О РЕЛЯТИВИСТСКИХ УРАВНЕНИЯХ В ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ БЕРВАЛЬДА-МООРА

Р. Г. Зарипов

Институт механики и машиностроения КазНЦ РАН, Казань, Россия
zaripov@mail.knc.ru

Приводятся новые свойства системы квадрачисел с коммутативной операцией векторного произведения трехмерных векторов. Даются релятивистские уравнения четвертого порядка для скалярной волновой функции в случае свободной частицы и находящейся в электромагнитном поле. Изучается представление алгебры квадрачисел недиагональными матрицами порядка четыре. Получены четыре линейных релятивистских уравнения первого порядка для четырех четырех-компонентных волновых функций, описывающие поведение свободных частиц в пространстве-времени Бервальда-Моора в случае чистого ансамбля квантовых систем. Собственные значения энергии частицы не вырождаются для данного значения импульса.

1. Введение

Благодаря теоретическим исследованиям, выполненным главным образом за последние годы, быстро развивается финслерова локального полностью анизотропного пространства-времени с метрической функцией Бервальда-Моора

$$
\begin{gathered}
F = [c^4dt^4 + dx^4 + dy^4 + dz^4 - \\
-2\left(c^2dt^2dx^2 + c^2dt^2dy^2 + c^2dt^2dz^2 + dx^2dy^2 + dy^2dz^2 + dz^2dx^2\right) + 8cdtdxdydz]^{1/4} = \\
= [(cdt + dx + dy + dz)(cdt - dx + dy - dz)(cdt + dx - dy - dz)(cdt - dx - dy + dz)]^{1/4} = \\
= \left(\varepsilon_{1234} H_i^1 H_j^2 H_k^3 H_l^4 dx^i dx^j dx^k dx^l\right)^{1/4} = \left(\tfrac{1}{4!}\varepsilon_{abcd} H_i^a H_j^b H_k^c H_l^d dx^i dx^j dx^k dx^l\right)^{1/4},
\end{gathered}
\tag{1.1}
$$

имеющей четыре различных характеристики для сигнала, и соответствующая алгебра коммутативно-ассоциативных квадрачисел. Здесь $dx^i = (cdt, d\mathbf{x})$, H_i^a есть матрица Адамара порядка четыре со свойством $H_i^a H_a^j = 4\delta_i^j$ и четырехмерным символом Кронекера δ_i^j. Символ ε_{abcd} есть абсолютно симметричный символ со свойством $\varepsilon_{abcd} = 1$ если $a \neq b \neq c \neq d$, остальные значения нулевые. Полная библиография работ дается в выпусках специального журнала "Гиперкомплексные числа в геометрии и физике", в сборнике [1] и на сайте http://www.polynumbers.ru.

Псевдоевклидово локальное изотропное пространство-время Минковского является подпространством в геометрии с метрической функцией

$$
\begin{gathered}
F = \left[\left(c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2\right)^2\right]^{1/4} = \left[\left(cdt - |d\mathbf{x}|\right)^2\left(cdt + |d\mathbf{x}|\right)^2\right]^{1/4} = \\
= \left[\left(\tfrac{1}{4}\right)^2 H_i^a \bar{H}_{aj} H_k^b \bar{H}_{bl} dx^i dx^j dx^k dx^l\right]^{1/4},
\end{gathered}
\tag{1.2}
$$

где $\bar{H}_{aj} = H_a^i g_{ij}$, метрический тензор $g_{ij} = (1, -1, -1, -1)$ $|d\mathbf{x}| = \left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right)^{1/2}$ и описывается алгеброй антикоммутативно-ассоциативных бикватернионов. Метрическая функция (1.2) имеет две различные характеристики для сигнала кратности два.

В общем случае метрическая функция записывается в известном виде

$$
F = \left(g_{ijkl} dx^i dx^j dx^k dx^l\right)^{1/4},
\tag{1.3}
$$

где тензоры $g_{ijkl} = \frac{1}{4!}\varepsilon_{abcd}H_i^a H_j^b H_k^c H_l^d$ и $g_{ijkl} = \left(\frac{1}{4}\right)^2 H_i^a \bar{H}_{aj} H_k^b \bar{H}_{bl} = \left(g_{ij}g_{kl} + g_{ik}g_{jl}\right)/2$ определяют метрические функции (1.1) и (1.2).

В отличие от пространства-времени Минковского, для которого известны релятивистские уравнения, для полностью анизотропного пространства-времени Бервальда-Моора уравнения, описывающие состояние частиц, неисследованы и нахождение их является целью настоящей работы.

2. Матрица Адамара и характеристические значения квадрачисла

Рассмотрим квадрачисло [2]

$$\mathbf{A} = \left(a^0, \mathbf{a}\right) = a^0 + a^i \mathbf{e}_i \tag{2.1}$$

с вещественными числами a^0 и a^i $(i = 1,\, 2,\, 3)$ и базисными элементами $\mathbf{e}_0 = 1$, $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$. Закон композиции базисных элементов определяется в виде

$$\mathbf{e}_i \circ \mathbf{e}_j = \delta_{ij}\mathbf{e}_0 + \varepsilon_{ij}^k \mathbf{e}_k \tag{2.2}$$

и имеет следующие свойства

$$\begin{gathered} \mathbf{e}_1^2 = \mathbf{e}_2^2 = \mathbf{e}_3^2 = 1, \\ \mathbf{e}_1 \circ \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2 \circ \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{e}_2 \circ \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_3 \circ \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}_3 \circ \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1 \circ \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_2. \end{gathered} \tag{2.3}$$

Здесь $\delta_{ij} = \delta_i^j = \delta^{ij}$ – трехмерный символ Кронекера и ε_{ij}^k есть трехмерный символ со свойством $\varepsilon_{ij}^k = 1$ при $i \neq j \neq k$, а остальные значения являются нулевыми и по повторяющимся индексам проводится суммирование. При перестановке любых двух индексов составляющие абсолютного симметричного символа $\varepsilon_{ijk} = \delta_{kr}\varepsilon_{ij}^r$ не меняются и справедливы равенства

$$\begin{gathered} \varepsilon_{kij} = \varepsilon_{kji} = \varepsilon_{ikj} = \varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{jki} = \varepsilon_{jik}, \\ \mathbf{e}_{ij} = \varepsilon_{ij}^k \mathbf{e}_k = \tfrac{1}{2}\left(\mathbf{e}_i \circ \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_j \circ \mathbf{e}_i\right), \quad \mathbf{e}_i \circ \mathbf{e}_j - \mathbf{e}_j \circ \mathbf{e}_i = 0, \\ \mathbf{e}_m \circ \mathbf{e}_{ij} = \varepsilon_{mij} + \delta_{mi}\mathbf{e}_j + \delta_{mj}\mathbf{e}_i, \\ \mathbf{e}_{ij} \circ \mathbf{e}_m = \varepsilon_{mij} + \delta_{mj}\mathbf{e}_i + \delta_{mi}\mathbf{e}_j. \end{gathered} . \tag{2.4}$$

Согласно (2.3), закон композиции числа (2.1) и $\mathbf{B} = b^0 + b^i \mathbf{e}_i$ дается соотношением

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \circ \mathbf{B} = \left(a^0 b^0 + a^i b^i\right) + \left(a^0 b^k + b^0 a^k + \varepsilon_{ij}^k a^i b^j\right) \mathbf{e}_k \tag{2.5}$$

и имеем значения компонент

$$c^0 = a^0 b^0 + \delta_{ij} a^i b^j, \quad c^k = a^0 b^k + b^0 a^k + \varepsilon_{ij}^k a^i b^j \tag{2.6}$$

Представим выражения (2.6) в векторной форме [3]

$$c^0 = a^0 b^0 + (\mathbf{ab})\,, \quad \mathbf{c} = a^0 \mathbf{b} + b^0 \mathbf{a} + \{\mathbf{ab}\}\,. \tag{2.7}$$

Новое произведение векторов $\{\mathbf{ab}\}_i = \varepsilon_{ikl} a^k b^l$ коммутативно, дистрибутивно относительно сложения, сочетательно относительно умножения на любое число, равно нулю при равенстве нулю одного из векторов.

Выпишем некоторые соотношения для произведений векторов [3]

$$
\begin{gathered}
\{\mathbf{ab}\} = \{\mathbf{ba}\}, \quad \{\mathbf{ab}\} + \{\mathbf{ac}\} = \{\mathbf{a}(\mathbf{b}+\mathbf{c})\}, \\
(\{\mathbf{ab}\}\mathbf{c}) = (\{\mathbf{ac}\}\mathbf{b}) = (\{\mathbf{ba}\}\mathbf{c}) = (\{\mathbf{bc}\}\mathbf{a}) = (\{\mathbf{ca}\}\mathbf{b}) = (\{\mathbf{cb}\}\mathbf{a}), \\
\{\mathbf{a}\{\mathbf{bc}\}\} - \{\mathbf{c}\{\mathbf{ba}\}\} = \mathbf{c}(\mathbf{ba}) - \mathbf{a}(\mathbf{bc}), \\
\mathbf{a}^2\mathbf{b}^2 + (\{\mathbf{aa}\}\{\mathbf{bb}\}) = (\mathbf{ab})^2 + \{\mathbf{ab}\}^2, \\
\{\mathbf{aa}\}_i = 2a^k a^l, \quad \{\mathbf{a}\{\mathbf{aa}\}\}_i = 2a^i\left[\left(a^k\right)^2 + \left(a^l\right)^2\right], \\
(\mathbf{a}\{\mathbf{aa}\}) = 6a^i a^j a^k, \quad (i \neq i \neq k), \\
\{\mathbf{a}\{\mathbf{a}\{\mathbf{aa}\}\}\} = \{\mathbf{aa}\}(\mathbf{aa}) - \tfrac{1}{3}\mathbf{a}(\mathbf{a}\{\mathbf{aa}\}).
\end{gathered}
\tag{2.8}
$$

Наряду с исходным числом $\mathbf{A}$ определяются еще три числа $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A} &= a^0 + a^1\mathbf{e}_1 + a^2\mathbf{e}_2 + a^3\mathbf{e}_3, & a^0 &= \tfrac{1}{4}(\mathbf{A} + \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_3), \\
\mathbf{A}_1 &= a^0 - a^1\mathbf{e}_1 + a^2\mathbf{e}_2 - a^3\mathbf{e}_3, & a^1\mathbf{e}_1 &= \tfrac{1}{4}(\mathbf{A} - \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_3), \\
\mathbf{A}_2 &= a^0 + a^1\mathbf{e}_1 - a^2\mathbf{e}_2 - a^3\mathbf{e}_3, & a^2\mathbf{e}_2 &= \tfrac{1}{4}(\mathbf{A} + \mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_3), \\
\mathbf{A}_3 &= a^0 - a^1\mathbf{e}_1 - a^2\mathbf{e}_2 + a^3\mathbf{e}_3, & a^3\mathbf{e}_3 &= \tfrac{1}{4}(\mathbf{A} - \mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_3).
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

Набор чисел (2.9) только постулируется, а не порождается известным способом, как в случае кватернионов. Действительное число [2]

$$
\begin{gathered}
|\mathbf{A}| = \sqrt[4]{\mathbf{A}\circ\mathbf{A}_1\circ\mathbf{A}_2\circ\mathbf{A}_3} = \\
= \left\{\left[(a^0)^2 - (a^1)^2 - (a^2)^2 + (a^3)^2\right]^2 - 4\left(a^1a^2 - a^0a^3\right)^2\right\}^{1/4} = \\
= \left[(a^0+a^1+a^2+a^3)(a^0-a^1+a^2-a^3)(a^0+a^1-a^2-a^3)(a^0-a^1-a^2+a^3)\right]^{1/4} =, \\
= \{(a^0)^4 + (a^1)^4 + (a^2)^4 + (a^3)^4 - 2\left[(a^0)^2(a^1)^2 + (a^0)^2(a^2)^2 + \right. \\
\left. + (a^0)^2(a^3)^2 + (a^1)^2(a^2)^2 + (a^2)^2(a^3)^2 + (a^3)^2(a^1)^2\right] + 8a^0a^1a^2a^3\}^{1/4}
\end{gathered}
\tag{2.10}
$$

называется модулем квадрачисла и, соответственно, имеет место обратное число

$$
\begin{gathered}
\mathbf{A}^{-1} = (\mathbf{A}_1\circ\mathbf{A}_2\circ\mathbf{A}_3)\,/\,|\mathbf{A}|^4 = \\
= \frac{1}{|\mathbf{A}|^4}\left\{a^0\left[(a^0)^2 - (a^1)^2 - (a^2)^2 + (a^3)^2\right] + 2a^3\left(a^1a^2 - a^0a^3\right) + \right. \\
+ \left[-a^1\left[(a^0)^2 - (a^1)^2 - (a^2)^2 + (a^3)^2\right] - 2a^2\left(a^1a^2 - a^0a^3\right)\right]\mathbf{e}_1 + \\
+ \left[-a^2\left[(a^0)^2 - (a^1)^2 - (a^2)^2 + (a^3)^2\right] - 2a^1\left(a^1a^2 - a^0a^3\right)\right]\mathbf{e}_2 + \\
\left. + \left[a^3\left[(a^0)^2 - (a^1)^2 - (a^2)^2 + (a^3)^2\right] + 2a^0\left(a^1a^2 - a^0a^3\right)\right]\mathbf{e}_3\right\}
\end{gathered}
\tag{2.11}
$$

с $(\mathbf{A}\circ\mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\circ\mathbf{A}^{-1}$, $|\mathbf{A}\circ\mathbf{B}| = |\mathbf{A}|\,|\mathbf{B}|$, $\mathbf{A}_1^{-1} = (\mathbf{A}\circ\mathbf{A}_2\circ\mathbf{A}_3)\,/\,|\mathbf{A}_1|^4$, $\mathbf{A}_2^{-1} = (\mathbf{A}\circ\mathbf{A}_1\circ\mathbf{A}_3)\,/\,|\mathbf{A}_2|^4$, $\mathbf{A}_3^{-1} = (\mathbf{A}\circ\mathbf{A}_1\circ\mathbf{A}_1)\,/\,|\mathbf{A}_3|^4$ и $|\mathbf{A}| = |\mathbf{A}_1| = |\mathbf{A}_2| = |\mathbf{A}_3|$.

Соотношения (2.9) записываются также в матричном виде

$$
\mathbf{A}^a = \sum_i^4 H_i^a\left(a^i\mathbf{e}_i\right), \quad \left(a^i\mathbf{e}_i\right) = \frac{1}{4}\sum_a^4 H_a^i\mathbf{A}^a,
\tag{2.12}
$$

где числа $\mathbf{A}^a$ и $a^r\mathbf{e}_r$ отождествляются с $(\mathbf{A}, \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3)$ и $(a^0, a^1\mathbf{e}_1, a^2\mathbf{e}_2, a^3\mathbf{e}_3)$, а симметричная матрица H_i^a есть нормализованная матрица Адамара

$$\mathbf{H}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_2 & \mathbf{H}_2 \\ \mathbf{H}_2 & -\mathbf{H}_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_1 & \mathbf{H}_1 \\ \mathbf{H}_1 & -\mathbf{H}_1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{H}_1 = 1 \tag{2.13}$$

порядка четыре с элементами равными числам ± 1. Матрица Адамара находится методом Сильвестра рекуррентным вычислением из матриц $\mathbf{H}_1$ и $\mathbf{H}_2$ Элементы строк матрицы являются дискретными значениями ортогональных функций Уолша. Матрица имеет свойство $\mathbf{H}_4\mathbf{H}_4^T = 4\mathbf{I}$ (где $\mathbf{H}_4^T$ и $\mathbf{I}$ – транспонированная и единичная четырехмерные матрицы). Матрица определяется так же, как кронекеровское произведение матриц предыдущего порядка. Порядок матрицы Адамара равняется числу $m = 2^n$ $(n = 0,\, 1,\, 2, \ldots)$.

Алгебра квадрачисел с операциями сложения, умножения на действительное число, с законом композиции и определениями модуля и обратного числа является естественным расширением алгебры двойных чисел.

Приведем некоторые новые свойства квадрачисел.

Определение. Уравнение $|\mathbf{A} - \lambda| = 0$ представляет собой характеристическое уравнение для квадрачисла, а соответствующий набор чисел - характеристические или собственные числа.

С учетом тождества $\lambda = \lambda\mathbf{e}_0$ в значении модуля квадрачисла произведем замену $a^0 \to a^0 - \lambda$ и, согласно (2.10), получим равенство

$$|\mathbf{A} - \lambda|^4 = (\mathbf{A} - \lambda) \circ (\mathbf{A}_1 - \lambda) \circ (\mathbf{A}_2 - \lambda) \circ (\mathbf{A}_3 - \lambda)\,, \tag{2.14}$$

из которого вытекает соотношение

$$|\mathbf{A} - \lambda|^4 = (-\lambda)^4 + S_1\,(-\lambda)^3 + S_2\,(-\lambda)^2 + S_3\,(-\lambda) + S_4. \tag{2.15}$$

Следовательно имеем выражения

$$\begin{gathered} S_1 = \varepsilon_a\mathbf{A}^a = \mathbf{A} + \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_3, \\ S_2 = \tfrac{1}{2!}\varepsilon_{ab}\mathbf{A}^a \circ \mathbf{A}^b = \mathbf{A} \circ \mathbf{A}_1 + \mathbf{A} \circ \mathbf{A}_2 + \mathbf{A} \circ \mathbf{A}_3 + \mathbf{A}_1 \circ \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_1 \circ \mathbf{A}_3 + \mathbf{A}_2 \circ \mathbf{A}_3, \\ S_3 = \tfrac{1}{3!}\varepsilon_{abc}\mathbf{A}^a \circ \mathbf{A}^b \circ \mathbf{A}^c = \mathbf{A}_1 \circ \mathbf{A}_2 \circ \mathbf{A}_3 + \mathbf{A} \circ \mathbf{A}_2 \circ \mathbf{A}_3 + \mathbf{A} \circ \mathbf{A}_1 \circ \mathbf{A}_3 + \mathbf{A} \circ \mathbf{A}_1 \circ \mathbf{A}_2, \\ S_4 = \tfrac{1}{4!}\varepsilon_{abcd}\mathbf{A}^a \circ \mathbf{A}^b \circ \mathbf{A}^c \circ \mathbf{A}^d = \mathbf{A} \circ \mathbf{A}_1 \circ \mathbf{A}_2 \circ \mathbf{A}_3, \end{gathered} \tag{2.16}$$

где $\varepsilon_m = 1$ и наряду с ε_{abcd} введены четырехмерные абсолютно симметричные символы со свойствами $\varepsilon_{ab} = \varepsilon_{abc} = 1$, если $a \neq b \neq c$, а остальные значения нулевые. Формулы (2.16) есть однородные симметричные формы для набора квадрачисел разных порядков. Из характеристического уравнения для квадрачисла

$$\begin{gathered} |\mathbf{A} - \lambda|^4 = (-\lambda)^4 + S_1\,(-\lambda)^3 + S_2\,(-\lambda)^2 + S_3\,(-\lambda) + S_4 = \\ = (\lambda - \lambda^1)\,(\lambda - \lambda^2)\,(\lambda - \lambda^3)\,(\lambda - \lambda^4) = 0 \end{gathered} \tag{2.17}$$

получим соотношения

$$S_1 = \varepsilon_a\lambda^a, \quad S_2 = \frac{1}{2!}\varepsilon_{ab}\lambda^a\lambda^b, \quad S_3 = \frac{1}{3!}\varepsilon_{abc}\lambda^a\lambda^b\lambda^c, \quad S_4 = \frac{1}{4!}\varepsilon_{abcd}\lambda^a\lambda^b\lambda^c\lambda^d \tag{2.18}$$

с различными четырьмя характеристическими или собственными числами квадрачисла

$$\begin{aligned} \lambda^1 &= a^0 + a^1 + a^2 + a^3, \\ \lambda^2 &= a^0 - a^1 + a^2 - a^3, \\ \lambda^3 &= a^0 + a^1 - a^2 - a^3, \\ \lambda^4 &= a^0 - a^1 - a^2 + a^3. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Из (2.16) и (2.18) следует, что симметричные формы для набора квадрачисел разных порядков равняются симметричным многочленам для характеристических чисел и могут представлять собой метрические функции различных финслеровых геометрий.

Представим собственные числа в виде $\lambda^a = H_i^a a^i$, где a^i отождествляется с (a^0, a^1, a^2, a^3). Тогда модуль квадрачисла определяет метрическую функцию финслеровой геометрии Бервальда-Моора

$$F = |\mathbf{A}| = \left(\lambda^1\lambda^2\lambda^3\lambda^4\right)^{1/4} = \left(\varepsilon_{1234} H_i^1 H_j^2 H_k^3 H_l^4 a^i a^j a^k a^l\right)^{1/4} = \left(\frac{1}{4!}\varepsilon_{abcd} H_i^a H_j^b H_k^c H_l^d a^i a^j a^k a^l\right)^{1/4}, \tag{2.20}$$

где число 4! есть количество различных перестановок индексов в четырехмерном симметричном символе ε_{abcd}.

3. Релятивистское уравнение четвертого порядка

При гамильтоновом формализме уравнение для энергии и импульса свободной частицы в пространстве-времени с метрической функцией (1.1) запишется так

$$\prod_m^4 \left[E - c\left(\boldsymbol{\varepsilon}^m \mathbf{p}\right)\right] = \left(m_0 c^2\right)^4, \tag{3.1}$$

что приводит к релятивистскому и форм-инвариантному уравнению четвертого порядка для скалярной волновой функции [4]

$$\prod_m^4 \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{\varepsilon}^m \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right)\varphi\left(\mathbf{x}, t\right) = \left(\frac{m_0 c}{\hbar}\right)^4 \varphi\left(\mathbf{x}, t\right). \tag{3.2}$$

Здесь имеем операторы $E = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$ и $\mathbf{p} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}$ и используются известные инвариантные значения компонентов векторов $\boldsymbol{\varepsilon}^1 = (1,\, 1,\, 1)$, $\boldsymbol{\varepsilon}^2 = (-1,\, 1, -1)$, $\boldsymbol{\varepsilon}^3 = (1,\, -1,\, -1)$, $\boldsymbol{\varepsilon}^4 = (-1, -1,\, 1)$, которые удовлетворяют равенствам [4]

$$\begin{gathered} \sum_m^4 \varepsilon_i^m = 0, \quad \tfrac{1}{4}\sum_m^4 \varepsilon_i^m \varepsilon_j^m = \delta_{ij}, \quad \tfrac{1}{4}\sum_m^4 \varepsilon_i^m \varepsilon_j^m \varepsilon_k^m = \varepsilon_{ijk}, \\ 1 + \left(\boldsymbol{\varepsilon}^m\right)^2 = 4, \quad 1 + \left(\boldsymbol{\varepsilon}^m \boldsymbol{\varepsilon}^r\right) = 0 \quad (m \neq r) \end{gathered} \tag{3.3}$$

и представляют собой выделенные направления в трехмерном пространстве. Концы этих векторов есть вершины специально ориентированного правильного координатного тетраэдра [5]. В общем случае имеет место произвольно ориентированный координатный тетраэдр [4] с другими значениями компонентов векторов при выполнении равенств (3.3).

Перепишем уравнение (3.2) в виде

$$\begin{aligned} &\left[\frac{\partial^4}{c^4\partial t^4} + \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} + \frac{\partial^4}{\partial z^4} - 2\left(\frac{\partial^4}{c^2\partial t^2\partial x^2} + \frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^2\partial z^2} + \frac{\partial^4}{c^2\partial z^2\partial t^2} + \right.\right. \\ &\left.\left. + \frac{\partial^4}{c^2\partial t^2\partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial x^2\partial z^2}\right) + 8\frac{\partial^4}{c\partial t\partial x\partial y\partial z}\right]\varphi\left(\mathbf{x}, t\right) = \left(\frac{m_0 c}{\hbar}\right)^4 \varphi\left(\mathbf{x}, t\right). \end{aligned} \tag{3.4}$$

Форм-инвариантность уравнения (3.4) обеспечивается известными преобразованиями координат и времени [4–6], записанными, например, в векторной форме [4]

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}' &= \frac{1}{N(\mathbf{v}'/c)}\left\{\mathbf{x}+\mathbf{v}'t+\frac{1}{4c}\sum_m^4 \boldsymbol{\varepsilon}^m(\boldsymbol{\varepsilon}^m\mathbf{v}')(\boldsymbol{\varepsilon}^m\mathbf{x})\right\},\\
t' &= \frac{1}{N(\mathbf{v}'/c)}\left[t+\frac{1}{4c^2}\sum_m^4(\boldsymbol{\varepsilon}^m\mathbf{v}')(\boldsymbol{\varepsilon}^m\mathbf{x})\right]
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

и ее аналоге [3]

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}' &= \frac{1}{N(\mathbf{v}'/c)}\left[\mathbf{x}+\mathbf{v}'t+\frac{1}{c}\{\mathbf{v}'\mathbf{x}\}\right],\\
t' &= \frac{1}{N(\mathbf{v}'/c)}\left[t+\frac{1}{c^2}(\mathbf{v}'\mathbf{x})\right],
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

а также в координатном виде [6]

$$
\begin{aligned}
x'^i &= \frac{1}{N(\mathbf{v}'/c)}\left[x^i+v'^i t+\frac{1}{c}\varepsilon^i_{jk}v'^j x^k\right],\\
t' &= \frac{1}{N(\mathbf{v}'/c)}\left[t+\frac{1}{c^2}(\delta_{ij}v'^i x^j)\right]
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

и матричных формах [5, 6]

$$
\begin{gathered}
\mathbf{X}' = \frac{\mathbf{A}(\mathbf{v}')}{|\mathbf{A}(\mathbf{v}')|}\mathbf{X} = \frac{\mathbf{B}(\boldsymbol{\alpha})}{|\mathbf{B}(\boldsymbol{\alpha})|}\mathbf{X},\\
\mathbf{A}(\mathbf{v}') = \mathbf{H}_4^{-1}\mathbf{D}\mathbf{H}_4 = \tfrac{1}{4}\mathbf{H}_4^T\mathbf{D}\mathbf{H}_4, \quad \mathbf{B}(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{H}_4^{-1}\mathbf{K}\mathbf{H}_4 = \tfrac{1}{4}\mathbf{H}_4^T\mathbf{K}\mathbf{H}_4.
\end{gathered}
\tag{3.8}
$$

Диагональные матрицы $\mathbf{D} = \{d^1, d^2, d^3, d^4\}$ и $\mathbf{K} = \{k^1, k^2, k^3, k^4\}$ подобны вещественным симметричным матрицам простой структуры $\mathbf{A}(\mathbf{v}')$ и $\mathbf{B}(\boldsymbol{\alpha})$. Матрица Адамара $\mathbf{H}_4$ представляет собой фундаментальную матрицу для рассматриваемых матриц. Вещественные характеристические числа матриц есть $d^a = H^a_i v'^i/c$ и $k^a = \exp H^a_i \alpha^i$, где v'^i и α^i отождествляются с $\left(1, v'_x/c, v'_y/c, v'_z/c\right)$ и $(\alpha^0, \alpha^1, \alpha^2, \alpha^3)$, соответственно. Величина $\boldsymbol{\alpha} = \{\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3\}$ есть угловая мера [5], $|\mathbf{A}(\mathbf{v}')|^4 = d^1d^2d^3d^4$, $|\mathbf{B}(\boldsymbol{\alpha})|^4 = k^1k^2k^3k^4$ и $\mathbf{X}\{ct, x, y, z\}$.

Вышеуказанные значения компонентов векторов $\boldsymbol{\varepsilon}^m$ вытекает из коммутативного группового закона композиции скоростей в векторной форме [4]

$$
\mathbf{u}_1 \circ \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_2 \circ \mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2+\frac{1}{4}\sum_m^4 \boldsymbol{\varepsilon}^m(\boldsymbol{\varepsilon}^m\mathbf{u}_1)(\boldsymbol{\varepsilon}^m\mathbf{u}_2)/c}{1+(\mathbf{u}_1\mathbf{u}_2)/c^2}
\tag{3.9}
$$

при условии

$$
c\boldsymbol{\varepsilon}^m = c\boldsymbol{\varepsilon}^m \circ c\boldsymbol{\varepsilon}^m,
\tag{3.10}
$$

которое дает инвариантность векторов $c\boldsymbol{\varepsilon}^m$ при переходах между инерциальными системами отсчетов. Условие (3.10) имеет место с учетом (3.3) при выполнении следующего уравнения

$$
2\varepsilon^m_i = \varepsilon^{jk}_i \varepsilon^m_j \varepsilon^m_k.
\tag{3.11}
$$

Отметим, что уравнение (3.11) для четырех векторов и нулевого вектора впервые феноменологически рассматривается в работе [7] для компонент гиперкомплексных чисел H_3.

Для взаимосвязи относительных скоростей имеем следующие формулы для векторов [4]

$$\begin{aligned}\mathbf{v}' &= \left[\frac{1}{4}\sum_{m}^{4}\frac{\boldsymbol{\varepsilon}^m}{1+(\boldsymbol{\varepsilon}^m\mathbf{v})/c}\right]\left[\frac{1}{4}\sum_{m}^{4}\frac{1}{1+(\boldsymbol{\varepsilon}^m\mathbf{v})/c}\right]^{-1} = \\ &= \left[-\frac{1}{4}\sum_{m}^{4}\frac{\boldsymbol{\varepsilon}^m(\boldsymbol{\varepsilon}^m\mathbf{v})}{1+(\boldsymbol{\varepsilon}^m\mathbf{v})/c}\right]\left[\frac{1}{4}\sum_{m}^{4}\frac{1}{1+(\boldsymbol{\varepsilon}^m\mathbf{v})/c}\right]^{-1}\end{aligned} \tag{3.12}$$

и их компонент [3]

$$v'_x = -\frac{\begin{vmatrix} v_x & v_z & v_y \\ v_y & 1 & v_x \\ v_z & v_x & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & v_z & v_y \\ v_z & 1 & v_x \\ v_y & v_x & 1 \end{vmatrix}}, \quad v'_y = \frac{\begin{vmatrix} v_x & 1 & v_y \\ v_y & v_z & v_x \\ v_z & v_y & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & v_z & v_y \\ v_z & 1 & v_x \\ v_y & v_x & 1 \end{vmatrix}}, \quad v'_z = -\frac{\begin{vmatrix} v_x & 1 & v_z \\ v_y & v_z & 1 \\ v_z & v_y & v_x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & v_z & v_y \\ v_z & 1 & v_x \\ v_y & v_x & 1 \end{vmatrix}}. \tag{3.13}$$

Используя значения векторных произведений (2.8), запишем скорость $\mathbf{v}'$ и $N(\mathbf{v})$ в новых векторных формах [3]

$$\begin{aligned}\mathbf{v}' &= -\frac{\mathbf{v}\left[1-(\mathbf{v}\mathbf{v})\right]-\{\mathbf{v}\mathbf{v}\}+\{\mathbf{v}\{\mathbf{v}\mathbf{v}\}\}}{1-(\mathbf{v}\mathbf{v})-\frac{1}{3}(\mathbf{v}\{\mathbf{v}\mathbf{v}\})}, \\ N(\mathbf{v}') &= 1-2(\mathbf{v}'\mathbf{v}')+\tfrac{4}{3}(\mathbf{v}'\{\mathbf{v}'\mathbf{v}'\})-\left[-(\mathbf{v}'\mathbf{v}')(\mathbf{v}'\mathbf{v}')+\{\mathbf{v}'\mathbf{v}'\}\{\mathbf{v}'\mathbf{v}'\}\right].\end{aligned} \tag{3.14}$$

Преобразованиях (3.5)-(3.8) вытекают из форм-инвариантности модуля квадрачисла (2.20) (или метрической функции глобального пространства-времени Бервальда-Моора) с $a^0 = ct$, и $\mathbf{a} = \mathbf{x} = \{x, y, z\}$ в векторной форме

$$\left\{\prod_{m}^{4}\left[ct+(\boldsymbol{\varepsilon}^m\mathbf{x})\right]\right\}^{1/4} = \left\{\prod_{m}^{4}\left[ct'+(\boldsymbol{\varepsilon}^m\mathbf{x}')\right]\right\}^{1/4}. \tag{3.15}$$

Наконец, используя гамильтонов формализм, запишем уравнение (3.4) для частицы в электромагнитном поле в операторном виде

$$\prod_{m}^{4}\left[\left(i\hbar\frac{\partial}{c\partial t}+e\varphi\right)+\varepsilon^m\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}}-\frac{e}{c}\mathbf{A}\right)\right]\varphi(\mathbf{x},t) = (m_0c)^4\,\varphi(\mathbf{x},t), \tag{3.16}$$

где φ и $\mathbf{A}$ есть скалярный и векторный потенциалы поля.

4. Матричное представление алгебры квадрачисел и релятивистские уравнения первого порядка

Рассмотрим некоторый вариант матричного представления алгебры квадрачисел. Определим двумерные матрицы

$$
\begin{aligned}
T &= \begin{pmatrix} a^0 - a^3 & a^2 - a^1 \\ a^2 - a^1 & a^0 - a^3 \end{pmatrix}, \quad \det T = \left[\left(a^0\right)^2 + \left(a^3\right)^2\right] - \left[\left(a^1\right)^2 + \left(a^2\right)^2\right] + 2\left(a^1 a^2 - a^0 a^3\right), \\
T_1 &= \begin{pmatrix} a^0 + a^3 & a^2 + a^1 \\ a^2 + a^1 & a^0 + a^3 \end{pmatrix}, \quad \det T_1 = \left[\left(a^0\right)^2 + \left(a^3\right)^2\right] - \left[\left(a^1\right)^2 + \left(a^2\right)^2\right] - 2\left(a^1 a^2 - a^0 a^3\right), \\
T_2 &= \begin{pmatrix} a^0 - a^3 & -a^2 - a^1 \\ -a^2 - a^1 & a^0 - a^3 \end{pmatrix}, \quad \det T_2 = \left[\left(a^0\right)^2 + \left(a^3\right)^2\right] - \left[\left(a^1\right)^2 + \left(a^2\right)^2\right] + 2\left(a^1 a^2 - a^0 a^3\right), \\
T_3 &= \begin{pmatrix} a^0 + a^3 & -a^2 - a^1 \\ -a^2 - a^1 & a^0 + a^3 \end{pmatrix}, \quad \det T_3 = \left[\left(a^0\right)^2 + \left(a^3\right)^2\right] - \left[\left(a^1\right)^2 + \left(a^2\right)^2\right] - 2\left(a^1 a^2 - a^0 a^3\right).
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

Тогда матричное представление алгебры квадрачисел есть одна из четырех четырехмерных матриц в следующем блочном виде

$$
P_1 = \begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & T_1 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} T_2 & 0 \\ 0 & T_3 \end{pmatrix}, \quad P_4 = \begin{pmatrix} T_3 & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix} \tag{4.2}
$$

с определителем

$$
\begin{gathered}
\det P_1 = \det P_2 = \det P_3 = \det P_4 = \\
= \left[\left(a^0\right)^2 - \left(a^1\right)^2 - \left(a^2\right)^2 + \left(a^3\right)^2\right]^2 - 4\left(a^1 a^2 - a^0 a^3\right)^2 = \\
= \left(a^0\right)^4 + \left(a^1\right)^4 + \left(a^2\right)^4 + \left(a^3\right)^4 - 2\left[\left(a^0\right)^2\left(a^1\right)^2 + \left(a^0\right)^2\left(a^2\right)^2 + \right. \\
\left. + \left(a^0\right)^2\left(a^3\right)^2 + \left(a^1\right)^2\left(a^2\right)^2 + \left(a^2\right)^2\left(a^3\right)^2 + \left(a^3\right)^2\left(a^1\right)^2\right] + 8 a^0 a^1 a^2 a^3,
\end{gathered}
\tag{4.3}
$$

равным четвертой степени модуля квадрачисла $|\mathbf{A}|^4$. Базисными элементами квадрачисла являются матрицы

$$
\mathbf{e}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad
\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad
\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad
\mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{4.4}
$$

вытекающие, например, из представления в виде P_1 и имеющие свойства (2.4) со следами $tr\,\mathbf{e}_i = 0$, $tr\,(\mathbf{e}_i \circ \mathbf{e}_j) = 4\delta_{ij}$.

Рассмотрим набор квадрачисел

$$
\begin{cases}
E\mathbf{e}_0 + cp_x\mathbf{e}_1 + cp_y\mathbf{e}_2 + cp_z\mathbf{e}_3, \\
E\mathbf{e}_0 - cp_x\mathbf{e}_1 + cp_y\mathbf{e}_2 - cp_z\mathbf{e}_3, \\
E\mathbf{e}_0 + cp_x\mathbf{e}_1 - cp_y\mathbf{e}_2 - cp_z\mathbf{e}_3, \\
E\mathbf{e}_0 - cp_x\mathbf{e}_1 - cp_y\mathbf{e}_2 + cp_z\mathbf{e}_3
\end{cases}
\tag{4.5}
$$

и, заменяя $\mathbf{e}_0$, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ на матричные операторы, получим четыре уравнения первого порядка для четырех волновых функций в случае чистого ансамбля квантовых систем

$$
\begin{aligned}
&i\hbar\mathbf{e}_0\frac{\partial\psi}{c\partial t}-i\hbar\mathbf{e}_1\frac{\partial\psi}{\partial x}-i\hbar\mathbf{e}_2\frac{\partial\psi}{\partial y}-i\hbar\mathbf{e}_3\frac{\partial\psi}{\partial z}-\boldsymbol{\beta}m_0c^2\psi=0,\\
&i\hbar\mathbf{e}_0\frac{\partial\psi_1}{c\partial t}+i\hbar\mathbf{e}_1\frac{\partial\psi_1}{\partial x}-i\hbar\mathbf{e}_2\frac{\partial\psi_1}{\partial y}+i\hbar\mathbf{e}_3\frac{\partial\psi_1}{\partial z}-\boldsymbol{\beta}m_0c^2\psi_1=0,\\
&i\hbar\mathbf{e}_0\frac{\partial\psi_2}{c\partial t}-i\hbar\mathbf{e}_1\frac{\partial\psi_2}{\partial x}+i\hbar\mathbf{e}_2\frac{\partial\psi_2}{\partial y}+i\hbar\mathbf{e}_3\frac{\partial\psi_2}{\partial z}-\boldsymbol{\beta}m_0c^2\psi_2=0,\\
&i\hbar\mathbf{e}_0\frac{\partial\psi_3}{c\partial t}+i\hbar\mathbf{e}_1\frac{\partial\psi_3}{\partial x}+i\hbar\mathbf{e}_2\frac{\partial\psi_3}{\partial y}-i\hbar\mathbf{e}_3\frac{\partial\psi_3}{\partial z}-\boldsymbol{\beta}m_0c^2\psi_3=0,
\end{aligned}
\tag{4.6}
$$

где введена матрица

$$
\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix} 0&0&0&-1\\ 0&0&1&0\\ 0&1&0&0\\ 1&0&0&0 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\beta}^4=1. \tag{4.7}
$$

Плоская волна для случая первого уравнения в (4.6) для стационарных состояний представляется в виде четырех-компонентной волновой функции

$$
\psi=\begin{pmatrix} u_1\\ u_2\\ u_3\\ u_4 \end{pmatrix} e^{\frac{ipx}{\hbar}} \tag{4.8}
$$

с постоянными числами u_1, u_2, u_3, u_4. После подстановки волновой функции (4.8) в релятивистское уравнение первого порядка (4.6) получим систему алгебраических уравнений

$$
\begin{aligned}
-Eu_1&=-cp_zu_1+c\,(p_y-p_x)\,u_2-m_0c^2u_4,\\
-Eu_2&=c\,(p_y-p_x)\,u_1-cp_zu_2+m_0c^2u_3,\\
-Eu_3&=m_0c^2u_2-cp_zu_3+c\,(p_y+p_x)\,u_4,\\
-Eu_4&=m_0c^2u_1+c\,(p_y+p_x)\,u_3+cp_zu_4.
\end{aligned}
\tag{4.9}
$$

Однородная система (4.9) имеет решение при равенстве нулю детерминанта

$$
\begin{vmatrix}
E-cp_z & cp_y-cp_x & 0 & -m_0c^2\\
cp_y-cp_z & E-cp_z & m_0c^2 & 0\\
0 & m_0c^2 & E+cp_z & cp_y+cp_x\\
m_0c^2 & 0 & cp_y+cp_x & E+cp_z
\end{vmatrix}=0. \tag{4.10}
$$

Равенство (4.10) дает соотношение $\prod\limits_{m}^{4}\left[E-c\,(\boldsymbol{\varepsilon}^m\mathbf{p})\right]-\left(m_0c^2\right)^4=0$, совпадающее с (3.1). Аналогичные результаты получаются и для других уравнений из (4.6).

5. Обсуждение

Для случая квадрачисел восполняется пробел в представлении соответствующей алгебры недиагональными четырехмерными матрицами, которые используются при получении четырех уравнений первого порядка для четырех четырех-компонентных волновых функций в квантовом описании движения частиц. Причем каждому значению импульса соответствует три собственных значения энергии принадлежащих неизвестной частице и одно собственное значение неизвестной античастицы, либо наоборот. Возможен также вариант двух частиц и двух античастиц.

Таким образом, приходим к следующему понятию.

Определение. Среднее значение $\bar{A}$ оператора $\hat{A}$ для чистого ансамбля квантовых систем равно

$$\bar{A} = \frac{\int \psi_1\psi_2\psi_3\hat{A}\psi dV}{\int \psi_1\psi_2\psi_3\psi dV} = \frac{\int \psi\hat{A}_1\hat{A}_2\hat{A}_3\psi_1\psi_2\psi_3 dV}{\int \psi_1\psi_2\psi_3\psi dV}, \tag{5.1}$$

где операторы $\hat{A}, \hat{A}_1, \hat{A}_2, \hat{A}_3$ соответствуют операторам для выделенных направлений в трехмерном пространстве.

Нахождение свойств и решений релятивистских уравнений (3.4), (3.16) и (4.6) для различных физических ситуаций представляет отдельную задачу.

В заключении приведем некоторый простой результат при применении гамильтонова формализма в изотропном пространстве-времени с метрической функцией (1.2). Уравнение для энергии и импульса свободной частицы имеет следующий вид

$$\left(E^2 - c^2\mathbf{p}^2\right)\left(E^2 - c^2\mathbf{p}^2\right) = \left(m_0c^2\right)^4. \tag{5.2}$$

Из (5.2) получим релятивистское и лоренц-инвариантное дифференциальное уравнение четвертого порядка для скалярной волновой функции

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)\varphi\left(\mathbf{x}, t\right) = \left(\frac{m_0c}{\hbar}\right)^4\varphi\left(\mathbf{x}, t\right), \tag{5.3}$$

где Δ – оператор Лапласа.

При $m_0 = 0$ и $\varphi = \varphi\left(\mathbf{x}\right)$ из (5.3) вытекает бигармоническое дифференциальное уравнение

$$\Delta^2\varphi\left(\mathbf{x}\right) = 0, \tag{5.4}$$

решением которого является известная бигармоническая функция

$$\varphi\left(\mathbf{x}\right) = -\frac{A}{r} + br. \tag{5.5}$$

Интересно отметить, что в работе [8] уравнение (5.4) с решение (5.5), получаемое при нерелятивистском пределе, является исходной идеей обобщения ньютоновского потенциала и соответствующего обобщения уравнений Гильберта-Эйнштейна в рамках римановой геометрии пространства-времени для выяснения вопроса о темной материи. В рассматриваемом подходе не используются подходы римановой геометрии и это вселяет надежду на более широкое применение метрической функции (1.2). Также отметим, что согласно (5.2) каждому значению импульса соответствует четыре собственных значения энергии

$$E = \pm\left(c^2\mathbf{p}^2 \pm m_0c^2\right)^{1/2}, \tag{5.6}$$

принадлежащих частице и античастице, а также тахиону и антитахиону. Возможны и другие интерпретации собственных значений энергии свободной частицы для пространства-времени описываемого метрической функцией (1.1) и (1.2).

References

[1] Space-Time Structure. Algebra and Geometry. Eds. Pavlov D. G., Atanasiu Gh., Balan V. Moscow: Lilia-Print, 2007. 528 pp.

[2] Pavlov D. G. Hypercomplex Numbers, Associated Metric Spaces, and Extension of Relativistic Hyperboloid. arXiv: gr-gc/0206004. 2002. V. 1. P. 1–16.

[3] Зарипов Р. Г. К релятивистской теории в гиперкомплексных системах. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. 2007. № 1 (7) (данный выпуск).

[4] Зарипов Р. Г. Отношение одновременности в финслеровом пространстве-времени. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. 2006. № 1 (5). С. 28–47.

[5] Bogoslovsky G. Yu., Goenner H. F. On the possibility of the phase transitions in the geometric structure of space-time. Phys. Lett. A. 1998.V. 244. P. 222–226.

[6] Гарасько Г. И., Павлов Д. Г. Понятие расстояния и модуля скорости в линейных финслеровых пространствах. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. 2005. №1 (3). С. 1–15.

[7] Гарасько Г. И., Павлов Д. Г. Нормальное сопряжение на множестве поличисел. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. 2004. №2 (2). С. 7–14.

[8] Mannheim P. D. Alternatives to Dark Matter and Dark Energy. Progress in Particle and Nuclear Physics. 2006. V. 56. P. 340–345. (arXiv: astro-ph/0505266. 2005. V. 2. P. 1–87).