ОБ АНАЛОГЕ РЕШЕНИЯ ФРИДМАНА В ФИНСЛЕРОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ С АНИЗОТРОПНОЙ МЕТРИКОЙ БЕРВАЛЬДА-МООРА

Д. Г. Павлов

Московский Государственный Технический Университет им. Н. Э. Баумана
geom2004@mail.ru

Г. И. Гарасько

ГУП ВЭИ, Москва, Россия
gri9z@mail.ru

Гиперболические (двойные) числа H_2 во многом напоминают, а в чем-то двойственны обычным комплексным числам C, однако в отличие от последних, естественным обобщением которых до четырехкомпонентной алгебры исторически принято считать некоммутативную алгебру кватернионов Q, H_2 имеют естественное расширение уже на коммутативную алгебру H_4. Пространство, соответствующее числам H_4, – четырехмерно и ему может быть сопоставлено пространство событий, только вместо изотропной по пространственным координатам геометрии Минковского оно обладает анизотропной финслеровой геометрией Бервальда-Моора. Оказывается, что для пространств H_2 и H_4 справедливы построения, аналогичные методу комплексного потенциала, когда каждой аналитической функции $F(z)$ ставится в соответствие та или иная физическая интерпретация. На конкретном примере элементарной функции натурального логарифма показывается, что для любых аналитических функций $F(h_n)$ также удается ввести естественную физическую интерпретацию в виде конформно выделенных нелинейных полей в пространстве-времени с финслеровой геометрией. Для четырех измерений поле, которое сопоставляется логарифмической функции $\ln(h_4)$, можно считать обобщением фридмановской модели Вселенной, однако в отличие от той, получающийся в данном случае аналог закона расширения Хаббла оказывается существенно анизотропным и имеет тесную связь с симметриями ромбододекаэдра.

1 Введение

Линейные финслеровы пространства с метрической функцией Бервальда-Моора [1] обладают бесконечномерной группой конформных преобразований [2]. В этом плане они весьма схожи с евклидовой плоскостью. Причем аналогично тому, как конформным преобразованиям евклидовой плоскости сопоставляются алгебра и аналитические функции комплексной переменной z [3], конформным преобразованиям n-мерного пространства с метрикой Бервальда-Моора можно сопоставить алгебру и аналитические функции гиперкомплексной переменной h_n [4]. Поскольку у всех аналитических функций комплексной переменной имеются физические интерпретации (такой метод получил название *метода комплексного потенциала*), возникает закономерный вопрос: нет ли возможности дать физическую интерпретацию и H-аналитическим функциям? В случае положительного ответа на данный вопрос, соответствующий подход обобщился бы до *метода гиперкомплексного потенциала*, причем его можно было бы применять не только к многомерным, но и к нестационарным задачам.

Так как физическое пространство четырехмерно, в качестве основного объекта настоящего исследования взяты гиперкомплексные числа H_4 [5], а в качестве аналитической функции – нелинейная аналитическая функция натуральный логарифм от переменной h_4. Выбор именно такой H_4-аналитической функции обусловлен центральной ролью аналогичной функции в теории комплексного потенциала, которой, как известно, ставится в соответствие стационарное поле точечного источника на евклидовой плоскости [6].

В физико-математической литературе существует довольно распространенное заблуждение, что максимальная размерность пространства, которому можно естественным образом сопоставить алгебру невырожденных коммутативно-ассоциативных гиперкомплексных чисел (поличисел) P_n и теорию аналитических функций p_n переменной, равняется двум. В связи с этим обычно обращаются к теореме Фробениуса, утверждающей, что единственными представителями числовых множеств, обладающими коммутативно-ассоциативными алгебрами с делением, – являются поля действительных и комплексных чисел. Одним из следствий данной теоремы является то, что множества чисел H_n, начиная с $n = 2$, обладают алгебрами не с полным, а с частичным делением, то есть содержат в себе так называемые *делители нуля* – объекты, не равные нулю, деление на которые не определено, как и на сам нуль. Однако из факта наличия в коммутативно-ассоциативных алгебрах H_n делителей нуля вовсе не следует отсутствие у них аналитических функций, а у тех – естественных физических интерпретаций. Более того, делители нуля не мешают, а способствуют таким интерпретациям, поскольку им можно сопоставить точки и вектора светового конуса, являющегося, как известно, одним из важнейших объектов релятивистской физики.

Как ни странно это звучит, но теорема Фробениуса в весьма значительной степени способствовала сегодняшней ситуации, когда у физиков редко возникает желание искать геометрические и физические интерпретации H_4-аналитических функций. Так в [6] утверждается: "Возможности обобщения алгебры векторов на размерность выше двух чрезвычайно ограничены. В алгебре есть теорема Фробениуса, согласно которой система эллиптических комплексных чисел является единственным (с точностью до изоморфизма) расширением поля действительных чисел с сохранением всех законов сложения и умножения. Если отказаться от переместительного закона, то появляется еще одна возможность – четырехмерные векторы (система кватернионов), а если пожертвовать и сочетательным, то еще одна возможность – восьмимерные векторы (октавы Кели). Других возможностей построить умножение векторов, хорошо сочетающееся со сложением, нет. В частности, нельзя построить и хорошей алгебраической системы для трехмерных векторов." Ясно, что авторы имели ввиду исключительно пространства с квадратичными метриками и совсем не принимали в расчет существование линейных финслеровых пространств с n-арными метрическими формами. Однако, какими бы неявными ограничениями они ни руководствовались, существование векторных пространств коммутативно-ассоциативных гиперкомплексных чисел, обладающих финслеровыми метриками, – факт. А значит и вопросы геометрической и физической интерпретации таких чисел и аналитических функций от них становятся достаточно важными.

2 Некоторые математические элементы теории гиперкомплексного потенциала

Пусть $x^1, x^2, ..., x^n$ – финслерово пространство [7] с метрической функцией

$$L(\xi; x) \equiv L(\xi^1, \xi^2, ..., \xi^n; x^1, x^2, ..., x^n)\,, \tag{1}$$

где $\xi^1, \xi^2, ..., \xi^n$ – касательное пространство в точке $M(x^1, x^2, ..., x^n)$ основного пространства. Тогда элемент длины определяется формулой

$$ds = L(dx^1, dx^2, ..., dx^n; x^1, x^2, ..., x^n)\,, \tag{2}$$

а обобщенные импульсы

$$p_i = \frac{\partial L(dx; x)}{\partial (dx^i)} \tag{3}$$

связаны соотношением

$$\Phi(p; x) = 0\,, \tag{4}$$

которое принято называть тангенциальным уравнением индикатрисы. Функцию $\Phi(p; x)$ будем называть *функцией Финслера,* она, как известно, определяется неоднозначно: с точностью до перехода от тангенциального уравнения (4) к эквивалентному уравнению в той же форме записи. В классических финслеровых пространствах [7] тангенциальному уравнению индикатрисы всегда можно придать некоторую специальную форму

$$\Phi_m(p; x) - 1 = 0\,, \tag{5}$$

где $\Phi_m(p; x)$ – однородная функция m-го порядка $(m > 0)$ по первым n аргументам. Если функция $S(x)$ определяет в рассматриваемом финслеровом пространстве нормальную конгруэнцию геодезических, то она должна удовлетворять дифференциальному уравнению

$$\Phi\left(\frac{\partial S}{\partial x^1}, ... \frac{\partial S}{\partial x^n}; x\right) = 0\,. \tag{6}$$

Функцию $S(x)$ в классической механике называют действием как функцией координат, а уравнение, соответствующее уравнению (6), – уравнением Гамильтона-Якоби. Если функция $S(x)$ известна, то поле обобщенных импульсов находится как

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial x^i}\,, \tag{7}$$

а траектории движения (мировые линии, линии тока) находятся из системы уравнений

$$\dot{x}^i = \left.\frac{\partial \Phi(p; x)}{\partial p_i}\right|_{p_k = \frac{\partial S}{\partial x^k}} \cdot \lambda(x)\,, \tag{8}$$

где $\lambda(x) \neq 0$ – некоторая функция, $\dot{x}^i \equiv \dfrac{dx^i}{d\tau}$, а τ – параметр вдоль мировой линии, параметр эволюции.

Финслерово пространство, конформно связанное с исходным, имеет метрическую функцию вида

$$\tilde{L}(\xi; x) = \kappa(x) L(\xi; x)\,, \tag{9}$$

где $\kappa(x) > 0$ – некая скалярная функция. Элемент длины в таком пространстве определяется формулой

$$d\tilde{s} = \kappa(x) L(dx; x)\,. \tag{10}$$

Обобщенные импульсы

$$\tilde{p}_i = \kappa(x) \frac{\partial L(dx; x)}{\partial (dx^i)} \tag{11}$$

связаны соотношением

$$\Phi_m(\tilde{p}; x) - \kappa^m = 0\,, \tag{12}$$

то есть функция Финслера конформно связанного пространства определяется следующим образом:

$$\tilde{\Phi}(\tilde{p};x) = \Phi_m(\tilde{p};x) - \kappa^m\,. \tag{13}$$

Пусть $S_W(x)$ – произвольная скалярная функция, тогда в области, где выполняется неравенство

$$\Phi_m\left(\frac{\partial S_W}{\partial x^1},\dots\frac{\partial S_W}{\partial x^n};x\right) > 0\,, \tag{14}$$

определена финслерова геометрия, конформно связанная с исходной, и поле коэффициента растяжения-сжатия

$$\kappa(x) = \sqrt[m]{\Phi_m\left(\frac{\partial S_W}{\partial x^1},\dots\frac{\partial S_W}{\partial x^n};x\right)}\,, \tag{15}$$

причем в этой же области функция $S_W(x)$ определяет нормальную конгруэнцию геодезических

$$\dot{x}^i = \left.\frac{\partial\Phi_m(\tilde{p};x)}{\partial\tilde{p}_i}\right|_{\tilde{p}_k=\frac{\partial S_W}{\partial x^k}} \cdot\tilde{\lambda}(x)\,, \tag{16}$$

где $\tilde{\lambda}(x)\neq 0$ – некоторая функция, $\dot{x}^i \equiv \dfrac{dx^i}{d\tau}$, а τ – параметр эволюции. Таким образом, функция $S_W(x)$ является действием как функцией координат в конформно связанном пространстве.

Если функция $S_W(x)$ удовлетворяет уравнению поля [8], однозначно определенному для такой функции в любом финслеровом пространстве, то функцию $S_W(x)$ будем называть *Мировой функцией* [9]. Во всяком финслеровом пространстве Мировой функции соответствует лагранжиан, а значит могут быть получены и тензор энергии-импульса, и законы сохранения.

Любое невырожденное поличисловое пространство $P_n \ni X$ является финслеровым, причем любая компонента произвольной аналитической функции $F(X)$ в нем удовлетворяет уравнению поля для Мировой функции $S_W(x)$. Аналитические функции можно перемножать, брать их линейные комбинации, строить функцию от функции, при этом опять будут получаться аналитические функции. Если не оговорено другое, в качестве Мировой функции в поличисловом пространстве будем брать компоненту $U(x^1,\dots,x^2)$ при единице

$$F(X) = U(x)\cdot 1 + V^1(x)\cdot j_1 + \dots + V^{n-1}(x)\cdot j_{n-1} \tag{17}$$

в базисе $1, j_1, \dots, j_{n-1}$, в котором имеет место экспоненциальное представление поличисел, то есть

$$X = |X|\exp(\alpha^1\cdot j_1 + \dots + \alpha^{n-1}\cdot j_{n-1})\,, \tag{18}$$

тогда в этом базисе

$$\ln(X/b) = \ln(|X|/b)\cdot 1 + \dots\,, \tag{19}$$

где b – действительное число, а $|X|$ – модуль поличисла [4].

3 Пространство двойных чисел H_2

Двойные, или гиперболические числа H_2, определяются как двумерная линейная алгебра, в которой существует базис $1,\ j$ со следующими свойствами:

$$H_2 \ni X = x^0 + x^1\cdot j\,,\qquad 1\cdot 1 = 1\,,\quad 1\cdot j = j\cdot 1 = j\,,\quad j^2 = 1\,, \tag{20}$$

где x^0, x^1 – действительные числа.

В качестве потенциала выберем действительную компоненту аналитической функции

$$F(X) \equiv U + j \cdot V = a \cdot \ln(X/b) \equiv \frac{a}{2} \ln\left[\frac{(x^0)^2 - (x^1)^2}{b}\right] + j \cdot \frac{a}{2} \ln\left[\frac{x^0 + x^1}{x^0 - x^1}\right], \tag{21}$$

a, b – действительные числа, то есть

$$U(x^0, x^1) = \frac{a}{2} \ln\left[\frac{(x^0)^2 - (x^1)^2}{b}\right]. \tag{22}$$

Аналитическая функция (21), а значит и потенциал (22), определены в конусе будущего:

$$x^0 > |x^1|. \tag{23}$$

Чтобы записать уравнения (16), которым подчиняются мировые линии материальных объектов, надо определиться с выбором функции Финслера и функции $\tilde{\lambda}(x)$. И хотя наблюдаемые величины не зависят от этого выбора, от него зависит конкретный вид уравнений (16).

Если мы хотим, чтобы формулы (16) напоминали формулы теории комплексного потенциала, то следует выбрать

$$\tilde{\Phi}(p; x) = p_0^2 - p_1^2 - \kappa^2(x^0, x^1), \qquad \lambda(x^0, x^1) = \frac{1}{2} \tag{24}$$

тогда

$$\acute{x}^0 = \frac{\partial U}{\partial x^0}, \qquad \acute{x}^1 = -\frac{\partial U}{\partial x^1}, \tag{25}$$

где $\acute{x}^i \equiv \dfrac{dx^i}{d\acute{\tau}}$, а $\acute{\tau}$ – некий параметр вдоль мировой линии, параметр эволюции. В этом случае

$$\sqrt{(\acute{x}^0)^2 - (\acute{x}^1)^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x^0}\right)^2 - \left(\frac{\partial U}{\partial x^1}\right)^2} \equiv \kappa(x^0, x^1), \tag{26}$$

где $\kappa(x^0, x^1)$ – коэффициент растяжения-сжатия конформного преобразования в пространстве H_2, которое (преобразование) определяется аналитической функцией (21). Таким образом, вдоль мировой линии в данном случае

$$\sqrt{(dx^0)^2 - (dx^1)^2} = \kappa(x^0, x^1)\, d\acute{\tau}.$$

Если мы хотим, чтобы уравнения (16) по форме и физической интерпретации соответствовали формулам СТО, то следует выбрать

$$\tilde{\Phi}(p; x) = \sqrt{p_0^2 - p_1^2} - \kappa(x^0, x^1), \qquad \lambda(x^0, x^1) = 1, \tag{27}$$

тогда

$$\dot{x}^0 = \frac{\frac{\partial U}{\partial x^0}}{\sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x^0}\right)^2 - \left(\frac{\partial U}{\partial x^1}\right)^2}}, \qquad \dot{x}^1 = -\frac{\frac{\partial U}{\partial x^1}}{\sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x^0}\right)^2 - \left(\frac{\partial U}{\partial x^1}\right)^2}}, \tag{28}$$

где $\dot{x}^i \equiv \dfrac{dx^i}{d\tau}$, а τ – некий параметр вдоль мировой линии. В этом случае

$$\sqrt{(\dot{x}^0)^2 - (\dot{x}^1)^2} = 1, \tag{29}$$

то есть в этом случае параметр эволюции суть собственное время, соответствующее мировой линии в пространстве H_2, умноженное на скорость света. Таким образом, вдоль мировой линии в данном случае

$$\sqrt{(dx^0)^2-(dx^1)^2}=d\tau\,.$$

Выбирая формулы (27), для потенциала (22) получим дифференциальные уравнения для определения мировых линий, по которым двигаются материальные объекты:

$$\frac{dx^0}{d\tau}=\frac{x^0}{\sqrt{(x^0)^2-(x^1)^2}}\,,\qquad \frac{dx^1}{d\tau}=\frac{x^1}{\sqrt{(x^0)^2-(x^1)^2}}\qquad\Rightarrow\qquad \frac{dx^1}{dx^0}=\frac{x^1}{x^0}\,. \tag{30}$$

Решениями этой системы уравнений являются мировые линии:

$$(x^0,x^1)=\left(\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\,,\,\frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\right)\cdot\tau\,,\qquad x^1=\frac{v}{c}\cdot x^0\,, \tag{31}$$

где c – скорость света, а v – скорость материального объекта, соответствующего данной мировой линии, конечно, $|v|<c$. Все такие мировые линии являются лучами, исходят из начала отсчета, особой точки потенциала, и расположены в конусе будущего.

Совместим себя с наблюдателем (мировой линией) $v=0$ и будем вести отсчет времени начиная с некоторого значения t_0. Тогда мы будем наблюдать *удаление* материальных объектов от нас с различными скоростями, зависящими от расстояния до этих объектов. Модуль координаты x^1 будет характеризовать нам истинное пространственное расстояние [10] r до других объектов. Тогда из формул (30) и (31) получим

$$\frac{dr}{dt}=\frac{r}{t_0+t}=|v|\,,\quad t\ll t_0\qquad\Rightarrow\qquad |v|\simeq\frac{1}{t_0}\cdot r\,. \tag{32}$$

Таким образом, мы получили закон Хаббла с коэффициентом Хаббла $H=\frac{1}{t_0}$, что вполне согласуется с формулой, которая получается для этого закона в космологической модели Эйнштейна – де Ситтера [11], где $H=\frac{2}{3t_0}$.

4 Поличисловое пространство H_4

Гиперкомплексные числа H_4 [4] изоморфны алгебре действительных квадратных диагональных матриц 4×4. Координаты в изотропном базисе пространства H_4 будем обозначать $\xi^1,\xi^2,\xi^3,\xi^4,$ а сам базис – $\psi_1,\psi_2,\psi_3,\psi_4$, то есть любое число можно представить в виде разложения

$$X=\xi^1\psi_1+\xi^2\psi_2+\xi^3\psi_3+\xi^4\psi_4\,, \tag{33}$$

или четверки действительных чисел $(\xi^1,\xi^2,\xi^3,\xi^4)$. Бинарная операция поличислового умножения определяется заданием правила умножения для базисных векторов:

$$\psi_i\psi_j=\begin{cases}\psi_i\,, & \text{если}\quad i=j\\ 0\,, & \text{если}\quad i\neq j\,.\end{cases} \tag{34}$$

Если $\xi^1\xi^2\xi^3\xi^4>0$, то для числа $X\in H_4$ определена норма

$$|X|=\sqrt[4]{\xi^1\xi^2\xi^3\xi^4}>0\,. \tag{35}$$

Таблица 1:

$\times$	1	j	k	jk
1	1	j	k	jk
j	j	1	jk	k
k	k	jk	1	j
jk	jk	k	j	1

Пространство H_4 является метрическим финслеровым пространством с метрической функцией

$$L(d\xi) = \sqrt[4]{d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3 d\xi^4}\,, \tag{36}$$

которую никакими преобразованиями координат нельзя привести к квадратному корню из дифференциальной квадратичной формы, то есть такое финслерово пространство качественно отличается от евклидова и псевдоевклидовых пространств размерности четыре. Метрику, которая определяется метрической функцией (36), называют иногда метрикой Бервальда-Моора [1].

В пространстве H_4 существует базис $1, j, k, jk$,

$$\left.\begin{aligned} 1 &= \psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \psi_4\,,\\ j &= \psi_1 + \psi_2 - \psi_3 - \psi_4\,,\\ k &= \psi_1 - \psi_2 + \psi_3 - \psi_4\,,\\ jk &= \psi_1 - \psi_2 - \psi_3 + \psi_4\,, \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

закон умножения базисных элементов которого определен Таб. 1.

Координаты x^0, x^1, x^2, x^3 числа X в этом базисе связаны с координатами $\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4$ того же числа в изотропном базисе формулами:

$$\left.\begin{aligned} \xi^1 &= x^0 + x^1 + x^2 + x^3\,,\\ \xi^2 &= x^0 + x^1 - x^2 - x^3\,,\\ \xi^3 &= x^0 - x^1 + x^2 - x^3\,,\\ \xi^4 &= x^0 - x^1 - x^2 + x^3\,. \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

Базис $1, j, k, jk$ будем называть "ортонормированным", именно в нем в конусе $\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4 > 0$ определено экспоненциальное представление чисел $X \in H_4$.

Если гладкая функция $F(x)$ одной действительной переменной x представима как полином или сходящийся ряд переменной x, то функция $F(X)$ переменной $X \in H_4$ также определена и является аналитической, в изотропном базисе она запишется следующим образом:

$$F(X) = F(\xi^1)\psi_1 + F(\xi^2)\psi_2 + F(\xi^3)\psi_3 + F(\xi^4)\psi_4\,. \tag{39}$$

В "ортонормированном" базисе $1, j, k, jk$ та же функция имеет вид:

$$\begin{aligned} F(X) = \frac{1}{4}\big[&F(x^0+x^1+x^2+x^3)+F(x^0+x^1-x^2-x^3)+\\ &+F(x^0-x^1+x^2-x^3)+F(x^0-x^1-x^2+x^3)\big]\cdot 1+\\ +\frac{1}{4}\big[&F(x^0+x^1+x^2+x^3)+F(x^0+x^1-x^2-x^3)-\\ &-F(x^0-x^1+x^2-x^3)-F(x^0-x^1-x^2+x^3)\big]\cdot j+\\ +\frac{1}{4}\big[&F(x^0+x^1+x^2+x^3)-F(x^0+x^1-x^2-x^3)+\\ &+F(x^0-x^1+x^2-x^3)-F(x^0-x^1-x^2+x^3)\big]\cdot k+\\ +\frac{1}{4}\big[&F(x^0+x^1+x^2+x^3)-F(x^0+x^1-x^2-x^3)-\\ &-F(x^0-x^1+x^2-x^3)+F(x^0-x^1-x^2+x^3)\big]\cdot jk\,. \end{aligned} \tag{40}$$

В "ортонормированных" координатах x^0, x^1, x^2, x^3 метрическая функция (36) финслерова пространства H_4 принимает вид

$$\begin{aligned} L(dx) = [&(dx^0+dx^1+dx^2+dx^3)(dx^0+dx^1-dx^2-dx^3)\times\\ &\times(dx^0-dx^1+dx^2-dx^3)(dx^0-dx^1-dx^2+dx^3)]^{1/4}\,. \end{aligned} \tag{41}$$

Разложим выражение в квадратных скобках по степеням dx^0:

$$\begin{aligned} L^4(dx) = &\left(dx^0\right)^4 - 2\left(dx^0\right)^2\left[\left(dx^1\right)^2+\left(dx^2\right)^2+\left(dx^3\right)^2\right] + 8\,dx^0dx^1dx^2dx^3+\\ &+\ \left(dx^1\right)^4+\left(dx^2\right)^4+\left(dx^3\right)^4 - 2\left[\left(dx^1\right)^2\left(dx^2\right)^2+\left(x^1\right)^2\left(x^3\right)^2+\left(x^2\right)^2\left(dx^3\right)^2\right]. \end{aligned} \tag{42}$$

Предположим, что

$$dx^\alpha = \varepsilon dx^0\,,\quad \varepsilon \ll 1\,,\qquad \alpha = 1,2,3, \tag{43}$$

тогда с точностью до членов ε^2 включительно по сравнению с 1 для элемента длины $L_{H_4}(dx)$ в пространстве H_4 получим следующую формулу:

$$L_{H_4}(dx) \simeq \sqrt{(dx^0)^2-(dx^1)^2-(dx^2)^2-(dx^3)^2}\,. \tag{44}$$

Справа здесь стоит элемент длины в пространстве Минковского, поэтому справедливо следующее утверждение: координаты x^0, x^1, x^2, x^3 в "ортонормированном" базисе пространства H_4 в нерелятивистском приближении в геометрическом (метрическом) плане ведут себя также как общепринятые координаты четырехмерного пространства-времени Минковского.

Элемент длины в пространстве, конформно связанном с пространством H_4, в изотропном базисе имеет вид

$$ds = \kappa(\xi^1,\xi^2,\xi^3,\xi^4)\sqrt[4]{d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3 d\xi^4}\,. \tag{45}$$

Обобщенные импульсы находятся по формулам

$$p_i = \frac{1}{4}\kappa(\xi)\frac{\sqrt[4]{d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3 d\xi^4}}{d\xi^i}\,, \tag{46}$$

а тангенциальное уравнение индикатрисы можно записать, например, так

$$p_1p_2p_3p_4 - \frac{\kappa^4(\xi)}{4^4} = 0\,. \tag{47}$$

Выберем в качестве функции $F(x)$ в формуле (39) функцию

$$F(x) = a\ln(x/b)\,, \tag{48}$$

где a, $b > 0$ – действительные параметры. Потенциал – это действительная часть аналитической функции $F(X)$ (40), поэтому

$$U(\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4) = \frac{a}{4}\ln\left(\frac{\xi^1\xi^2\xi^3\xi^4}{b^4}\right)\,. \tag{49}$$

Для нахождения мировых линий [8], которые порождает потенциал (49), необходимо решить систему уравнений (16), которая в нашем конкретном случае принимает вид

$$\dot{\xi}^i = \frac{\dfrac{\partial U}{\partial \xi^1}\dfrac{\partial U}{\partial \xi^2}\dfrac{\partial U}{\partial \xi^3}\dfrac{\partial U}{\partial \xi^4}}{\dfrac{\partial U}{\partial \xi^i}}\lambda(\xi)\,, \tag{50}$$

где $\lambda(\xi) \neq 0$ – некоторая скалярная функция. При соответствующем выборе $\lambda(\xi)$, уравнения принимают более простой вид

$$\dot{\xi}^i = \xi^i\,. \tag{51}$$

Введем переменную

$$x^0 = \frac{1}{4}(\xi^1 + \xi^2 + \xi^3 + \xi^4)\,, \tag{52}$$

которая в четырехмерном пространстве Бервальда-Моора играет ту же роль, что и координата x^0 в пространстве Минковского, тогда

$$\dot{x}^0 = x^0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d\xi^i}{dx^0} = \frac{\xi^i}{x^0} \qquad \Rightarrow \qquad \xi^i = \xi^i_0 \cdot x^0\,, \tag{53}$$

где ξ^i_0 – постоянные. Таким образом, все мировые линии – лучи, исходящие из начала координат (особой точки потенциала), причем движение материальных тел является равномерным и прямолинейным, поэтому для координат в "ортонормированном" базисе имеют место следующие формулы:

$$x^\mu = v^\mu x^0\,, \qquad \frac{dx^\mu}{dx^0} = \frac{x^\mu}{x^0}\,, \tag{54}$$

где $\mu = 1, 2, 3$, а v^μ – действительные постоянные.

Совместим себя с наблюдателем (мировой линией) $v^\mu = 0$ и будем вести отсчет времени начиная с некоторого момента t_0. Далее можно повторить те же рассуждения, что и в предыдущем разделе, считая, что скорость удаления материальных объектов $|v| = \frac{dr}{dt}$, где r – истинное пространственное расстояние. Тогда мы будем наблюдать *удаление* от нас материальных объектов с различными скоростями, зависящими от истинного пространственного расстояния до объекта. При достаточно малых расстояниях по сравнению с радиусом Вселенной можно предположить, что

$$r \simeq r_{ev} \equiv \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^2)^2}\,, \tag{55}$$

и тогда из формул (53) следует обычный закон Хаббла

$$\frac{dr}{dt} \simeq \frac{1}{t_0}\cdot r\,, \tag{56}$$

и этот закон не зависит от пространственных направлений.

Если истинное пространственное расстояние в H_4 искать тем же способом, как это обычно делается в СТО и ОТО [10], то в результате получим [12]:

$$r \simeq r_d = |x^\alpha| + |x^\beta|\,; \qquad \text{причем} \qquad |x^\gamma| \le |x^\alpha|, |x^\beta|\,. \tag{57}$$

Здесь $\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3;\;\; \alpha \neq \beta,\ \alpha \neq \gamma,\ \beta \neq \gamma$. В евклидовом пространстве гиперповерхность, определяемая уравнением

$$r_d = const\,, \tag{58}$$

является ромбододекаэдром [13]. Есть некоторые основания считать, что, по-видимому, истинное пространственное расстояние при приближении к границам Вселенной, может иметь вид (57). В этом случае закон Хаббла принимает вид

$$|v| \simeq \frac{1}{t_0} \cdot r_d\,. \tag{59}$$

Если наши представления о пространстве остались евклидовыми, теоретически полученную формулу для закона Хаббла следует переписать следующим образом:

$$|v| \simeq \frac{r_d}{t_0 r_{ev}} \cdot r_{ev}\,. \tag{60}$$

Тогда коэффициент Хаббла определяется формулой

$$H = \frac{r_d}{t_0 r_{ev}}\,, \tag{61}$$

и он зависит от пространственных направлений, имея 12 максимумов, 6 минимумов и 8 локальных минимумов, причём

$$\frac{H_{max}}{H_{min}} = \sqrt{2}\,, \qquad \frac{H^{loc}_{max}}{H_{min}} = \frac{1+\sqrt{2}}{2}\,. \tag{62}$$

Каждый минимум окружен четырьмя максимумами, а каждый локальный минимум – тремя максимумами.

Таким образом, при изменении расстояния до галактик от самых малых до самых больших можно ожидать изменения коэффициента Хаббла в пределах

$$\frac{1}{t_0} \quad \xrightarrow{\quad H \quad} \quad \frac{r_d}{t_0 r_{ev}}\,, \tag{63}$$

и появление зависимости этого коэффициента от пространственных направлений.

5 Заключение

Самым существенным результатом данной работы авторы считают позитивное решение проблемы распространения методов комплексного потенциала на случай многих пространственно-временных измерений. У физиков и математиков до сих пор бытует устоявшееся мнение, которое сформулировано Лаврентьевым и Шабатом [6]: "Основным математическим аппаратом решения плоских задач и задач с осевой симметрией является теория конформных и квазиконформных отображений. К великому сожалению, в пространстве конформные отображения составляют очень узкий класс (согласно классической теореме Лиувилля они сводятся к сдвигу, растяжению с поворотом и инверсиям относительно сферы), а квазиконформные, хотя их запас и довольно велик -

еще сравнительно мало изучены" – и которое (мнение) переносится на все пространства размерности больше двух. Оказывается, переход от классических квадратичных геометрий к финслеровым и связанным с ними n-арным формам позволяет не только обойти запреты, накладываемые теоремой Лиувиля, но и обобщить сам метод комплексного потенциала, сделав его действительно многомерным, то есть гиперкомплексным.

С другой стороны, тот факт, что многообразия с метрической функцией Бервальда-Моора наравне с чисто пространственными измерениями включают в себя еще и время, позволяет надеяться на решение не только задач статики, но и существенно нестационарных. Рассмотренные примеры с логарифмическим гиперкомплексным потенциалом в двумерном и четырехмерном пространствах с метрикой Бервальда-Моора подтверждают эту надежду, так как, по сути, представляют собой ни что иное, как финслеровы аналоги модели нестационарной Вселенной Фридмана; только теперь в пространстве-времени четырех измерений космологическое решение в плане его восприятия наблюдателем оказывается существенно анизотропным. Это связано с тем, что пространства невырожденных поличисел P_n при $n > 2$ всегда обладают дополнительной анизотропией по сравнению с квадратичными пространствами той же размерности. Учитывая же недавно полученные астрономические данные [14], указывающие на наличие сложной анизотропии коэффициента Хаббла, можно иначе взглянуть и на другое устоявшееся и по-видимому ошибочное убеждение, а именно, на уверенность большинства физиков в применимости к релятивистским моделям реального мира исключительно квадратичных геометрий.

References

[1] Богословский Г. Ю. 4-импульс частицы и уравнение массовой поверхности в полностью анизотропном пространстве-времени. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 2 (4), т. 2, 2005.

[2] Гарасько Г. И. Обобщение понятия конформных преобразований. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 1 (3), т. 2, 2005.

[3] Привалов И. И. Введение в теорию функций комплексной переменной. М., "Наука", 1977.

[4] Гарасько Г. И., Павлов Д. Г. Геометрия невырожденных поличисел. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 1 (7), т. 4, 2007.

[5] Павлов Д. Г. Обобщение аксиом скалярного произведения. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 1 (1), т. 1, 2004.

[6] Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Проблемы гидродинамики и их математические модели. М., "Наука", 1973.

[7] Рашевский П. К. Геометрическая теория уравнений с частными производными, М.-Л., ОГИЗ, 1947.

[8] Гарасько Г. И. Теория поля и финслеровы пространства. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 2 (6), т. 3, 2006.

[9] Гарасько Г. И. О Мировой функции и связи между геометриями. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 1 (5), т. 3, 2006.

[10] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. М., "Наука", 1967.

[11] Меллер К. Теория относительности. М., Атомиздат, 1975.

[12] Bogoslovsky G. Yu., Goenner H. F. On the possibility of phase transitions in the geometric structure of space-time, Phys. Lett. A 244 (1998) 222–228.

[13] Bogoslovsky G. Yu., Goenner H. F., Finslerian spaces possessing local relativistic symmetry, Gen. Relativ. Gravit. 31 (1999) 1565–1603.

[14] McClure M. L., Dyer C. C. Anisotropy in the Hubble constant as jbserved in the HST Extragalactic Distance Scale Key Project results. arXiv:astro-po/0703556 v1