УРАВНЕНИЯ ИНЕРЦИАЛЬНОЙ НАВИГАЦИИ И КВАТЕРНИОННАЯ ТЕОРИЯ ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ

В. Ф. Чуб

Ракетно-космическая корпорация "Энергия" им. С.П. Королева, г. Королев, Россия
v.chub@mail.ru

В обзоре проведен сравнительный анализ релятивистских и нерелятивистских уравнений инерциальной навигации в свободном от гравитационного поля пространстве. Для записи уравнений используются кватернионы: с вещественными, дуальными, комплексными и комплексно-дуальными коэффициентами. В рамках теории пространства-времени, основанной на кватернионах с комплексно-дуальными коэффициентами, показана незамкнутость преобразований, которые в рамках специальной теории относительности образуют группу Пуанкаре, а в рамках механики Ньютона — группу Галилея. Приведено уравнение инерциальной навигации, соответствующее кватернионной теории пространства-времени, и отмечена его абсурдность.

"Изобретение кватернионов — шаг вперед к пониманию величин, связанных с пространством; оно сравнимо по своему значению с изобретенной Декартом системой координат."

Дж. Максвелл

"Это была революция в арифметике, подобная той, которую совершил Лобачевский в геометрии."

А. Пуанкаре

"Во всяком случае видно, насколько точно приспособлены кватернионы к изображению ортогональных подстановок 3 или 4 переменных. Они могут применяться с пользой всюду, где заходит речь о таких подстановках. Напротив, вряд ли кто-нибудь сейчас видит в них универсальное целебное средство от всех недостатков геометрии, как порой казалось Гамильтону и его ученикам."

Ф. Клейн

1. Введение

В теории бесплатформенных инерциальных навигационных систем (БИНС) имеют дело, как минимум, с двумя системами отсчета, одна из которых (I) инерциальная ("неподвижная"), а вторая (E) связана с движущимся объектом. Далее будут использоваться только инерциальные системы отсчета в пространстве-времени с ортонормированными базисами (галилеевы системы отсчета). Неинерциальная связанная система отсчета E рассматривается как непрерывная последовательность инерциальных систем отсчета $E(\tau)$.

Положение одной системы отсчета (E) в пространстве-времени относительно другой (I) задается (без учета гравитации) десятью параметрами (t и компоненты трех векторов $\vec{r}$, $\vec{v}$, $\vec{\vartheta}$):

– положением начала отсчета системы E относительно системы отсчета I в пространстве-времени (сдвиг во времени t и радиус-вектор $\vec{r}$);
– скоростью системы E относительно I (вектор скорости $\vec{v}$);
– пространственным поворотом E относительно I (вектор ориентации $\vec{\vartheta}$).

Общая постановка задачи инерциальной навигации обсуждается в рассчитанном на широкий круг читателей кратком сообщении [1]. Далее будет рассматриваться только случай движения объекта в свободном от гравитационного поля пространстве. В случае отсутствия гравитационного поля задача БИНС состоит в вычислении текущего положения движущейся системы отсчета относительно неподвижной по измеряемым объектом ускорению $\vec{a}(\tau)$ и угловой скорости $\vec{\omega}(\tau)$ (как функций от τ — измеряемого объектом времени) при известном начальном положении (на момент τ_0).

2. Нерелятивистские уравнения инерциальной навигации

В нерелятивистском пределе, как известно, бортовое время τ совпадает с координатным временем t и называется "абсолютным" (ньютоновским) временем.

2.1. Уравнения инерциальной навигации в обычных кватернионах

Хорошо известная система нерелятивистских уравнений инерциальной навигации при отсутствии гравитационного поля имеет вид:

$$\frac{d\vec{r}_I}{d\tau} = \vec{v}_I, \tag{1}$$

$$\frac{d\vec{v}_I}{d\tau} = \vec{a}_I = \Lambda \circ \vec{a}_E \circ \bar{\Lambda}, \tag{2}$$

$$\frac{d\Lambda}{d\tau} = \frac{1}{2}\Lambda \circ i\vec{\omega}_E. \tag{3}$$

Физический смысл всех использованных векторов объяснен выше. Индексы при векторах обозначают систему отсчета, к которой отнесен вектор. Символ

$\Lambda = e^{i\vec{\vartheta}/2} = \exp(i\vec{\vartheta}/2) = \cos(\vartheta/2) + i(\vec{\vartheta}/\vartheta)\sin(\vartheta/2)$ обозначает нормированный кватернион, соответствующий преобразованию пространственного поворота;

$\vec{\vartheta}$ — вектор Эйлера (другое название — вектор ориентации), определяющий пространственный поворот ($\vec{\vartheta} = \vec{\vartheta}_I = \vec{\vartheta}_E$; $\vartheta = |\vec{\vartheta}|$ — модуль вектора);

i — обычная скалярная мнимая единица ($i^2 = -1$);

$\bar{\Lambda}$ — комплексно-сопряженный кватернион ($i \to -i$).

Более подробно используемые обозначения объясняются в работе [2], основным результатам которой посвящена настоящая статья.

Бросается в глаза неоднородность выписанной системы уравнений в смысле используемого математического аппарата: используются как векторные, так и кватернионные уравнения. Формально нетрудно привести все уравнения к векторному виду: надо только записать уравнение (2) в векторном виде (получится известная из теории конечного поворота формула) и заменить кинематическое уравнение (3), используя векторный параметр (например, вектор Эйлера [3, с. 121, 256]). При этом, однако, формулы значительно усложняются, а кроме того, возникает вырождение в отдельных точках [4, с. 77]. С другой стороны, не представляет труда записать все уравнения в обычных кватернионах [4, с. 20, 96].

2.2. Уравнения инерциальной навигации в дуальных кватернионах

Уравнения (1) и (3) можно объединить в одно [3, с. 100], если использовать более сложную числовую систему — кватернионы с дуальными коэффициентами (они же — бикватернионы Клиффорда); при этом уравнение (2) удобно записать для проекции вектора $\vec{v}$ на движущуюся систему отсчета [3, с. 19]:

$$\frac{d\Lambda}{d\tau} = \frac{1}{2}\Lambda \circ (i\vec{\omega}_E + \varepsilon i\vec{v}_E), \qquad \frac{d\vec{v}_E}{d\tau} = \vec{a}_E + \vec{v}_E \times \vec{\omega}_E.$$

Здесь уже

$\Lambda = \exp(\varepsilon i\vec{r}/2) \circ \exp(i\vec{\vartheta}/2)$ обозначает бикватернион Клиффорда, определяющий пространственный поворот и следующий за ним пространственный перенос системы отсчета ($\vec{r} = \vec{r}_I$, $\vec{\vartheta} = \vec{\vartheta}_I$, индексы опущены; $\varepsilon\vec{v}_I = \Lambda \circ \varepsilon\vec{v}_E \circ \bar{\Lambda}$);

ε — множитель Клиффорда ($\varepsilon^2 = 0$).

Данная система уравнений эквивалентна системе, выписанной в предыдущем пункте. Оператор Λ стал сложнее, но уравнений стало меньше: осталось только два уравнения, которые можно записать в бикватернионах Клиффорда.

3. Релятивистские уравнения инерциальной навигации

При записи релятивистских уравнений инерциальной навигации удобно вместо вектора скорости $\vec{v}$ использовать другой вектор — параметр скорости $\vec{\psi}$ (гиперболический угол поворота, быстрота), который связан с вектором $\vec{v}$ формулой: $\vec{v} = \operatorname{th}\vec{\psi} = (\vec{\psi}/\psi)\operatorname{th}\psi$, где ψ, как обычно, модуль вектора $\vec{\psi}$. Рассмотренные в предыдущем разделе нерелятивистские уравнения инерциальной навигации получаются предельным переходом (при $\psi \to 0$) из релятивистских уравнений, которые обсуждаются ниже[1)].

3.1. Уравнения инерциальной навигации в комплексных кватернионах

Уравнения (2) и (3) можно заменить одним релятивистским [2], если использовать кватернионы с комплексными коэффициентами (бикватернионы Гамильтона). Потребует замены на релятивистский аналог и уравнение (1):

$$\frac{d\mathrm{R}}{d\tau} = \Lambda \circ \bar{\Lambda}, \qquad \frac{d\Lambda}{d\tau} = \frac{1}{2}\Lambda \circ (\vec{a} + i\vec{\omega}).$$

Здесь

$\mathrm{R} = t + \vec{r}$ — 4-вектор (его компоненты измерены в I, индексы опущены; подробнее см. [2]), связывающий начала отсчета неподвижной (I) и движущейся (E) систем отсчета;

$d\mathrm{R}/d\tau = \Lambda \circ \bar{\Lambda} = e^{\vec{\psi}} = \operatorname{ch}\psi + \operatorname{sh}\vec{\psi} = (1 + \vec{v})/\sqrt{1 - v^2}$ — 4-скорость начала отсчета системы E относительно I (скорость света считается равной единице по абсолютной величине);

$\Lambda = \exp(\vec{\psi}/2) \circ \exp(i\vec{\vartheta}/2)$ — нормированный бикватернион Гамильтона, определяющий преобразование поворота пространства-времени, разложенное на пространственный поворот и следующий за ним буст (переход к движущейся с постоянной скоростью системе отсчета), $\vec{\psi} = \vec{\psi}_I$, $\vec{\vartheta} = \vec{\vartheta}_I$;

---

1) Подчеркнем, что нерелятивистские уравнения получаются в пределе $\psi \to 0$ (с отбрасыванием членов выше первого порядка по малому параметру), но не являются частным случаем релятивистских уравнений, так как полагая $\psi = 0$ нельзя получить из релятивистских уравнений инерциальной навигации систему соответствующих нерелятивистских уравнений.

$\vec{a}$ и $\vec{\omega}$ — измеряются в E, индексы опущены.

Таким образом, релятивистские уравнения инерциальной навигации можно записать в виде двух уравнений в бикватернионах Гамильтона.

3.2. Уравнение инерциальной навигации в обобщенных кватернионах

Наконец, уравнения инерциальной навигации можно записать [2] в виде одного уравнения, если перейти к кватернионам с комплексно-дуальными коэффициентами (обобщенным кватернионам):

$$\frac{d\Lambda}{d\tau} = \frac{1}{2}\Lambda \circ \left(\vec{a} + i\vec{\omega} + \varepsilon i\bar{\Lambda} \circ \Lambda\right).$$

Здесь уже

$\Lambda = e^{\varepsilon i(t+\vec{r})/2} \circ e^{\vec{\psi}/2} \circ e^{i\vec{\vartheta}/2}$ — обобщенный кватернион, определяющий преобразование, переводящее, в частности, систему I в E. Он разложен на пространственный поворот, буст (лоренцев поворот) и параллельный перенос во времени и в пространстве (все преобразования заданы параметрами, отнесенными к системе отсчета I; выполняются в указанной последовательности[2)]).

Это уравнение эквивалентно (для интересующих нас начальных условий) системе из двух уравнений, выписанных в предыдущем пункте. Тем не менее, анализ групповых свойств преобразований в рамках обобщенных кватернионов приводит к интересным результатам, которые нельзя получить, оставаясь в рамках бикватернионов Гамильтона или бикватернионов Клиффорда[3)].

4. Кватернионная теория пространства-времени

Преобразование перехода к связанной системе отсчета, записанное в предыдущем пункте в виде обобщенного кватерниона, состоит из четырех элементарных преобразований систем отсчета — одного скалярного и трех векторных. Нас будет интересовать общий вид формул сложения однотипных векторных преобразований и перестановочных формул для преобразований разных типов[4)].

Два последовательных переноса дают снова перенос:

$$e^{\varepsilon i\vec{r}_2/2}e^{\varepsilon i\vec{r}_1/2} = e^{\varepsilon i\vec{r}/2};$$

порядок множителей не важен (поэтому знак “$\circ$” может быть опущен), в результате тривиальных выкладок получим обычную формулу сложения векторов ($\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{r}_2$).

Два поворота дают поворот:

$$e^{i\vec{\vartheta}_2/2} \circ e^{i\vec{\vartheta}_1/2} = e^{i\vec{\vartheta}/2};$$

порядок важен (некоммутативность пространственных поворотов), формула связи параметров составляющих и результирующего поворотов известна из теории конечных поворотов [3, с. 229].

[2)] Допустима и другая интерпретация, с обратной последовательностью выполнения элементарных преобразований [2].

[3)] Если, конечно, не рассматривать эквивалентные обобщенным кватернионам объекты типа “пара комплексных кватернионов” или “набор из шестнадцати вещественных чисел” с определенными законами сложения и умножения, “матрицы” специального вида и т.п..

[4)] Перенос во времени (скаляр) коммутирует со всеми другими преобразованиями (в развиваемой нами теории) и далее не рассматривается.

Лоренцевы повороты (бусты), как известно [5, с. 134; 6, с. 403], незамкнуты:

$$e^{\vec{\psi}_2/2} \circ e^{\vec{\psi}_1/2} = e^{i\vec{\vartheta}/2} \circ e^{\vec{\psi}/2};$$

в общем случае помимо буста появляется еще и пространственный поворот. Вывод формул связи параметров довольно громоздкий, но требует только элементарной тригонометрии. Заметим, что в нерелятивистской механике (группа Галилея) скорости складываются как обычные векторы (правило параллелограмма) и никакого пространственного поворота при переходе к движущимся системам отсчета получить нельзя.

Теперь рассмотрим в общем виде формулы, позволяющие менять местами преобразования разных типов.

Поворот при перестановке с переносом инвариантен:

$$e^{\varepsilon i\vec{r}/2} \circ e^{i\vec{\vartheta}/2} = e^{i\vec{\vartheta}/2} \circ e^{\varepsilon i\vec{r}\,'/2},$$

а направление переноса в общем случае изменяется.

Точно так же поворот инвариантен и при перестановке с бустом:

$$e^{\vec{\psi}/2} \circ e^{i\vec{\vartheta}/2} = e^{i\vec{\vartheta}/2} \circ e^{\vec{\psi}\,'/2},$$

а направление скорости в общем случае изменяется.

Совершенно неожиданное[5)] явление возникает при попытке переставить местами пространственный параллельный перенос и буст. Оказывается, что в общем случае этого сделать нельзя, так как приходится вводить новое преобразование, физическая интерпретация которого не найдена. Допустимо только формально исследовать перестановочные формулы этого преобразования с уже известными. Перестановочная формула имеет вид (скорость не изменяется):

$$e^{\vec{\psi}/2} \circ e^{\varepsilon i\vec{r}/2} = e^{\varepsilon i\vec{r}\,'/2} e^{\varepsilon\vec{\varphi}/2} \circ e^{\vec{\psi}/2}.$$

В отношении коммутационных свойств преобразования типа $\exp(\varepsilon\vec{\varphi}/2)$ аналогичны параллельным переносам: перестановочны друг с другом (и с переносами), изменяются при перестановке с пространственным поворотом и требуют преобразования третьего типа (в данном случае — переноса) при перестановке с бустом (полностью основные формулы приведены в [2]).

Отметим важность полученного результата.

Как известно, специальная теория относительности (СТО) — это теория пространства-времени, в основе которой лежит 10-параметрическая группа Пуанкаре (неоднородная группа Лоренца). Но нами показано, что если использовать аппарат комплексно-дуальных кватернионов[6)] и естественным образом ввести преобразования, соответствующие десяти параметрам группы Пуанкаре (одно скалярное и три векторных), то получим не 10-, а 13-параметрическую группу (появляется еще одно векторное преобразование). Таким образом, мы работаем уже не в рамках специальной теории относительности, а в рамках "кватернионной теории пространства-времени".

В работе [2] показана возможность последовательного и непротиворечивого построения на основе алгебры обобщенных кватернионов соответствующей геометрии (отличной от 4-мерной псевдоевклидовой, т. е. пространства Минковского) и соответствующей физической теории пространства-времени (отличной от СТО).

[5)] Очевидно, потому, что просто не было до сих пор известно. Ср. с *"мутацией и прецессией сдвигов"* в работе Е. А. Каратаева "Полуточка" (http://karataev.nm.ru/pt/file5.html).

[6)] Принципиальным является отождествление кватернионного умножения с композицией преобразований.

Это нисколько не противоречит совпадению многих формул (уравнений) кватернионной теории пространства-времени с известными формулами СТО (или механики Ньютона), поскольку фундаментальная группа обсуждаемой теории содержит в качестве подгруппы 6-параметрическую группу Лоренца (а также 6-параметрическую группу движений евклидова 3-мерного пространства). Однако, в этой группе (в общем случае комплексно-дуальные кватернионы допускают расширение изучаемой нами группы до 16-параметрической непрерывной группы преобразований) нет 10-параметрической подгруппы, изоморфной 10-параметрической группе Пуанкаре специальной теории относительности.

В работе [2] также выведены (на основе развитого общего метода) уравнения инерциальной навигации, соответствующие кватернионной теории пространства-времени, которые (естественно) могут быть записаны[7)] в виде одного уравнения в обобщенных кватернионах:

$$\frac{d\Lambda}{d\tau} = \frac{1}{2}\Lambda \circ (\vec{a} + i\vec{\omega} + \varepsilon i), \qquad \text{где} \qquad \Lambda = e^{\varepsilon i(t+\vec{r})/2} \circ e^{\vec{\psi}/2} \circ e^{i\vec{\vartheta}/2}$$

и все обозначения соответствуют обозначениям пункта, в котором выписано релятивистское уравнение инерциальной навигации в обобщенных кватернионах. Но в отличие от уравнения, полученного в СТО, уравнение, полученное в кватернионной теории, в пределе $\psi \to 0$ не соответствует известным нерелятивистским уравнениям инерциальной навигации. Более того, из выписанного уравнения вытекает абсурдный результат: объект не двигается с места несмотря на ненулевую начальную скорость и наличие кажущегося ускорения. Тем самым доказана[8)] ошибочность кватернионной теории пространства-времени, рассматриваемой как физическая теория.

Подробности доказательства физической несостоятельности кватернионной теории пространства-времени в общем случае и описание области применимости кватернионной теории как физической теории изложены в работе [2]. Здесь же еще раз кратко (аксиоматически) взглянем на тот путь, который привел к этой теории. Сформулируем следующие четыре требования (условия, аксиомы):

1) переносы следует описывать числами вида $\exp(\varepsilon i\vec{r}/2)$;

2) бусты следует описывать числами вида $\exp(\vec{\psi}/2)$;

3) при сложении (перестановке) преобразований, описываемых числами, следует использовать умножение этих чисел в качестве закона композиции преобразований;

4) преобразования пространства-времени (в том числе переносы, бусты и их композиции) следует описывать, оставаясь в рамках группы Пуанкаре.

Эти требования несовместны, то есть принятие всех четырех ведет к логическому противоречию. Но любые три из четырех указанных требований совместны, причем при отказе от одного из первых трех условий получается одна из формулировок специальной теории относительности, а при отказе от четвертого — кватернионная теория пространства-времени. Обратим также внимание читателей журнала "Гиперкомплексные числа в геометрии и физике" на иное (теоретико-групповое, а не гиперкомплексное) направление развития физически состоятельной теории, связанное с расширением группы Пуанкаре [1].

[7)] Приведенные выше нерелятивистские уравнения инерциальной навигации, как оказалось, тоже могут быть записаны в виде одного уравнения в комплексно-дуальных кватернионах. Соответствующая статья автора рассматривается в журнале "Гироскопия и навигация".

[8)] Появление "лишнего" преобразования в теории само по себе еще не могло служить таким доказательством.

5. Заключение

Область применения кольца обобщенных кватернионов[9] как простейшего алгебраического объекта, тесно связанного со структурой пространства-времени, не следует ограничивать только инерциальной навигацией [7–34][10].

Благодарности. Автор признателен рецензентам журнала "Космические исследования" (Ю. Н. Челноков, В. Ф. Журавлев, В. Н. Бранец, В. Н. Платонов) и анонимным рецензентам журналов "Успехи физических наук", "Известия РАН. Теория и системы управления", "Теоретическая и математическая физика" за внимание к работе, а также редакциям указанных журналов за организацию ее конструктивного обсуждения.

Литература

[1] *В. Ф. Чуб.* Космич. исследования. 2007. Т. 45. № 2. С. 189.

[2] *В. Ф. Чуб.* Изв. АН. МТТ. 2002. № 6. С. 3.

[3] *В. Н. Бранец, И. П. Шмыглевский.* Введение в теорию бесплатформенных инерциальных навигационных систем. М.: Наука, 1992.

[4] *С. М. Онищенко.* Применение гиперкомплексных чисел в теории инерциальной навигации. Автономные системы. Киев: Наукова думка, 1983.

[5] *А. Пуанкаре.* О динамике электрона. В сб.: Принцип относительности. Сборник работ по специальной теории относительности. /Сост. А. А. Тяпкин. М.: Атомиздат, 1973. С. 118.

[6] *Ч. Мизнер, К. Торн, Дж. Уилер.* Гравитация. Т. 3. М.: Мир, 1977.

[7] *Г. А. Зайцев.* О связи теории относительности с теорией групп. В кн.: М.-А. Тоннела. Основы электромагнетизма и теории относительности. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. С. 447.

[8] *А. В. Березин, Ю. А. Курочкин, Е. А. Толкачев.* Кватернионы в релятивистской физике. Минск: Наука и техника, 1989.

[9] *У. Р. Гамильтон.* Избранные труды: Оптика. Динамика. Кватернионы. М.: Наука, 1994.

[10] *В. П. Визгин.* "Эрлангенская программа" и физика. М.: Наука, 1975.

[11] *Б. А. Розенфельд.* История неевклидовой геометрии. Развитие понятия о геометрическом пространстве. М.: Наука, 1976.

[12] *А. Н. Вяльцев.* Дискретное пространство-время. М.: Наука, 1965.

[13] *М. В. Синьков, Н. М. Губарени.* Непозиционные представления в многомерных числовых системах. Киев: Наукова думка, 1979.

[14] *Р. Фейнман.* Характер физических законов. М.: Наука, 1987.

[15] *М. Б. Балк, Г. Д. Балк, А. А. Полухин.* Реальные применения мнимых чисел. Киев: Радянська школа, 1988.

[16] *П. А. Лебедев.* Кинематика пространственных механизмов. М.; Л.: Машиностроение, 1966.

[17] *И. Лакатос.* Вопросы философии. 1995. № 4. С. 135.

[18] *Ф. Клейн.* Лекции о развитии математики в XIX столетии. Т. 2. Москва; Ижевск: Ин-т компьютер. исслед., 2003.

[19] *В. В. Кассандров.* Алгебродинамика: кватернионный код вселенной. В сб.: Метафизика. Век XXI. /Ред. Ю. С. Владимиров. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006. С. 142.

[20] *М. А. Микаэлян.* Докл. АН. 2005. Т. 400. № 2. С. 173.

---

[9] Устоявшегося названия для комплексно-дуальных кватернионов нет; в работах разных авторов используется различная терминология.

[10] Недавно вышло второе издание книги [8] (см. УФН. 2003. Т. 173. № 10. С. 1151); эпиграфы к статье взяты из [15, с. 197, 201] и [18, с. 50]; в монографиях [24, 30] приведен обзор литературы по применению кватернионов и бикватернионов в современной механике и теории управления.

[21] *А. П. Ефремов.* Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. 2004. № 1 (1). С. 111.

[22] *В. Ф. Чуб.* Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. 2005. № 2 (4). С. 153[11].

[23] *А. В. Коганов.* Белая рамка на черном фоне (Смирительный опус для прошедших через "Гимн Квадрату"). В сб.: Языки науки — языки искусства. Сб. науч. трудов. VII международная конференция "Нелинейный мир". Суздаль–2002. /Ред. З. Е. Журавлева. Москва; Ижевск: Ин-т компьютер. исслед., 2004. С. 330.

[24] *В. В. Маланин, Н. А. Стрелкова.* Оптимальное управление ориентацией и винтовым движением твердого тела. Москва; Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2004.

[25] *П. Д. Крутько.* Изв. АН. ТиСУ. 2004. № 1. С. 5.

[26] Комплекснозначные и гиперкомплексные системы в задачах обработки многомерных сигналов. /Ред. Я. А. Фурман. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.

[27] *И. И. Попов, А. Н. Леухин.* Изв. РАН. Сер. Физическая. 2004. Т. 68. № 9. С. 1305.

[28] *А. Н. Леухин.* Космонавтика и ракетостроение. 2005. № 2. С. 148.

[29] *В. Н. Бранец.* Космонавтика и ракетостроение. 2005. № 4. С. 122.

[30] *Ю. Н. Челноков.* Кватернионные и бикватернионные модели и методы механики твердого тела и их приложения. Геометрия и кинематика движения. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006.

[31] *В. Ф. Чуб.* Изв. РАН. МТТ. 2006. № 5. С. 3.

[32] *Н. В. Александрова.* Из истории векторного исчисления. М.: Изд-во МАИ, 1992.

[33] *И. В. Новожилов.* Знание — сила. 1995. № 12. С. 48.

[34] *Р. А. Аронов.* Вопросы философии. 2007. № 7. С. 63.

Inertial navigation equations and the quaternion space-time theory

V. F. Chub

Korolev Rocket-Space Corporation "Energiya", Russia

The comparative analysis of relativistic and nonrelativistic inertial navigation equations in space free of gravitational field was performed in review. In order to represent the equations, the use is made of the quaternions with real, dual, complex and complex-dual factors. Within the theory based upon the quaternions with complex-dual factors (the quaternion space-time theory) it was demonstrated that the transformations forming in the context of a special relativity theory Poincare group and in the context of classical Newton mechanics Galilei group were open. The inertial navigation equation consistent with the quaternion space-time theory was given and its absurdity was noted.

[11] Пользуясь случаем укажем замеченные в [22] опечатки: по всей статье отсутствует выделение векторов, обозначенных греческими буквами, и пропущен номер журнала № 5 в ссылке [4].