К РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ТЕОРИИ В ГИПЕРКОМПЛЕКСНЫХ СИСТЕМАХ

Р. Г. Зарипов

Институт механики и машиностроения КазНЦ РАН, Казань, Россия
zaripov@mail.knc.ru

Рассматриваются новые свойства гиперкомплексных систем и их связь с матрицей Адамара. Приводится характеристическое уравнение для гиперкомплексных чисел. Даются преобразования координат и времени в релятивистских теориях для различных гиперкомплексных систем. В системе квадрачисел вводится новая операция векторного произведения, а также даются преобразования частичного отражения. Изучено матричное представление кватернионов и квадрачисел для элементов группы трехмерных скоростей и определена обратная скорость в двух новых формах.

1. Введение

Рассмотрим четырех-компонентное гиперкомплексное число

$$\mathbf{A} = (a_0, \mathbf{a}) = a_0 + a_i \mathbf{e}_i \tag{1.1}$$

с вещественными числами a_0 и a_i $(i = 1,\ 2,\ 3)$ и базисными элементами $\mathbf{e}_0 = 1$, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$. Закон композиции базисных элементов определяется в общем виде

$$\mathbf{e}_i \circ \mathbf{e}_j = C_i \delta_{ij} \mathbf{e}_0 + C_{kij} \mathbf{e}_k \tag{1.2}$$

и имеет следующие свойства

$$\mathbf{e}_i^2 = \mathbf{e}_i \circ \mathbf{e}_i = C_i, \quad \mathbf{e}_0 \circ \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i \circ \mathbf{e}_0 = \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{e}_i \circ \mathbf{e}_j = C_{kij} \mathbf{e}_k \quad (k \neq i \neq j)\,. \tag{1.3}$$

Здесь δ_{ij} – трёхмерный символ Кронекера, C_i и C_{kij} с $C_{kii} = 0$ есть числа равные ± 1. Тогда закон композиции числа (1.1) и $\mathbf{B} = b_0 + b_i \mathbf{e}_i$ дается соотношением

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \circ \mathbf{B} = (a_0 b_0 + C_i a_i b_i) + (a_0 b_k + b_0 a_k + C_{kij} a_i b_j)\, \mathbf{e}_k, \tag{1.4}$$

где имеем значения компонент

$$\begin{aligned} c_0 &= a_0 b_0 + C_i a_i b_i, \\ c_k &= a_0 b_k + b_0 a_k + C_{kij} a_i b_j \end{aligned} \tag{1.5}$$

и по повторяющимся индексам проводится суммирование. Равенства (1.5) определяются также в матричном виде $(\mathbf{C}) = (\mathbf{A})\,(\mathbf{B})$ со столбцами $(\mathbf{C})$ и $(\mathbf{B})$

$$(\mathbf{C}) = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}, \quad (\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} a_0 & C_1 a_1 & C_2 a_2 & C_3 a_3 \\ a_1 & a_0 & C_{132} a_3 & C_{123} a_2 \\ a_2 & C_{231} a_3 & a_0 & C_{213} a_1 \\ a_3 & C_{321} a_2 & C_{312} a_1 & a_0 \end{pmatrix}, \quad (\mathbf{B}) = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \tag{1.6}$$

либо с матрицами $(\mathbf{C})$ и $(\mathbf{B})$

$$(\mathbf{C})=\begin{pmatrix} c_0 & C_1c_1 & C_2c_2 & C_3c_3\\ c_1 & c_0 & C_{132}c_3 & C_{123}c_2\\ c_2 & C_{231}c_3 & c_0 & C_{213}c_1\\ c_3 & C_{321}c_2 & C_{312}c_1 & c_0\end{pmatrix},\quad (\mathbf{B})=\begin{pmatrix} b_0 & C_1b_1 & C_2b_2 & C_3b_3\\ b_1 & b_0 & C_{132}b_3 & C_{123}b_2\\ b_2 & C_{231}b_3 & b_0 & C_{213}b_1\\ b_3 & C_{321}b_2 & C_{312}b_1 & b_0\end{pmatrix}. \tag{1.7}$$

В случае матричного представления гиперкомплексных чисел в виде (1.7) выполняются следующие соотношения

$$\begin{aligned} &C_{231}C_{321}=C_{213}C_{312}=C_1, \quad C_{231}C_{123}=C_{213}C_{132},\\ &C_{312}C_{132}=C_{321}C_{123}=C_2, \quad C_{312}C_{231}=C_{321}C_{213},\\ &C_{123}C_{213}=C_{132}C_{231}=C_3, \quad C_{123}C_{312}=C_{132}C_{321}.\end{aligned} \tag{1.8}$$

Множество матриц образует группу матриц с законом композиции в виде произведения матриц. Умножение ассоциативно, единичный элемент группы соответствует единичной матрице и обратный элемент в виде обратной матрицы соответствует обратному гиперкомплексному числу.

Представляет интерес ассоциативная система гиперкомплексных чисел со свойством $(\mathbf{A}\circ\mathbf{B})\circ\mathbf{C}=\mathbf{A}\circ(\mathbf{B}\circ\mathbf{C})$, для которых закон композиции базисных элементов $\mathbf{e}_i\circ\mathbf{e}_j$ является антикоммутативным либо коммутативным.

Лемма. Имеется лишь четыре принципиально различные системы тогда и только тогда, когда заданы C_1, C_2 со значениями ±1 и равенство $\mathbf{e}_1\circ\mathbf{e}_2=\mathbf{e}_3$ для главных элементов $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$.

Тип I. Система кватернионов с $C_1=-1$, $C_2=-1$, $C_3=-1$ и законом композиции [1]

$$\begin{aligned} &\mathbf{e}_1^2=\mathbf{e}_2^2=\mathbf{e}_3^2=-1, \qquad \mathbf{e}_1\circ\mathbf{e}_2=-\mathbf{e}_2\circ\mathbf{e}_1=\mathbf{e}_3,\\ &\mathbf{e}_2\circ\mathbf{e}_3=-\mathbf{e}_3\circ\mathbf{e}_2=\mathbf{e}_1, \qquad \mathbf{e}_3\circ\mathbf{e}_1=-\mathbf{e}_1\circ\mathbf{e}_3=\mathbf{e}_2.\end{aligned} \tag{1.9}$$

Символ $C_{kij}=e_{kij}$ есть трехмерный абсолютно антисимметричный символ Леви-Чивита.

Тип II. Система антикватернионов с $C_1=1$, $C_2=1$, $C_3=-1$ и законом композиции [2]

$$\begin{aligned} &\mathbf{e}_1^2=1,\ \mathbf{e}_2^2=1,\ \mathbf{e}_3^2=-1, \qquad \mathbf{e}_1\circ\mathbf{e}_2=-\mathbf{e}_2\circ\mathbf{e}_1=\mathbf{e}_3,\\ &\mathbf{e}_2\circ\mathbf{e}_3=-\mathbf{e}_3\circ\mathbf{e}_2=-\mathbf{e}_1, \qquad \mathbf{e}_3\circ\mathbf{e}_1=-\mathbf{e}_1\circ\mathbf{e}_3=-\mathbf{e}_2.\end{aligned} \tag{1.10}$$

Тип III. Система квадрачисел с $C_1=1$, $C_2=1$, $C_3=1$ и законом композиции [3]

$$\begin{aligned} &\mathbf{e}_1^2=\mathbf{e}_2^2=\mathbf{e}_3^2=1, \qquad \mathbf{e}_1\circ\mathbf{e}_2=\mathbf{e}_2\circ\mathbf{e}_1=\mathbf{e}_3,\\ &\mathbf{e}_2\circ\mathbf{e}_3=\mathbf{e}_3\circ\mathbf{e}_2=\mathbf{e}_1, \qquad \mathbf{e}_3\circ\mathbf{e}_1=\mathbf{e}_1\circ\mathbf{e}_3=\mathbf{e}_2.\end{aligned} \tag{1.11}$$

Символ $C_{kij}=\varepsilon_{kij}$ есть трехмерный абсолютно симметричный символ со свойством $\varepsilon_{kij}=1$ при $i\neq j\neq k$, а остальные значения являются нулевыми. При перестановке любых двух индексов составляющие символа не меняются и справедливы равенства

$$\begin{gathered} \varepsilon_{kij}=\varepsilon_{kji}=\varepsilon_{ikj}=\varepsilon_{ijk}=\varepsilon_{jki}=\varepsilon_{jik},\\ \mathbf{e}_{ij}=\varepsilon_{kij}\mathbf{e}_k=\tfrac{1}{2}\left(\mathbf{e}_i\circ\mathbf{e}_j+\mathbf{e}_j\circ\mathbf{e}_i\right),\ \ \mathbf{e}_i\circ\mathbf{e}_j-\mathbf{e}_j\circ\mathbf{e}_i=0,\\ \mathbf{e}_m\circ\mathbf{e}_{ij}=\varepsilon_{mij}+\delta_{mi}\mathbf{e}_j+\delta_{mj}\mathbf{e}_i,\\ \mathbf{e}_{ij}\circ\mathbf{e}_m=\varepsilon_{mij}+\delta_{mj}\mathbf{e}_i+\delta_{mi}\mathbf{e}_j.\end{gathered}. \tag{1.12}$$

Тип IV. Система скалярных кватернионов (бикомплексных чисел) с $C_1 = -1$, $C_2 = -1$, $C_3 = 1$ и законом композиции [4]

$$\begin{aligned} &\mathbf{e}_1^2 = -1,\ \mathbf{e}_2^2 = -1,\ \mathbf{e}_3^2 = 1, \qquad \mathbf{e}_1 \circ \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2 \circ \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_3, \\ &\mathbf{e}_2 \circ \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_3 \circ \mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_1, \qquad \mathbf{e}_3 \circ \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1 \circ \mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_2. \end{aligned} \tag{1.13}$$

Характеристическое уравнение $\det\left[(\mathbf{A}) - \lambda\,(\mathbf{E})\right] = 0$ при условии разложения уравнения для λ степени четыре на два уравнения степени два имеет только следующие корни: $(\lambda_1, \lambda_1^*, \lambda_1, \lambda_1^*)$, $(\lambda_1, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_2)$, $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$, $(\lambda_1, \lambda_1^*, \lambda_2, \lambda_2^*)$. Эти четыре типа собственных значений матрицы $(\mathbf{A})$ соответствуют рассмотренным четырем Типам гиперкомплексных чисел, что и является доказательством **Леммы**. Для систем кватернионов и антикватернионов имеют место кратные комплексные и действительные корни, соответственно. Определитель матрицы равен произведению собственных значений и модулю числа в степени четыре, то есть выполняется равенство $\det(\mathbf{A}) = |\mathbf{A}|^4$, которое для четырех Типов чисел принимает действительное значение: $(\lambda_1, \lambda_1^*)^2$, $(\lambda_1)^2\,(\lambda_2)^2$, $(\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4)$, $(\lambda_1, \lambda_1^*)\,(\lambda_2, \lambda_2^*)$.

Для Типов **I** и **II** имеет место свойство антикоммутативности элементов $\mathbf{e}_i \circ \mathbf{e}_j = -\mathbf{e}_j \circ \mathbf{e}_i$ $(i \neq j)$, а для Типов **III** и **IV** – коммутативности с $\mathbf{e}_i \circ \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_j \circ \mathbf{e}_i$.

Целью работы является рассмотрение некоторых новых свойств таких гиперкомплексных. Остановимся подробно на системах Типа **I** и Типа **III**, поскольку именно они в отличие от других типов имеют отношение к релятивистским теориям. Это связано с тем, что только при равных значениях C_i величина $C_i a_i b_i$ в (1.4) равняется скалярному произведению векторов $\pm\,(\mathbf{ab})$ с точностью до знака в соответствующих трехмерных пространствах и определяется в преобразовании времени при переходе между инерциальными системами отсчетов. Также представляется необходимым дать матричное представление элементов группы трехмерных скоростей в релятивистских теориях.

2. Удвоение гиперкомплексной системы и матрица Адамара

Рассмотрим отличительные свойства систем Типа **I** и **II** с системами Типа **III** и **IV**. Запишем произвольное гиперкомплексное число в виде

$$\mathbf{A} = \mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2\mathbf{e}_2 \tag{2.1}$$

при процедуре удвоения Кэли-Диксона, где $\mathbf{z}_1 = a_0 + a_1\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{z}_2 = a_2 + a_3\mathbf{e}_1$ есть бинарные числа со свойством $\mathbf{zw} = \mathbf{wz}$. Сопряженные числа даются выражениями $\bar{\mathbf{z}}_1 = a_0 - a_1\mathbf{e}_1$, $\bar{\mathbf{z}}_2 = a_2 - a_3\mathbf{e}_1$ и модули чисел равняются $|\mathbf{z}_1| = \sqrt{\mathbf{z}_1\bar{\mathbf{z}}_1} = \sqrt{a_0^2 - C_1 a_1^2}$, $|\mathbf{z}_2| = \sqrt{\mathbf{z}_2\bar{\mathbf{z}}_2} = \sqrt{a_2^2 - C_1 a_3^2}$.

Для систем Типа **I** и **II**, а также Типа **III** и **IV** справедливы соответствующие равенства $\mathbf{z}\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2\bar{\mathbf{z}}$, $\mathbf{z}\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2\mathbf{z}$ и законы композиции

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \circ \mathbf{B} = (\mathbf{z}_1\mathbf{w}_1 + C_2\bar{\mathbf{w}}_2\mathbf{z}_2) + (\mathbf{w}_2\mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2\bar{\mathbf{w}}_1)\,\mathbf{e}_2, \tag{2.2}$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \circ \mathbf{B} = (\mathbf{z}_1\mathbf{w}_1 + C_2\mathbf{w}_2\mathbf{z}_2) + (\mathbf{w}_2\mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2\mathbf{w}_1)\,\mathbf{e}_2. \tag{2.3}$$

Здесь $\mathbf{B} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2\mathbf{e}_2$, $\mathbf{w}_1 = b_0 + b_1\mathbf{e}_1$, $\mathbf{w}_2 = b_2 + b_3\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{z}$ с $\mathbf{w}$ в (2.2) есть комплексное $(C_1 = -1)$ либо в (2.3) двойное число $(C_1 = 1)$.

Наряду с исходным числом $\mathbf{A}$ определяются еще три числа $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_3$

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2\mathbf{e}_2 = a_0 + a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{A}_1 &= \bar{\mathbf{z}}_1 + \bar{\mathbf{z}}_2\mathbf{e}_2 = a_0 - a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 - a_3\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{A}_2 &= \mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2\mathbf{e}_2 = a_0 + a_1\mathbf{e}_1 - a_2\mathbf{e}_2 - a_3\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{A}_3 &= \bar{\mathbf{z}}_1 - \bar{\mathbf{z}}_2\mathbf{e}_2 = a_0 - a_1\mathbf{e}_1 - a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3 \end{aligned} \tag{2.4}$$

и их сопряженные значения

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{A}} &= \bar{\mathbf{z}}_1 - \mathbf{z}_2\mathbf{e}_2 = a_0 - a_1\mathbf{e}_1 - a_2\mathbf{e}_2 - a_3\mathbf{e}_3,\\
\bar{\mathbf{A}}_1 &= \mathbf{z}_1 - \bar{\mathbf{z}}_2\mathbf{e}_2 = a_0 + a_1\mathbf{e}_1 - a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3,\\
\bar{\mathbf{A}}_2 &= \bar{\mathbf{z}}_1 + \mathbf{z}_2\mathbf{e}_2 = a_0 - a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3,\\
\bar{\mathbf{A}}_3 &= \mathbf{z}_1 + \bar{\mathbf{z}}_2\mathbf{e}_2 = a_0 + a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 - a_3\mathbf{e}_3.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Из (2.4) и (2.5) вытекают зависимости для компонент числа

$$\begin{aligned}
a_0 &= \tfrac{1}{4}\left(\mathbf{A} + \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_3\right) = \tfrac{1}{4}\left(\bar{\mathbf{A}} + \bar{\mathbf{A}}_1 + \bar{\mathbf{A}}_2 + \bar{\mathbf{A}}_3\right),\\
a_1\mathbf{e}_1 &= \tfrac{1}{4}\left(\mathbf{A} - \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_3\right) = -\tfrac{1}{4}\left(\bar{\mathbf{A}} - \bar{\mathbf{A}}_1 + \bar{\mathbf{A}}_2 - \bar{\mathbf{A}}_3\right),\\
a_2\mathbf{e}_2 &= \tfrac{1}{4}\left(\mathbf{A} + \mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_3\right) = -\tfrac{1}{4}\left(\bar{\mathbf{A}} + \bar{\mathbf{A}}_1 - \bar{\mathbf{A}}_2 - \bar{\mathbf{A}}_3\right),\\
a_3\mathbf{e}_3 &= \tfrac{1}{4}\left(\mathbf{A} - \mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_3\right) = -\tfrac{1}{4}\left(\bar{\mathbf{A}} - \bar{\mathbf{A}}_1 - \bar{\mathbf{A}}_2 + \bar{\mathbf{A}}_3\right)
\end{aligned} \tag{2.6}$$

и следующие соотношения

$$\begin{gathered}
\bar{\mathbf{A}} = -\frac{1}{2}\left(\mathbf{A} - \mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_3\right), \quad \mathbf{A} = -\frac{1}{2}\left(\bar{\mathbf{A}} - \bar{\mathbf{A}}_1 - \bar{\mathbf{A}}_2 - \bar{\mathbf{A}}_3\right),\\
a_0 = \frac{1}{2}\left(\mathbf{A} + \bar{\mathbf{A}}\right) = \frac{1}{2}\left(\mathbf{A}_1 + \bar{\mathbf{A}}_1\right) = \frac{1}{2}\left(\mathbf{A}_2 + \bar{\mathbf{A}}_2\right) = \frac{1}{2}\left(\mathbf{A}_3 + \bar{\mathbf{A}}_3\right),\\
a_0b_0 + C_1a_1b_1 + C_2a_2b_2 + C_3a_3b_3 = \frac{1}{4}\left[\mathbf{A}\circ\mathbf{B} + \mathbf{A}_1\circ\mathbf{B}_1 + \mathbf{A}_2\circ\mathbf{B}_2 + \mathbf{A}_3\circ\mathbf{B}_3\right],\\
a_0^2 - C_1a_1^2 - C_2a_2^2 - C_3a_3^2 = \frac{1}{4}\left[\mathbf{A}\circ\bar{\mathbf{A}} + \mathbf{A}_1\circ\bar{\mathbf{A}}_1 + \mathbf{A}_2\circ\bar{\mathbf{A}}_2 + \mathbf{A}_3\circ\bar{\mathbf{A}}_3\right],\\
a_0^2 + C_1a_1^2 + C_2a_2^2 + C_3a_3^2 = \frac{1}{4}\left[\mathbf{A}^2 + \mathbf{A}_1^2 + \mathbf{A}_2^2 + \mathbf{A}_3^2\right], \qquad (2.7)\\
3a_0^2 - C_1a_1^2 - C_2a_2^2 - C_3a_3^2 = \frac{1}{4}\big[(\mathbf{A}\circ\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_1\circ\mathbf{A}) + (\mathbf{A}\circ\mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_2\circ\mathbf{A}) + (\mathbf{A}\circ\mathbf{A}_3 + \mathbf{A}_3\circ\mathbf{A}) +\\
+(\mathbf{A}_1\circ\mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_2\circ\mathbf{A}_1) + (\mathbf{A}_1\circ\mathbf{A}_3 + \mathbf{A}_3\circ\mathbf{A}_1) + (\mathbf{A}_2\circ\mathbf{A}_3 + \mathbf{A}_3\circ\mathbf{A}_2)\big],\\
\overline{(\mathbf{A}\circ\mathbf{B})} = \bar{\mathbf{B}}\circ\bar{\mathbf{A}}, \quad (\mathbf{A}\circ\mathbf{B})_1 = \mathbf{A}_1\circ\mathbf{B}_1, \quad (\mathbf{A}\circ\mathbf{B})_2 = \mathbf{A}_2\circ\mathbf{B}_2, \quad (\mathbf{A}\circ\mathbf{B})_3 = \mathbf{A}_3\circ\mathbf{B}_3,\\
\bar{\bar{\mathbf{A}}} = (\mathbf{A}_1)_1 = (\mathbf{A}_2)_2 = (\mathbf{A}_3)_3 = \mathbf{A}\\
(\mathbf{A}_1)_2 = (\mathbf{A}_2)_1 = \mathbf{A}_3, \quad (\mathbf{A}_2)_3 = (\mathbf{A}_3)_2 = \mathbf{A}_1, \quad (\mathbf{A}_3)_1 = (\mathbf{A}_1)_3 = \mathbf{A}_2.
\end{gathered}$$

Рассмотрим системы Типа **I** и **II**.

Числа $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3$ определяются однозначно и имеют свойства

$$\begin{gathered}
\mathbf{e}_2\circ\mathbf{A} = \mathbf{A}_1\circ\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{e}_1\circ\mathbf{A} = \mathbf{A}_2\circ\mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}_3\circ\mathbf{A} = \mathbf{A}_3\circ\mathbf{e}_3,\\
\mathbf{e}_1\circ\mathbf{A}_1\circ\mathbf{e}_2 = \mathbf{A}_3\circ\mathbf{e}_3, \quad \mathbf{e}_3\circ\mathbf{A}_2\circ\mathbf{e}_1 = \mathbf{A}_1\circ\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{e}_2\circ\mathbf{A}_3\circ\mathbf{e}_3 = \mathbf{A}_2\circ\mathbf{e}_1,\\
\mathbf{e}_2\circ\mathbf{A}\circ\mathbf{e}_3 = \mathbf{A}_1\circ\mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}_1\circ\mathbf{A}\circ\mathbf{e}_2 = \mathbf{A}_2\circ\mathbf{e}_3, \quad \mathbf{e}_3\circ\mathbf{A}\circ\mathbf{e}_1 = \mathbf{A}_3\circ\mathbf{e}_2.
\end{gathered} \tag{2.8}$$

Соотношения (2.8) имеют одинаковый вид для сопряженных чисел (2.5). Определение сопряженного числа (2.5) к $\mathbf{A}$ позволяет получить, согласно (2.2), модуль числа

$$|\mathbf{A}| = \sqrt{\mathbf{A}\circ\bar{\mathbf{A}}} = \sqrt{|\mathbf{z}_1|^2 - C_2\,|\mathbf{z}_2|^2} = \sqrt{a_0^2 - C_1a_1^2 - C_2a_2^2 - C_3a_3^2}, \quad C_1C_2 = -C_3, \tag{2.9}$$

равный модулям $|\mathbf{A}_1| = |\mathbf{A}_2| = |\mathbf{A}_3|$, обратное число $\mathbf{A}^{-1} = \bar{\mathbf{A}}/\,|\mathbf{A}|^2$ с $(\mathbf{A}\circ\mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\circ\mathbf{A}^{-1}$ и равенства

$$\begin{gathered}
|\mathbf{A}\circ\mathbf{B}| = |\mathbf{A}|\,|\mathbf{B}|,\\
\tfrac{1}{2}\left[\mathbf{A}^2 + \overline{(\mathbf{A}^2)}\right] = \tfrac{1}{2}\left(\mathbf{z}_1^2 + \bar{\mathbf{z}}_1^2 + 2C_2\mathbf{z}_2\bar{\mathbf{z}}_2\right) = a_0^2 + C_1a_1^2 + C_2a_2^2 + C_3a_3^2.
\end{gathered} \tag{2.10}$$

Справедливы соотношения для кватернионов

$$|\mathbf{A}|^4 = \det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ a_1 & a_0 & -a_3 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_0 & -a_1 \\ a_3 & -a_2 & a_1 & a_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{P} & -\mathbf{Q} \\ \mathbf{Q} & \mathbf{P} \end{vmatrix} = \left(\mathbf{A}\bar{\mathbf{A}}\right)^2 = \left(a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2\right)^2,$$
$$(\mathbf{P}) = \begin{pmatrix} a_0 & -a_1 \\ a_1 & a_0 \end{pmatrix}, \quad (\mathbf{Q}) = \begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ a_3 & -a_2 \end{pmatrix}, \tag{2.11}$$

$$a_0^3 - 3a_0\left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2\right) = \frac{1}{4}\left[\mathbf{A}^3 + \mathbf{A}_1^3 + \mathbf{A}_2^3 + \mathbf{A}_3^3\right],$$
$$a_0b_0 - a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3 = \frac{1}{4}\left[\mathbf{A}\circ\mathbf{B} + \mathbf{A}_1\circ\mathbf{B}_1 + \mathbf{A}_2\circ\mathbf{B}_2 + \mathbf{A}_3\circ\mathbf{B}_3\right],$$
$$a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = \frac{1}{4}\left[\mathbf{A}\circ\bar{\mathbf{A}} + \mathbf{A}_1\circ\bar{\mathbf{A}}_1 + \mathbf{A}_2\circ\bar{\mathbf{A}}_2 + \mathbf{A}_3\circ\bar{\mathbf{A}}_3\right],$$
$$a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 = \frac{1}{4}\left[\mathbf{A}^2 + \mathbf{A}_1^2 + \mathbf{A}_2^2 + \mathbf{A}_3^2\right] = \frac{1}{2}\left[\mathbf{A}^2 + \overline{(\mathbf{A}^2)}\right],$$
$$3a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = \frac{1}{4}\left[(\mathbf{A}\circ\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_1\circ\mathbf{A}) + (\mathbf{A}\circ\mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_2\circ\mathbf{A}) + (\mathbf{A}\circ\mathbf{A}_3 + \mathbf{A}_3\circ\mathbf{A}) + \right.$$
$$\left.(\mathbf{A}_1\circ\mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_2\circ\mathbf{A}_1) + (\mathbf{A}_1\circ\mathbf{A}_3 + \mathbf{A}_3\circ\mathbf{A}_1) + (\mathbf{A}_2\circ\mathbf{A}_3 + \mathbf{A}_3\circ\mathbf{A}_2)\right]$$

и антикватернионов

$$|\mathbf{A}|^4 = \det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & -a_3 \\ a_1 & a_0 & a_3 & -a_2 \\ a_2 & -a_3 & a_0 & a_1 \\ a_3 & -a_2 & a_1 & a_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{Q} \\ \mathbf{Q} & \mathbf{P} \end{vmatrix} = \left(\mathbf{A}\bar{\mathbf{A}}\right)^2 =$$
$$= (a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 + a_3^2)^2 = \left(a_0 - \sqrt{a_1^2 + a_2^2 - a_3^2}\right)^2\left(a_0 + \sqrt{a_1^2 + a_2^2 - a_3^2}\right)^2,$$
$$(\mathbf{P}) = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ a_1 & a_0 \end{pmatrix}, \quad (\mathbf{Q}) = \begin{pmatrix} a_2 & -a_3 \\ a_3 & -a_2 \end{pmatrix}, \tag{2.12}$$

$$a_0^3 + 3a_0\left(a_1^2 + a_2^2 - a_3^2\right) = \tfrac{1}{4}\left[\mathbf{A}^3 + \mathbf{A}_1^3 + \mathbf{A}_2^3 + \mathbf{A}_3^3\right],$$
$$a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2 - a_3b_3 = \tfrac{1}{4}\left[\mathbf{A}\circ\mathbf{B} + \mathbf{A}_1\circ\mathbf{B}_1 + \mathbf{A}_2\circ\mathbf{B}_2 + \mathbf{A}_3\circ\mathbf{B}_3\right],$$
$$a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 = \tfrac{1}{4}\left[\mathbf{A}\circ\bar{\mathbf{A}} + \mathbf{A}_1\circ\bar{\mathbf{A}}_1 + \mathbf{A}_2\circ\bar{\mathbf{A}}_2 + \mathbf{A}_3\circ\bar{\mathbf{A}}_3\right],$$
$$a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 - a_3^2 = \tfrac{1}{4}\left[\mathbf{A}^2 + \mathbf{A}_1^2 + \mathbf{A}_2^2 + \mathbf{A}_3^2\right] = \tfrac{1}{2}\left[\mathbf{A}^2 + \overline{(\mathbf{A}^2)}\right],$$
$$3a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 - a_3^2 = \tfrac{1}{4}\left[(\mathbf{A}\circ\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_1\circ\mathbf{A}) + (\mathbf{A}\circ\mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_2\circ\mathbf{A}) + (\mathbf{A}\circ\mathbf{A}_3 + \mathbf{A}_3\circ\mathbf{A}) + \right.$$
$$\left. + (\mathbf{A}_1\circ\mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_2\circ\mathbf{A}_1) + (\mathbf{A}_1\circ\mathbf{A}_3 + \mathbf{A}_3\circ\mathbf{A}_1) + (\mathbf{A}_2\circ\mathbf{A}_3 + \mathbf{A}_3\circ\mathbf{A}_2)\right].$$

Причем для кватернионов известный набор чисел $\mathbf{A}_1 = -\mathbf{e}_2\circ\mathbf{A}\circ\mathbf{e}_2$, $\mathbf{A}_2 = -\mathbf{e}_1\circ\mathbf{A}\circ\mathbf{e}_1$, $\mathbf{A}_3 = -\mathbf{e}_3\circ\mathbf{A}\circ\mathbf{e}_3$, согласно (2.8), является необходимым и достаточным в кватернионном анализе (см., например, [5]) для определения a_0, a_1, a_2, a_3 в виде кватернионных полиномов, представленных зависимостями (2.6).

Теперь рассмотрим системы Типа **III** и **IV**. При использовании определения сопряженного числа (2.5) получим, согласно(2.3), модуль $|\mathbf{A}| = \sqrt{\mathbf{A} \circ \bar{\mathbf{A}}}$ не равный действительному числу. В этом случае набор чисел (2.4) только постулируется, а не порождается аналогично (2.8), и определяется, с учетом (2.3), модуль числа [3, 4]

$$|\mathbf{A}| = \sqrt[4]{\mathbf{A} \circ \mathbf{A}_1 \circ \mathbf{A}_2 \circ \mathbf{A}_3} = \sqrt[4]{\left(\mathbf{z}_1^2 - C_2 \mathbf{z}_2^2\right)\left(\bar{\mathbf{z}}_1^2 - C_2 \bar{\mathbf{z}}_2^2\right)}, \quad C_1 C_2 = C_3, \tag{2.13}$$

обратное число $\mathbf{A}^{-1} = \left(\mathbf{A}_1 \circ \mathbf{A}_2 \circ \mathbf{A}_3\right) \big/ |\mathbf{A}|^4$ с $\left(\mathbf{A} \circ \mathbf{B}\right)^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \circ \mathbf{A}^{-1}$. В результате выполняется равенство $|\mathbf{A} \circ \mathbf{B}| = |\mathbf{A}|\,|\mathbf{B}|$, а также имеем известные выражения [3, 4] и некоторые новые соотношения для квадрачисел

$$\begin{gathered}
|\mathbf{A}|^4 = \det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_0 & a_3 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_0 & a_1 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{Q} \\ \mathbf{Q} & \mathbf{P} \end{vmatrix} = \mathbf{A} \circ \mathbf{A}_1 \circ \mathbf{A}_2 \circ \mathbf{A}_3 = \\
= \left(a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 + a_3^2\right)^2 - 4\left(a_1 a_2 - a_0 a_3\right)^2 = \\
= \left(a_0 + a_1 + a_2 + a_3\right)\left(a_0 - a_1 + a_2 - a_3\right)\left(a_0 + a_1 - a_2 - a_3\right)\left(a_0 - a_1 - a_2 + a_3\right) = \\
= a_0^4 + a_1^4 + a_2^4 + a_3^4 - 2\left(a_0^2 a_1^2 + a_0^2 a_2^2 + a_0^2 a_3^2 + a_1^2 a_2^2 + a_2^2 a_3^2 + a_3^2 a_1^2\right) + 8 a_0 a_1 a_2 a_3, \\
(\mathbf{P}) = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ a_1 & a_0 \end{pmatrix}, \quad (\mathbf{Q}) = \begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ a_3 & a_2 \end{pmatrix},
\end{gathered} \tag{2.14}$$

$$\begin{gathered}
a_0^3 + 3a_0\left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2\right) + 6 a_1 a_2 a_3 = \mathbf{A}^3 + \mathbf{A}_1^3 + \mathbf{A}_2^3 + \mathbf{A}_3^3, \\
\begin{vmatrix} a_0 & a_3 & a_2 \\ a_3 & a_0 & a_1 \\ a_2 & a_1 & a_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_0 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_0 & a_1 \\ a_3 & a_1 & a_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_3 \\ a_1 & a_0 & a_2 \\ a_3 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_0 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_0 \end{vmatrix} = \\
= 4a_0\left(a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2\right) + 8 a_1 a_2 a_3 = \\
= \mathbf{A}_1 \circ \mathbf{A}_2 \circ \mathbf{A}_3 + \mathbf{A} \circ \mathbf{A}_2 \circ \mathbf{A}_3 + \mathbf{A} \circ \mathbf{A}_1 \circ \mathbf{A}_3 + \mathbf{A} \circ \mathbf{A}_1 \circ \mathbf{A}_2, \\
2\begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ a_1 & a_0 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ a_2 & a_0 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} a_0 & a_3 \\ a_3 & a_0 \end{vmatrix} = \\
= 6a_0^2 - 2a_1^2 - 2a_2^2 - 2a_3^2 = \mathbf{A} \circ \mathbf{A}_1 + \mathbf{A} \circ \mathbf{A}_2 + \mathbf{A} \circ \mathbf{A}_3 + \mathbf{A}_1 \circ \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_1 \circ \mathbf{A}_3 + \mathbf{A}_2 \circ \mathbf{A}_3, \\
a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = \tfrac{1}{4}\left[\mathbf{A} \circ \mathbf{B} + \mathbf{A}_1 \circ \mathbf{B}_1 + \mathbf{A}_2 \circ \mathbf{B}_2 + \mathbf{A}_3 \circ \mathbf{B}_3\right], \\
a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 = \tfrac{1}{4}\left[\mathbf{A} \circ \bar{\mathbf{A}} + \mathbf{A}_1 \circ \bar{\mathbf{A}}_1 + \mathbf{A}_2 \circ \bar{\mathbf{A}}_2 + \mathbf{A}_3 \circ \bar{\mathbf{A}}_3\right], \\
a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = \tfrac{1}{4}\left[\mathbf{A}^2 + \mathbf{A}_1^2 + \mathbf{A}_2^2 + \mathbf{A}_3^2\right],
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
\mathbf{A}^{-1} = \tfrac{1}{|\mathbf{A}|^4}\big\{a_0\left(a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 + a_3^2\right) + 2a_3\left(a_1 a_2 - a_0 a_3\right) + \\
+ \left[-a_1\left(a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 + a_3^2\right) - 2a_2\left(a_1 a_2 - a_0 a_3\right)\right]\mathbf{e}_1 + \\
+ \left[-a_2\left(a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 + a_3^2\right) - 2a_1\left(a_1 a_2 - a_0 a_3\right)\right]\mathbf{e}_2 + \\
+ \left[a_3\left(a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 + a_3^2\right) + 2a_0\left(a_1 a_2 - a_0 a_3\right)\right]\mathbf{e}_3\big\}
\end{gathered}$$

и для скалярного кватерниона (бикомплексного числа)

$$
\begin{gathered}
|\mathbf{A}|^4 = \det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} a_0 & -a_1 & -a_2 & a_3 \\ a_1 & a_0 & -a_3 & -a_2 \\ a_2 & -a_3 & a_0 & -a_1 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{P} & -\mathbf{Q} \\ \mathbf{Q} & \mathbf{P} \end{vmatrix} = \mathbf{A} \circ \mathbf{A}_1 \circ \mathbf{A}_2 \circ \mathbf{A}_3 = \\
= \left(a_0^2 - a_1^2 + a_2^2 - a_3^2\right)^2 + 4\left(a_0 a_1 + a_2 a_3\right)^2 = \\
= a_0^4 + a_1^4 + a_2^4 + a_3^4 + 2\left(a_0^2 a_1^2 + a_0^2 a_2^2 - a_0^2 a_3^2 - a_1^2 a_2^2 + a_2^2 a_3^2 + a_3^2 a_1^2\right) + 8 a_0 a_1 a_2 a_3, \\
(\mathbf{P}) = \begin{pmatrix} a_0 & -a_1 \\ a_1 & a_0 \end{pmatrix}, \quad (\mathbf{Q}) = \begin{pmatrix} a_2 & -a_3 \\ a_3 & a_2 \end{pmatrix},
\end{gathered}
\tag{2.15}
$$

$$
\begin{gathered}
a_0^3 + 3a_0\left(a_1^2 - a_2^2 - a_3^2\right) + 6 a_1 a_2 a_3 = \mathbf{A}^3 + \mathbf{A}_1^3 + \mathbf{A}_2^3 + \mathbf{A}_3^3, \\
\begin{vmatrix} a_0 & -a_3 & -a_2 \\ -a_3 & a_0 & -a_1 \\ a_2 & a_1 & a_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_0 & -a_2 & a_3 \\ a_2 & a_0 & -a_1 \\ a_3 & a_1 & a_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_0 & -a_1 & a_3 \\ a_1 & a_0 & -a_2 \\ a_3 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_0 & -a_1 & -a_2 \\ a_1 & a_0 & -a_3 \\ a_2 & -a_3 & a_0 \end{vmatrix} = \\
= 4a_0\left(a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 - a_3^2\right) + 8 a_1 a_2 a_3 = \\
= \mathbf{A}_1 \circ \mathbf{A}_2 \circ \mathbf{A}_3 + \mathbf{A} \circ \mathbf{A}_2 \circ \mathbf{A}_3 + \mathbf{A} \circ \mathbf{A}_1 \circ \mathbf{A}_3 + \mathbf{A} \circ \mathbf{A}_1 \circ \mathbf{A}_2, \\
2\begin{vmatrix} a_0 & -a_1 \\ a_1 & a_0 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} a_0 & -a_2 \\ a_2 & a_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_0 & -a_3 \\ -a_3 & a_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_0 & a_3 \\ a_3 & a_0 \end{vmatrix} = \\
= 6a_0^2 + 2a_1^2 + 2a_2^2 - 2a_3^2 = \mathbf{A} \circ \mathbf{A}_1 + \mathbf{A} \circ \mathbf{A}_2 + \mathbf{A} \circ \mathbf{A}_3 + \mathbf{A}_1 \circ \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_1 \circ \mathbf{A}_3 + \mathbf{A}_2 \circ \mathbf{A}_3, \\
a_0 b_0 - a_1 b_1 - a_2 b_2 + a_3 b_3 = \tfrac{1}{4}\left[\mathbf{A} \circ \mathbf{B} + \mathbf{A}_1 \circ \mathbf{B}_1 + \mathbf{A}_2 \circ \mathbf{B}_2 + \mathbf{A}_3 \circ \mathbf{B}_3\right], \\
a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 - a_3^2 = \tfrac{1}{4}\left[\mathbf{A} \circ \bar{\mathbf{A}} + \mathbf{A}_1 \circ \bar{\mathbf{A}}_1 + \mathbf{A}_2 \circ \bar{\mathbf{A}}_2 + \mathbf{A}_3 \circ \bar{\mathbf{A}}_3\right], \\
a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 = \tfrac{1}{4}\left[\mathbf{A}^2 + \mathbf{A}_1^2 + \mathbf{A}_2^2 + \mathbf{A}_3^2\right].
\end{gathered}
$$

Перепишем (2.4) и (2.5) в матричном виде

$$
\mathbf{A}_m = \sum_r^4 \mathbf{H}_{mr}\left(a_r \mathbf{e}_r\right), \quad \bar{\mathbf{A}}_m = \sum_r^4 \bar{\mathbf{H}}_{mr}\left(a_r \mathbf{e}_r\right). \tag{2.16}
$$

Здесь числа $\mathbf{A}_m$ и $a_r\mathbf{e}_r$ отождествляются с $(\mathbf{A}, \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3)$ и $(a_0, a_1\mathbf{e}_1, a_2\mathbf{e}_2, a_3\mathbf{e}_3)$. Симметричная матрица $\mathbf{H}_{mr}$ есть матрица Адамара

$$
\mathbf{H}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_2 & \mathbf{H}_2 \\ \mathbf{H}_2 & -\mathbf{H}_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_1 & \mathbf{H}_1 \\ \mathbf{H}_1 & -\mathbf{H}_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H}_1 = 1 \tag{2.17}
$$

порядка четыре с элементами равными числам ± 1. Матрица Адамара находится методом Сильвестра рекуррентным вычислением из матриц $\mathbf{H}_1$ и $\mathbf{H}_2$ и широко используется в теории информации. Поскольку первая строка и первый столбец состоят из чисел $+1$, то имеем нормализованную матрицу Адамара. Причём элементы строк матрицы являются дискретными значениями ортогональных функций Уолша. Матрица имеет свойство $\mathbf{H}_4\mathbf{H}_4^T = 4\mathbf{I}$ (где $\mathbf{H}_4^T$ и $\mathbf{I}$ – транспонированная и единичная четырехмерные матрицы).

Ненормализованная матрица Адамара $\bar{\mathbf{H}}_{mr}$ с элементами равными числам ± 1 имеет свойства

$$\bar{\mathbf{H}}_4 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{H}}_2 & -\mathbf{H}_2 \\ \bar{\mathbf{H}}_2 & \mathbf{H}_2 \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{H}}_2 = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{H}}_1 & -\mathbf{H}_1 \\ \bar{\mathbf{H}}_1 & \mathbf{H}_1 \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{H}}_1 = 1,$$
$$\bar{\mathbf{H}}_4\bar{\mathbf{H}}_4^T = 4\mathbf{I}, \quad \mathbf{H}_4\bar{\mathbf{H}}_4 = 4\mathbf{g}_4, \quad \mathbf{g}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{2.18}$$

Матрица определяется так же, как кронекеровское произведение матриц предыдущего порядка. Порядок матрицы Адамара равняется числу $m = 2^n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$.

Рассмотрим Тип **III**. В определении модуля квадрачисла произведем замену $a_0 \to a_0 - \lambda$ и, согласно (2.14), получим равенство

$$|\mathbf{A} - \lambda|^4 = \det\left[(\mathbf{A}) - \lambda\,(\mathbf{E})\right] = \begin{vmatrix} a_0 - \lambda & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_0 - \lambda & a_3 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_0 - \lambda & a_1 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 - \lambda \end{vmatrix} = \tag{2.19}$$
$$= (\mathbf{A} - \lambda) \circ (\mathbf{A}_1 - \lambda) \circ (\mathbf{A}_2 - \lambda) \circ (\mathbf{A}_3 - \lambda)\,.$$

Используем известное разложение для определителя

$$\det\left[(\mathbf{A}) - \lambda\,(\mathbf{E})\right] = (-\lambda)^4 + S_1\,(-\lambda)^3 + S_2\,(-\lambda)^2 + S_3\,(-\lambda) + S_4, \tag{2.20}$$

где $S_1 = Sp\,(\mathbf{A}) = 4a_0$, $S_4 = \det(\mathbf{A})$ и S_p $(p = 1, 2, 3, 4)$ равны суммам главных миноров p -го порядка матрицы $(\mathbf{A})$. Тогда запишем следующие равенства

$$S_1 = \varepsilon_m \mathbf{A}_m, \quad S_2 = \tfrac{1}{2!}\varepsilon_{mr}\mathbf{A}_m \circ \mathbf{A}_r, \quad S_3 = \tfrac{1}{3!}\varepsilon_{mrn}\mathbf{A}_m \circ \mathbf{A}_r \circ \mathbf{A}_n,$$
$$S_4 = \tfrac{1}{4!}\varepsilon_{mrnl}\mathbf{A}_m \circ \mathbf{A}_r \circ \mathbf{A}_n \circ \mathbf{A}_l \tag{2.21}$$

с абсолютно симметричными символами $\varepsilon_m = 1$, $\varepsilon_{mr} = \varepsilon_{mrn} = \varepsilon_{mrnl} = 1$, если $m \neq r \neq n \neq l$, а остальные значения нулевые. Выражения (2.21) с симметричными многочленами для гиперкомплексных чисел разных порядков совпадают с соотношениями (2.14). Из (2.20) следует характеристическое уравнение для симметричной матрицы $(\mathbf{A})$

$$\det\left[(\mathbf{A}) - \lambda\,(\mathbf{E})\right] = (-\lambda)^4 + S_1\,(-\lambda)^3 + S_2\,(-\lambda)^2 + S_3\,(-\lambda) + S_4 =$$
$$= (\lambda - \lambda_1)\,(\lambda - \lambda_2)\,(\lambda - \lambda_3)\,(\lambda - \lambda_4) = 0, \tag{2.22}$$

из которого получим формулы

$$S_1 = \varepsilon_m\lambda_m, \quad S_2 = \frac{1}{2!}\varepsilon_{mr}\lambda_m\lambda_r, \quad S_3 = \frac{1}{3!}\varepsilon_{mrn}\lambda_m\lambda_r\lambda_n, \quad S_4 = \frac{1}{4!}\varepsilon_{mrnl}\lambda_m\lambda_r\lambda_n\lambda_l \tag{2.23}$$

с различными четырьмя характеристическими или собственными числами матрицы

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= a_0 + a_1 + a_2 + a_3, \\ \lambda_2 &= a_0 - a_1 + a_2 - a_3, \\ \lambda_3 &= a_0 + a_1 - a_2 - a_3, \\ \lambda_4 &= a_0 - a_1 - a_2 + a_3. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Таким образом, симметричные многочлены для квадрачисел выражаются через суммы главных миноров матрицы $(\mathbf{A})$ или равняются симметричным многочленам для характеристических чисел.

Запишем собственные числа посредством матрицы Адамара $\lambda_m = \mathbf{H}_{mr} a_r$, где a_r отождествляется с (a_0, a_1, a_2, a_3). Для определителя матрицы получим значение

$$S_4 = \det(\mathbf{A}) = |\mathbf{A}|^4 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4 = \mathbf{H}_{1i}\mathbf{H}_{2j}\mathbf{H}_{3k}\mathbf{H}_{4t} a_i a_j a_k a_t = \frac{1}{4!}\varepsilon_{mrnl}\mathbf{H}_{mi}\mathbf{H}_{rj}\mathbf{H}_{nk}\mathbf{H}_{lt} a_i a_j a_k a_t. \tag{2.25}$$

Аналогично рассматриваются и другие типы гиперкомплексных систем.

Определение. Для всех типов уравнение $|\mathbf{A} - \lambda| = 0$ представляет собой характеристическое уравнение для гиперкомплексного числа, а соответствующий набор чисел – характеристические или собственные числа.

Матрица $\mathbf{H}_2$ $(n = 1)$ дается для двух бинарных коммутативных и ассоциативных чисел $\mathbf{z} = a_0 + a_1\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{z}_1 = \bar{\mathbf{z}} = a_0 - a_1\mathbf{e}_1$ с законом композиции $\mathbf{zw} = (a_0 b_0 + C_1 a_1 b_1) + (a_0 b_1 + a_1 b_0)\,\mathbf{e}_1$. Модуль числа и обратное число равняются выражениям $|\mathbf{z}| = \sqrt{\mathbf{z}\mathbf{z}_1} = \sqrt{a^2 - C_1 a_1^2}$ и $\mathbf{z}^{-1} = \mathbf{z}_1 / \,|\mathbf{z}|^2$. В дополнение выпишем некоторые соотношения для бинарных чисел

$$\begin{gathered} a_0 = \tfrac{1}{2}(\mathbf{z} + \mathbf{z}_1) = \tfrac{1}{2}(\bar{\mathbf{z}} + \bar{\mathbf{z}}_1), \quad a_1\mathbf{e}_1 = \tfrac{1}{2}(\mathbf{z} - \mathbf{z}_1) = \tfrac{1}{2}(\bar{\mathbf{z}} - \bar{\mathbf{z}}_1), \\ a_0 b_0 + C_1 a_1 b_1 = \tfrac{1}{2}(\mathbf{zw} + \mathbf{z}_1\mathbf{w}_1), \quad a_0^2 - C_1 a_1^2 = \tfrac{1}{2}(\mathbf{z}\bar{\mathbf{z}} + \mathbf{z}_1\bar{\mathbf{z}}_1), \\ a_0^2 + C_1 a_1^2 = \tfrac{1}{2}(\mathbf{z}^2 + \mathbf{z}_1^2) = \tfrac{1}{2}\left(\mathbf{z}^2 + \overline{(\mathbf{z}^2)}\right), \\ |\mathbf{z}|^2 = \begin{vmatrix} a_0 & C_1 a_1 \\ a_1 & a_0 \end{vmatrix} = (\mathbf{z}\mathbf{z}_1) = (\mathbf{z}\bar{\mathbf{z}}) = a_0^2 - C_1 a_1^2, \\ a_0^3 + 3C_1 a_0 a_1^2 = \tfrac{1}{2}\left[\mathbf{z}^3 + \mathbf{z}_1^3\right], \;\; a_0^4 + 6C_1 a_0^2 a_1^2 + C_1^2 a_1^4 = \tfrac{1}{2}\left[\mathbf{z}^4 + \mathbf{z}_1^4\right]. \end{gathered} \tag{2.26}$$

3. Преобразования координат и времени в релятивистских теориях

Приведем преобразования координат и координатного времени, вытекающих из композиций гиперкомплексных чисел, в различных релятивистских теориях с $a_0 = ct$ и $\mathbf{a} = \mathbf{x}$. Согласно принципу относительности выполняется форм-инвариантность модуля числа $(ct, \mathbf{x})$ и следующее условие

$$\begin{aligned} \mathbf{x} = 0 \qquad &\text{при} \quad \mathbf{x}' = \mathbf{v}'t', \\ \mathbf{x}' = 0 \qquad &\text{при} \quad \mathbf{x} = \mathbf{v}t \end{aligned} \tag{3.1}$$

для начал координат инерциальных систем отсчетов (K) с t, $\mathbf{x} = \{x, y, z\}$ и (K') с t', $\mathbf{x}' = \{x', y', z'\}$, движущихся с относительными скоростями $\mathbf{v}$ и $\mathbf{v}'$, соответственно. Взаимосвязь между скоростями определяется из групповых свойств законов композиций гиперкомплексных чисел.

Тип I. Имеет место релятивистская теория евклидового пространства-времени с форм-инвариантным модулем кватерниона

$$\left(c^2t^2 + x^2 + y^2 + z^2\right)^{1/2} = \left(c^2t'^2 + x'^2 + y'^2 + z'^2\right)^{1/2}. \tag{3.2}$$

Преобразования координат и времени следуют из композиции кватернионов в виде специального ортогонального преобразования

$$(ct', \mathbf{x}') = (k', \mathbf{k}') \circ (ct, \mathbf{x}) \tag{3.3}$$

с модулем кватерниона $(k'^2 + \mathbf{k}'^2)^{1/2} = 1$ для выполнения равенства (3.2) и $\mathbf{k}'^2 = (\mathbf{k}'\mathbf{k}')$. Согласно (3.1) и (3.2) получим следующие соотношения

$$\begin{gathered}(k', \mathbf{k}') = \frac{(1, \mathbf{v}'/c)}{N(\mathbf{v}'/c)}, \quad N(\mathbf{v}'/c) = (1 + \mathbf{v}'^2/c^2)^{1/2}, \\ k' = \frac{1}{N(\mathbf{v}'/c)}, \quad \mathbf{k}' = \frac{\mathbf{v}'/c}{N(\mathbf{v}'/c)}.\end{gathered} \tag{3.4}$$

В итоге запишем прямые преобразования в векторной форме

$$\begin{gathered}\mathbf{x}' = \frac{1}{N(\mathbf{v}'/c)} \left\{\mathbf{x} + \mathbf{v}'t + \frac{1}{c}[\mathbf{v}'\mathbf{x}]\right\}, \\ t' = \frac{1}{N(\mathbf{v}'/c)} \left[t - \frac{1}{c^2}(\mathbf{v}'\mathbf{x})\right]\end{gathered} \tag{3.5}$$

и координатном представлении

$$\begin{gathered}x'_i = \frac{1}{N(\mathbf{v}'/c)} \left[x_i + v'_i t + \tfrac{1}{c} e_{ijk} v'_j x_k\right], \\ t' = \frac{1}{N(\mathbf{v}'/c)} \left[t - \tfrac{1}{c^2}(v'_i x_i)\right]\end{gathered} \tag{3.6}$$

с векторным $[\mathbf{v}'\mathbf{x}]_i = e_{ikl} v'_k x_l$ и скалярным $(\mathbf{v}'\mathbf{x}) = \delta_{ij} v'_i x_j$ произведениями.

Из (3.5) вытекает некоммутативный закон композиции элементов группы координатных трехмерных скоростей в евклидовом пространстве

$$\mathbf{u}' = \mathbf{v}' \circ \mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}' + \mathbf{u} + [\mathbf{v}'\mathbf{u}]/c}{1 - (\mathbf{v}'\mathbf{u})/c^2}, \tag{3.7}$$

где $\mathbf{u}' = \mathbf{x}'/t'$ и $\mathbf{u} = \mathbf{x}/t$ есть скорости в инерциальных системах отсчетов (K') и (K).

Обратные преобразования следуют из композиции $(ct, \mathbf{x}) = (k, \mathbf{k}) \circ (ct', \mathbf{x}')$ с условием $(k, \mathbf{k}) \circ (k', \mathbf{k}') = 1$, где в обратном кватернионе $(k, \mathbf{k}) = (1, \mathbf{v}/c)/N(\mathbf{v}/c)$ имеет место противоположная скорость $\mathbf{v} = -\mathbf{v}'$.

В случае общего ортогонального преобразования

$$(ct', \mathbf{x}') = (k', \mathbf{k}') \circ (ct, \mathbf{x}) \circ (k', \mathbf{k}') \tag{3.8}$$

с модулем кватерниона $(k'^2 + \mathbf{k}'^2)^{1/2} = 1$ получим, согласно (3.1) и (3.2), следующие величины и соотношения

$$\begin{gathered}(k', \mathbf{k}') \circ (k', \mathbf{k}') = \frac{(1, \mathbf{v}'/c)}{N(\mathbf{v}'/c)}, \quad N(\mathbf{v}'/c) = (1 + \mathbf{v}'^2/c^2)^{1/2}, \\ k' = \left[\frac{1 + N(\mathbf{v}'/c)}{2N(\mathbf{v}'/c)}\right]^{1/2}, \quad \mathbf{k}' = \frac{\mathbf{v}'/c}{\{2N(\mathbf{v}'/c)[1 + N(\mathbf{v}'/c)]\}^{1/2}},\end{gathered} \tag{3.9}$$

а также прямые преобразования в векторной форме

$$\begin{aligned}\mathbf{x}' &= \mathbf{x} + \frac{1}{\mathbf{v}'^2}\left[\frac{1}{N(\mathbf{v}'/c)} - 1\right](\mathbf{x}\mathbf{v}')\,\mathbf{v}' + \frac{\mathbf{v}'t}{N(\mathbf{v}'/c)} = \\ &= \frac{1}{N(\mathbf{v}'/c)}\left\{\mathbf{x} + \mathbf{v}'t - \frac{1}{c^2}\frac{[\mathbf{v}'[\mathbf{v}'\mathbf{x}]]}{[1+N(\mathbf{v}'/c)]}\right\}, \\ t' &= \frac{1}{N(\mathbf{v}'/c)}\left[t - \frac{1}{c^2}(\mathbf{v}'\mathbf{x})\right].\end{aligned} \tag{3.10}$$

В таком варианте имеем формулы $\mathbf{x}_\parallel = (\mathbf{x}\mathbf{v}')\,\mathbf{v}'/\mathbf{v}'^2$, $\mathbf{x} = \mathbf{x}_\parallel + \mathbf{x}_\perp$, инвариантность компоненты $\mathbf{x}_\perp$, преобразования (3.10) в эквивалентном виде

$$\mathbf{x}'_\parallel = \frac{1}{N(\mathbf{v}'/c)}\left(\mathbf{x}_\parallel + \mathbf{v}'t\right), \quad \mathbf{x}'_\perp = \mathbf{x}_\perp, \quad t' = \frac{1}{N(\mathbf{v}'/c)}\left(t - \frac{|\mathbf{v}'|}{c^2}\left|\mathbf{x}_\parallel\right|\right) \tag{3.11}$$

и некоммутативный закон композиции элементов группы координатных трехмерных скоростей в евклидовом пространстве

$$\mathbf{u}' = \mathbf{v}' \circ \mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}' + \mathbf{u} - [1+N(\mathbf{v}'/c)]^{-1}[\mathbf{v}'[\mathbf{v}'\mathbf{u}]]/c^2}{1 - (\mathbf{v}'\mathbf{u})/c^2}. \tag{3.12}$$

Для обратных преобразований имеем композицию $(ct, \mathbf{x}) = (k, \mathbf{k}) \circ (ct', \mathbf{x}') \circ (k, \mathbf{k})$ с условием $(k, \mathbf{k}) \circ (k', \mathbf{k}') = 1$ и, следовательно, получим равенство $\mathbf{v} = -\mathbf{v}'$.

Тип IA. Имеет место релятивистская теория псевдоевклидова пространства-времени (в случае специальной теории относительности). Преобразования Лоренца в векторной форме [6]

$$\begin{aligned}\mathbf{x}' &= \mathbf{x} + \frac{1}{\mathbf{v}'^2}\left[\frac{1}{N(\mathbf{v}'/c)} - 1\right](\mathbf{x}\mathbf{v}')\,v' + \frac{\mathbf{v}'t}{N(\mathbf{v}'/c)} = \\ &= \frac{1}{N(\mathbf{v}'/c)}\left\{\mathbf{x} + \mathbf{v}'t + \frac{1}{c^2}\frac{[\mathbf{v}'[\mathbf{v}'\mathbf{x}]]}{[1+N(\mathbf{v}'/c)]}\right\}, \\ t' &= \frac{1}{N(\mathbf{v}'/c)}\left[t + \frac{1}{c^2}(\mathbf{v}'\mathbf{x})\right],\end{aligned} \tag{3.13}$$

вытекают из композиции

$$(ict', \mathbf{x}') = (k', \mathbf{k}') \circ (ict, \mathbf{x}) \circ (k', \mathbf{k}') \tag{3.14}$$

в системе бикватернионов с модулем $(k'^2 + \mathbf{k}'^2)^{1/2} = 1$, получаемой из системы **Типа I** при замене $ct \to ict$. Здесь, согласно (3.1) и (3.2), имеем величины и соотношения

$$\begin{gathered}(k', \mathbf{k}') \circ (k', \mathbf{k}') = \frac{(1, -i\mathbf{v}'/c)}{N(\mathbf{v}'/c)}, \quad N(\mathbf{v}'/c) = (1 - \mathbf{v}'^2/c^2)^{1/2}, \\ k' = \left[\frac{1+N(\mathbf{v}'/c)}{2N(\mathbf{v}'/c)}\right]^{1/2}, \quad \mathbf{k}' = -i\frac{\mathbf{v}'/c}{\{2N(\mathbf{v}'/c)[1+N(\mathbf{v}'/c)]\}^{1/2}}.\end{gathered} \tag{3.15}$$

При преобразованиях сохраняется форм-инвариантным модуль бикватерниона

$$\left(-c^2t^2 + x^2 + y^2 + z^2\right)^{1/2} = \left(-c^2t'^2 + x'^2 + y'^2 + z'^2\right)^{1/2} \tag{3.16}$$

и компонента $\mathbf{x}_\perp$ перпендикулярная к $\mathbf{v}'$, что очевидно из исходных формул [6]

$$\begin{gathered}\mathbf{x}'_\parallel = \frac{1}{N(\mathbf{v}'/c)}\left(\mathbf{x}_\parallel + \mathbf{v}'t\right), \quad \mathbf{x}'_\perp = \mathbf{x}_\perp, \quad t' = \frac{1}{N(\mathbf{v}'/c)}\left(t + \frac{|\mathbf{v}'|}{c^2}\left|\mathbf{x}_\parallel\right|\right), \\ \mathbf{x}_\parallel = \frac{(\mathbf{x}\mathbf{v}')\,\mathbf{v}'}{\mathbf{v}'^2}, \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}_\parallel + \mathbf{x}_\perp, \quad \mathbf{x}' = \mathbf{x}'_\parallel + \mathbf{x}'_\perp\end{gathered} \tag{3.17}$$

для вывода (3.13). Данный подход используется в определении формул (3.11) при выводе преобразований (3.10).

Из (3.13) следует некоммутативный закон композиции элементов группы координатных трехмерных скоростей в евклидовом пространстве

$$\mathbf{u}' = \mathbf{v}' \circ \mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}' + \mathbf{u} + \left[1 + N(\mathbf{v}'/c)\right]^{-1}\left[\mathbf{v}'\left[\mathbf{v}'\mathbf{u}\right]\right]/c^2}{1 + (\mathbf{v}'\mathbf{u})/c^2} \tag{3.18}$$

и его свойства хорошо изучены.

Случай специального ортогонального преобразования в системе бикватернионов имеет место лишь при $\mathbf{v} = (v_x, 0, 0)$ и $\mathbf{x} = (x, 0, 0)$ и подробно рассматривался в [7].

Используя условие для обратного бикватерниона $(k, \mathbf{k}) \circ (k', \mathbf{k}') = 1$ в композиции с обратными преобразованиями, находим равенство $\mathbf{v} = -\mathbf{v}'$.

Тип III. Имеет место релятивистская теория в четырехмерной проективной геометрии. Справедливы преобразования [8, 9] для пространства-времени Бервальда-Моора, представленные в векторной форме [10]

$$\begin{gathered}\mathbf{x}' = \frac{1}{N(\mathbf{v}'/c)}\left\{\mathbf{x} + \mathbf{v}'t + \frac{1}{4c}\sum_m^4 \boldsymbol{\varepsilon}^m(\boldsymbol{\varepsilon}^m\mathbf{v}')(\boldsymbol{\varepsilon}^m\mathbf{x})\right\}, \\ t' = \frac{1}{N(\mathbf{v}'/c)}\left[t + \frac{1}{4c^2}\sum_m^4(\boldsymbol{\varepsilon}^m\mathbf{v}')(\boldsymbol{\varepsilon}^m\mathbf{x})\right]\end{gathered} \tag{3.19}$$

и ее аналоге

$$\begin{gathered}\mathbf{x}' = \frac{1}{N(\mathbf{v}'/c)}\left[\mathbf{x} + \mathbf{v}'t + \frac{1}{c}\{\mathbf{v}'\mathbf{x}\}\right], \\ t' = \frac{1}{N(\mathbf{v}'/c)}\left[t + \frac{1}{c^2}(\mathbf{v}'\mathbf{x})\right],\end{gathered} \tag{3.20}$$

а также в координатном виде [9]

$$\begin{gathered}x'_i = \frac{1}{N(\mathbf{v}'/c)}\left[x_i + v'_i t + \frac{1}{c}\varepsilon_{ijk}v'_j x_k\right], \\ t' = \frac{1}{N(\mathbf{v}'/c)}\left[t + \frac{1}{c^2}(v'_i x_i)\right].\end{gathered} \tag{3.21}$$

Инвариантные значения компонентов векторов $\boldsymbol{\varepsilon}^1 = (1,\,1,\,1)$, $\boldsymbol{\varepsilon}^2 = (-1,\,1,-1)$, $\boldsymbol{\varepsilon}^3 = (1,\,-1,\,-1)$, $\boldsymbol{\varepsilon}^4 = (-1,-1,\,1)$ удовлетворяют равенствам

$$\begin{gathered}\sum_m^4 \varepsilon_i^m = 0, \;\; \tfrac{1}{4}\sum_m^4 \varepsilon_i^m\varepsilon_j^m = \delta_{ij}, \;\; \tfrac{1}{4}\sum_m^4 \varepsilon_i^m\varepsilon_j^m\varepsilon_k^m = \varepsilon_{ijk}, \;\; 1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m\boldsymbol{\varepsilon}^r) = 0, \;\; 1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m)^2 = 4, \\ \{\mathbf{v}'\mathbf{x}\} = \tfrac{1}{4}\sum_m^4 \boldsymbol{\varepsilon}^m(\boldsymbol{\varepsilon}^m\mathbf{v}')(\boldsymbol{\varepsilon}^m\mathbf{x}), \quad (\mathbf{v}'\mathbf{x}) = \tfrac{1}{4}\sum_m^4(\boldsymbol{\varepsilon}^m\mathbf{v}')(\boldsymbol{\varepsilon}^m\mathbf{x})\end{gathered} \tag{3.22}$$

и представляют собой выделенные направления в трехмерном пространстве. Концы этих векторов есть вершины специально ориентированного координатного тетраэдра

[8, 9] В общем случае имеет место произвольно ориентированный координатный тетраэдр [10] с другими значениями компонентов векторов при выполнении равенств (3.22).

При преобразованиях остается форм-инвариантным модуль квадрачисла (или метрическая функция глобального пространства-времени Бервальда-Моора) в векторной форме

$$\left\{\prod_m^4\left[ct+(\boldsymbol{\varepsilon}^m\mathbf{x})\right]\right\}^{1/4}=\left\{\prod_m^4\left[ct'+(\boldsymbol{\varepsilon}^m\mathbf{x}')\right]\right\}^{1/4} \tag{3.23}$$

или в координатном виде

$$\begin{gathered}\left[c^4t^4+x^4+y^4+z^4-2\left(c^2t^2x^2+c^2t^2y^2+c^2t^2z^2+x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2\right)+8ctxyz\right]^{1/4}=\\=\left[c^4t'^4+x'^4+y'^4+z'^4-2\left(c^2t'^2x'^2+c^2t'^2y'^2+c^2t'^2z'^2+x'^2y'^2+y'^2z'^2+z'^2x'^2\right)+8ct'x'y'z'\right]^{1/4}.\end{gathered} \tag{3.24}$$

Новое произведение векторов $\{\mathbf{v}'\mathbf{x}\}_i=\varepsilon_{ikl}v'_kx_l$ коммутативно, дистрибутивно относительно сложения, сочетательно относительно умножения на любое число, равно нулю при равенстве нулю одного из векторов.

Выпишем некоторые соотношения для произведений векторов

$$\begin{gathered}\{\mathbf{ab}\}=\{\mathbf{ba}\}\,,\quad \{\mathbf{ab}\}+\{\mathbf{ac}\}=\{\mathbf{a}\,(\mathbf{b}+\mathbf{c})\}\,,\\(\{\mathbf{ab}\}\,\mathbf{c})=(\{\mathbf{ac}\}\,\mathbf{b})=(\{\mathbf{ba}\}\,\mathbf{c})=(\{\mathbf{bc}\}\,\mathbf{a})=(\{\mathbf{ca}\}\,\mathbf{b})=(\{\mathbf{cb}\}\,\mathbf{a})\,,\\\{\mathbf{a}\,\{\mathbf{bc}\}\}-\{\mathbf{c}\,\{\mathbf{ba}\}\}=\mathbf{c}\,(\mathbf{ba})-\mathbf{a}\,(\mathbf{bc})\,,\\\mathbf{a}^2\mathbf{b}^2+(\{\mathbf{aa}\}\,\{\mathbf{bb}\})=(\mathbf{ab})^2+\{\mathbf{ab}\}^2\,,\\\{\mathbf{aa}\}_i=2a_ka_l,\quad \{\mathbf{a}\,\{\mathbf{aa}\}\}_i=2a_i\left(a_k^2+a_l^2\right),\\(\mathbf{a}\,\{\mathbf{aa}\})=6a_ia_ja_k,\quad (i\neq i\neq k)\,,\\\{\mathbf{a}\,\{\mathbf{a}\,\{\mathbf{aa}\}\}\}=\{\mathbf{aa}\}\,(\mathbf{aa})-\tfrac{1}{3}\mathbf{a}\,(\mathbf{a}\,\{\mathbf{aa}\})\,.\end{gathered} \tag{3.25}$$

Преобразования координат и времени следуют из композиции квадрачисел

$$(ct',\mathbf{x}')=(k',\mathbf{k}')\circ(ct,\mathbf{x}) \tag{3.26}$$

с модулем квадрачисла $\left\{\prod\limits_m^4\left[k'+(\boldsymbol{\varepsilon}^m\mathbf{k}')\right]\right\}^{1/4}=1$ для выполнения равенства (3.23) и, согласно (3.1), величинами и соотношениями

$$\begin{gathered}(k',\mathbf{k}')=\frac{(1,\mathbf{v}'/c)}{N\left(\mathbf{v}'/c\right)},\quad N\left(\mathbf{v}'/c\right)=\left\{\prod_m^4\left[1+\left(\boldsymbol{\varepsilon}^m\mathbf{v}'\right)/c\right]\right\}^{1/4},\\k'=\frac{1}{N\left(\mathbf{v}'/c\right)},\quad \mathbf{k}'=\frac{\mathbf{v}'/c}{N\left(\mathbf{v}'/c\right)}.\end{gathered} \tag{3.27}$$

Из (3.19) и (3.20) получим коммутативный закон композиции элементов группы координатных трехмерных скоростей в рассматриваемом пространстве

$$\mathbf{u}'=\mathbf{v}'\circ\mathbf{u}=\frac{\mathbf{v}'+\mathbf{u}+\frac{1}{4}\sum\limits_m^4\boldsymbol{\varepsilon}^m\left(\boldsymbol{\varepsilon}^m\mathbf{v}'\right)\left(\boldsymbol{\varepsilon}^m\mathbf{u}\right)/c}{1+\left(\mathbf{v}'\mathbf{u}\right)/c^2}=\frac{\mathbf{v}'+\mathbf{u}+\{\mathbf{v}'\mathbf{u}\}/c}{1+\left(\mathbf{v}'\mathbf{u}\right)/c^2}. \tag{3.28}$$

Обратные преобразования следуют из композиции $(ct,\mathbf{x})=(k,\mathbf{k})\circ(ct',\mathbf{x}')$ с условием $(k,\mathbf{k})\circ(k',\mathbf{k}')=1$, из которой вытекает равенство $(k,\mathbf{k})=(1,\mathbf{v}/c)/N(\mathbf{v}/c)$. В итоге получим композицию квадрачисел

$$\frac{(1,\mathbf{v}'/c)}{N\left(\mathbf{v}'/c\right)}\circ\frac{(1,\mathbf{v}/c)}{N\left(\mathbf{v}/c\right)}=1, \tag{3.29}$$

которая после умножения на обратное квадрачисло $(1, \mathbf{v}/c)^{-1}$ запишется так

$$\frac{(1, \mathbf{v}'/c)}{N(\mathbf{v}'/c)\, N(\mathbf{v}/c)} = (1, \mathbf{v}/c)^{-1}. \tag{3.30}$$

Согласно (2.4), рассмотрим квадрачисла

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= 1 + (v_x\mathbf{e}_1 + v_y\mathbf{e}_2 + v_x\mathbf{e}_3)/c, \\ \mathbf{A}_1 &= 1 + (-v_x\mathbf{e}_1 + v_y\mathbf{e}_2 - v_x\mathbf{e}_3)/c, \\ \mathbf{A}_2 &= 1 + (v_x\mathbf{e}_1 - v_y\mathbf{e}_2 - v_x\mathbf{e}_3)/c, \\ \mathbf{A}_3 &= 1 + (-v_x\mathbf{e}_1 - v_y\mathbf{e}_2 + v_x\mathbf{e}_3)/c \end{aligned} \tag{3.31}$$

и, используя первое равенство (2.6) для суммы квадрачисел, получим из (3.30) равенства

$$\begin{aligned} &\frac{1}{N(\mathbf{v}'/c)\, N(\mathbf{v}/c)} = \frac{1}{4}\left(\mathbf{A}^{-1} + \mathbf{A}_1^{-1} + \mathbf{A}_2^{-1} + \mathbf{A}_3^{-1}\right) = \\ &= \frac{1}{4N^4(\mathbf{v}/c)}\left(\mathbf{A}_1 \circ \mathbf{A}_2 \circ \mathbf{A}_3 + \mathbf{A} \circ \mathbf{A}_2 \circ \mathbf{A}_3 + \mathbf{A} \circ \mathbf{A}_1 \circ \mathbf{A}_3 + \mathbf{A} \circ \mathbf{A}_1 \circ \mathbf{A}_2\right), \end{aligned} \tag{3.32}$$

$$(1, \mathbf{v}'/c) = \frac{\mathbf{A}_1 \circ \mathbf{A}_2 \circ \mathbf{A}_3}{(\mathbf{A}_1 \circ \mathbf{A}_2 \circ \mathbf{A}_3 + \mathbf{A} \circ \mathbf{A}_2 \circ \mathbf{A}_3 + \mathbf{A} \circ \mathbf{A}_1 \circ \mathbf{A}_3 + \mathbf{A} \circ \mathbf{A}_1 \circ \mathbf{A}_2)/4}. \tag{3.33}$$

Учитываем соотношения (2.14) для композиции квадрачисел и находим скорость v' в координатном виде

$$\begin{aligned} v_x' &= \frac{-v_x\left[1 - \left(v_x^2 + v_y^2 - v_z^2\right)/c^2\right] - 2v_y(v_xv_y - cv_z)/c^3}{1 - \left(v_x^2 + v_y^2 - v_z^2\right)/c^2 + 2v_z(v_xv_y - cv_z)/c^3}, \\ v_y' &= \frac{-v_y\left[1 - \left(v_x^2 + v_y^2 - v_z^2\right)/c^2\right] - 2v_x(v_xv_y - cv_z)/c^3}{1 - \left(v_x^2 + v_y^2 - v_z^2\right)/c^2 + 2v_z(v_xv_y - cv_z)/c^3}, \\ v_z' &= \frac{v_z\left[1 - \left(v_x^2 + v_y^2 - v_z^2\right)/c^2\right] + 2(v_xv_y - cv_z)/c^3}{1 - \left(v_x^2 + v_y^2 - v_z^2\right)/c^2 + 2v_z(v_xv_y - cv_z)/c^3} \end{aligned} \tag{3.34}$$

или перепишем в векторной форме [10]

$$\begin{aligned} \mathbf{v}' &= \left[\frac{1}{4}\sum_m^4 \frac{\boldsymbol{\varepsilon}^m}{1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m\mathbf{v})/c}\right]\left[\frac{1}{4}\sum_m^4 \frac{1}{1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m\mathbf{v})/c}\right]^{-1} = \\ &= \left[-\frac{1}{4}\sum_m^4 \frac{\boldsymbol{\varepsilon}^m(\boldsymbol{\varepsilon}^m\mathbf{v})}{1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m\mathbf{v})/c}\right]\left[\frac{1}{4}\sum_m^4 \frac{1}{1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m\mathbf{v})/c}\right]^{-1}. \end{aligned} \tag{3.35}$$

В отличие от случаев, рассмотренных для **Типа I**, относительная скорость $\mathbf{v}'$ в системе (K') не равняется противоположной $(-\mathbf{v})$ в системе отсчета (K).

Преобразования координат и времени (3.19)–(3.21) образуют группу, к которой добавим преобразования частичного отражения

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad P_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{3.36}$$

полного отражения и тождественного преобразования

$$P_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.37}$$

с $\det P_1 = \det P_2 = \det P_3 = \det I = 1$.

Группа, состоящая из элементов I, P_1, P_2, P_3, с законом композиции

$$\begin{gathered} P_1^2 = P_2^2 = P_3^2 = I^2 = I\,,\ P_1 I = I P_1\,,\ P_2 I = I P_2\,,\ P_3 I = I P_3\,, \\ P_1 P_2 = P_2 P_1 = P_3, \quad P_2 P_3 = P_3 P_2 = P_1\,,\ \ P_3 P_1 = P_1 P_3 = P_2 \end{gathered} \tag{3.38}$$

есть коммутативная группа отражений.

4. Матричное представление элементов группы трехмерных скоростей

Рассмотрим матричное представление элементов группы трехмерных скоростей для релятивистских теорий в системах кватернионов и квадрачисел, не различая скорости в разных системах отсчетов и относительные скорости между ними с равенством $c = 1$.

Тип I. В случае специального ортогонального преобразования преобразуем (3.3) и запишем преобразование кватернионов

$$\frac{(1, \mathbf{u})}{N(\mathbf{u})} = \frac{(1, \mathbf{u}_1)}{N(\mathbf{u}_1)} \circ \frac{(1, \mathbf{u}_2)}{N(\mathbf{u}_2)}, \quad N(\mathbf{u}) = \left(1 + \mathbf{u}^2\right)^{1/2} \tag{4.1}$$

с некоммутативным законом композиции группы трехмерных скоростей

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 \circ \mathbf{u}_2 = \frac{\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + [\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2]}{1 - (\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2)}\,. \tag{4.2}$$

Выполняются групповые аксиомы: ассоциативности $(\mathbf{u}_1 \circ \mathbf{u}_2) \circ \mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_1 \circ (\mathbf{u}_2 \circ \mathbf{u}_3)$, единичный элемент в $\mathbf{u} \circ \mathbf{E} = \mathbf{u}$ соответствует кватерниону $(1, \mathbf{0})$ с нулевым значением скорости, обратный элемент в $\mathbf{u} \circ \mathbf{u}^{-1} = \mathbf{E}$ (или в $\mathbf{u} + \mathbf{u}^{-1} + [\mathbf{u}\mathbf{u}^{-1}] = 0$), равняется противоположной скорости, то есть $\mathbf{u}^{-1} = -\mathbf{u}$. Таким образом, обратный кватернион имеет известный вид

$$(1, \mathbf{u})^{-1} = \frac{(1, \mathbf{u}^{-1})}{N(\mathbf{u})} = \frac{(1, -\mathbf{u})}{N(\mathbf{u})} \tag{4.3}$$

и, соответственно, вытекает равенство $\mathbf{v}' = \mathbf{v}^{-1} = -\mathbf{v}$ для относительных скоростей в релятивистской теории. Используем равенства

$$N(\mathbf{u}) = \frac{N(\mathbf{u}_1)\, N(\mathbf{u}_2)}{1 - (\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2)}, \quad N(\mathbf{u})\, N\left(\mathbf{u}^{-1}\right) = \left[1 - \left(\mathbf{u}\mathbf{u}^{-1}\right)\right], \tag{4.4}$$

вытекающие из (3.2).

Представим кватернион $(1, \mathbf{u}) / N(\mathbf{u})$ с учетом (1.6) и (1.7) в форме матрицы

$$\mathbf{H}(\mathbf{u}) = \frac{\mathbf{A}(\mathbf{u})}{|\mathbf{A}(\mathbf{u})|} = \frac{1}{N(\mathbf{u})} \begin{pmatrix} 1 & -u_x & -u_y & -u_z \\ u_x & 1 & -u_z & u_y \\ u_y & u_z & 1 & -u_x \\ u_z & -u_y & u_x & 1 \end{pmatrix}, \tag{4.5}$$

где определитель имеет значение $|\mathbf{A}(\mathbf{u})| = N(\mathbf{u})$.

Множество таких матриц образует группу по бинарной операции умножения $\mathbf{H}(\mathbf{u}) = \mathbf{H}(\mathbf{u}_1)\,\mathbf{H}(\mathbf{u}_2)$, которая есть обычная операция умножения матриц. Умножение ассоциативно, единичный элемент в $\mathbf{H}(\mathbf{u})\,\mathbf{E} = \mathbf{H}(\mathbf{u})$ соответствует единичной матрице $\mathbf{E} = \mathbf{H}(\mathbf{0})$ и обратный элемент в $\mathbf{H}(\mathbf{u})\,\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{u}) = \mathbf{E}$ есть обратная матрица

$$\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{u}) = \mathbf{H}\left(\mathbf{u}^{-1}\right) = \frac{1}{N\left(\mathbf{u}^{-1}\right)}\begin{pmatrix} 1 & -u_x^{-1} & -u_y^{-1} & -u_z^{-1} \\ u_x^{-1} & 1 & -u_z^{-1} & u_y^{-1} \\ u_y^{-1} & u_z^{-1} & 1 & -u_x^{-1} \\ u_z^{-1} & -u_y^{-1} & u_x^{-1} & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{N(\mathbf{u})}\begin{pmatrix} 1 & u_x & u_y & u_z \\ -u_x & 1 & u_z & -u_y \\ -u_y & -u_z & 1 & u_x \\ -u_z & u_y & -u_x & 1 \end{pmatrix}. \tag{4.6}$$

Тип III. Запишем преобразования квадрачисел (3.26) в виде

$$\frac{(1,\mathbf{u})}{N(\mathbf{u})} = \frac{(1,\mathbf{u}_1)}{N(\mathbf{u}_1)} \circ \frac{(1,\mathbf{u}_2)}{N(\mathbf{u}_2)} \tag{4.7}$$

с коммутативным законом композиции элементов трехмерных скоростей

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 \circ \mathbf{u}_2 = \frac{\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \{\mathbf{u}_1\mathbf{u}_2\}}{1 + (\mathbf{u}_1\mathbf{u}_2)}, \tag{4.8}$$

где модуль квадрачисла

$$\begin{gathered} N(\mathbf{u}) = \sqrt[4]{\mathbf{A}\circ\mathbf{A}_1\circ\mathbf{A}_2\circ\mathbf{A}_3} = 1 + u_x^4 + u_y^4 + u_z^4 - \\ -2\left(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 + u_x^2u_y^2 + u_y^2u_z^2 + u_z^2u_x^2\right) + 8u_xu_yu_z \end{gathered}. \tag{4.9}$$

Обратное квадрачисло $(1,\mathbf{u})^{-1} = (1,\mathbf{u}^{-1})\,/\,N(\mathbf{u})$ имеет обратный элемент $\mathbf{u}^{-1}$ группы трехмерных скоростей, не равный противоположному элементу $(-\mathbf{u})$ и удовлетворяющий условию $\mathbf{u} + \mathbf{u}^{-1} + \{\mathbf{u}\mathbf{u}^{-1}\} = 0$. Групповые свойства закона композиции (4.8) подробно изучены в [10]. Отметим лишь необходимые равенства

$$N(\mathbf{u}) = \frac{N(\mathbf{u}_1)\,N(\mathbf{u}_2)}{1 + (\mathbf{u}_1\mathbf{u}_2)}, \quad N(\mathbf{u})\,N\left(\mathbf{u}^{-1}\right) = 1 + \left(\mathbf{u}\mathbf{u}^{-1}\right). \tag{4.10}$$

Представим квадрачисло $(1,\mathbf{u})\,/\,N(\mathbf{u})$ в форме матрицы

$$\mathbf{H}(\mathbf{u}) = \frac{\mathbf{A}(\mathbf{u})}{|\mathbf{A}(\mathbf{u})|} = \frac{1}{N(\mathbf{u})}\begin{pmatrix} 1 & u_x & u_y & u_z \\ u_x & 1 & u_z & u_y \\ u_y & u_z & 1 & u_x \\ u_z & u_y & u_x & 1 \end{pmatrix}. \tag{4.11}$$

Множество матриц вида (4.11) образуют абелеву группу матриц с законом композиции $\mathbf{H}(\mathbf{u}) = \mathbf{H}(\mathbf{u}_1)\,\mathbf{H}(\mathbf{u}_2)$. Умножение ассоциативно, единичный элемент в $\mathbf{H}(\mathbf{u})\,\mathbf{E} = \mathbf{H}(\mathbf{u})$ соответствует единичной матрице $\mathbf{E} = \mathbf{H}(\mathbf{0})$ и обратный элемент в $\mathbf{H}(\mathbf{u})\,\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{u}) = \mathbf{E}$ есть обратная матрица

$$\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{u}) = \mathbf{H}\left(\mathbf{u}^{-1}\right) = \frac{1}{N\left(\mathbf{u}^{-1}\right)}\begin{pmatrix} 1 & u_x^{-1} & u_y^{-1} & u_z^{-1} \\ u_x^{-1} & 1 & u_z^{-1} & u_y^{-1} \\ u_y^{-1} & u_z^{-1} & 1 & u_x^{-1} \\ u_z^{-1} & u_y^{-1} & u_x^{-1} & 1 \end{pmatrix}. \tag{4.12}$$

Наряду с исходной матрицей $H(\mathbf{u})$ определим еще три матрицы $\mathbf{H}_1(\mathbf{u})$, $\mathbf{H}_2(\mathbf{u})$, $\mathbf{H}_3(\mathbf{u})$ вида

$$\mathbf{H}_1(\mathbf{u}) = \frac{\mathbf{A}_1(\mathbf{u})}{|\mathbf{A}_1(\mathbf{u})|} = \frac{1}{N(\mathbf{u})}\begin{pmatrix} 1 & -u_x & u_y & -u_z \\ -u_x & 1 & -u_z & u_y \\ u_y & -u_z & 1 & -u_x \\ -u_z & u_y & -u_x & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{H}_2(\mathbf{u}) = \frac{\mathbf{A}_2(\mathbf{u})}{|\mathbf{A}_2(\mathbf{u})|} = \frac{1}{N(\mathbf{u})}\begin{pmatrix} 1 & u_x & -u_y & -u_z \\ u_x & 1 & -u_z & -u_y \\ -u_y & -u_z & 1 & u_x \\ -u_z & -u_y & u_x & 1 \end{pmatrix}, \tag{4.13}$$

$$\mathbf{H}_3(\mathbf{u}) = \frac{\mathbf{A}_3(\mathbf{u})}{|\mathbf{A}_3(\mathbf{u})|} = \frac{1}{N(\mathbf{u})}\begin{pmatrix} 1 & -u_x & -u_y & u_z \\ -u_x & 1 & u_z & -u_y \\ -u_y & u_z & 1 & -u_x \\ u_z & -u_y & -u_x & 1 \end{pmatrix},$$

где определители имеют значение $|\mathbf{A}_1(\mathbf{u})| = |\mathbf{A}_2(\mathbf{u})| = |\mathbf{A}_3(\mathbf{u})| = N(\mathbf{u})$

Далее, используя значения обратной матрицы

$$\frac{\mathbf{A}(\mathbf{u}^{-1})}{N(\mathbf{u}^{-1})\,N(\mathbf{u})} = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{u}), \tag{4.14}$$

и других обратных матриц из (4.13), получим равенство

$$\frac{1}{N(\mathbf{u}^{-1})\,N(\mathbf{u})}\mathbf{E} = \frac{1}{4}\left[\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{u}) + \mathbf{A}_1^{-1}(\mathbf{u}) + \mathbf{A}_2^{-1}(\mathbf{u}) + \mathbf{A}_3^{-1}(\mathbf{u})\right]. \tag{4.15}$$

Тогда из (4.14) с учетом (4.15) вытекает соотношение

$$\frac{1}{4}\left[\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{u}) + \mathbf{A}_1^{-1}(\mathbf{u}) + \mathbf{A}_2^{-1}(\mathbf{u}) + \mathbf{A}_3^{-1}(\mathbf{u})\right]\mathbf{A}\left(\mathbf{u}^{-1}\right) = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{u}), \tag{4.16}$$

из которого после вычислений находим матрицу

$$\mathbf{A}\left(\mathbf{u}^{-1}\right) = \frac{\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{u})}{1 - \left(v_x^2 + v_y^2 - v_z^2\right) + 2v_z\left(v_x v_y - c v_z\right)}, \tag{4.17}$$

где скорость $\mathbf{u}^{-1}$ имеет компоненты

$$u_x^{-1} = -\frac{\begin{vmatrix} u_x & u_z & u_y \\ u_y & 1 & u_x \\ u_z & u_x & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & u_z & u_y \\ u_z & 1 & u_x \\ u_y & u_x & 1 \end{vmatrix}}, \quad u_y^{-1} = \frac{\begin{vmatrix} u_x & 1 & u_y \\ u_y & u_z & u_x \\ u_z & u_y & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & u_z & u_y \\ u_z & 1 & u_x \\ u_y & u_x & 1 \end{vmatrix}}, \quad u_z^{-1} = -\frac{\begin{vmatrix} u_x & 1 & u_z \\ u_y & u_z & 1 \\ u_z & u_y & u_x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & u_z & u_y \\ u_z & 1 & u_x \\ u_y & u_x & 1 \end{vmatrix}}, \tag{4.18}$$

совпадающие с выражениями (3.34) и равные отношениям алгебраических дополнений элементов u_x, u_y, u_z в симметричной матрице $\mathbf{A}(\mathbf{u})$ к одинаковому значению алгебраических дополнений диагональных элементов (или главных миноров третьего порядка).

Используя значения векторных произведений (3.25), запишем скорость $\mathbf{u}^{-1}$ и $N(\mathbf{u})$ в новых векторных формах

$$\begin{gathered}\mathbf{u}^{-1}=-\frac{\mathbf{u}\big[1-(\mathbf{uu})\big]-\{\mathbf{uu}\}+\{\mathbf{u}\{\mathbf{uu}\}\}}{1-(\mathbf{uu})-\frac{1}{3}(\mathbf{u}\{\mathbf{uu}\})},\\ N(\mathbf{u})=1+(\mathbf{uu})^2-2\big[(\mathbf{uu})+\{\mathbf{uu}\}\{\mathbf{uu}\}\big]+\tfrac{4}{3}\big(\mathbf{u}\{\mathbf{uu}\}\big).\end{gathered} \tag{4.19}$$

5. Заключение

В работе приводятся некоторые результаты релятивистской теории в четырехкомпонентных гиперкомплексных системах, использующие набор чисел (2.4) и их сопряженные величины (2.5). Эти числа связаны матрицей Адамара с базисными элементами системы гиперкомплексных чисел. Рассматривается матричное представление гиперкомплексных чисел. Задача о характеристическом уравнении для матриц индуцировало изучение характеристического уравнения для гиперкомплексных чисел.

Важным свойством гиперкомплексных чисел является тот факт, что выражения с четвертой степенью модуля квадрачисла и второй степенью модуля антикватерниона в отличие от соответствующих выражений для кватерниона и скалярного кватерниона могут принимать отрицательные значения.

В настоящее время имеют место релятивистские теории, основой которых являются система бикватернионов и квадрачисел. В одном случае рассматривается псевдоевклидова геометрия Минковского с $dx^i=(cdt,d\mathbf{x})$ и метрической функцией

$$F=\left(c^2dt^2-dx^2-dy^2-dz^2\right)^{1/2}=\left(\frac{1}{4}H_{im}\bar{H}_{mj}dx^idx^j\right)^{1/2}, \tag{5.1}$$

а в другом – финслерова геометрия Бервальда-Моора с метрической функцией

$$\begin{gathered}F=\big[(cdt+dx+dy+dz)(cdt-dx+dy-dz)\\ (cdt+dx-dy-dz)(cdt-dx-dy+dz)\big]^{1/4}=\\ =\left(\tfrac{1}{4!}\varepsilon_{mrnl}H_{mi}H_{rj}H_{nk}H_{lt}dx^idx^jdx^kdx^t\right)^{1/4}=\left(\varepsilon_{1234}H_{1i}H_{2j}H_{3k}H_{4t}dx^idx^jdx^kdx^t\right)^{1/4}.\end{gathered} \tag{5.2}$$

В двумерном случае обе геометрии совпадают и, учитывая $\bar{H}_{mj}=\varepsilon_{mk}H_{kj}$, имеем

$$\begin{gathered}F=(c^2dt^2-dx^2)^{1/2}=\left(\tfrac{1}{2}H_{im}\bar{H}_{mj}dx^idx^j\right)^{1/2}=\\ =\left(\tfrac{1}{2}\varepsilon_{mr}H_{mi}H_{rj}dx^idx^j\right)^{1/2}=(\varepsilon_{12}H_{1i}H_{2j}dx^idx^j)^{1/2}.\end{gathered} \tag{5.3}$$

Новые соотношения для гиперкомплексных чисел с сопряженными величинами реабилитируют незаслуженно забытую роль традиционной операции сопряжения в Типах **III** и **IV**. Здесь выбраны некоторые композиции чисел до четвертого порядка, результатами которых являются действительные числа. Другие соотношения легко получаются для композиций с высшими порядками чисел. Причем симметричные многочлены относительно этих чисел в соотношениях (2.11) и (2.14) могут также рассматриваться как метрические функции соответствующих пространств-времени.

Список литературы

[1] Hamilton W. R. On a New Species of Imaginary Quantities connected with a Theory of Quaternions. Proc. Royal Irish Acad. 1844. V. 2. P. 424–434.

[2] Розенфельд Б. А. Многомерные пространства. Москва: Гостехиздат, 1955. 648 с.

[3] Pavlov D. G. Hypercomplex Numbers, Associated Metric Spaces, and Extension of Relativistic Hyperboloid. arXiv: gr-gc/0206004. 2002. V. 1. P. 1–16.

[4] Елисеев В. И., Фохт А. С. Методы теории функций пространственного комплексного переменного. Препринт 84.61 Института математики АН УССР. Киев. 1984. 57 с.

[5] Sudbery A. Quaternionic analysis. Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 1979. V.85. P. 199–225. (Русский перевод: Содбери Э. Кватернионный анализ. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. 2004. №2 (2). С. 130–157.)

[6] Herglotz G. Uber die Mechanik des Deformierbaren Korpers vom Standpunkte der Relativitatstheorie. Annalen der Physik. 1911. Bande. 36 (4. Folge). P. 493–533.

[7] Зарипов Р. Г. О законе сложения параллельных скоростей в релятивистской и классической механике. Изв. АН ЭССР. Физика, математика. 1979. Т. 28. №4. С. 359–361.

[8] Bogoslovsky G. Yu., Goenner H. F. On the possibility of the phase transitions in the geometric structure of space-time. Phys. Lett. A. 1998. V. 244. P. 222–226.

[9] Павлов Д. Г., Гарасько Г. И. Понятие расстояния и модуля скорости в линейных финслеровых пространствах. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. 2005. №.1 (3). С. 1–15.

[10] Зарипов Р. Г. Отношение одновременности в финслеровом пространстве-времени. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. 2006. № 1 (5). С. 28–47.

Статья поступила в редакцию 15.03.2007 г.