О ПОСТРОЕНИИ АНАЛОГА МНОЖЕСТВА МАНДЕЛЬБРОТА НА ПЛОСКОСТИ ДВОЙНЫХ ЧИСЕЛ

Д. Г. Павлов

Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана
geom2004@mail.ru

М. С. Просандеева, В. А. Панчелюга

Институт теоретической и экспериментальной биофизики РАН, г. Пущино
panvic333@yahoo.com

В работе приведен пример построения аналога множества Мандельброта на плоскости двойных чисел. Продемонстрирована нетривиальная структура полученного множества, что дает надежду на то, что с ним, как и с обычным множеством Мандельброта на комплексной плоскости C, может быть связана своя, физически содержательная нелинейная динамика. Указаны аналогии между полученным множеством и множеством Мандельброта на C.

1. Введение

Поведение любой динамической системы может быть рассмотрено как последовательность переходов согласно некоторому закону из начального состояния в конечное, которое затем рассматривается как новое начальное, переходящее в конечное и т. д. В другой форме этот процесс может быть представлен в виде системы с обратной связью, в которой одна и та же операция выполняется многократно по тому же закону перехода, что и в предыдущем случае, и при этом, результат предыдущей итерации является начальным значением следующей и т. д.

Для линейных законов перехода поведение системы полностью детерминировано, в то время как для нелинейных оно становится очень сложным и, зачастую, полностью непредсказуемым, хаотичным. Даже для классической механики, в этом случае, устойчивое регулярное движение, скорее исключение, чем правило [1].

Общепризнано, что первой математической моделью, выявившей подобные особенности нелинейной динамики, была модель роста численности популяции, сформулированная в 1845 г. П. Ф. Ферхюльстом. Введенное в эту модель ограничение на рост привело к нелинейной связи между численностью в последовательные моменты времени и привело к очень сложному поведению модели, одной из важнейших характеристик которого служил сценарий перехода к хаосу [2].

Кроме сценария перехода к хаосу, характерного для процесса Ферхюльста существуют и другие. В связи с чем, возникла задача установить принципы, характеризующие соотношения между индивидуальными сценариями. Это удалось Б. Мандельброту в 1980 г., когда он обнаружил множество, впоследствии названное его именем. Работа Б. Мандельброта позволила описать процесс перехода от порядка к хаосу с более общей точки зрения [2].

Идея, обеспечившая успех работе Мандельброта, состояла в том, чтобы от действительных чисел R перейти к комплексным C и наблюдать процесс не на прямой, а на плоскости. Такой переход не только позволил решить задачи, трудно решаемые в R, но породил целое направление исследований – комплексную динамику.

Но, как известно, у множества комплексных чисел есть "двойник" – гиперболические (двойные) числа H_2, с той разницей, что вместо евклидовой плоскости их естественной "средой обитания" оказывается псевдоевклидова плоскость или другими словами двухмерное пространство-время. В то время как в качестве расширения C обычно рассматривается некоммутативная алгебра кватернионов Q, для H_2 естественным расширением является коммутативная алгебра H_4 [4]. Коммутативность алгебр C, H_2, H_4, да и вообще, H_n, – во многом предопределяет разнообразие множества аналитических функций соответствующих переменных, а те в свою очередь жестко связаны с разнообразием группы конформных отображений. При этом, коммутативно-ассоциативные гиперкомплексные числа H_n органично связаны с нетривиальными финслеровыми геометриями с метрикой Бервальда-Моора и видятся, возможно, не менее перспективными с точки зрения физических приложений, чем обычные комплексные числа [4].

В свете сказанного можно надеяться, что с H_n также как и с C может быть связан свой тип нелинейной динамики. Настоящая работа представляет собой попытку сделать шаг в направлении исследования такого рода динамики и ставит перед собой цель проиллюстрировать построение аналога множества Мандельброта на множестве двойных чисел H_2.

2. Алгоритм построения аналога множества Мандельброта на H_2

Как и в случае множества Мандельброта на C, будем рассматривать квадратичное отображение:

$$z_{n+1} = z_n^2 + c, \tag{1}$$

где $z = x + iy$ и $c = p + iq$ – двойные числа, т. е., $i^2 = 1$. Выражение (1) задает последовательность, поведение которой зависит от начальной точки z_0 и параметра c. После разделения действительной и мнимой частей в (1) получим:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n^2 + y_n^2 + p \\ y_{n+1} = 2x_n y_n + q \end{cases} \tag{2}$$

Выражение (2) можно рассматривать, как координаты точки, задаваемой (1) на плоскости H_2.

Считается, что в случае, если параметр c фиксирован, $c = const$, и изменяется z_0 мы получаем множество Жюлиа, J, а если фиксировать начальную точку отображения $z_0 = 0$ и изменять параметр c – множество Мандельброта, M [5]. Критерий принадлежности точки $c(p,\ q)$ к M, который был предложен Жюлиа и использовался Мандельбротом для компьютерных вычислений, следующий: $c \in M$ тогда и только тогда, когда $z_0 = 0$ (т. н. "критическая точка") не стремится к бесконечности [6]. Другими словами, M – это множество значений c, для которых последовательность (1) остается ограниченной, если ее начальная точка равна нулю, $z_0 = 0$ [5]. Согласно другому определению, множество Мандельброта – это такое множество значений c, для которых J связно [6]. Оба эти определения эквивалентны, как было доказано Фату и Жюлиа в 1919 г. В дальнейших построениях мы будем исходить из первого определения, а также использовать символы M^d и J^d для аналогов множеств Мандельброта и Жюлиа на H_2.

Результаты, приведенные ниже, рассчитывались, согласно следующему алгоритму. Для построения M^d выбиралась решетка параметров $c \in H_2$, затем для каждого c находилось время убегания T точки $z_0 = 0$, как первое значение $n + 1$, для которого z_{n+1} имеет модуль больше некоторого заданного радиуса $R0$:

$$T = n + 1|_{|z_{n+1}|^2 > R_0}\,, \tag{3}$$

где $|z_{n+1}|^2$ – модуль двойного числа z_{n+1}:

$$|z_{n+1}|^2 = z_{n+1}z'_{n+1} = x_{n+1}^2 - y_{n+1}^2. \tag{4}$$

Штрихом в (4) обозначена операция комплексного сопряжения: $z' = x - iy$. В случае если по истечении некоторого, наперед заданного, максимального числа итераций N величина $|z_{n+1}|^2$ не превышала $R0$ то считалось, что для данного значения c последовательность (1) является ограниченной и полагалось $T = 0$. Такие c считались принадлежащими M^d и для них фиксировалась величина $|z_{n+1}|^2$.

По определенным правилам, на которых мы не будем останавливаться в настоящей статье, каждой точке $c \notin M^d$ присваивался свой цвет в зависимости от величины T. Точки $c \in M^d$, раскрашивались в зависимости от значения $|z_{n+1}|^2$.

3. Результаты вычислений $M\ d$ на H_2

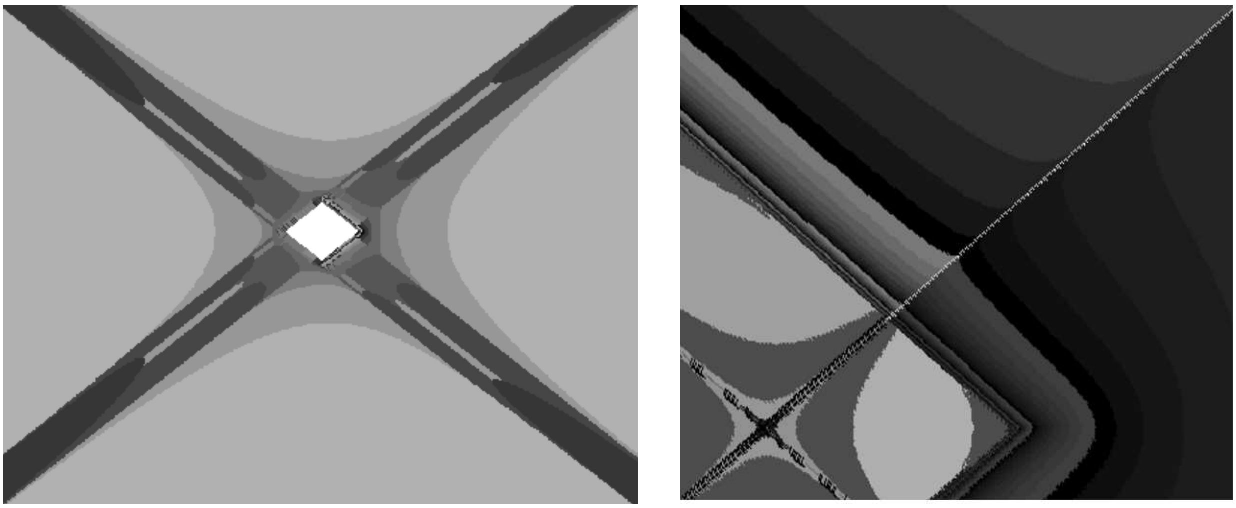

Рис. 1: Множество M^d на H_2, (показано белым цветом), *а*); увеличенный фрагмент (правый угол) аналога множества Мандельброта на H_2, *б*).

На рис. 1 показаны результаты построения аналога множества Мандельброта на плоскости двойной переменной. На рис. 1 *а*) множество M^d показано белым цветом, как маленький квадрат в центре рисунка. Оттенки серого показывают величину T, которая может рассматриваться как скорость ухода точки на бесконечность. Цель данного рисунка – дать представление об окрестностях M^d.

Рис. 1 *б*) показывает увеличенный правый угол множества M^d. В отличие от рис. 1 *а*) здесь предпринята попытка раскраски также и самого аналога множества Мандельброта, показывающая, что множеству присуща некоторая внутренняя структура. Характерным отличием H_2 от C является наличие делителей нуля, которые показаны на рис. 1 *б*) диагональю, уходящей в правый верхний угол рисунка и, пересекающей ее под прямым углом, линией в нижнем левом углу рис. 1 *б*). Обращает на себя внимание подобие фигуры, образованной линиями делителей нуля на рис. 1 *б*) с фигурой на рис. 1 *а*). Точки $c \notin M^d$ (рис. 1 *б*) находящиеся выше диагонали уходят на минус бесконечность, ниже диагонали – на плюс бесконечность.

Общим местом в получении фрактальных изображений, является очень сильная зависимость конечного результата, от метода которым сопоставляются различные цвета элементам исходного множества. На рис. 2 представлены только точки $c \in M^d$, т. е., собственно аналог множества Мандельброта на H_2, для которого использован несколько

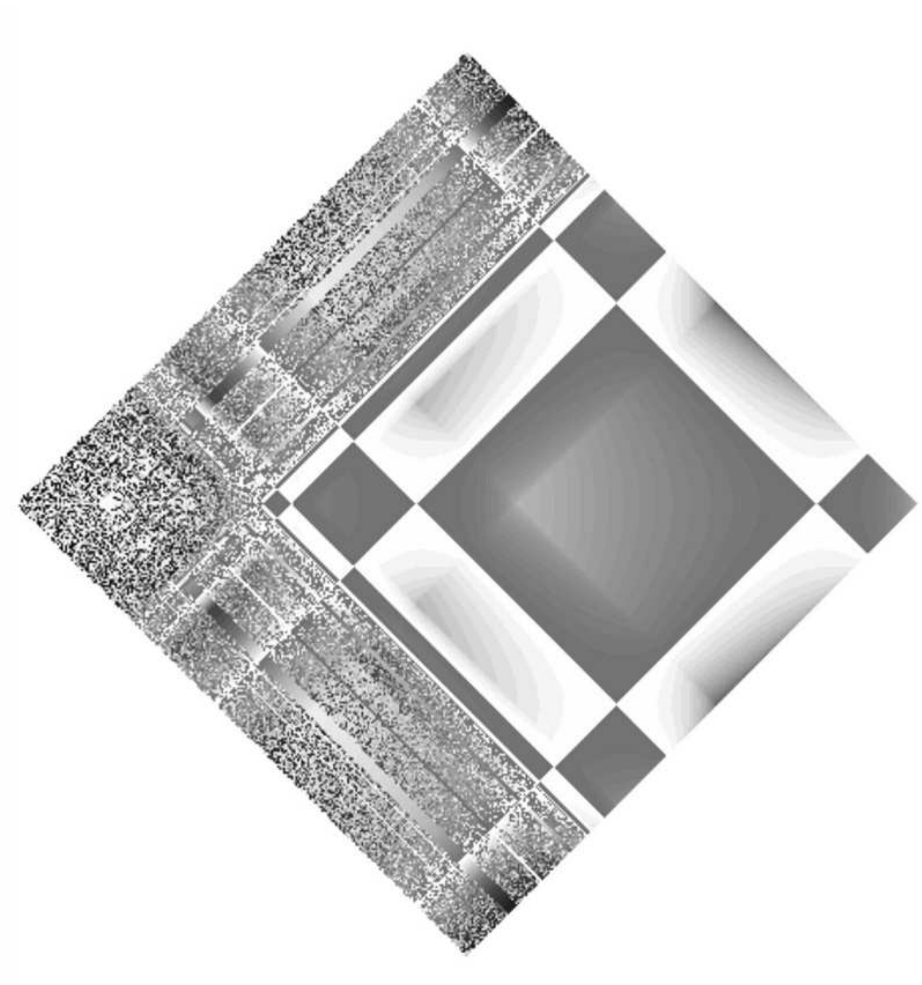

Рис. 2: Аналог множества Мандельброта для H_2.

иной способ раскраски, чем для M^d на рис. 1 *б*). Также, на этом рисунке не предпринималось специальных мер для визуализации делителей нуля, хотя соответствующие им линии хорошо просматриваются.

Кроме делителей нуля, вторым существенным отличием H_2 от C, являются отрицательные значения $|z_{n+1}|^2$. На рис. 2 более темные области соответствуют положительным значениям $|z_{n+1}|^2$. Более светлая раскраска этих областей отвечает большим значениям $|z_{n+1}|^2$, более темная – меньшим. Соответственно, более светлые области на рис. 2, соответствуют отрицательным значениям $|z_{n+1}|^2$. Для этих областей более светлая раскраска означает меньшие, по абсолютной величине, значения $|z_{n+1}|^2$, более темная – большие.

Уже с первого взгляда на M^d можно увидеть некоторые аналогии с множеством Мандельброта на комплексной плоскости. Основной лейтмотив M на C – многократно повторяющаяся окружность, для M^d на H_2 – это прямоугольные области, причем, отрицательные (светлые) области находятся в шахматном порядке с положительными (тёмными). Внутри каждой окружности для M на C можно построить множества уровня [2], имеющие вид концентрических полос. Для Md на H_2 таким аналогом являются пирамидальные структуры, хорошо различимые внутри каждой из прямоугольных областей на рис. 2. Для наглядности, рис. 3 показывает увеличенную область центрального квадрата, рис. 2, содержащую такую пирамидальную структуру. Стрелками показаны направления роста $|z_{n+1}|^2$. Светлая область в месте предполагаемого пересечения стрелок – "вершина" – область максимума $|z_{n+1}|^2$.

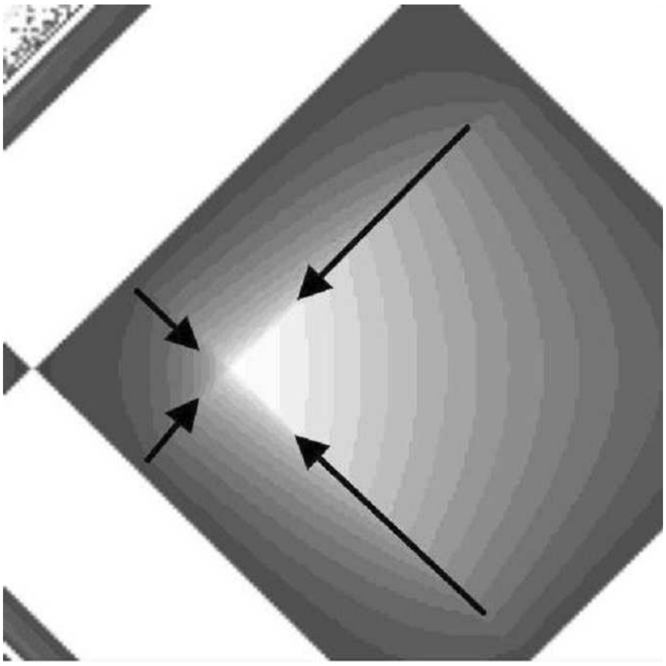

Рис. 3: Увеличенный фрагмент M^d, показывающий наличие пирамидальных структур.

Все прямоугольные области на рис. 2 подобны, независимо от их размера. При этом, каждая из таких областей содержит пирамидальную структуру, подобную показанной на рис. 3.

4. Заключение

Не оставляет сомнений чрезвычайно сложная структура множества M^d, которая, судя по рис. 2, потребует не менее длительного и тщательного изучения чем структура множества M на C. Приведенные в настоящей работе рисунки и краткие к ним описания ни в коей мере не претендуют на полноту и законченность. Они преследуют единственную цель – показать, что аналог множества Мандельброта на H_2 обладает интересной и нетривиальной структурой, которая заслуживает быть объектом дальнейших тщательных исследований и ждет своих, возможных физических интерпретаций.

В данной статье мы не привели примеры аналогов множеств Жюлиа для H_2, которые были нами построены, как и не касались "заснеженных" областей, окаймляющих центральную часть M^d слева вверху и внизу, рис. 2. Все это, как и более детальное исследование показанного на рис. 1–3 аналога множества Мандельброта на плоскости двойных чисел, предмет наших последующих публикаций.

Литература

1. Г. Шустер. Детерминированный хаос. М., Мир, 1988, 240 с.

2. Х.-О. Пайтген, П. Х. Рихтер. Красота фракталов. Образы комплексных динамических систем. М., Мир, 1993, 176 с.

3. Д. Г. Павлов. Обобщение аксиом скалярного произведения. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 1, Vol. 1, 2004, с. 5–19.

4. Г. И. Гарасько. Теория поля и финслеровы пространства. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 6, Vol. 3, 2006, с. 6–20.

5. А. Дуади. Множество Жюлиа и множество Мандельброта. // В книге [2] с. 141–153.

6. Б. Мандельброт. Фракталы и возрождение теории итераций. // В книге [2] с. 131–140.