ПРОСТРАНСТВО, КОНФОРМНО СВЯЗАННОЕ С ПРОСТРАНСТВОМ БЕРВАЛЬДА-МООРА

Г. И. Гарасько

ГУП ВЭИ, Россия, Москва

gri9z@mail.ru

Пространство, конформно связанное с пространством Бервальда-Моора, обладает единственным скалярным полем, для которого записывается двумерные уравнение поля и находится частные специальные решения: 1) с индикатрисой, экспоненциально расширяющейся во времени, 2) со стационарным полем коэффициента расширения-сжатия и "силой" притяжения к центру. Для второго решения сформулирована квантово-механическая задача на собственные значения. В качестве второй, дополнительной к временной, переменной используется негладкая переменная – аналог радиуса сферической системы координат в трехмерном евклидовом пространстве.

1 Введение

Пространство ассоциативно-коммутативных гиперкомплексных чисел H_4 является метрическим пространством с метрикой Бервальда-Моора, поэтому все изложенное в этой работе в той же мере относится к пространству поличисел H_4, которые изоморфны алгебре квадратных диагональных действительных матриц 4×4.

Пространство Минковского x^0, x^1, x^2, x^3 и пространство Бервальда-Моора в координатах, соответствующих специальному "ортонормированному" базису, экспериментально неразличимы, если измерения производятся с точностью до вторых степеней (включительно) отношений компонент пространственных скоростей к скорости света. В силу этого вопрос о том, какова геометрия микромира, где работает квантовая механика, и какова геометрия мегамира, где, как считается, работает ОТО, остается, вообще говоря, открытым. Вполне возможно, что микромир и мегамир ближе к пространству Бервальда-Моора, а макромир остается за пространством Минковского с группой симметрии Лоренца. Это вполне соответствует гипотезе Д. Павлова [1] о физической значимости алгебры поличисел H_4.

Пространство $\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4$, конформно связанное с пространством Бервальда-Моора, является финслеровым пространством [2] и по определению имеет метрическую функцию следующего вида:

$$L(d\xi;\xi) = \kappa(\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4)\sqrt[4]{d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3 d\xi^4}\,, \tag{1}$$

где $\kappa(\xi) > 0$ – единственное независимое действительное скалярное поле в этом пространстве. Длина отрезка кривой $\xi^i = \xi^i(\tau)$, $\tau \in [\tau_1, \tau_2]$ – параметр вдоль кривой, вычисляется в таком пространстве с помощью интеграла вдоль кривой

$$l_{1,2} = \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} \kappa(\xi)\sqrt[4]{\dot{\xi}^1\dot{\xi}^2\dot{\xi}^3\dot{\xi}^4}\ d\tau\,, \tag{2}$$

где $\dot{\xi}^i \equiv \dfrac{d\xi^i}{d\tau}$. Компоненты обобщенного импульса находятся по формулам:

$$p_i = \frac{1}{4}\kappa(\xi)\frac{\sqrt[4]{d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3 d\xi^4}}{d\xi^i}\,. \tag{3}$$

Они связаны между собой соотношением

$$p_1p_2p_3p_4 = \frac{\kappa^4(\xi)}{4^4}\,, \tag{4}$$

которое принято называть тангенциальным уравнением индикатрисы [2] и записывать следующим образом:

$$\Phi(p;\xi) = 0\,. \tag{5}$$

Функцию $\Phi(p;\xi)$ будем называть *функцией Финслера,* она определяется не однозначно, а с точностью до перехода от одного тангенциального уравнения индикатрисы к любому другому эквивалентному уравнению, записанному в виде (5).

Формулы (1) – (4) имеют такой вид только в специальном базисе, который принято называть изотропным. Эти же формулы можно записать в ковариантном виде, для этого необходимо использовать метрический тензор с четырьмя нижними индексами в формулах (1) – (3) и соответствующий тензор с четырьмя верхними индексами для формулы (4). В данной работе такие тензоры использоваться не будут.

Если функция $\kappa(\xi)$ известна, то определены метрическая функция $L(d\xi;\xi)$ и функция Финслера $\Phi(p;\xi)$, а действие как функция координат $S(\xi)$ может быть найдено как решение уравнения Гамильтона-Якоби

$$\Phi\left(\frac{\partial S}{\partial \xi};\xi\right) = 0\,. \tag{6}$$

Тогда уравнения для нахождения экстремалей ("геодезических") записываются или как уравнения Лагранжа-Эйлера

$$\frac{d}{d\tau}\frac{\partial L(\dot\xi;\xi)}{\partial \dot\xi^i} - \frac{\partial L(\dot\xi;\xi)}{\partial \xi^i} = 0\,, \tag{7}$$

или в каноническом виде

$$\dot\xi^i = \frac{\partial \Phi}{\partial p_i}\cdot\lambda'(p;\xi)\,, \qquad p_i = -\frac{\partial \Phi}{\partial \xi^i}\cdot\lambda'(p;\xi)\,, \tag{8}$$

где $\lambda'(p;\xi) > 0$ – произвольная функция, или в виде

$$\dot\xi^i = \left.\frac{\partial \Phi}{\partial p_i}\right|_{p_i=\frac{\partial S}{\partial \xi^i}}\cdot\lambda(\xi)\,, \tag{9}$$

где $\lambda(\xi) > 0$ – некоторая функция.

Формулы (6) – (9) справедливы для любого финслерова пространства. В нашем конкретном случае пространства ξ^1,ξ^2,ξ^3,ξ^4, конформно связанного с пространством Бервальда-Моора, уравнение Гамильтона-Якоби (6) есть

$$\frac{\partial S}{\partial \xi^1}\frac{\partial S}{\partial \xi^2}\frac{\partial S}{\partial \xi^3}\frac{\partial S}{\partial \xi^4} = \frac{\kappa^4(\xi)}{4^4}\,, \tag{10}$$

а уравнения (9) для нахождения экстремалей ("геодезических") запишутся как

$$\dot\xi^i = \frac{\dfrac{\partial S}{\partial \xi^1}\dfrac{\partial S}{\partial \xi^2}\dfrac{\partial S}{\partial \xi^3}\dfrac{\partial S}{\partial \xi^4}}{\dfrac{\partial S}{\partial \xi^i}}\cdot\lambda(\xi)\,. \tag{11}$$

Можно считать, что экстремали ("геодезические") являются траекториями движения некоторых материальных объектов (частиц). Таким образом, в любом финслеровом пространстве (в частности, нашем пространстве $\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4$) определена классическая механика неких материальных частиц вместе с лагранжевым формализмом (7), аналогом гамильтонового формализма (8) с заменой функции Гамильтона на функцию Финслера и методом Гамильтона-Якоби (6), (9).

Если следовать гипотезе *самодостаточности геометрии* [3]: все поля, входящие в метрическую функцию, должны удовлетворять принципу экстремальности любого объема – то поле $\kappa(\xi)$ не может быть произвольным.

Скалярное действительное поле $\kappa(\xi)$ всегда можно выразить через другое действительное скалярное поле $S_W(\xi)$, которое связано с полем $\kappa(\xi)$ соотношением

$$\frac{\partial S_W}{\partial \xi^1}\frac{\partial S_W}{\partial \xi^2}\frac{\partial S_W}{\partial \xi^3}\frac{\partial S_W}{\partial \xi^4} = \frac{\kappa^4(\xi)}{4^4}\,, \tag{12}$$

поэтому лагранжиан для получения уравнения поля [3] будет иметь вид

$$\mathfrak{L} = const\cdot\kappa^4(\xi) \equiv const\cdot 4^4\cdot\frac{\partial S_W}{\partial \xi^1}\frac{\partial S_W}{\partial \xi^2}\frac{\partial S_W}{\partial \xi^3}\frac{\partial S_W}{\partial \xi^4}\,, \tag{13}$$

а само уравнение поля запишется следующим образом:

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial \xi^1}\left[\frac{\partial S_W}{\partial \xi^2}\frac{\partial S_W}{\partial \xi^3}\frac{\partial S_W}{\partial \xi^4}\right] + \frac{\partial}{\partial \xi^2}\left[\frac{\partial S_W}{\partial \xi^1}\frac{\partial S_W}{\partial \xi^3}\frac{\partial S_W}{\partial \xi^4}\right] + \\ + \frac{\partial}{\partial \xi^3}\left[\frac{\partial S_W}{\partial \xi^1}\frac{\partial S_W}{\partial \xi^2}\frac{\partial S_W}{\partial \xi^4}\right] + \frac{\partial}{\partial \xi^4}\left[\frac{\partial S_W}{\partial \xi^1}\frac{\partial S_W}{\partial \xi^2}\frac{\partial S_W}{\partial \xi^3}\right] = 0\,.\end{gathered} \tag{14}$$

Решение уравнения (14) $S_W(\xi)$ будем называть *Мировой функцией.* Если Мировая функция известна, то всегда можно воспользоваться соотношением (12) для получения поля коэффициента расширения-сжатия $\kappa(\xi)$:

$$\kappa(\xi) = 4\sqrt[4]{\frac{\partial S_W}{\partial \xi^1}\frac{\partial S_W}{\partial \xi^2}\frac{\partial S_W}{\partial \xi^3}\frac{\partial S_W}{\partial \xi^4}}\,. \tag{15}$$

Действие как функция координат $S(\xi)$ – это решение уравнения Гамильтона-Якоби (10) при заданной функции $\kappa(\xi)$, а Мировая функция $S_W(\xi)$ – это решение полевого уравнения (14), причем скалярное поле $\kappa(\xi)$ в этом случае определяется с помощью полученного решения $S_W(\xi)$ полевого уравнения по формуле (15).

Мировая функция $S_W(\xi)$ определяет в пространстве $\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4$ нормальную конгруэнцию экстремалей ("геодезических"), которые находятся из уравнений

$$\dot{\xi}^i = \frac{\dfrac{\partial S_W}{\partial \xi^1}\dfrac{\partial S_W}{\partial \xi^2}\dfrac{\partial S_W}{\partial \xi^3}\dfrac{\partial S_W}{\partial \xi^4}}{\dfrac{\partial S_W}{\partial \xi^i}}\cdot\lambda(\xi)\,, \tag{16}$$

где $\lambda(\xi) > 0$ – произвольная функция, $\dot{\xi}^i \equiv \dfrac{d\xi^i}{d\tau}$, τ – параметр вдоль кривой, параметр эволюции. В каком-то смысле можно считать, что именно по этим экстремалям движутся частицы самого поля $S_W(\xi)$, то есть поля $\kappa(\xi)$. Таким образом, поле $\kappa(\xi)$ и конгруэнция геодезических (16) являются самосогласованными.

В любом финслеровом пространстве не только определена классическая механика неких частиц, но и начальные квантово-механические представления.

Так как ξ^i и p_i являются канонически сопряженными величинами, то обычным образом с заменой функции Гамильтона на функцию Финслера в финслеровом пространстве можно ввести скобки Пуассона, а затем перейти к представлению координат и импульсов в пространстве функций состояния $\Psi(\xi)$ (волновых функций) как эрмитовых операторов (наблюдаемых), заменив скобки Пуассона коммутаторами, но при этом надо учитывать зависимость элемента объема от точки пространства, если таковая имеется. В нашем конкретном случае в координатном представлении

$$p_i \to \hat{p}_i = i\hbar \frac{1}{\kappa^2}\frac{\partial}{\partial \xi^i}\kappa^2 \qquad \Rightarrow \qquad [\hat{p}_i, \xi^j] = i\hbar \delta^i_j\,, \tag{17}$$

так как элемент объема в пространстве $\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4$ [3] имеет вид

$$dV = \kappa^4\, d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3 d\xi^4\,. \tag{18}$$

При таком подходе возникает ряд проблем, связанных с интерпретацией самой волновой функции $\Psi(\xi)$ и величины $\overline{\Psi}(\xi)\Psi(\xi)$, а также с тем, что энергия и время становятся наблюдаемыми. Эти проблемы в данной работе обсуждаться не будут, так как нас будет интересовать только задача на собственные значения.

При переходе от классической механики к квантовой механике тангенциальное уравнение индикатрисы для нерелятивистских частиц переходит в уравнение Шредингера, а для релятивистских частиц – в аналог уравнения Клейна-Гордона; в общем виде с использованием функции Финслера такое уравнение имеет вид

$$\Phi(\hat{p};\xi)\Psi(\xi) = 0\,, \tag{19}$$

где $\Psi(\xi)$ – функция состояния физической системы. Это уравнение является линейным уравнением в частных производных в том смысле, что любая линейная комбинация решений опять же является решением уравнения (19). В нашем конкретном случае пространства, конформно связанного с пространством Минковского, уравнение (19) запишется следующим образом:

$$\frac{\partial^4}{\partial\xi^1\partial x^2\partial\xi^3\partial\xi^4}\kappa^2\,\Psi = \frac{\kappa^6}{4^4\hbar^4}\,\Psi\,. \tag{20}$$

2 Специальные переменные в пространстве Бервальда-Моора

Уравнение (14) является нелинейным дифференциальным уравнением в частных производных второго порядка. Для пространства, конформно связанного с пространством Минковского, аналогичные уравнения поля были решены в работах [3] и [4] в предположении, что Мировая функция зависит только от времени x^0 и радиуса $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, а также при дополнительном требовании на сам вид Мировой функции:

1)

$$S_W = \exp(-\gamma x^0)\psi(r)\,, \tag{21}$$

где γ – постоянная;

2)

$$S_W = p_0 x^0 - \psi(r)\,, \tag{22}$$

где p_0 – постоянная, а $\psi(r)$ – неизвестная функция одной действительной переменной.

В группу симметрии пространства Бервальда-Моора не входит в качестве подгруппы группа трехмерных вращений $SO(3)$, поэтому автоматически перенести подход к решению уравнению поля, используемый в работах [3], [4], нельзя.

Изотропный базис, в котором записаны формулы (1) – (4), (10) – (16) и (20), удобен для расчетов, но для физических приложений следует использовать "ортонормированный" базис (или аналогичный ему), в котором координаты x^0, x^1, x^2, x^3 связаны с координатами $\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4$ в изотропном базисе формулами

$$\left.\begin{aligned} x^0 &= \tfrac{1}{4}\left(\xi^1 + \xi^2 + \xi^3 + \xi^4\right), \\ x^1 &= \tfrac{1}{4}\left(\xi^1 + \xi^2 - \xi^3 - \xi^4\right), \\ x^2 &= \tfrac{1}{4}\left(\xi^1 - \xi^2 + \xi^3 + \xi^4\right), \\ x^3 &= \tfrac{1}{4}\left(\xi^1 - \xi^2 - \xi^3 + \xi^4\right), \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} \xi^1 &= x^0 + x^1 + x^2 + x^3, \\ \xi^2 &= x^0 + x^1 - x^2 - x^3, \\ \xi^3 &= x^0 - x^1 + x^2 + x^3, \\ \xi^4 &= x^0 - x^1 - x^2 + x^3, \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

и в котором принимается, что $x^0 \equiv ct$, где c – скорость света, t – время, а x^1, x^2, x^3 – пространственные координаты. Классический алгоритм ОТО [5] получения пространственного расстояния между двумя близкими и покоящимися относительно друг друга наблюдателями (параллельными прямыми мировыми линиями) для метрики Бервальда-Моора в координатах x^0, x^1, x^2, x^3 (23) дает метрику Богословского-Геннера [6] в пространстве наблюдателей x^1, x^2, x^3 (в "истинном" трехмерном пространстве):

$$dl = |dx^\alpha| + |dx^\beta|\,; \qquad \text{причем} \qquad |dx^\gamma| \le |dx^\alpha|, |dx^\beta|\,; \tag{24}$$

где $\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3;\ \ \alpha \ne \beta,\ \alpha \ne \gamma,\ \beta \ne \gamma$. Уравнение индикатрисы в касательном пространстве такого метрического пространства определяет негладкую гиперповерхность, которая является ромбододекаэдром [7]. Это пространство x^1, x^2, x^3 является финслеровым в некотором расширенном смысле, так как первые производные от метрической функции по dx^α не являются непрерывными, а вторые не везде существуют, что не вписывается в классическое определение финслерова пространства [2].

В связи с этим в пространстве Бервальда-Моора, как и в пространстве, конформно с ним связанном, в качестве аналога радиуса сферической системы координат можно попытаться использовать следующую величину:

$$r_d = |x^\alpha| + |x^\beta|\,; \qquad \text{причем} \qquad |x^\gamma| \le |x^\alpha|, |x^\beta|\,. \tag{25}$$

Здесь приняты те же соглашения: $\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3;\ \ \alpha \ne \beta,\ \alpha \ne \gamma,\ \beta \ne \gamma$. С переменной r_d трудно работать, поэтому проще работать с областями непрерывности – конусами, в каждый из которых попадает одна и только одна грань ромбододекаэдра. Каждому такому конусу удобно сопоставить элемент матрицы 3×4:

$$r_d \equiv \hat{X} \equiv (X_{ab}) \equiv \begin{pmatrix} x^2 + x^3 & -x^2 + x^3 & -x^2 - x^3 & x^2 - x^3 \\ x^1 + x^3 & x^1 - x^3 & -x^1 - x^3 & -x^1 + x^3 \\ x^1 + x^2 & -x^1 + x^2 & -x^1 - x^2 & x^1 - x^2 \end{pmatrix}, \tag{26}$$

$a \equiv \gamma = 1, 2, 3$; а индекс $b = 1, 2, 3, 4$ – нумерует квадранты в плоскости (x^α, x^β) при положительном вращении вокруг оси x^γ, начиная с квадранта $(+,+)$. Нам надо так построить рассуждения и преобразования нужных величин, чтобы работать только с первыми производными переменной r_d (и аналогичным негладким переменным) по x^α до тех пор, пока они не будут выражены только через x^0 и r_d.

Введем обозначения еще для четырех матриц того же типа, что и матрица $\hat{X}$:

$$\hat{E} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{E}_1 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$
$$\hat{E}_2 \equiv \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \hat{E}_3 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{27}$$

Матрицы $\hat{X}$, $\hat{E}$, $\hat{E}_1$, $\hat{E}_2$, $\hat{E}_3$ и им подобные складываются и умножаются на число, как обычные матрицы, а умножение матрицы на матрицу происходит покомпонентно:

$$\hat{X} \cdot \hat{Y} = \hat{Z} \qquad \Rightarrow \qquad Z_{ab} = X_{ab} Y_{a_- b_-}\,, \tag{28}$$

где $a = a_-$, $b = b_-$, но по ним не происходит суммирования.

Выпишем ряд формул, которые нам понадобятся ниже:

$$\hat{E}_1^3 = \hat{E}_1\,, \qquad \hat{E}_2^3 = \hat{E}_2\,, \qquad \hat{E}_3^3 = \hat{E}_3\,, \tag{29}$$

$$\hat{E}_1^2 + \hat{E}_2^2 + \hat{E}_3^2 = 2\hat{E}\,, \qquad \hat{E}_1\hat{E}_2\hat{E}_3 = 0\,, \qquad \left(\hat{E}_1\hat{E}_2\right)^2 + \left(\hat{E}_1\hat{E}_3\right)^2 + \left(\hat{E}_2\hat{E}_3\right)^2 = \hat{E}\,, \tag{30}$$

$$\hat{E} \cdot \frac{\partial F(r_d)}{\partial x^1} = \hat{E}_1 \cdot \frac{dF}{dr_d}\,, \qquad \hat{E} \cdot \frac{\partial F(r_d)}{\partial x^2} = \hat{E}_2 \cdot \frac{dF}{dr_d}\,, \qquad \hat{E} \cdot \frac{\partial F(r_d)}{\partial x^3} = \hat{E}_3 \cdot \frac{dF}{dr_d}\,. \tag{31}$$

В каждом конусе, в котором содержится одна и только одна из граней ромбододекаэдра, вместо координат x^1, x^2, x^3 можно ввести три новые координаты r_d, ϑ, φ, причем r_d – это одна и та же переменная для всех конусов (25), (26), а углы ϑ, φ для каждого конуса свои, например, для $\gamma = 1$, $\alpha = 2$, $\beta = 3$ и квадранта $(+,+)$ плоскости (x^α, x^β):

$$\left.\begin{aligned} x^1 &= r_d \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\varphi \cdot \operatorname{tg}\vartheta\,, \\ x^2 &= r_d \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\varphi \cdot \operatorname{tg}\vartheta\right), \\ x^2 &= r_d \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\varphi \cdot \operatorname{tg}\vartheta\right), \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

причем область изменения углов ϑ и φ ограничена неравенствами:

$$0 \le \operatorname{tg}\vartheta \le \frac{1}{\sqrt{2}}\,, \qquad \frac{1}{\sqrt{2}}|\cos\varphi| \cdot \operatorname{tg}\vartheta \le \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\varphi \cdot \operatorname{tg}\vartheta\,,\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\varphi \cdot \operatorname{tg}\vartheta\,. \tag{33}$$

Вычисляя якобиан такого преобразования координат

$$\frac{D(x^1, x^2, x^3)}{D(r_d,\ \varphi,\ \vartheta)} = -\frac{r_d^2}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\sin\vartheta}{\cos^3\vartheta}\,, \tag{34}$$

получим

$$dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 = \left|\frac{D(x^1, x^2, x^3)}{D(r_d,\ \varphi,\ \vartheta)}\right| dx^0 dr_d d\vartheta d\varphi = \frac{r_d^2}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\sin\vartheta}{\cos^3\vartheta} \cdot dx^0 dr_d d\vartheta d\varphi\,. \tag{35}$$

Перепишем лагранжиан (13), опуская постоянный множитель, в координатах x^0, x^1, x^2, x^3 (23):

$$\mathfrak{L} = \left(\frac{\partial \mathbf{S_W}}{\partial \mathbf{x^0}}\right)^{\mathbf{4}} - 2\left(\frac{\partial \mathbf{S_W}}{\partial \mathbf{x^0}}\right)^{\mathbf{2}} \left[\left(\frac{\partial S_W}{\partial x^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial S_W}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial S_W}{\partial x^3}\right)^2\right] +$$

$$+8\left(\frac{\partial \mathbf{S_W}}{\partial \mathbf{x^0}}\right)\left(\frac{\partial S_W}{\partial x^1}\right)\left(\frac{\partial S_W}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial S_W}{\partial x^3}\right) + \left(\frac{\partial S_W}{\partial x^1}\right)^4 + \left(\frac{\partial S_W}{\partial x^2}\right)^4 + \left(\frac{\partial S_W}{\partial x^3}\right)^4 - \quad (36)$$

$$-2\left[\left(\frac{\partial S_W}{\partial x^1}\right)^2\left(\frac{\partial S_W}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial S_W}{\partial x^1}\right)^2\left(\frac{\partial S_W}{\partial x^3}\right)^2 + \left(\frac{\partial S_W}{\partial x^2}\right)^2\left(\frac{\partial S_W}{\partial x^3}\right)^2\right].$$

Будем считать, что Мировая функция зависит только от переменных x^0, r_d, то есть $S_W = S_W(x^0, r_d)$. Подставим в формулу (36) производные (31) и воспользуемся свойствами (29) – (30) матриц $\hat{E}_1, \hat{E}_2, \hat{E}_3$, получим

$$\mathfrak{L} = \left(\frac{\partial S_W}{\partial x^0}\right)^4 - 4\left(\frac{\partial S_W}{\partial x^0}\right)^2\left(\frac{\partial S_W}{\partial r_d}\right)^2. \quad (37)$$

Тогда, учитывая формулу (35), приходим к выражению для элемента объема

$$dV = \left[\left(\frac{\partial S_W}{\partial x^0}\right)^4 - 4\left(\frac{\partial S_W}{\partial x^0}\right)^2\left(\frac{\partial S_W}{\partial r_d}\right)^2\right] \cdot \frac{r_d^2}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\sin\vartheta}{\cos^3\vartheta} \cdot dx^0 dr_d d\vartheta d\varphi\,. \quad (38)$$

Интегрируя левую и правую часть этого выражения по углам ϑ, φ в пределах конуса, содержащего одну и только одну грань ромбододекаэдра, и суммируя по всем двенадцати конусам, получим элемент объема в двумерном пространстве x^0, r_d:

$$dV_{r_d} = const \cdot \left[\left(\frac{\partial S_W}{\partial x^0}\right)^4 - 4\left(\frac{\partial S_W}{\partial x^0}\right)^2\left(\frac{\partial S_W}{\partial r_d}\right)^2\right] \cdot r_d^2 \cdot dx^0 dr_d\,. \quad (39)$$

Теперь мы можем записать уравнение поля для Мировой функции $S_W = S_W(x^0, r_d)$ в двумерном пространстве x^0, r_d:

$$\frac{\partial}{\partial x^0}\left\{\left[\left(\frac{\partial S_W}{\partial x^0}\right)^3 - 2\left(\frac{\partial S_W}{\partial x^0}\right)\left(\frac{\partial S_W}{\partial r_d}\right)^2\right] r_d^2\right\} - \frac{\partial}{\partial r_d}\left\{2\left(\frac{\partial S_W}{\partial x^0}\right)^2\left(\frac{\partial S_W}{\partial r_d}\right) r_d^2\right\} = 0. \quad (40)$$

Зная решение этого уравнения, получим выражение для коэффициента расширения-сжатия (15):

$$\kappa(x^0, r_d) = \sqrt[4]{\left(\frac{\partial S_W}{\partial x^0}\right)^4 - 4\left(\frac{\partial S_W}{\partial x^0}\right)^2\left(\frac{\partial S_W}{\partial r_d}\right)^2}\,. \quad (41)$$

Если ввести обобщенные импульсы p_0, p_{r_d}, соответствующие координатам x^0, r_d двумерного пространства, то тангенциальное уравнение индикатрисы (4) согласно формуле (41) следует записать в виде:

$$p_0^4 - 4p_0^2 p_{r_d}^2 = \kappa^4(x^0, r_d)\,. \quad (42)$$

3 Модельное космологическое решение с индикатрисой, расширяющейся во времени

Запишем уравнение (40) в предположении, что функция S_W имеет вид

$$S_W(x^0, r_d) = S_0 e^{-\gamma x^0} \psi(r)\,, \tag{43}$$

где γ и S_0 – постоянные. Подставляя функцию $S(x^0, r)$ (43) в уравнение (40), получим

$$3r_d^2 \left[\gamma^2\psi^3 - 2\psi\left(\frac{d\psi}{dr_d}\right)^2\right] - 2\frac{d}{dr_d}\left[r_d^2\psi^2\frac{d\psi}{dr_d}\right] = 0\,. \tag{44}$$

Введем безразмерную переменную $\xi \equiv \gamma r$, тогда данное уравнение перепишется следующим образом:

$$3\xi^2\psi\left[\psi^2 - 2\left(\frac{d\psi}{d\xi}\right)^2\right] - 2\frac{d}{d\xi}\left[\xi^2\psi^2\frac{d\psi}{d\xi}\right] = 0\,. \tag{45}$$

Так как это уравнение однородно по искомой функции, то будем ее искать в виде

$$\psi(\xi) = \psi_0 \exp\left(\int\limits_0^\xi \varphi(\xi) d\xi\right)\,, \tag{46}$$

ψ_0 – постоянная, которая при составлении функции S_W перемножается с постоянной S_0, поэтому положим ее равной единице, $\psi_0 = 1$. Для искомой функции $\varphi(\xi)$ получаем уравнение Риккати

$$\xi\frac{d\varphi}{d\xi} + 2\varphi + 6\,\xi\varphi^2 - \frac{3}{2}\,\xi = 0\,. \tag{47}$$

Выберем решение, которое не имеет особенности в точке $\xi = 0$:

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{2}\left[\operatorname{cth}(3\xi) - \frac{1}{3\xi}\right]\,. \tag{48}$$

При $\xi \ll 1$

$$\varphi(\xi) \simeq \frac{1}{2}\xi - \frac{3}{10}\xi^3 + \mathcal{O}\left(\xi^5\right)\,, \tag{49}$$

а при $\xi \to \infty$

$$\varphi(\xi) \to \frac{1}{2}\,. \tag{50}$$

Коэффициент растяжения-сжатия вычисляется по формуле

$$\kappa = \gamma\sqrt[4]{1 - 4\varphi^2(\xi)} \cdot S_W\,. \tag{51}$$

Найдем закон движения материальных объектов, формирующих рассматриваемое поле:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx^0}{d\tau} &= 4\left[\left(\frac{\partial S_W}{\partial x^0}\right)^3 - 2\left(\frac{\partial S_W}{\partial x^0}\right)\left(\frac{\partial S_W}{\partial r_d}\right)^2\right]\lambda(x^0, r_d)\,, \\ \frac{dr_d}{d\tau} &= -8\left(\frac{\partial S_W}{\partial x^0}\right)^2\left(\frac{\partial S_W}{\partial r_d}\right)\lambda(x^0, r_d)\,, \end{aligned}\right\} \tag{52}$$

или

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx^0}{d\tau} &= -4\gamma\left[\gamma^2 - 2\left(\frac{\partial\psi}{\partial r_d}\right)^2\right] S_W^3 \lambda(x^0, r_d)\,, \\ \frac{dr_d}{d\tau} &= -8\gamma^2\left(\frac{\partial\psi}{\partial r_d}\right) S_W^3 \lambda(x^0, r_d)\,, \end{aligned}\right\}$$

или

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx^0}{d\tau} &= -4\gamma^3\left[1 - 2\varphi^2(\xi)\right] S_W^3 \lambda(x^0, r_d)\,, \\ \frac{dr_d}{d\tau} &= -8\gamma^3\varphi(\xi) S_W^3 \lambda(x^0, r_d)\,, \end{aligned}\right\} \tag{53}$$

тогда

$$\frac{dr_d}{dx^0} = \frac{2\varphi(\xi)}{1 - 2\varphi^2(\xi)}\,. \tag{54}$$

Запишем последнюю формулу для $\xi \ll 1$:

$$\frac{dr_d}{dt} = H_0\left[1 - \frac{1}{10}\left(\frac{H_0}{c}\right)^2 r_d^2\right] \cdot r_d\,, \qquad H_0 \equiv \gamma c\,. \tag{55}$$

Таким образом, при достаточно малых расстояниях до космологических объектов $r_d \ll \dfrac{c}{H_0}$ выполняется закон Хаббла с постоянной Хаббла $H_0 \equiv \gamma c$, а при увеличении расстояния коэффициент, определяющий скорость удаления объекта уменьшаемся, причем уменьшается медленнее, чем для пространства, конформно связанного с пространством Минковского [3]. В силу этого изучение поведения "постоянной" Хаббла на расстояниях сравнимых с размерами Вселенной может ответить на вопрос: каким метрическим пространством является наше четырехмерное пространство-время на мегарасстояниях.

Выясним, каким образом в данной модели размеры Вселенной связаны с постоянной Хаббла $H_0 \equiv \gamma c$. При $\xi \to \infty$

$$\frac{dr_d}{dt} \to 2c\,. \tag{56}$$

Естественно связать радиус Вселенной $(r_d)_W$ с расстоянием, где производная $\dfrac{dr_d}{dt}$ достигает c (скорости света). Тогда

$$(r_d)_W \simeq 1,23854 \cdot \frac{c}{H_0}\,. \tag{57}$$

4 Стационарное поле коэффициента растяжения-сжатия

Стационарное пространственно "ромбододекаэдрно симметричное" поле $\kappa(x)$ можно получить, если искать решение уравнения (40) в виде

$$S_W = p_0 x^0 - \psi(r_d)\,, \tag{58}$$

где $p_0 > 0$ – постоянная. Тогда для неизвестной функции ψ получим уравнение

$$\frac{d}{dr_d}\left(r^2 \frac{d\psi}{dr_d}\right) = 0\,. \tag{59}$$

Интегрирование по r_d приводит к соотношению

$$\frac{d\psi}{dr_d} = \frac{C}{r_d^2}\,, \tag{60}$$

C – постоянная интегрирования. Тогда

$$\kappa(r_d) = p_0\sqrt[4]{1-\frac{4C^2}{p_0^2 r_d^4}}\,. \tag{61}$$

Для того, чтобы подкоренное выражение было строго больше нуля, необходимо выполнение условия

$$\frac{4C^2}{p_0^2 r_d^4} < 1 \qquad \Rightarrow \qquad r_d > \sqrt{\frac{2|C|}{p_0}}\,. \tag{62}$$

Таким образом, поля $\kappa(r_d)$ и $S_W(x^0, r_d)$ существуют не во всей области изменения переменной $0 \le r_d < \infty$, внутри некой области при достаточно малых r_d поля отсутствуют – аналог "черной дыры".

Движение материальных объектов рассматриваемого поля определяется уравнениями

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx^0}{d\tau} &= 4p_0^3\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{2C}{p_0 r_d^2}\right)^2\right]\cdot\lambda(x^0, r_d)\,, \\ \frac{dr_d}{d\tau} &= -4p_0^3\left(\frac{2C}{p_0 r_d}\right)\cdot\lambda(x^0, r_d)\,, \end{aligned}\right\} \tag{63}$$

или

$$\frac{dr_d}{dx^0} = -\frac{\left(\dfrac{2C}{p_0 r_d}\right)}{1-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2C}{p_0 r_d^2}\right)^2}\,. \tag{64}$$

Из последней формулы следует, что поле $\kappa(r_d)$ будет соответствовать полю притяжения, если $C > 0$, и что при $r_d = \sqrt{\frac{2|C|}{p_0}}$ величина скорости достигает $2c$, поэтому размеры "дыры" будут больше, чем диктуют неравенства (62). Потребовав, чтобы правая часть соотношения (64) по модулю была строго больше единицы, получим

$$\frac{4C^2}{p_0^2 r_d^4} < \sqrt{3}-1 \qquad \Rightarrow \qquad r_d > \sqrt{\frac{2|C|}{p_0\sqrt{\sqrt{3}-1}}} \equiv (r_d)_0 \tag{65}$$

где $(r_d)_0$ – радиус "дыры".

Итак, материальные частицы в самосогласованном поле притяжения $\kappa(r_d)$ движутся по лучам, исходящим из цента координат; при $r_d \to \infty$ их скорость равна нулю, затем при приближении к началу координат их скорость по величине увеличивается и достигает скорости света на границе "дыры" $r_d = (r_d)_0$, внутри которой поле отсутствует. При этом коэффициент растяжения сжатия меняется в пределах:

$$p_0\sqrt[4]{2\sqrt{3}-3} \quad < \quad \kappa(r_d) \quad < \quad p_0\,. \tag{66}$$

5 Постановка задачи на собственные значения

Запишем уравнение (42) в операторной форме в координатном представлении, приняв

$$\hat{p}_0 = i\hbar \frac{1}{r_d\kappa^2} \frac{\partial}{\partial x^0}\, r_d\kappa^2\,, \qquad \hat{p}_{r_d} = i\hbar \frac{1}{r_d\kappa^2} \frac{\partial}{\partial r_d}\, r_d\kappa^2\,, \tag{67}$$

получим

$$\hbar^4 \left[\frac{\partial^4}{(\partial x^0)^4} - 4\frac{\partial^2}{(\partial x^0)^2}\frac{\partial^2}{(\partial r_d)^2} \right] r_d\kappa^2 \Psi(x^0, r_d) = r_d\kappa^6 \Psi(x^0, r_d)\,. \tag{68}$$

Здесь $\Psi(x^0, r_d)$ – функция состояния физической системы (волновая функция). Приняв, что поле $\kappa(r_d)$ задается выражением (61), волновую функцию будем искать в виде:

$$\Psi = \frac{1}{r_d\kappa^2} \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\frac{E}{c}\, x^0 \right) y(r_d)\,. \tag{69}$$

Подставим (69) в уравнение (68), получим

$$4\left(\frac{E}{\hbar c}\right)^2 \frac{d^2 y}{dr_d^2} + \left[\left(\frac{E}{\hbar c}\right)^4 - \frac{p_0^4}{\hbar^4} + \frac{p_0^4}{\hbar^4}\left(\frac{(r_d)_0}{r_d}\right)^4 \right] y = 0\,. \tag{70}$$

Перейдем к новой переменной – безразмерному "радиусу" $\varrho \equiv \dfrac{r_d}{(r_d)_0}$ и введем обозначения для трех безразмерных величин:

$$\mathcal{E} \equiv \mu_0 \frac{\left(\dfrac{E}{p_0 c}\right)^4 - 1}{4\left(\dfrac{E}{p_0 c}\right)^2}\,, \qquad \mu \equiv \frac{\mu_0}{4\left(\dfrac{E}{p_0 c}\right)^2} \qquad \mu_0 \equiv \left(\frac{p_0 r_d}{\hbar}\right)^2\,. \tag{71}$$

Тогда

$$\frac{d^2 y}{d\varrho^2} + \left\{ \mathcal{E} + \mu\frac{1}{\varrho^4} \right\} y = 0\,. \tag{72}$$

Это уравнение по форме совпадает с одномерным уравнением Шредингера нерелятивистской частицы, находящейся в поле притяжения с потенциалом, который (с точностью до постоянного множителя) равен

$$U = -\frac{\mu}{\varrho^4}\,. \tag{73}$$

Так как при $\varrho < 1$ никакого поля нет, что в каком-то смысле соответствует бесконечно глубокой потенциальной яме, то для всех волновых функций необходимо выполнение граничного условия

$$y(1) = 0\,. \tag{74}$$

Таким образом, можно ожидать (это следует из общей теории) конечного числа (или ни одного) локализованных (связанных) состояний, которые обязательно должны иметь дискретный спектр отрицательных значений параметра $\mathcal{E}$.

Из уравнения (72) для $\mathcal{E} < 0$ следует, что при $\varrho \to \infty$ функция $y(\varrho)$ связанного состояния ведет себя следующим образом:

$$y = const' \cdot \rho^{const} \exp\left(-\sqrt{-\mathcal{E}}\, \varrho \right)\,, \tag{75}$$

то есть стремится экспоненциально к нулю при $\varrho \to \infty$.

Предположим, что задача на собственные значения (72), (74), (75) решена и найден спектр собственных значений:

$$\mathcal{E} = -\sigma_0^2,\ -\sigma_1^2,\ \ldots\ -\sigma_{k-1}^2\,, \qquad \sigma_i \in \{\sigma_0,\ \sigma_1,\ \ldots\ \sigma_{k-1}\}\,. \tag{76}$$

Тогда из формул (71) получим значения величины

$$\frac{E}{cp_0} = \sqrt{\sqrt{\left(\frac{2\sigma_i^2}{\mu}\right)^2 + 1} - \frac{2\sigma_i^2}{\mu}}\,. \tag{77}$$

В общем случае аналитическое решение уравнения (72) нам неизвестно, но при $\mathcal{E} = 0$ такое аналитическое решение существует

$$y = C_0\,\rho\,\sin\left(\frac{\sqrt{\mu_0}}{\varrho} + \varphi_0\right)\,, \tag{78}$$

где C_0, φ_0 – постоянные интегрирования. Это решение не является локальным ни при каких значениях параметров, но если все же формально потребовать выполнение граничных условий

$$\left.\frac{y(\varrho)}{\varrho}\right|_{\varrho=1} = 0\,, \qquad \left.\frac{y(\varrho)}{\varrho}\right|_{\varrho\to+\infty} = 0\,, \tag{79}$$

то получим

$$\varphi_0 = 0\,, \qquad \mu_0 = 4\pi^2 m^2\,; \qquad m = 1, 2, 3, \ldots \tag{80}$$

Нам не удалось точно решить задачу на собственные значения, и поэтому пришлось применять приближенный метод.

6 Квазиклассическое приближение

Так как формально уравнение (72) совпадает с одномерным уравнением Шредингера для волновой функции нерелятивистской частицы, находящейся в потенциальной яме, то для решения задачи (72), (74), (75) на собственные значения может быть применен квазиклассический подход, хотя бы для качественного описания ожидаемых точных собственных значений.

С учетом того, что точка $\varrho = 1$ не является точкой поворота, правило квантования Бора для рассматриваемой задачи, можно записать [4] следующим образом:

$$\int\limits_1^{\varrho_*} \sqrt{\mathcal{E} + \mu\frac{1}{\varrho^4}}\ d\varrho = \pi\left(n + \frac{3}{4}\right)\,, \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots \tag{81}$$

Разделим левую и правую части на $\sqrt{\mu}$, введем обозначение

$$-\frac{\mathcal{E}}{\mu} \equiv \lambda^2 \tag{82}$$

и перепишем формулу (81)

$$\int\limits_1^{\varrho_*} \sqrt{-\lambda^2 + \frac{1}{\varrho^4}}\ d\varrho = \frac{2\pi\sqrt[4]{1-\lambda^2}}{\sqrt{\mu_0}}\left(n + \frac{3}{4}\right)\,, \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots\,, \tag{83}$$

где

$$\varrho_* = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\,, \qquad 1 < \varrho_* < +\infty \qquad \Rightarrow \qquad \lambda < 1\,. \tag{84}$$

Безразмерные энергии связанных состояний будут выражаться через собственные значения $\lambda_i \in \{\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_{k-1}\}$ следующим образом:

$$\frac{E_i}{cp_0} = \sqrt[4]{1-\lambda_i^2}\,. \tag{85}$$

С учетом (80) и (84) перепишем формулу (83)

$$\int\limits_1^{\frac{1}{\sqrt{\lambda}}} \sqrt{-\lambda^2 + \frac{1}{\varrho^4}}\; d\varrho = \sqrt[4]{1-\lambda^2}\;\frac{n+\frac{3}{4}}{m}\,, \qquad n = 0,1,2,3,...\,, \quad m = 1,2,3,... \tag{86}$$

При $m = 1$ существует только одно локализованное состояние $n = 0$, численный расчет дает

$$\lambda_0 \simeq 0,043875\,, \qquad \frac{E_0}{cp_0} \simeq 0,999518\,. \tag{87}$$

При $m = 2$ существует два локализованных состояния $n = 0$ и $n = 1$, при этом численный расчет дает

$$\left.\begin{array}{ll} \lambda_0 \simeq 0,292175\,, & \dfrac{E_0}{cp_0} \simeq 0,977939\,, \\ \lambda_1 \simeq 0,0108925\,, & \dfrac{E_1}{cp_0} \simeq 0,9999703\,, \end{array}\right\} \quad \frac{E_0}{E_1} \simeq 0,977968\,. \tag{88}$$

7 Заключение

В данной работе в четырехмерном анизотропном пространстве событий предложено использовать негладкие переменные, связанные с метрикой в "истинном" трехмерном пространстве мировых линий (наблюдателей). В рамках такого подхода получены два решения уравнения поля для пространства, конформно связанного с четырехмерным пространством Бервальда-Моора, то есть пространства поличисел H_4. Первое решение с расширяющейся во времени индикатрисой, рассматриваемое как космологическое, приводит к выполнению закона Хаббла для расстояний r_d много меньше размеров Вселенной и уменьшению переменной Хаббла при бóльших расстояниях. Причем это уменьшение более медленное, чем полученное в работе [3] в пространстве, конформно связанном с пространством Минковского, если, конечно, при этом отождествлять r_d с евклидовым расстоянием. Такое отождествление r_d с евклидовым расстоянием приводит и к другому эффекту: зависимости коэффициента Хаббла от пространственных направлений. В силу этого изучение поведения коэффициента Хаббла при расстояниях, сравнимых с размерами Вселенной, может привести к ответу на вопрос: каким метрическим пространством является четырехмерное пространство-время на мегамасштабах. Второе решение с полем коэффициента расширения-сжатия, не зависящим от времени, приводит к потенциальному полю притяжения с потенциалом, убывающим как $\dfrac{1}{r_d^4}$, где r_d – в пространстве Бервальда-Моора является аналогом радиуса сферической системы координат в трехмерном евклидовом пространстве, причем при $r_d < r_0$ поле отсутствует – аналог "черной дыры" ОТО. На границе "дыры" $(r_d = r_0)$ скорость материальных объектов, формирующих данное поле, равна скорости света. Для такого стационарного поля сформулирована квантово-механическая задача и в квазиклассическом приближении численно найдены три "первых" значения относительной энергии связанных (локализованных) состояний.

В ближайшее время мы надеемся применить теорию поля [3] и методы, предложенные в настоящей работе, к пространству, конформно связанному с пространством поличисел H_3, которое является трехмерным метрическим финслеровым пространством, с метрикой Бервальда-Моора.

Литература

[1] Павлов Д. Г., Обобщение аксиом скалярного произведения, Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 1 (1), т. 1 (2004), стр. 5 – 19; Четырехмерное время, Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 1 (1), т. 1 (2004), стр. 33 – 42.

[2] Рашевский П. К., Геометрическая теория уравнений с частными производными, М.-Л.: ОГИЗ, 1947.

[3] Гарасько Г. И., Теория поля и финслеровы пространства. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 2 (6), т. 3 (2006), стр. 6 – 20.

[4] Гарасько Г. И., Частное стационарное решение уравнения поля для пространства, конформно связанного с пространством Минковского. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 1 (7), т. 4 (2006).

[5] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Теория поля. М., "Наука", 1967.

[6] G. Yu Bogoslovsky, H. F. Goenner, On the possibility of phase transitions in the geometric structure of space-time, Phys. Lett. A 244 (1998) 222 – 228.

[7] G. Yu Bogoslovsky, H. F. Goenner, Finslerian spaces possessing local relativistic symmetry, Gen. Relativ. Gravit. 31 (1999) 1565 – 1603.