = \begin{pmatrix} A & B \\ -\bar{B} & \bar{A} \end{pmatrix} : A, B \in \mathcal{A}_0\}$, где $\mathcal{A}_0 := \{A : A = A_0 + A_1\mathbf{i};\ A_0 \in \mathcal{A}_{0,0},\ A_1 \in \mathcal{A}_{0,0}\}$, $\bar{A} := A_0 - A_1\mathbf{i}$, $\mathbf{i} := (-1)^{1/2}$.

Рассмотрим X над $\mathbf{R}$: $X_{\mathbf{R}} = X_e e \oplus X_i i \oplus X_j j \oplus X_k k$, где X_e, X_i, X_j и X_k – попарно изоморфные БП над $\mathbf{R}$. Тогда $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 e \oplus \mathcal{A}_i i \oplus \mathcal{A}_j j \oplus \mathcal{A}_k k$, где $\mathcal{A}_0$, $\mathcal{A}_i$, $\mathcal{A}_j$ и $\mathcal{A}_k$ – алгебры над $\mathbf{R}$. Умножая $\mathcal{A}$ на $S \in \{e, i, j, k\}$, получим автоморфизмы $\mathcal{A}$, следовательно, $\mathcal{A}_0$, $\mathcal{A}_i$, $\mathcal{A}_j$ и $\mathcal{A}_k$ попарно изоморфны.

2.13. Определения и замечания. БА $\mathcal{A}$ снабжена инволюцией, когда существует операция $* : \mathcal{A} \ni T \mapsto T^* \in \mathcal{A}$, так что $(T^*)^* = T$, $(T + V)^* = T^* + V^*$, $(TV)^* = V^* T^*$, $(\alpha T)^* = T^* \tilde{\alpha}$ для любых $\alpha \in \mathbf{H}$.

Если БА $\mathcal{A}$ (над $\mathbf{H}$) имеет подалгебру $\mathcal{A}_{0,0}$ (над $\mathbf{R}$), то $T^* = \begin{pmatrix} A^* & -\bar{B}^* \\ B^* & \bar{A}^* \end{pmatrix}$.

Элемент $x \in \mathcal{A}$ называется регулярным, если существует $x^{-1} \in \mathcal{A}$. В противном случае он называется сингулярным. Тогда спектр $\sigma(x)$ для x определяется как множество всех $z \in \mathbf{H}$, для которых $ze - x$ сингулярен, а его спектральный радиус $|\sigma(x)| := \sup_{z \in \sigma(x)} |z|$. Резольвентное множество определяется как $\rho(x) := \{z \in \mathbf{H} : ze - x \text{ регулярен}\}$ и резольвента как $R(z; x) := (ze - x)^{-1}$ для любых $z \in \rho(x)$.

2.14. Лемма. *Спектр $\sigma(x)$ элемента $x \in \mathcal{A}$ является непустым компактным подмножеством в $\mathbf{H}$. Его резольвента $x(z) := R(z; x)$ кватернионно голоморфна на $\rho(x)$, $x(z)$ стремится к нулю при $|z| \to \infty$ и*

$x(z) - x(y) = x(z)(y - z)x(y)$ для любых $y, z \in \rho(x)$.

Доказательство вытекает из $(ze - x)x(z)x(y) = x(y)$, $x(z)x(y)(ye - x) = x(z)$, $(ze - x)(x(z) - x(y))(ye - x) = (ye - x) - (ze - x) = (y - z)e$, следовательно, $x(z) - x(y) = R(z; x)(y - z)R(y; x) = x(z)(y - z)x(y)$. Поэтому $x(z)$ непрерывно по z на $\rho(x)$ и существует $(\partial[x(z+y)x^{-1}(y)]/\partial z).h = -x(y)h$ для любого $h \in \mathbf{H}$. Для любой отмеченной точки y член $x^{-1}(y)$ постоянен на $\mathcal{A}$, причем $(\partial[x(z+y)x^{-1}(y)]/\partial\tilde{z}) = 0$, следовательно, $x(z) \in \mathcal{H}(\rho(x))$. Второе утверждение получается рассмотрением комплексификации $\mathbf{C} \otimes \mathcal{A}$.

2.15. Теорема. *Пусть $\mathcal{B}$ – замкнутый идеал в ККБА $\mathcal{A}$. Факторалгебра $\mathcal{A}/\mathcal{B}$ изометрически изоморфна с $\mathbf{H}$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{B}$ максимальна.*

Доказательство аналогично случаю алгебр над $\mathbf{C}$ в силу определения ККБА.

2.16. Опеределения. C^*-алгебра $\mathcal{A}$ над $\mathbf{H}$ - это БА над $\mathbf{H}$ с инволюцией $*$, так что $|x^*x| = |x|^2$ для любого $x \in \mathcal{A}$.

Скалярное произведение на линейном пространстве X над $\mathbf{H}$ (то есть, линейном относительно правого и левого умножений раздельно на скаляры из $\mathbf{H}$) – это биаддитивное $\mathbf{R}$-билинейное отображение $< *; * >$: $X^2 \to \mathbf{H}$, так что

(1) $< x; x >= \alpha_0 e$, где $\alpha_0 \in \mathbf{R}$;

(2) $< x; x >= 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$;

(3) $< x; y >=< y; x >\tilde{}$ для любых $x, y \in X$;

(4) $< x + z; y >=< x; y > + < z; y >$;

(5) $< xa; yb >= \tilde{a} < x; y > b$ для любых $x, y, z \in X$, $a, b \in \mathbf{H}$.

Если X полно относительно топологии нормы

(6) $|x| :=< x; x >^{1/2}$, то X называется кватернионным гильбертовым пространством (ГП).

2.17. Лемма. *БА $L_q(X)$ на ГП X с инволюцией:*

(1) $< Tx; y >=:< x; T^*y >$ *для любых* $x, y \in X$

– это C^*-алгебра.

2.18. Лемма. *Если $\mathcal{A}$ – КК C^*-алгебра, то $|x^2| = |x|^2$, $|x| = |x^*|$ и $I^* = I$, где I – единица в $\mathcal{A}$.*

Доказательство. Каждый вектор $x \in \mathcal{A}$ представим в виде: $x = x_e e + x_i i + x_j j + x_k k$. Тогда $x^* = x_e^* e - x_i^* i - x_j^* j - x_k^* k$, так как $(x_m S_m)^* = (-1)^{\kappa(S_m)} x_m S_m$, где $S_m \in \{e, i, j, k\}$ для любого $m \in \{e, i, j, k\}$, $\kappa(e) = 0$, $\kappa(i) = \kappa(j) = \kappa(k) = 1$. Поэтому $[x, x^*] = 0$ и $|x_m^2| = |x_m|^2$. Тогда $|x|^2 = |x_e|^2 + |x_i|^2 + |x_j|^2 + |x_k|^2$ и $|x^2|^2 = |(x^2)^* x^2| = |(x^*)^2 x^2| = |(xx^*)(xx^*)| = |x|^4$, следовательно, $|x^2| = |x|^2$. Поскольку $I = I_e$, то $I^* = I_e^* = I_e = I$.

2.19. Определение. Гомоморфизм $h : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ C^*-алгебр $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ сохраняющий инволюцию: $h(x^*) = (h(x))^*$ называется $*$-гомоморфизмом. Если h – биективный $*$-гомоморфизм $\mathcal{A}$ на $\mathcal{B}$, то h называется $*$-изоморфизмом, а $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ называются $*$-изоморфными. Через $\sigma(\mathcal{A})$ обозначается структурное пространство для $\mathcal{A}$ и оно также называется спектром для $\mathcal{A}$. Структурное пространство определяется аналогично комплексному случаю с помощью теоремы 2.15.

2.20. Предложение. *Для ГП X пространства $L_l(X, \mathbf{H})$ и $L_r(X, \mathbf{H})$ изоморфны X, для БП X $L_q(X)$ изоморфно $L_l(X^2)$, $L_q(\mathbf{H}) = \mathbf{H^4}$, существует биекция между семейством КЛО T на $\mathcal{D}(T) \subset X$ и семейством ЛЛО V на $\mathcal{D}(V) \subset X^2$.*

Доказательство. Пусть $L_q(X) \ni \alpha = \alpha_e e + \alpha_i i + \alpha_j j + \alpha_k k$. Поскольку $S\alpha S \in L_q(X)$ для любых $S \in \mathbf{H}$, то существуют кватернионные постоянные $S_{m,l,n}$, так что

(1) $\alpha_m(x) m = \sum_n S_{m,1,n} \alpha(x) S_{m,2,n}$ для любых $m \in \{e, i, j, k\}$,

где $S_{m,1,n} = \gamma_{m,n} S_{m,2,n}$ с $\gamma_{m,n} = (-1)^{\phi(m,n)}/4 \in \mathbf{R}$, $\phi(m, n) \in \{1, 2\}$, $S_{m,l,n} \in \mathbf{R}n$ для любых $n \in \{e, i, j, k\}$ (см. §§3.7, 3.28 [8]). Применяя для x разложение из §2.12, в силу (1) получим 4×4-блочный вид операторов над $\mathbf{R}$ и изоморфизм $L_q(X)$ с $L_l(X^2)$.

2.21. Замечание. Для ЛЛО (над $\mathbf{H}$) понятия точечного $\sigma_p(T)$, непрерывного $\sigma_c(T)$ и остаточного $\sigma_r(T)$ спектров определяются аналогично случаю над полем $\mathbf{C}$, а в силу 2.20 эти понятия распространяются на КЛО.

2.22. Теорема. *КК C^*-алгебра изометрически $*$-изоморфна алгебре $C(\Lambda, \mathbf{H})$ всех непрерывных $\mathbf{H}$-значных функций на ее спектре Λ.*

Доказательство вытекает из того, что отображение $x \mapsto x(.)$ из $\mathcal{A}$ в $C(\Lambda, \mathbf{H})$ является $*$-гомоморфизмом, где $x(\mathcal{M})$ определяется равенством $x + \mathcal{M} = x(\mathcal{M}) + \mathcal{M}$ для любого максимального идеала $\mathcal{M}$. Пусть $x(\lambda) = \alpha_e e + \alpha_i i + \alpha_j j + \alpha_k k$, тогда $x^*(\lambda) = \beta_e e + \beta_i i + \beta_j j + \beta_k k$, где $\alpha_e, ..., \beta_k \in \mathbf{R}$. Имеется разложение для $X := C(\Lambda, \mathbf{H})$ из §2.12 с $X_e = C(\Lambda, \mathbf{H})$ и $x_m = \sum_n S_{m,1,n} z S_{m,2,n} \tilde{m}$ для любых $z \in \mathbf{H}$, где $z = x_e e + x_i i + x_j j + x_k k$, $x_m \in \mathbf{R}$, $m, n \in \{e, i, j, k\}$ (см. Предложение 2.20). Поэтому применима теорема Стоуна-Вейештрасса для $\mathbf{H}$-значных функций. Если $\lambda_1 \ne \lambda_2$ – два максимальных идеала в Λ, то $y(\lambda_1) \ne y(\lambda_2)$ для $y \in \lambda_1 \setminus \lambda_2$. Следовательно алгебра функций $x(.)$ совпадает с $C(\Lambda, \mathbf{H})$.

2.23. Определение. Пусть X – ГП над $\mathbf{H}$ и $\mathcal{B}$ - σ-алгебра борелевских подмножеств хаусдорфова топологического пространства Λ. Рассмотрим отображение $\hat{E}$ определенное на $\mathcal{B} \times X^2$ и определяющее единственную X-проекторнозначную спектральную меру $\hat{E}$ такую, что

(i) $< \hat{E}(\delta)x; y >= \hat{\mu}(\delta; x, y)$ – регулярная (некоммутативная) $\mathbf{H}$-значная мера для любых $x, y \in X$, где $\delta \in \mathcal{B}$. По нашему определению это означает, что

(1) $\hat{\mu}(\delta; x, y) = \hat{\mu}(x, y).\chi_\delta$ и

(2) $\hat{\mu}(x, y).f := \sum_{m,l,n} \int_\Lambda S_{m,1,n} f(\lambda) S_{m,2,n} \tilde{m} l \mu_{m,l}(d\lambda; x, y)$,

где χ_δ – характеристическая функция для $\delta \in \mathcal{B}$, $S_{m,p,n} \in \mathbf{R}n$ те же, что в §2.19, $\mu_{m,l}$ – регулярная действительнозначная мера, $m, n, l \in \{e, i, j, k\}$, $p = 1$ или $p = 2$, f - произвольная $\mathbf{H}$-значная функция на Λ, которая $\mu_{m,l}$-интегрируема для любых m, l;

(3) $(\hat{E}_S(\delta))^* = (-1)^{\kappa(S)} \hat{E}_S(\delta)$, где $(\hat{E}_S(\delta).e)x := (\hat{E}_S(\delta))x = (\hat{E}(\delta).S)x$, $S = cm$, $m \in \{e, i, j, k\}$, $c = const \in \mathbf{R}$, $x \in X$;

(4) $\hat{E}_{bS} = b\hat{E}_S$ для любых $b \in \mathbf{R}$ и любого чистого вектора $S = cm$;

(5) $\hat{E}_{S_1 S_2}(\delta \cap \gamma) = \hat{E}_{S_1}(\delta) \hat{E}_{S_2}(\gamma)$ для любых чистых кватернионных векторов S_1 и S_2 и любых $\delta, \gamma \in \mathcal{B}$. Хотя из $(3, 4)$ следует, что $\hat{E}(\delta).\lambda = \lambda_e \hat{E}_e(\delta) + \lambda_i \hat{E}_i(\delta) + \lambda_j \hat{E}_j(\delta) + \lambda_k \hat{E}_k(\delta) =: \hat{E}_\lambda(\delta)$, но в общем может быть $(\hat{E}(\delta).\lambda)x \ne (\hat{E}(\delta))\lambda x$, где $\lambda_e, ..., \lambda_k \in \mathbf{R}$.

2.24. Теорема. *Каждая КК C^*-алгебра $\mathcal{A}$ содержащаяся в $L_q(X)$ для ГП X над $\mathbf{H}$ изометрически $*$-эквивалентна алгебре $C(\Lambda, \mathbf{H})$, где Λ – ее спектр. Более того, каждый изометрический $*$-изоморфизм $f \mapsto T(f)$ между $C(\Lambda, \mathbf{H})$ и $\mathcal{A}$ определяет единственную X-проекторнозначную спектральную меру $\hat{E}$ на $\mathcal{B}(\Lambda)$, так что*

(i) $< \hat{E}(\delta)x; y >= \hat{\mu}(\delta; x, y)$ – регулярная $\mathbf{H}$-значная мера для любых $x, y \in X$, где $\delta \in \mathcal{B}$;

(ii) $\hat{E}_{S_1}(\delta).T(S_2 f) = (-1)^{\kappa(S_1)+\kappa(S_2)} T(S_2 \hat{E}_{S_1}(\delta).f)$ для любых $f \in C(\Lambda, \mathbf{R})$, $\delta \in \mathcal{B}$ и чистых кватернионных векторов S_1, S_2;

(iii) $T(f) = \int_\Lambda \hat{E}(d\lambda).f(\lambda)$ для любой $f \in C(\Lambda, \mathbf{H})$, причем $\hat{E}$ σ-аддитивна в сильной операторной топологии.

Доказательство. Отметим, что Λ компактно. Существует разложение $C(\Lambda, \mathbf{H})$ как в §2.21. Каждый $\psi \in C_q^*(\Lambda, \mathbf{H})$ имеет разложение $\psi(f) = \psi_e(f)e + \psi_i(f)i + \psi_j(e)j + \psi_k(f)k$, где $f \in C(\Lambda, \mathbf{H})$ (см. 2.20.(1)). Более того, $\psi_l(f) = \psi_l(f_e e) + \psi_l(f_i i) + \psi_l(f_j j) + \psi_l(f_k k)$, где $f_m \in C(\Lambda, \mathbf{R})$, $m, l \in \{e, i, j, k\}$. Тогда

(1) $\psi(f) = \sum_{m,n,l} \psi_l(S_{m,1,n} f S_{m,2,n}) l$,

где $m, n, l \in \{e, i, j, k\}$. В силу теоремы представления Рисса IV.6.3 [2]: $\psi_l(gm) = \int_\Lambda g(\lambda) \mu_{m,l}(d\lambda)$ для любой $g \in C(\Lambda, \mathbf{R})$, где $\mu_{m,l}$ – это σ-аддитивная действительнозначная мера. Выполнение покомпонентного интегрирования матричнозначной функции дает

(2) $\psi(f) = \sum_{m,n,l} \int_\Lambda S_{m,1,n} f(\lambda) S_{m,2,n} \tilde{m} l \mu_{m,l}(d\lambda)$. Для $\psi(f) :=< T(f)x; y >$ для любой $f \in C(\Lambda, \mathbf{H})$ и отмеченных $x, y \in X$ из (2) следует, что

(3) $< T(f)x;y >= \sum_{m,n,l}\int_\Lambda S_{m,1,n}f(\lambda)S_{m,2,n}\tilde{m}l\mu_{m,l}(d\lambda;x,y)$, так как $| < T(f)x;y > | \leq |f||x||y|$, следовательно, $\mu_{m,l}(\delta;xa,yb) = a\mu_{m,l}(\delta;x,y)b$ для любых $a,b\in\mathbf{R}$, причем

(4) $\sup_{\delta\in\mathcal{B}}(\sum_l|\sum_m z_m m\mu_{m,l}(\delta;x,y)|^2)^{1/2} \leq |z||x||y|$ для любых $z = z_e e + z_i i + z_j j + z_k k \in \mathbf{H}$, так как $|l| = 1$.

Из (3) следует, что $\mu_{m,l}(\delta;x,y)$ является $\mathbf{R}$-биоднородной и биаддитивной по x,y. Если $f(\lambda) \in \mathbf{R}m$ для μ-п.в. $\lambda \in \Lambda$ для некоторого $m \in \{e,i,j,k\}$, то $T(f) = T((-1)^{\kappa(m)}\tilde{f}) = (-1)^{\kappa(m)}T(f)^*$, следовательно, $< T(f)x;y >= (-1)^{\kappa(m)} < T(f)y;x >\tilde{}$. Тогда $\mu_{m,l}(\delta;x,y) = (-1)^{\kappa(m)+\kappa(l)}\mu_{m,l}(\delta;y,x)$ для любых $m,l\in\{e,i,j,k\}$, $x,y\in X$.

2.25. Определение. Оператор T на кватернионном ГП X называется нормальным, если $TT^* = T^*T$; T унитарен, если $TT^* = I$ и $T^*T = I$; T симметричен, если $< Tx;y >=< x;Ty >$ для любых $x,y\in\mathcal{D}(T)$, T самосопряжен, если $T^* = T$. Далее для T^* предполагается, что $\mathcal{D}(T)$ плотно в X.

2.26. Лемма. *Оператор $T \in L_q(X)$ нормален тогда и только тогда, когда минимальная ($\mathbf{H}$-)подалгебра $\mathcal{A}$ в $L_q(X)$ содержащая T и T^* КК.*

Доказательство. Пусть T нормален, тогда на $X = X_e e \oplus X_i i \oplus X_j j \oplus X_k k$ он может быть представлен в виде $T = T_e E + T_i i + T_j j + T_k k$, где $Range(T_m) \subset X_m$ и $T_m \in \mathcal{A}$ для любых $m \in \{e,i,j,k\}$. В блочном виде $T = \begin{pmatrix} A & B \\ -\bar{B} & \bar{A}\end{pmatrix}$ и $x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ -\bar{x}_2 & \bar{x}_1\end{pmatrix}$, где $x_1 = x_e e + x_i i \in X_e e \oplus X_i i$, $x_2 j = x_j j + x_k k \in X_j j \oplus X_k k$, $\bar{x}_1 = x_e e - x_i i$, $\bar{A}x_1 := A\bar{x}_1$. Тогда $T^*(x_m m) = (-1)^{\kappa(S_m)}T(x_m m)$ для любых $m \in \{e,i,j,k\}$ и $T^* = \begin{pmatrix} A^* & -\bar{B}^* \\ B^* & \bar{A}^*\end{pmatrix}$. Поэтому, $< mTmx; mTmy >=< mT^*mx; mT^*my >$ для любых $m\in\mathbf{H}$ с $|m| = 1$, следовательно, $(mTm)(mTm)^* = (mTm)^*(mTm)$. Пространство X изоморфно с $l_2(\upsilon,\mathbf{H})$, в котором $< x;y >= \sum_{b\in\upsilon} {}^b\tilde{x}\ {}^b y$, где υ – множество, $x = \{\ {}^l x : {}^l x \in \mathbf{H}, l \in \upsilon\} \in l_2(\upsilon,\mathbf{H})$. Тогда в $L_q(l_2(\upsilon,\mathbf{H}))$ выполняется $T^* = \tilde{T}$, причем $\bar{A}^* = A$ и $\bar{B}^* = B$. Поэтому $TT^* = T^*T$ дает $AA^* = A^*A$, также автоморфизм $j : X \to X$ и равенство $(mTm)(mTm)^* = (mTm)^*(mTm)$ с $m = \theta$, $m = (i+j)/2$, $m = (i+k)/2$, $m = (i+j)\theta/2$, $m = (i+k)\theta/2$, $\theta = \exp(\pi\mathbf{i}/4)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix}$ приводит к попарному коммутированию $\{T_e,T_i,T_j,T_k\}$.

Обратно, если $\mathcal{A}$ квазикоммутативна, то $\{T_m : m = e,i,j,k\}$ – попарно коммутируют, следовательно, $TT^* = T^*T$.

2.27. Лемма. *Пусть T – симметрический оператор и $a \in \mathbf{H}\backslash\mathbf{R}e$, тогда существует $R(a;T)$ и $|x| \leq 2|R(a;T)x|/|a-\tilde{a}|$ для любых $x\in\mathcal{D}(T)$. Пусть T – замкнутый оператор, тогда множества $\rho(T)$, $\sigma_p(T)$, $\sigma_c(T)$ и $\sigma_r(T)$ не пересекаются и их объединение есть все $\mathbf{H}$. Для самосопряженного КЛО T $\sigma(T) \subset \mathbf{R}e$, причем $R(a;T)^* = R(a^*;T)$.*

2.28. Теорема. *Для самосопряженного КЛО T существует однозначно определенная регулярная счетно-аддитивная самосопряженная спектральная мера $\hat{E}$ на $\mathcal{B}(\mathbf{H})$, $\hat{E}|_{\rho(T)} = 0$, так что*

(a) $\mathcal{D}(T) := \{x : x\in X; \int_{\sigma(T)} < (\hat{E}(dz).z^2)x;x >< \infty\}$ и

(b) $Tx = \lim_{n\to\infty}\int_{-n}^n(\hat{E}(dz).z)x$, $x\in\mathcal{D}(T)$.

Доказательство. В силу предложения 2.20 и равенства 2.16.(5) пространство $\mathcal{D}(T)$ является $\mathbf{H}$-линейным. Воспользуемся леммой 2.27, доказательство которой аналогично случаю над полем $\mathbf{C}$, и возьмем отмеченный элемент $q \in \{i,j,k\}$, тогда $h(z) := (q-z)^{-1}$ – гомеоморфизм сферы $S^3 := \{z \in \mathbf{H} : |z| = 1\}$ и для $A := (q-z)R(z;T)(q-z) + (q-z)I$ для любого $z \in \rho(T) \setminus \{q\}$ выполняется тождество $(hI - R(q;T))A = I$. Если $z = q$, то $h = \infty$, следовательно, $h \notin \sigma(R(q;T))$. Пусть $0 \neq h \in \rho(R(q;T))$, тогда существует $B := R(q;T)A$, где $A := (hI - R(z;T))^{-1}$, следовательно, B взаимно однозначен, $\mathcal{R}(B) = \mathcal{D}(T)$ и $(zI - T)B = (z-q)I$, то есть, $z\in\rho(T)$. При $h = 0 \in \rho(R(q;T))$ оператор $R(q;T)^{-1} = (hI - T)$ - ограниченный всюду определенный оператор и этот случай рассмотрен в теореме 2.24. Для любого $\delta \in \mathcal{B}(\mathbf{H})$ положим $\hat{E}(\delta) := \hat{E}^1(h(\delta))$, где $\hat{E}^1$ – разложение единицы для нормального оператора $R(q;T)$, тогда конец доказательства аналогичен теореме XII.2.3 [2].

2.29. Замечание и определение. Единственная спектральная мера, связанная с самосопряженным КЛО T называется разложением единицы для T. Для $\mathbf{H}$-значной борелевской функции f определенной $\hat{E}$-почти всюду $f(T)$ определяется соотношениями: $\mathcal{D}(f(T)) := \{x :$ существует $\lim_n f_n(T)x\}$, где $f_n(z) := f(z)$ при $|f(z)| \le n$; $f_n(z) := 0$ при $|f(z)| > n$; $f(T)x := \lim_n f_n(T)x$, $x \in \mathcal{D}(f(T))$, $n \in \mathbf{N}$.

2.30. Теорема. *Пусть $\hat{E}$ – разложение единицы для самосопряженного КЛО T и f из §2.28. Тогда $f(T)$ - замкнутый КЛО со всюду плотной областью определения, причем:*
(a) $\mathcal{D}(f(T)) = \{x : \int_{-\infty}^{\infty} |f(z)|^2 < \hat{E}(dz)x; x >< \infty\}$;
(b) $< f(T)x; y >= \int_{-\infty}^{\infty} < \hat{E}(dz).f(z)x; y >$, $x \in \mathcal{D}(f(T))$;
(c) $|f(T)x|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(z)|^2 < \hat{E}(dz)x; x >$, $x \in \mathcal{D}(f(T))$;
(d) $f(T)^* = \tilde{f}(T)$; (e) $R(q;T) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{E}(dz).(q - z)$, $q \in \rho(T)$.

Доказательство. Возьмем f_n из §2.29 и $\delta_n := \{z : |f(z)| \le n\}$. Тогда $|f(T)x|^2 = \lim_n |f_n(T)x|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(z)|^2 < \hat{E}(dz)x; x >$ для любых $x \in \mathcal{D}(f(T))$, отсюда вытекает (c), а замкнутость $f(T)$ и (a) проверяются аналогично комплексному случаю. Некоммутативная мера $\hat{\mu}$ на алгебре Υ подмножеств множества $\mathcal{S}$ соответствует КЛО со значениями $\mathbf{H}$ и в силу предложения 2.20 она полностью характеризуется $\mathbf{R}$-значными мерами $\mu_{m,n}$, так что $\mu_{m,n}(f_m) = \hat{\mu}(f_m)\tilde{n}$ для любой $\hat{\mu}$-интегрируемой $\mathbf{H}$-значной функции f с компонентами f_m, где $m, n \in \{e, i, j, k\}$. Тогда можно определить вариацию $v(\hat{\mu}, U) := \sup_{W_l \subset U} \sum_l |\hat{\mu}(\chi_{W_l})|$ по всем $\{W_l\}$ – конечным дизъюнктным системам подмножеств $W_l \in \Upsilon$ в U с $\bigcup_l W_l = U$. Если $\hat{\mu}$ ограничена, то она является КЛО ограниченной вариации с $v(\hat{\mu}, \mathcal{S}) \le 16 \sup_{U \in \Upsilon} |\hat{\mu}(\chi_U)|$, причем $v(\hat{\mu}, *)$ аддитивна на Υ. Функцию f назовем $\hat{\mu}$-измеримой, если каждая f_m $\mu_{m,n}$-измерима для любых n и $m \in \{e, i, j, k\}$. Пространство всех $\hat{\mu}$-измеримых $\mathbf{H}$-значных функций f с $v(\hat{\mu}, |f|^p)^{1/p} =: |f|_p < \infty$ обозначим $L^p(\hat{\mu})$ при $0 < p < \infty$, а $L^\infty(\hat{\mu})$ – это пространство всех f для которых существует $|f|_\infty := ess_{v(\hat{\mu},*)} - \sup |f| < \infty$. Подробно пишем $L^p(\mathcal{S}, \Upsilon, \hat{\mu}, \mathbf{H})$ вместо $L^p(\hat{\mu})$. Подмножество V в $\mathcal{S}$ назовем μ-нуль-множеством, если $v^*(\hat{\mu}, V) = 0$, где v^* – продолжение полной вариации v по формуле $v^*(\hat{\mu}, A) := \inf_{\Upsilon \ni F \supset A} v(\hat{\mu}, F)$ для $A \subset \mathcal{S}$. Некоммутативную меру $\hat{\lambda}$ на $\mathcal{S}$ назовем абсолютно непрерывной относительно $\hat{\mu}$, если $v^*(\hat{\lambda}, A) = 0$ для любого подмножества $A \subset \mathcal{S}$ с $v^*(\hat{\mu}, A) = 0$. Меру $\hat{\mu}$ назовем положительной, если каждая $\mu_{m,n}$ неотрицательна и $\sum_{m,n} \mu_{m,n}$ положительна. Использование компонент $\mu_{m,n}$ и классической теоремы Радона-Никодима (см. теоремы III.10.2,10.7) приводит к следующим ее некоммутативным вариантам.

(i). Если $(\mathcal{S}, \Upsilon, \hat{\mu})$ - пространство с σ-конечной положительной некоммутативной $\mathbf{H}$-значной мерой $\hat{\mu}$, а $\hat{\lambda}$ – абсолютно непрерывная относительно $\hat{\mu}$ конечная некоммутативная мера определенная на Υ, тогда существует и единственная $f \in L^p(\mathcal{S}, \Upsilon, \hat{\mu}, \mathbf{H})$, так что $\hat{\lambda}(U) = \hat{\mu}(f\chi_U)$ для любого $U \in \Upsilon$, причем $v(\hat{\mu}, \mathcal{S}) = |f|_1$.

(ii). Если $(\mathcal{S}, \Upsilon, \hat{\mu})$ - пространство с конечной некоммутативной $\mathbf{H}$-значной мерой $\hat{\mu}$, а $\hat{\lambda}$ – абсолютно непрерывная относительно $\hat{\mu}$ некоммутативная мера определенная на Υ, тогда существует и единственная $f \in L^1(\hat{\mu})$, так что $\hat{\lambda}(U) = \hat{\mu}(f\chi_U)$ для любого $U \in \Upsilon$. В силу (ii) существует борелевски измеримая функция ϕ, так что $\hat{\nu}(\delta) := \hat{\mu}_{x,y}(\phi\chi_\delta) =< \hat{E}(\phi\chi_\delta)x; y >$ для любых $\delta \in \mathcal{B}(\mathbf{R})$. В силу (i) $|\phi(z)| = 1$ $\hat{\nu}$-почти всюду. Рассмотрим $f^1(z) := |f(z)|\phi(z)$, тогда в силу (a) $\mathcal{D}(f^1(T)) = \mathcal{D}(f(T))$ и $< f^1(T)x; y >= \int_{-\infty}^{\infty} |f(z)|\hat{\nu}(dz)$. Поэтому, $< f(T)x; y >= \lim_n \int_{\delta_n} < \hat{E}(dz).f(z)x; y >=$

$\int_{-\infty}^{\infty} < \hat{E}(dz).f(z)x; y >$ и отсюда следует (b).

(d). Из $\hat{E}_S^* = (-1)^{\kappa(S)}\hat{E}_S$ для любого $S = cs$, $0 \neq c \in \mathbf{R}$, $s \in \{e, i, j, k\}$, следует, что $\hat{E}.\tilde{f} = \hat{E}^*.f$. Возьмем $x, y \in \mathcal{D}(\tilde{f}(T)) = \mathcal{D}(f(T))$, тогда $< \tilde{f}(T)x; y >= \int_{-\infty}^{\infty} < \hat{E}(dz).\tilde{f}(z)x; y >=< x; f(T)y >$, следовательно, $\tilde{f}(T) \subset f(T)^*$. Если $y \in \mathcal{D}(f(T)^*)$, то для любых $x \in X$ и $m \in \mathbf{N}$: $\tilde{f}_m(T)y = \hat{E}(\delta_m).f(T)^*y$ сходится к $f(T)^*y$ при $m \to \infty$, следовательно, $y \in \mathcal{D}(\tilde{f}(T))$. В силу теоремы 2.24 утверждение (e) вытекает из того, что ${}_n\hat{E}(\delta) := \hat{E}(\delta_n \cap \delta)$ является разложением единицы для ограничения $T|_{X_n}$, где $X_n := \hat{E}(\delta_n)X$.

2.31. Теорема. *Ограниченный нормальный оператор T на кватернионном ГП является унитарным, эрмитовым или положительным тогда и только тогда, когда $\sigma(T)$ содержится в $S^3 := \{z \in \mathbf{H} : |z| = 1\}$, $\mathbf{R}$ или $[0, \infty)$ соответственно.*

Доказательство. В силу теоремы 2.24 равенство $T^*T = TT^* = I$ равносильно $z\tilde{z} = 1$ для любых $z \in \sigma(T)$. Если $\sigma(T) \subset [0, \infty)$, то $< Tx; x >= \int_{\sigma(T)} < \hat{E}(dz).zx; x >\geq 0$ для любых $x \in X$. Окончание доказательства аналогично комплексному случаю, используя технику данную выше.

2.32. Определение. Семейство $\{T(t) : 0 \leq t \in \mathbf{R}\}$ ограниченных КЛО в X называется сильно непрерывной полугруппой, если (i) $T(t + q) = T(t)T(q)$ для любых $t, q \geq 0$; (ii) $T(0) = I$; (iii) $T(t)x$ – непрерывная функция по $t \in [0, \infty)$ для любых $x \in X$.

2.33. Теорема. *Для любой сильно непрерывной полугруппы $\{U(t) : 0 \leq t \in \mathbf{R}\}$ унитарных КЛО в ГП X над $\mathbf{H}$ существует и единственный самосопряженный КЛО B в X, так что $U(t) = \exp(t\mathbf{i}B)$, где $\mathbf{i} = (-1)^{1/2}$.*

Доказательство. Если $\{T(t) : 0 \leq t\}$ – полугруппа непрерывная в равномерной топологии, то в силу теоремы VIII.1.2 [2] и предложения 2.20 существует ограниченный оператор A на X такой, что $T(t) = \exp(tA)$ для любых $t \geq 0$. Если $Re(z) := (z+\tilde{z})/2 > |A|$, то $|\exp(-t(zI - A))| \leq \exp(t(|A| - Re(z)) \to 0$ при $t \to \infty$. Для таких $z \in \mathbf{H}$ в силу теоремы Лебега: $(zI - A)\int_0^{\infty} \exp(-t(zI - A))dt = I$, а по лемме 2.3 существует $R(z; A) = \int_0^{\infty} \exp(-t(zI - A))dt$. Для любого $\epsilon > 0$ пусть $A_\epsilon x := (T(\epsilon)x - x)/\epsilon$, где $x \in X$, для которого существует $\lim_{0<\epsilon\to 0} A_\epsilon x$, множество таких x обозначим $\mathcal{D}(A)$. Очевидно, что $\mathcal{D}(A)$ является $\mathbf{H}$-векторным подпространством в X. Зададим на нем инфинитезимальный КЛО $Ax := \lim_{0<\epsilon\to 0} A_\epsilon x$. Рассматривая $\mathbf{H}$ как БП над $\mathbf{R}$, получим аналоги лемм 3,4,7, следствий 5, 9 и теоремы 10 из §VIII.1 [2], причем $\mathcal{D}(A)$ плотно в X, а A – замкнутый КЛО на $\mathcal{D}(A)$. Пусть $w_0 := \lim_{t\to\infty} ln(|T(t)|)/t$ и $z \in \mathbf{H}$ с $Re(z) > w_0$. Для любого $w_0 < \delta < Re(z)$ в силу следствия VIII.1.5 [2] существует константа $M > 0$ такая, что $|T(t)| \leq M\exp(\delta t)$ для любых $t \geq 0$. Тогда существует $R(z)x := \int_0^{\infty} \exp(-t(zI - A))xdt$ для любых $x \in X$ и $Re(z) > w_0$, следовательно, $R(z)x \in \mathcal{D}(A)$. Пусть T_z – КЛО соответствующий $z^{-1}A$ вместо T для A, где $0 \neq z \in \mathbf{H}$, причем $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(z^{-1}A)$. Тогда $z^{-1}A\int_0^{\infty} \exp(-t(I - z^{-1}A))xdt = \int_0^{\infty} \exp(-t(I - z^{-1}A)z^{-1}Axdt$, следовательно, $R(z)(zI - A)x = x$ для любого $x \in \mathcal{D}(A)$ и $R(z) = R(z; A)$. Итак, $R(z; A)x = \int_0^{\infty} \exp(-t(zI - A))xdt$ для любых $z \in \rho(A)$ и $x \in X$.

С помощью 2.7.(iii) для КЛО A существует КЛО B такой, что $A = \mathbf{i}B$, где $B = \begin{pmatrix} B_i & B_k - \mathbf{i}B_j \\ B_k + \mathbf{i}B_j & -B_i \end{pmatrix}$. Поскольку $U(t)U(t)^* = U(t)^*U(t) = I$, то A коммутирует с A^* и $\exp(t(A + A^*)) = I$. Из $R(z; B)^* = R(\tilde{z}, B)$ следует, что $B = B^*$. Если $\hat{E}$ – разложение единицы для B и $V(t) := \exp(\mathbf{i}tB)$, то по теореме 2.30 $< V(t)x; y >= \int_{-\infty}^{\infty} < \hat{E}(dz).\exp(\mathbf{i}tz)x; y >$, то в силу теоремы Фубини $\int_0^{\infty} < V(t).\exp(-bt)x; y > dt = \int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} < \hat{E}(dz).\exp(-(b - \mathbf{i}z)t)x; y > dt = \int_{-\infty}^{\infty} < \hat{E}(dz).(b - \mathbf{i}z)^{-1}x; y > = R(b; \mathbf{i}B)x; y >$ для любых $b \in \mathbf{H}$ с $Re(b) > 0$. Поэтому, $\int_0^{\infty} < V(t).\exp(-bt)x; y > dt = \int_0^{\infty} < U(t).\exp(-bt)x; y > dt$ при

$Re(b) > 0$. В силу леммы $VIII.1.15 < V(t).\exp(-\epsilon t)x; y >=< U(t).\exp(-\epsilon t)x; y >$ для любых $t \geq 0$ и $Re(b) > 0$, следовательно, $U(t) = V(t)$.

2.34. Обозначения. Пусть X – это $\mathbf{H}$-линейное локально выпуклое пространство. Рассмотрим левые, правые и двусторонние $\mathbf{H}$-линейные оболочки семейства векторов $\{v^a : a \in \mathbf{A}\}$, где $span^l_{\mathbf{H}}\{v^a : a \in \mathbf{A}\} := \{z \in X : z = \sum_{q_a \in \mathbf{H}; \mathbf{a} \in \mathbf{A}} q_a v^a\}$; $span^r_{\mathbf{H}}\{v^a : a \in \mathbf{A}\} := \{z \in X : z = \sum_{q_a \in \mathbf{H}; \mathbf{a} \in \mathbf{A}} v^a q_a\}$; $span_{\mathbf{H}}\{v^a : a \in \mathbf{A}\} := \{z \in X : z = \sum_{q_a, r_a \in \mathbf{H}; \mathbf{a} \in \mathbf{A}} q_a v^a r_a\}$.

2.35. Лемма. *В обозначениях §2.34* $span^l_{\mathbf{H}}\{v^a : a \in \mathbf{A}\} = span^r_{\mathbf{H}}\{v^a : a \in \mathbf{A}\} = span_{\mathbf{H}}\{v^a : a \in \mathbf{A}\}$.

Доказательство. В силу непрерывности сложения и умножения векторов в X и используя сходимость направленностей векторов достаточно доказать утверждение леммы для конечного множества $\mathbf{A}$. Тогда пространство $Y := span_{\mathbf{H}}\{v^a : a \in \mathbf{A}\}$ конечномерно над $\mathbf{H}$ и очевидно, что левые и правые $\mathbf{H}$-линейные оболочки содержатся в нем. Тогда в Y может быть выбран базис над $\mathbf{H}$ и каждый вектор записан в виде $v^a = \{v^a_1, ..., v^a_n\}$, где $n \in \mathbf{N}$, $v^a_s \in \mathbf{H}$. Каждый кватернион $q \in \mathbf{H}$ может быть записан в виде 4×4 действительной матрицы, поэтому для любого вектора $y \in Y$ существуют матрицы A и B, элементы которых принадлежат $\mathbf{H}$, так что $AV = y$ и $WB = y$, где $W = \{v^a : a \in \mathbf{A}\}$, $V = W^t$ – транспонированная матрица, так как A, B, W и V могут быть записаны в блочном виде над $\mathbf{R}$ с блоками 4×4. Поэтому $span^l_{\mathbf{H}}\{v^a : a \in \mathbf{A}\} \cap span^r_{\mathbf{H}}\{v^a : a \in \mathbf{A}\} \supset span_{\mathbf{H}}\{v^a : a \in \mathbf{A}\}$, что вместе с включением $span^r_{\mathbf{H}}\{v^a : a \in \mathbf{A}\} \cup span^l_{\mathbf{H}}\{v^a : a \in \mathbf{A}\} \subset span_{\mathbf{H}}\{v^a : a \in \mathbf{A}\}$ доказанным выше приводит к утверждению леммы.

2.36. Лемма. *Пусть X – ГП над $\mathbf{H}$, а $\mathbf{X_R}$ то же пространство рассматриваемое над полем $\mathbf{R}$. Вектор $x \in X$ ортогонален $\mathbf{H}$-линейному подпространству Y в X относительно $\mathbf{H}$-значного скалярного произведения в X тогда и только тогда, когда x ортогонален $Y_{\mathbf{R}}$ относительно скалярного произведения в $X_{\mathbf{R}}$. Пространство X изоморфно стандартному ГП $l_2(\alpha, \mathbf{H})$ над $\mathbf{H}$ сходящихся по норме последовательностей $v = \{v^a : a \in \alpha\}$ со скалярным произведением $< v; w >:= \sum_a \tilde{v}^a w_a$, причем $card(\alpha)\aleph_0 = w(X)$, где $card(\alpha)$ – мощность множества α, $\aleph_0 Krd(\mathbf{N})$.*

Доказательство. В силу леммы 2.35 и трансфинитной индукции в Y существует $\mathbf{H}$-линейно независимая система векторов $\{v^a : a \in \mathbf{A}\}$, так что $span^r_{\mathbf{H}}\{v^a : a \in \mathbf{A}\}$ всюду плотно в Y. Иными словами в Y существует базис Гамеля над $\mathbf{H}$. Вектор x по определению ортогонален Y тогда и только тогда, когда $< v; x >= 0$ для любого $v \in Y$, что эквивалентно $< v^a; x >= 0$ для любого $a \in \mathbf{A}$. Пространство $X_{\mathbf{R}}$ изоморфно прямой сумме $X_e \oplus iX_i \oplus jX_j \oplus kX_k$, где X_e, X_i, X_j и X_k – это попарно изоморфные ГП над $\mathbf{R}$. Скалярное произведение $< x; y >$ в X тогда можно записать в виде

(i) $< x; y >= \sum_{m,n \in \{e,i,j,k\}} < x_m; y_n > \tilde{m}n$,

где $< x_m; y_n >\in \mathbf{R}$ в силу 2.16.(3, 5). Тогда скалярное произведение $< x; y >$ в X индуцирует скалярное произведение

(ii) $< x; y >_{\mathbf{R}} := \sum_{m \in \{e,i,j,k\}} < x_m; y_m >$

в $X_{\mathbf{R}}$. Поэтому из ортогональности x подпространству Y относительно $< x; y >$ следует ортогональность x подпространству $Y_{\mathbf{R}}$ относительно $< x; y >_{\mathbf{R}}$. В силу леммы 2.35 из $y \in Y$ следует, что $my_m \in Y$ для любого $m \in \{e, i, j, k\}$. Тогда из $< x; y_m >_{\mathbf{R}}= 0$ для любых $y \in Y$ и m в силу 2.16.(5) следует $< x; y >= 0$ для любых $y \in Y$. Тогда по теореме о трансфинитной индукции [11] в X существует ортонормированный базис над $\mathbf{H}$, в котором каждый вектор представляется в виде сходящегося ряда левых (или правых) $\mathbf{H}$-линейных комбинаций базисных векторов. Для любого $x \in X$ в силу нормированности X база окрестностей счетна, а для топологической плотности выполняется равенство $d(X)Krd(\alpha)\aleph_0$, так как $\mathbf{H}$ сепарабельно, поэтому $w(X) = d(X)$. Отсюда вытекает последнее утверждение леммы.

2.37. Лемма. *Для любого КЛО T в ГП X над $\mathbf{H}$ сопряженный оператор T^* в X относительно $\mathbf{H}$-скалярного произведения совпадает с сопряженным оператором $T^*_{\mathbf{R}}$ в $X_{\mathbf{R}}$ относительно $\mathbf{R}$-значного скалярного произведения в $X_{\mathbf{R}}$.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{D}(T)$ – область определения оператора T, которая плотна в X. В силу формул 2.36.(i, ii) и существования автоморфизмов $z \mapsto zm$ в $\mathbf{H}$ для любых $m \in \{e, i, j, k\}$ следует, что непрерывность $< Tx; y >$ и $< Tx; y >_{\mathbf{R}}$ по $x \in \mathcal{D}(T)$ эквивалентны, поэтому в силу леммы 2.35 семейство всех $y \in X$, для которых $< Tx; y >$ непрерывно по $x \in \mathcal{D}(T)$ образует $\mathbf{H}$-линейное подпространство в X и оно то же самое относительно $< Tx; y >_{\mathbf{R}}$, что является областью определения $\mathcal{D}(T^*)$ оператора T^*. Тогда сопряженный оператор T^* определен равенством $< Tx; y >=:< x; T^*y >$, а $T^*_{\mathbf{R}}$ задается путем $< Tx; y >_{\mathbf{R}}=< x; T^*_{\mathbf{R}}y >_{\mathbf{R}}$, где $x \in \mathcal{D}(T)$, а $y \in \mathcal{D}(T^*)$. В силу формул 2.36.(i, ii) $< x_m; (T^*y)_m >=< x_m; (T^*y)_m >_{\mathbf{R}}$ для любых $x \in \mathcal{D}(T)$, $y \in \mathcal{D}(T^*)$ и $m \in \{e, i, j, k\}$. Поскольку в силу предложения 2.20 и леммы 2.35 $\mathcal{D}(T)$ и $\mathcal{D}(T^*)$ $\mathbf{H}$-линейны, то автоморфизмы тела $\mathbf{H}$ данные выше приводят к $T^* = T^*_{\mathbf{R}}$.

2.38. Определение. Ограниченный КЛО P в ГП X над $\mathbf{H}$ называется частичной $\mathbf{R}$- (или $\mathbf{H}$-) изометрией, если существует замкнутое $\mathbf{R}$- (или $\mathbf{H}$-) линейное подпространство Y такое, что $\|Px\| = \|x\|$ для $x \in Y$ и $P(Y^{\perp}_{\mathbf{R}}) = \{0\}$ (или $P(Y^{\perp}) = \{0\}$) соответственно, где $Y^{\perp} := \{z \in X : \ < z; y >= 0 \quad \forall y \in Y\}$, $Y^{\perp}_{\mathbf{R}} := \{z \in X_{\mathbf{R}} : \ < z; y >_{\mathbf{R}}= 0 \quad \forall y \in Y\}$.

2.39. Теорема. *Если T – замкнутый КЛО на ГП X над $\mathbf{H}$, то $T = PA$, где P – частичная $\mathbf{R}$-изометрия на $X_{\mathbf{R}}$ с начальной областью $cl(Range(T^*))$, а A – самосопряженный КЛО такой, что $cl(Range(A))cl(Range(T^*))$. Если T является $\mathbf{H}$-линейным, то P – это частичная $\mathbf{H}$-изометрия.*

Доказательство. В силу спектральной теоремы 2.28 самосопряженный КЛО T положителен тогда и только тогда, когда его спектр $\sigma(T) \subset [0, \infty)$ (см. также лемму XII.7.2 [2]). В теле $\mathbf{H}$ каждый полином имеет корень (см. теорему 3.17 [8]). Поэтому, если T – положительный самосопряженный КЛО, то сущестует и единственный положительный КЛО A, так что $A^2 = T$ (см. также лемму XII.7.2 [2]). Тогда существует положительный квадратный корень A оператора T^*T. При этом A является $\mathbf{H}$-линейным, если T является $\mathbf{H}$-линейным. Положим $SAx = Tx$ для любых $x \in \mathcal{D}(T^*T)$, а V – изометрическое расширение S на $cl(Range(A))$. Пространство $cl(Range(A))$ является $\mathbf{R}$-линейным. Если A дополнительно лево- (или право-) $\mathbf{H}$-линейно, то $cl(Range(A))$ – это $\mathbf{H}$-линейное подпространство в силу леммы 2.35. В силу леммы 2.36 существует перпендикулярная проекция E из X на $cl(Range(A))$, причем E является $\mathbf{H}$-линейной, если $cl(Range(A))$ – это $\mathbf{H}$-линейное подпространство. Тогда положим $P = VE$. Из $< Ax; Ax >=< Tx; Tx >$ для любого $x \in \mathcal{D}(T^*T)$ следует, что $PAx = Tx$ для любого $x \in \mathcal{D}(T^*T)$. Остальная часть доказательства проводится аналогично доказательству теоремы $XII.7.7$ [2] с помощью лемм 2.35–37.

2.40. Замечание и определение. В отличии от случая $\mathbf{C}$ нетривиальные полиномы кватернионных переменных могут иметь корни, которые являются не точками, а замкнутыми подмногообразиями в $\mathbf{H}$ с размерностью над $\mathbf{R}$ от 0 до 3 (см. [8]).

Замкнутое подмножество $\lambda \subset \sigma(T)$ называется изолированным подмножеством спектра, если существует окрестность U подмножества λ, так что $\sigma(T) \cap U = \lambda$. Изолированное подмножество λ спектра $\sigma(T)$ называется полюсом спектра (порядка p), если $R(z; T)$ имеет нуль на λ (порядка p, то есть, каждая $z \in \lambda$ является нулем порядка $0 < p(z) \le p$ для $R(z; T)$ и $\max_{z \in \lambda} p(z) = p$). Подмножество λ открыто-замкнутое (одновременно открытое и замкнутое) в $\sigma(T)$ называется спектральным множеством. Пусть η_1 – замкнутый спрямляемый путь в U, охватывающий λ и не пересекающийся с λ, характеризуемый вектором $M_1 \in \mathbf{H}$, $|M_1| = 1$, $M_1 + \tilde{M}_1 = 0$ (см. теорему 3.22 [8]), обозначим

$$(i) \quad \phi_n(z,T) := (2\pi)^{-1}\{\int_{\eta_1} R(\zeta;T)((\zeta-a)^{-1}(z-a))^n(\zeta-a)^{-1}d\zeta)M_1^{-1}\},$$

где $\eta_1 \subset B(\mathbf{H},a,R) \setminus B(\mathbf{H},a,r)$, $B(\mathbf{H},a,R) \subset U$, $\lambda \subset B(\mathbf{H},a,r)$, $0 < r < R < \infty$. Скажем, что индекс λ равен p тогда и только тогда, когда существует вектор $x \in X$ такой, что

$$(ii) \quad (zI-T)^{s_1}v_1\hat{E}(\delta(z);T)v_2...(zI-T)^{s_m}v_{2m-1}\hat{E}(\delta(z);T)x = 0$$

для любого $z \in \lambda$, любых $0 \le s_n \in \mathbf{Z}$ с $s_1 + ... + s_m = p$ и любых $v_1,..,v_{2m-1}$, где $v_1 = v_1(\delta,T) \in \mathbf{H}$,...,$v_{2m-1} = v_{2m-1}(\delta,T) \in \mathbf{H}$, $m \in \mathbf{N}$, $\delta := \delta(z) \ni z$, $\delta(z) \in \mathcal{B}(\lambda)$, а выражение в (ii) отлично от нуля для некоторых $z \in \lambda$ и $s_1,...,s_m$ с $s_1+...+s_m = p-1$.

2.41. Теорема. *Подмножество λ – полюс порядка p КЛО $T \in L_q(X)$ для $U = B(\mathbf{H},\alpha,R')$, $0 < R < R' < \infty$ в определении 2.40, где $0 < r < \infty$, тогда и только тогда, когда λ – имеет индекс p.*

Доказательство. Выберем с помощью гомотопии относительно $U \setminus \lambda$ замкнутые пути η_1 и η_2 гомотопные γ_1 и γ_2, причем $\inf_\theta |\eta_1(\theta)| > \sup_\theta |\eta_2(\theta)|$, где γ_1 и γ_2 выбраны как в теореме 3.22 [8] (см. также теорему 3.9 там же), $\theta \in [0,1]$. В силу теоремы 3.22 [8] кватернионное разложение Лорана $R(z;T)$ в окрестности $B(\mathbf{H},a,R) \setminus B(\mathbf{H},a,r)$ имеет вид $R(z;T) = \sum_{n=0}^\infty(\phi_n(z,T) + \psi_n(z,T))$, где ϕ_n дается формулой 2.40.(i), а

$$(i) \quad \psi_n(z,T) := (2\pi)^{-1}\{\int_{\eta_2} R(\zeta;T)(z-a)^{-1}((\zeta-a)(z-a)^{-1})^n d\zeta)M_2^{-1}\}.$$

Если λ является полюсом порядка p, то $\phi_p = 0$ и $\phi_{p-1} \ne 0$, тогда существует $x \in X$ такой, что

$$(ii) \quad \phi_{p(z)}(z,T)x = 0 \text{ для любого } z \in \lambda, \text{ а}$$

$$(iii) \quad \phi_{p-1}(z,T)x \ne 0 \text{ для некоторого } z \in \lambda.$$

Аналогичные разложения с соответствующими ϕ_n верны для произведения $f(T)R(z;T)g(T)$, где f и g – кватернионно голоморфные функции на окрестности $\sigma(T)$ отличные от нуля всюду на λ. Функции ϕ_n для $R(z;T)$ аппроксимируются с любой точностью в сильной операторной топологии в виде левых $\mathbf{H}$-линейных комбинаций функциями фигурирующими в 2.40.(ii) в силу леммы 2.35 и определения кватернионного интеграла вдоль спрямляемого пути, так как при $|\xi| > \sup|\chi|$ ряд $R(\xi;T_\chi)$ сходится в равномерной операторной топологии для спектрального множества χ спектра $\sigma(T)$, где $T_\chi = T|_{X_\chi}$, $X_\chi := \hat{E}_e(\chi;T)X$. Варьирование f и g дает, что индекс λ не меньше p. Обратно пусть выполнены условия (ii) для некоторого n. Резольвента $R(z;T)x$ регулярна на $\mathbf{H} \setminus B(\mathbf{H},a,r)$ и

$$x = (2\pi)^{-1}\{\int_\eta R(\zeta;T)xd\zeta\}M^{-1}(2\pi)^{-1}\{\int_{\eta_2} R(\zeta;T)xd\zeta\}M_2^{-1}\omega(T)x,$$

где $\omega(T)$ – функция равная 1 на окрестности λ и нулю на $\mathbf{H} \setminus U$, η – соответствующий замкнутый спрямляемый путь охватывающий $\sigma(T)$ и характеризуемый $M \in \mathbf{H}$, $|M| = 1$, $M + \tilde{M} = 0$. Тогда в силу 2.40.(ii) $\phi_{p(z)}(z,T)x = 0$ для любого $z \in \lambda$.

2.42. Замечание. Изолированная точка λ спектра $\sigma(T)$ для нормального КЛО $T \in L_q(X)$ на ГП X над $\mathbf{H}$ может и не иметь собственных векторов из-за некоммутативности проекторнозначной меры $\hat{E}$ в отличии от случая линейных операторов на ГП над $\mathbf{C}$.

References

[1] Connes A. Noncommutative geometry. San Diego: Academic Press, 1994.

[2] Dunford N., Schwartz J.C. Linear operators. N.Y.: J. Wiley and Sons, Inc., 1966.

[3] Emch G. Mécanique quantique quaternionienne et Relativité restreinte// Helv. Phys. Acta 1963. V.**36**. P.739-769.

[4] Kadison R.V., Ringrose J.R. Fundamentals of the theory of operator algebras. N.Y.: Academic Press, 1983.

[5] Lawson H.B., Michelson M.-L. Spin geometry. Princeton: Princeton Univ. Press, 1989.

[6] Lüdkovsky S.V. Generalized Loop Groups of Complex Manifolds, Gaussian Quasi-Invariant Measures on them and their Representations// J. of Math. Sciences, 44 pages, to appear.

[7] Lüdkovsky S.V. Poisson measures for topological groups and their representations// Southeast Asian Bull. Math. 2002. V.**25**. P. 653-680.

[8] Lüdkovsky S.V., Oystaeyen F. van. Differentiable functions of quaternion variables// Bull. Mathem. France, to appear (previous variant: Los Alamos National Laboratory USA. Preprint. 2002. N **math.CV/0209166**. P.1-48; //E-print http://xxx.lanl.gov/).

[9] Lüdkovsky S.V. Functions of several quaternion variables and quaternion manifolds//J. Mathem. Sciences, to appear (previous variant: Los Alamos National Laboratory USA. Preprint. 2003. N **math.CV/0302011**. P.1-30; //E-print http://xxx.lanl.gov/).

[10] Oystaeyen F. van. Algebraic geometry for associative algebras. Ser. Lect. Notes in Pure and Appl. Mathem. V. **232**. N.Y.: Marcel Dekker, 2000.

[11] Энгелькинг Р. Общая топология. М.: Мир, 1986.